F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

1
ANUL IX
1958

STUDII ŞI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ȘI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

A DUPLUMCSERE-AKCIÓ
KERETEBEN ÁTENGEDTE
A MTA; KÖZP. KÖNYVTÁRA

1

ANUL IX

1958

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

1989

F
2557

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil :

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. PROFIRI ;
A. BELEȘ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
C. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
R. BOGDAN, conferențiar la Institutul de petrol și gaze, București ;
N. TIPEI, conferențiar la Institutul politehnic, București ;
M. ARCAN, conferențiar la Institutul de construcții, București.

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratleltár 5060

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ȘI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul IX, nr. 1 1959

SUMAR

STUDII ȘI CERCETĂRI

AEROMECANICĂ

Pag.

N. N. PATRAULEA, L. DUMITRESCU și D. CĂPRIȚĂ, Caracteristicile aerodinamice ale profilelor cu volet fluid 13
LUCIAN DUMITRESCU, Profile aerodinamice cu jet în prezența solului 43
N. N. PATRAULEA, Asupra deflectării unei vîne libere de curent 51
AL. MARINESCU, Stabilitatea dinamică, în zbor orizontal a elicopterelor avînd rotoare cu pale prinse elastic de butuc 63

HIDRODINAMICĂ

T. OROVEANU, Soluții particulare ale ecuației scurgerii prin medii poroase neomogene 83
M. KAHAN și S. HÎNCU, Dinamica mișcării aluviunilor în scurgerile sub presiune 89

UNGERE—FRECARE—UZURĂ

V. N. CONSTANTINESCU, Influența turbulenței asupra mișcării în stratul de lubrifiant 103
V. N. CONSTANTINESCU, Studiul lubrificației bidimensionale în regim turbulent 139
GH. VASILCA și AL. NICA, Asupra regimului termic optim de funcționare al unui material antifricțiune la lagărele circulare cu alunecare 163
L. ROZEANU și O. PREOȚESCU, Cîteva aspecte fundamentale ale proceselor de uzură 169

TEHNICA MĂSURĂTORILOR

DAN PAVELESCU și TH. PANTELIMON, Canal „fix" pentru înregistrare-redare pe suport magnetic a fenomenelor cu variații lente 187

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE

Pag.

A. PETRE şi L. LIBRESCU, O teorie a structurilor subţiri ortotrope nesimetrice faţă de suprafaţa mediană 201

TRATAMENTE MECANICE ŞI PRELUCRAREA MEDIILOR DEFORMABILE CONTINUE

I. MITRICĂ, Asupra unui criteriu pentru determinarea zonei de presiune specifică maximă la laminarea metalelor 215

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

GH. VASILCA şi AL. NICA, Asupra preciziei de măsurare a momentului de frecare la lagărele circulare, cu ajutorul sistemelor mecanice tip paralelogram 229

R. J. BALLY, Deformaţiile pămînturilor argiloase. (Introducere în problemă) . 239

RECENZII 251

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

REVISTA «STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ»

cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviaţie, mecanica fluidelor, ventilaţie, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacţie, construcţii de avioane, utilizarea energiei eoliene).

— Construcţii de maşini (rezistenţa materialelor, cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul ale diferitelor maşini, automatizare, studiul suprafeţelor, tratamente mecanice şi prelucrarea mediilor solide continue).

— Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

— Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de executarea lucrărilor de construcţii).

— Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 de pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE « TRAIAN VUIA »

ÉTUDES ET RECHERCHES
DE
MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome IX, n° 1 1958

SOMMAIRE

ÉTUDES ET RECHERCHES

AÉROMÉCANIQUE

Page

N. N. PATRAULEA, L. DUMITRESCU et D. CĂPRIȚĂ, Les caractéristiques aérodynamiques des profils à volet fluide 13

LUCIAN DUMITRESCU, Profils aérodynamiques à jet en présence du sol . . . 43

N. N. PATRAULEA, Sur la déflexion d'une veine libre fluide 51

AL. MARINESCU, Stabilité dynamique, dans le vol horizontal, des hélicoptères ayant des rotors à pales cantilever 63

HYDRODYNAMIQUE

T. OROVEANU, Solutions particulières de l'équation de l'écoulement à travers les milieux poreux non homogènes 83

M. KAHAN et S. HÎNCU, Dynamique du mouvement des alluvions dans les écoulements sous pression 89

LUBRIFICATION—FROTTEMENT—USURE

V. N. CONSTANTINESCU, L'influence de la turbulence sur le mouvement dans la couche de lubrifiant 103

V. N. CONSTANTINESCU, Etude de la lubrification bidimensionnelle en régime turbulent 139

GH. VASILCA et AL. NICA, Sur le meilleur régime thermique de fonctionnement d'un matériel antifriction, dans les paliers lisses circulaires . . . 163

L. ROZEANU et O. PREOȚESCU, Some Basic Aspects of Wear Processes . . 169

TECHNIQUE DES MESURES

DAN PAVELESCU et TH. PANTELIMON, Canal « fixe » pour enregistrement-reproduction, sur support magnétique, des phénomènes à variations lentes 187

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX—ÉLASTICITÉ

Page

A. PETRE et L. LIBRESCU, Une théorie des structures minces orthotropes, asymétriques par rapport à la surface médiane 201

TRAITEMENTS MÉCANIQUES ET TRAVAIL DES MILIEUX DÉFORMABLES CONTINUS

I. MITRICĂ, Un critère pour déterminer la zone de pression spécifique maximum au laminage des métaux 215

EXPOSÉS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

GH. VASILCA et AL. NICA, Sur la précision de mesure du moment de frottement dans les paliers circulaires, à l'aide des systèmes mécaniques, type parallélogramme 229

R. J. BALLY, Les déformations des sols argileux 239

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 251

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

LA REVUE «ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE»

comprend des études de mécanique appliquée, notamment :

— Mécanique générale (élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques).

— Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction, construction des avions, utilisation de l'énergie éolienne).

— Constructions mécaniques (résistance des matériaux, cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des différentes machines, automatisation, étude des surfaces, traitements mécaniques et travail des milieux solides continus).

— Technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radio-actifs en technique).

— Statique et dynamique des constructions (méthodes pour le calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction).

— Hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés dactilographiés en trois exemplaires, les formules seront écrites à l'encre et d'une manière lisible. Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliographiques seront mentionnées spécialement à la fin de l'article. Elles doivent être aussi complètes que possible, comprenant, par exemple pour les périodiques, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers pourront être rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 15, rue Constantin Mille.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ «ТРАЯН ВУЯ»

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО
ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том IX, № 1 1958

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ И ИССЛЕДОВАНИЯ

АЭРОМЕХАНИКА

Стр.

Н. Н. ПАТРАУЛЯ, Л. ДУМИТРЕСКУ и Д. КЭПРИЦЭ, Аэродинамические характеристики профилей с жидким закрылком . . 13

ЛУЧИАН ДУМИТРЕСКУ, Аэродинамические профили с струей при наличии земной поверхности 43

Н. Н. ПАРТРАУЛЯ, К вопросу о скосе свободной струи жидкости . 51

А. МАРИНЕСКУ, Динамическая устойчивость при горизонтальном полете вертолетов с несущими винтами типа Кантилевера . . 63

ГИДРОДИНАМИКА

Т. ОРОВЯНУ, Частные решения уравнения течения через неоднородную пористую среду 83

М. КАХАН и С. ХЫНКУ, Динамика движения наносов в напорных течениях 89

СМАЗКА—ТРЕНИЕ—ИЗНОС

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Влияние турбулентности на движение в слое смазки 103

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Исследование двухмерной смазки при турбулентном режиме 139

Г. ВАСИЛКА и А. НИКА, К вопросу об оптимальном тепловом режиме работы антифрикционного материала у круглых подшипников скольжения 163

Л. РОЗЯНУ и О. ПРЕОТЕСКУ, Некоторые основные стороны вопроса процессов износа 169

ТЕХНИКА ИЗМЕРЕНИЙ

ДАН ПАВЕЛЕСКУ и Т. ПАНТЕЛИМОН, Электронный канал для записи и воспроизведения на магнитном носителе явлений с медленными изменениями 187

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — УПРУГОСТЬ

Стр.

А. ПЕТРЕ и Л. ЛИБРЕСКУ, Теория тонких ортотропных несимметричных относительно срединной поверхности конструкций . . . 201

МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА И ОБРАБОТКА СПЛОШНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

И. МИТРИКЭ, К вопросу о критерии для определения зоны максимального удельного давления при прокатке металлов . . . 215

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

Г. ВАСИЛКА и А. НИКА, К вопросу о точности измерения момента трения у круглых подшипников при помощи механических систем параллелограммного типа 229

Р. Ж. БАЛЛИ, Деформации глинистых грунтов. Постановка вопроса 239

РЕЦЕНЗИИ 251

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ЖУРНАЛ «ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ»

содержит нижеследующие разделы прикладной механики:

— Общую механику (упругость, пластичность, вибрации и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).

— Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, реактивные двигатели самолетостроение, использование энергии ветра).

— Машиностроение (сопротивление материалов, кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механические обработки и обработка сплошных тел.

— Технику измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

— Статику и динамику сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, геомеханика, геотехника, устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).

— Гидромеханику (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ, и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных и зарубежных специалистов.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным данным проблемы.

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, номер тома, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указывать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском и, если возможно, на русском и французском языках. Резюме должно в среднем, составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к сотрудническим работам зарубежных авторов, редактированным на русском, французском, английском и немецком языках.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики Академии РНР, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

AEROMECANICĂ

CARACTERISTICILE AERODINAMICE ALE PROFILELOR CU VOLET FLUID

DE

N. N. PATRAULEA, L. DUMITRESCU și D. CĂPRIȚĂ

INTRODUCERE

În această lucrare ne propunem să determinăm prin calcul caracteristicile aerodinamice ale profilelor cu volet fluid (Jet-Flap) [1], [8].

Calculele se bazează pe soluția matematică simplă dată de N. N. Patraulea [7]. Metoda folosită are avantajul că permite tratarea fără dificultăți a diverse forme de profil.

S-au calculat astfel coeficienții de portanță și moment aerodinamic pentru profilul rectiliniu și pentru profilul rectiliniu cu volet rectiliniu de curbură (profil frînt).

Atît metoda cît și calculele numerice prezentate își găsesc aplicație și la alte probleme în afară de cele tratate în lucrarea de față; ele pot servi, de pildă, la studiul aripilor de anvergură finită [9] sau la profile cu efect combinat [10]. Această ultimă lucrare [10] este în legătură cu un gen de suflaj preconizat anterior de N. N. Patraulea [11], [12] (jerbe multiple de ejecție pe extrados) și experimentat în [13], împreună cu L. Dumitrescu și colaboratorii citați.

I. DETERMINAREA SCURGERII ÎN JURUL PROFILELOR CU VOLET FLUID

1. ECUAȚIILE PROBLEMEI. CONDIȚII DE LIMITE

Fie un profil prevăzut cu un jet de bord de fugă, lansat sub un unghi τ față de panta profilului la bordul de fugă (fig. 1 *a*).

Intensitatea suflajului este definită de coeficientul

$$K_j = \frac{I}{\frac{\rho}{2} c V_\infty^2}, \tag{1}$$

unde I este debitul de impuls al jetului.

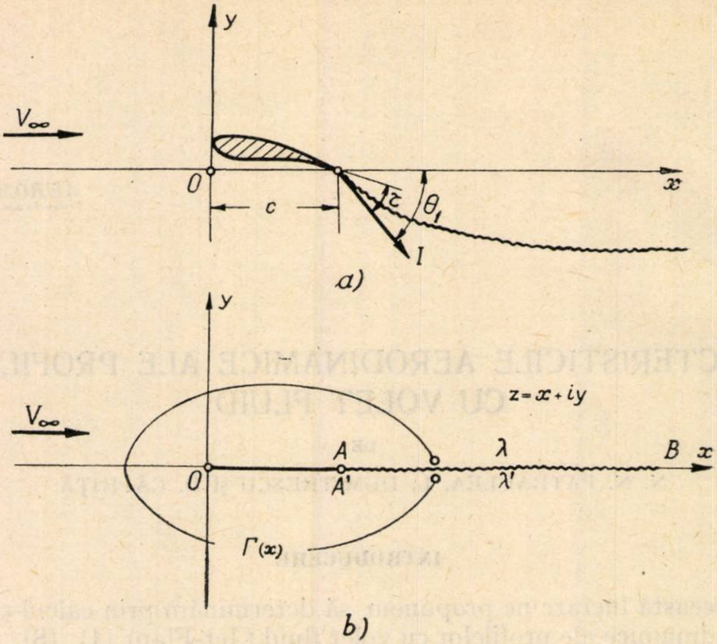

y
V_∞
0
x
c
τ
θ_1
I
a)
y
z = x + iy
V_∞
A
λ
B
x
0
A'
λ'
Γ(x)
b)

Fig. 1

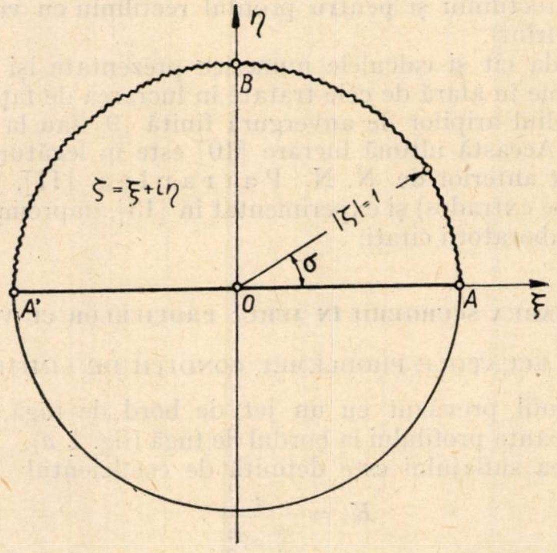

η
B
ζ = ξ + iη
|ζ| = 1
σ
A'
0
A
ξ

Fig. 2

Pentru determinarea mișcării, se liniarizează problema, scriindu-se condițiile la limite pe axa Ox, care nu se îndepărtează mult de profil și jet (fig. 1 *b*), pentru un potențial complex de perturbație $f(z) = \varphi + i\psi$ $(z = x + iy)$ [4], [7].

Condițiile la limite sînt

$$v_n = -\overline{V}_\infty . \overline{n} \quad \text{pe profil,} \quad 0 < x < c, \tag{2}$$

$$\frac{c}{2} K_j \cdot v(x) = \Gamma - \Gamma(x) \quad \text{pe linia de jet,} \quad c < x < \infty. \tag{3}$$

S-a notat cu $v(x)$ viteza verticală de perturbație într-un punct pe axa Ox, cu $\Gamma(x)$ circulația în jurul profilului și a unei porțiuni din jet (fig. 1 *b*) și cu Γ, circulația totală în jurul profilului și jetului.

Prin transformarea conformă

$$z = \frac{4c\zeta^2}{(\zeta^2 + 1)^2}, \quad (\zeta = \xi + i\eta) \tag{4}$$

domeniul exterior tăieturii din planul z se reprezintă în semicercul superior $|\zeta| = 1$ (fig. 2).

Potențialul complex $f(\zeta)$ se scrie astfel [7]

$$f(\zeta) = F_\Gamma(\zeta) + F_P(\zeta) + F(\zeta), \tag{5}$$

unde

$$F_\Gamma(\zeta) = -\Gamma - \frac{\Gamma}{\pi i} \ln \frac{\zeta - i}{\zeta + i}, \tag{6}$$

$$F_P(\zeta) = \Phi_P + i\Psi_P = f_1(\zeta) - \overline{f_1\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}, \tag{7}$$

$$f_1(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\psi(\xi)\, d\xi}{\xi - \zeta}, \tag{8}$$

iar $\psi(\xi)$ din (8) se determină cu ajutorul condiției la limită (2). Funcțiile $F_\Gamma(\zeta)$ și $F_P(\zeta)$ fiind astfel cunoscute, partea necunoscută $F(\zeta)$ din $f(\zeta)$ este o funcție olomorfă în tot planul ζ și se poate dezvolta astfel

$$F(\zeta) = V_\infty c \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n \tag{9}$$

cu coeficienții A_n reali și de rang impar. Determinarea acestora se face cu ajutorul condiției (3), care dă

$$\frac{8}{K_j} |\sin\sigma| \sum_1^\infty A_n \cos n\sigma + |\cos^3\sigma| \sum_1^\infty n A_n \cos n\sigma =$$

$$= -\frac{|\cos^3\sigma|}{V_\infty c} \frac{d\Psi_P}{d\sigma} + \frac{|\cos^3\sigma|}{\cos\sigma} \frac{\Gamma}{\pi V_\infty c}. \tag{10}$$

Pentru determinarea circulației se folosește și relația :

$$\Gamma - \Gamma(c) = \frac{c}{2} K_j v(c+0), \tag{11}$$

care duce la expresia

$$\sum_{1}^{\infty} A_n = -\frac{K_j}{4}\theta_1 . \tag{12}$$

Coeficientul de portanță (efectul de reacție este cuprins) este dat de formula

$$C_z = \frac{2\Gamma}{V_\infty c} . \tag{13}$$

2. DETERMINAREA COEFICIENȚILOR A_n

În acest scop se dezvoltă membrul drept al relației (10) într-o serie

$$-\frac{|\cos^3\sigma|}{V_\infty c}\frac{d\Psi_P}{d\sigma} + \frac{|\cos^3\sigma|}{\cos\sigma}\frac{\Gamma}{\pi V_\infty c} = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty} B_i \cos i\sigma \quad (i \text{ impar}). \tag{14}$$

Coeficienții cunoscuți B_i vor avea diferite valori, pentru diverse forme ale profilului (și deci ale funcției Ψ_P).

Se mai fac apoi următoarele dezvoltări *)

$$\frac{\pi}{8}\,|\cos^3\sigma|^* = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cos j\sigma \quad (j \text{ par}), \tag{15}$$

$$\frac{\pi}{4}\,|\sin\sigma|^* = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \cos j\sigma \quad (j \text{ par}), \tag{16}$$

unde

$$c_0 = \frac{1}{6}, \quad c_j = \frac{3\sin(j-3)\frac{\pi}{2}}{(j^2-1)(j^2-4)}, \tag{17}$$

$$d_0 = \frac{1}{2}, \quad d_j = -\frac{1}{j^2-1} . \tag{18}$$

Valorile lui c_j și d_j sînt trecute în tabela 1.

Introducînd (14), (15), (16) în relația (10) se obține un sistem infinit de ecuații liniare cu necunoscutele A_n

$$A_n \cdot M_n + \sum_{l=1}^{\infty} A_l \cdot R_{nl} = B_n, \quad (n = 1, 3, \cdots). \tag{19}$$

---

*) Asteriscul plasat lîngă o funcție (ca în (15) și (16)) indică alegerea unei perioade convenabile pentru ca dezvoltarea acestei funcții în serie Fourier să se facă după necesitate.

Aici s-au notat

$$M_n = \frac{8}{K_j} d_0 + 2n c_0 = \frac{4}{K_j} + \frac{n}{3}, \tag{20}$$

$$R_{nl} = P_{nl} + \frac{4}{K_j} Q_{nl}, \tag{21}$$

unde

$$P_{nl} = l\,(c_{n-l} + c_{l-n} + c_{l+n}) \tag{22}$$

$$Q_{nl} = d_{n-l} + d_{l-n} + d_{l+n}, \tag{23}$$

cu $x_\alpha = 0$ dacă $\alpha \leqslant 0$

(vezi tabelele 2 și 3).

Rezolvarea sistemului (19) furnizează coeficienții A_n ca funcții de B_i

$$A_n = \sum_{i=1}^{\infty} s_{ni} B_i \quad (n = 1,\ 3, \cdots). \tag{24}$$

Mărimile s_{ni} se pot găsi din următorul sistem dublu infinit de ecuații liniare, dedus din (19) și (24)

$$s_{ni} = -\frac{1}{M_n} \sum_{l=1}^{\infty} R_{nl} s_{li} + \frac{\delta_{ni}}{M_n} \quad (n, i = 1,\ 3, \cdots) \tag{25}$$

unde

$$\delta_{ni} \begin{cases} = 0, & n \neq i \\ = 1, & n = i. \end{cases}$$

Trebuie făcută aici remarca esențială că mărimile s_{ni} depind numai de intensitatea suflajului (căci în M_n și R_{nl} intervine K_j), dar nu și de forma profilului (coeficienții B_i) sau alți parametri. În consecință, s_{ni} se pot calcula o dată pentru totdeauna, iar pentru cazurile concrete care se studiază, trebuie date doar valorile coeficienților B_i ; rezultă apoi A_n, care determină complet scurgerea, și apoi portanța, din (12) și (13).

Rezolvarea sistemului (25) s-a făcut prin aproximații succesive, păstrîndu-se un număr finit de termeni (i, $n = 1$, 3, 5, 7, 9, 11). Fie pentru aceasta matricea $\| s_{ni}^{(\alpha)} \|$ presupusă cunoscută (α reprezentînd ordinul aproximației) ; aproximația următoare $\| s_{ni}^{(\alpha+1)} \|$ se obține din (25), astfel

$$s_{ni}^{(\alpha+1)} = -\frac{1}{M_n} \sum_{l=1}^{\infty} R_{nl}\, s_{li}^{(\alpha)} + \frac{\delta_{ni}}{M_n}. \tag{26}$$

După cîteva iterații, procesul nu mai dă diferențe sensibile.

În tabelele 4—11 sînt date matricile $\| s_{ni} \|$ pentru diverse valori ale intensității suflajului, K_j.

Aceste matrici pot folosi, fără modificări, și pentru studiul aripilor de anvergură finită cu volet fluid, ceea ce ne propunem să facem ulterior.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

II. APLICAŢII

1. PROFILUL RECTILINIU CU JET

Vom trata întîi cazul unui profil plan, pentru care funcţia $F_P(\zeta)$ are o formă simplă, iar dezvoltarea (14) se face uşor. Configuraţia este reprezentată în figura 3.

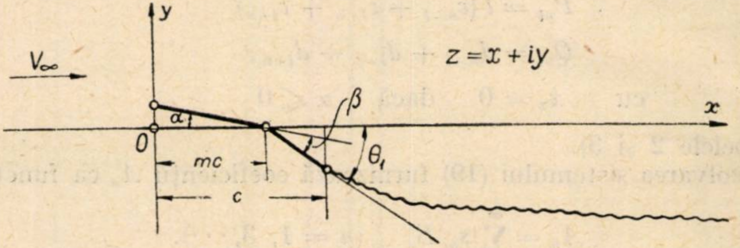


Fig. 3

Pentru calculul lui $F_P(\zeta)$, vom scrie funcţia $\psi(x)$, astfel

$$\psi(x) = -\int_0^x v(x)\, dx + C = \alpha V_\infty (x - c). \tag{27}$$

Constanta a fost aleasă astfel încît să avem $\psi(c) = 0$. Rezultă

$$F_P(\zeta) = \frac{4V_\infty c}{\pi}\, \alpha \frac{\zeta^2}{(\zeta^2+1)^2}\left[\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \ln'\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \frac{\pi}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) + i\pi\right] -$$
$$- \frac{V_\infty c}{\pi}\, \alpha \left[\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \ln'\frac{\zeta-1}{\zeta+1} + i\pi\right]. \tag{28}$$

În formula precedentă, primul logaritm are tăietura $(-1, 1)$, iar al doilea (notat cu '), tăieturile $(-\infty, -1)$ şi $(1, \infty)$.

Pe cercul $\zeta = e^{i\sigma}$, care reprezintă linia de jet, se obţine

$$\Psi_P(\sigma) = V_\infty c\, \alpha \frac{\sin\sigma}{1 + \sin\sigma}, \quad \left(0 < \sigma < \frac{\pi}{2}\right). \tag{29}$$

Pentru calculul coeficienţilor B_i, vom dezvolta expresia din membrul drept al relaţiei (10), punînd

$$-\frac{1}{V_\infty c}\left(\frac{d\Psi_P}{d\sigma}\cos^3\sigma\right)^* = \frac{4}{\pi}\,\alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\sigma \qquad (i \text{ impar}) \tag{30}$$

şi

$$\frac{\Gamma}{\pi V_\infty c}\left(\frac{|\cos^3\sigma|}{\cos\sigma}\right)^* = \frac{4}{\pi}\, G \sum_{i=1}^{\infty} g_i \cos i\sigma \qquad (i \text{ impar}), \tag{31}$$

unde s-a notat

$$G = \frac{\Gamma}{\pi V_\infty c}\cdot \tag{32}$$

Coeficienții a_i și g_i sînt dați de relațiile

$$a_i = \frac{3}{2i}\sin i\frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}\,\frac{\sin i\frac{\pi}{2}}{i^2-4} + \frac{2}{i^2-1}\left[1 + i\cos(i+1)\frac{\pi}{2}\right], \tag{33}$$

$$g_i = -2\,\frac{\sin i\frac{\pi}{2}}{i(i^2-4)} \qquad (i = 1,\ 3, \cdots) \tag{34}$$

v. tabela 1).

Cu aceste dezvoltări, expresia coeficienților B_i (14) este simplă

$$B_i = Gg_i + \alpha a_i. \tag{35}$$

Aplicarea formulei (24) determină coeficienții necunoscuți A_n, cu care potențialul complex al mișcării $f(\zeta)$ (5) este complet definit.

Pentru simplificarea calculului portanței, vom introduce sumele S_i, care apar în $\sum A_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_{ni} = S_i \qquad (i = 1,\ 3, \cdots) \tag{36}$$

astfel încît vom putea scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{i=1}^{\infty} S_i B_i. \tag{37}$$

Valorile S_i sînt trecute în tabelele 4—11.

Aplicînd relațiile (12) și (13) se obține expresia coeficientului de portanță C_z

$$C_z = \frac{2\pi}{\Sigma S_i g_i}\left[\frac{K_j}{4}\tau + \left(\frac{K_j}{4} + \sum S_i a_i\right)\alpha\right]\cdot \tag{38}$$

Se observă că portanța crește liniar cu incidența și cu bracajul voletului fluid, în cadrul ipotezelor admise. Curbele $\frac{\partial C_z}{\partial \tau}$ și $\frac{\partial C_z}{\partial \alpha}$ sînt trasate în diagrama din figura 6 și concordă remarcabil cu valorile obținute teoretic de alți autori, pe căi mai laborioase [5], [8], cît și cu rezultatele experimentale [6], [8].

2. PROFILUL RECTILINIU CU VOLET DE CURBURĂ ŞI JET

Vom analiza în continuare cazul reprezentat în figura 4. Menționăm că prin metoda expusă se poate considera orice formă de profil, dar efectele grosimii sau ondulațiilor scheletului fiind mici față de cele ale suflajului, tratarea cazului de față simplificat prezintă mai mult interes.

Considerăm cazul cînd jetul este emis tangențial față de volet ($\tau = 0$), încît avem $\theta_1 = \alpha + \beta$. Coarda profilului fiind c, vom nota cu m raportul

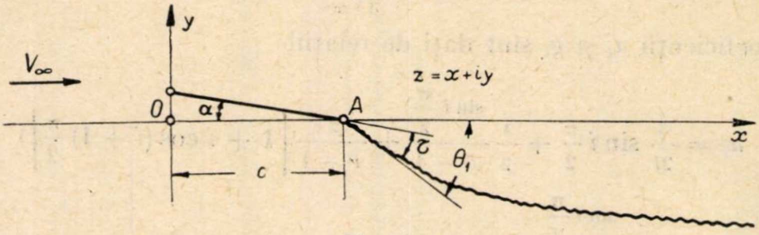


Fig. 4

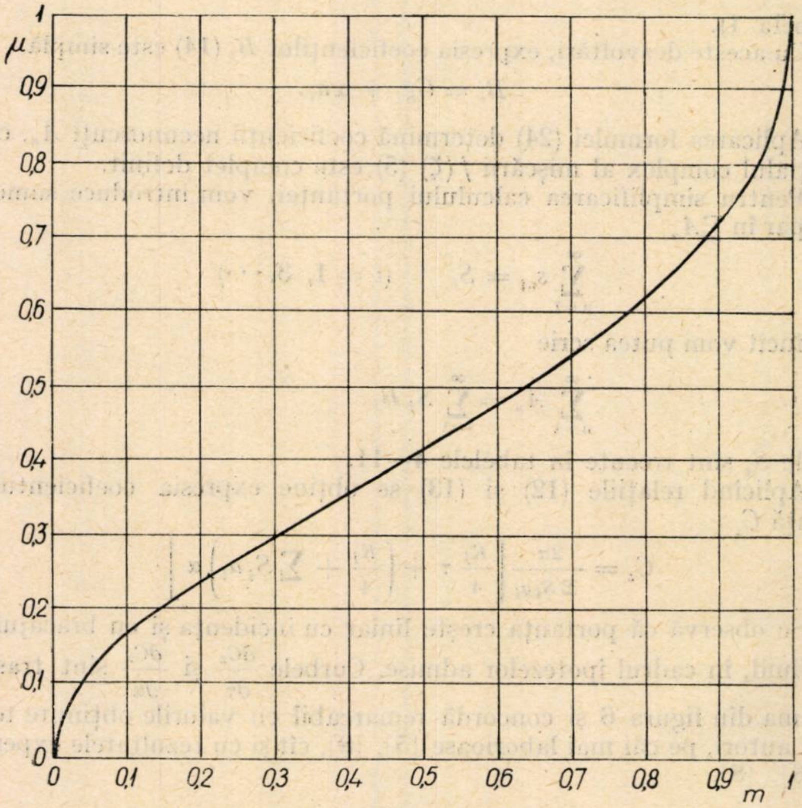


Fig. 5

dintre porțiunea nebracată a profilului și coardă ; punctul de schimbare a pantei ($x = mc$) capătă, prin transformarea (4), abscisa μ

$$m = \frac{4\mu^2}{(1+\mu^2)^2}\,. \tag{39}$$

Relația dintre m și μ este reprezentată în figura 5.

În cazul prezent, funcția $\psi(x)$ are valorile următoare, pe diferite porțiuni ale axei Ox

$$\begin{aligned} \psi &= V_\infty[\alpha(x-c) - \beta c(1-m)] \qquad (0 < x < mc), \\ \psi &= V_\infty(\alpha+\beta)(x-c) \qquad (mc < x < c). \end{aligned} \tag{40}$$

Aceste valori se pot obține, dacă se adoptă pentru $\psi(x)$, expresia

$$\psi(x) = \psi'(x) - \psi''(x), \tag{41}$$

unde

$$\psi'(x) = V_\infty(\alpha+\beta)(x-c), \tag{42}$$

$$\psi''(x) \begin{cases} = V_\infty \beta (x - mc), & (0 < x < mc), \\ = 0, & (mc < x < c). \end{cases} \tag{43}$$

Rezultă atunci, aplicînd relațiile (7) și (8)

$$F_P(\zeta) = F'_P(\zeta) - F''_P(\zeta), \tag{44}$$

cu

$$\begin{aligned} F'_P(\zeta) = \frac{4V_\infty c}{\pi}(\alpha+\beta)\frac{\zeta^2}{(1+\zeta^2)^2}\left[\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \ln'\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \frac{\pi}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) + i\pi\right] - \\ - \frac{V_\infty c}{\pi}(\alpha+\beta)\left[\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \ln'\frac{\zeta-1}{\zeta+1} + i\pi\right], \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} F''_P(\zeta) = \frac{4V_\infty c}{\pi}\beta\frac{\zeta^2}{(1+\zeta^2)^2}\left[\ln\frac{\zeta-\mu}{\zeta+\mu} - \ln'\frac{\zeta-\frac{1}{\mu}}{\zeta+\frac{1}{\mu}} - 2\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\operatorname{arc\,tg}\mu + i\pi\right] - \\ - \frac{V_\infty c}{\pi}\beta m\left[\ln\frac{\zeta-\mu}{\zeta+\mu} - \ln'\frac{\zeta-\frac{1}{\mu}}{\zeta+\frac{1}{\mu}} + i\pi\right]. \end{aligned} \tag{46}$$

În $F''_P(\zeta)$, primul logaritm are tăietura $(-\mu, \mu)$, iar cel notat cu $'$, tăieturile $\left(-\infty, -\frac{1}{\mu}\right)$ și $\left(\frac{1}{\mu}, \infty\right)$.

Pentru determinarea scurgerii și aflarea coeficienților A_n, din relația (10), trebuie dezvoltată funcția $F_P(\zeta)$, după relația (14). În acest scop, vom observa că funcția $F'_P(\zeta)$ de mai sus, are aceeași formă cu cea găsită în primul caz tratat (28), încît dezvoltarea sa va avea forma (30), cu coeficienții a_i dați de (33).

Funcția $F''_P(\zeta)$ va fi dezvoltată în mod analog, și anume

$$-\frac{1}{V_\infty c}\left(\frac{d\Psi''_P}{d\sigma}\cos^3\sigma\right)^* = \frac{4}{\pi}\beta\sum_{i=1}^{\infty} b_i \cos i\sigma. \tag{47}$$

Pentru a putea scrie această dezvoltare, vom proceda în modul următor : dezvoltăm în serie, în exteriorul cercului $|\zeta| = \mu$, funcția $\ln \frac{\zeta - \mu}{\zeta + \mu}$ și în interiorul cercului $|\zeta| = \frac{1}{\mu}$, $\ln' \frac{\zeta - \frac{1}{\mu}}{\zeta + \frac{1}{\mu}}$; cercul $|\zeta| = 1$, care reprezintă jetul, va fi inclus în ambele domenii ¹). Se obține astfel

$$F''_P (e^{i\sigma}) = i \Psi''_P (\sigma) = \frac{4}{\pi} V_\infty c \beta \frac{i}{\cos^2 \sigma} \Big[(\mu - \operatorname{arc\,tg} \mu) \sin \sigma + \frac{\mu^3}{3} \sin 3\sigma + \\ \cdots + \frac{\mu^k}{k} \sin k\sigma + \cdots \Big] - \\ - \frac{V_\infty c}{\pi} \beta m i \Big[\mu \sin \sigma + \frac{\mu^3}{3} \sin 3\sigma + \cdots + \frac{\mu^k}{k} \sin k\sigma + \cdots \Big] . \tag{48}$$

Relația de mai sus sugerează introducerea unor funcții $\overline{\Psi}(\sigma)$ și $\overline{\overline{\Psi}}(\sigma)$ astfel încît

$$\Psi''_P (\sigma) = \overline{\Psi}(\sigma) - \overline{\overline{\Psi}}(\sigma), \tag{49}$$

cu

$$\overline{\Psi}(\sigma) = \frac{4}{\pi} V_\infty c \beta \frac{1}{\cos^3 \sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{k} \sin k\sigma, \tag{50}$$

$$\overline{\overline{\Psi}}(\sigma) = \frac{1}{\pi} V_\infty c \beta m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{k} \sin k\sigma, \tag{51}$$

unde

$$\nu_k \begin{cases} = \mu - \operatorname{arc\,tg} \mu, & k = 1, \\ = \mu^k, & k \neq 1. \end{cases} \tag{52}$$

Făcînd dezvoltări de forma (47) pentru $\overline{\Psi}$ și $\overline{\overline{\Psi}}$ vom obține coeficienții $\overline{b}_i$ și $\overline{\overline{b}}_i$, cu $b_i = \overline{b}_i - \overline{\overline{b}}_i$.

---

¹) Aceste dezvoltări converg satisfăcător chiar pentru valori mari ale parametrului μ ; într-adevăr, de exemplu, pentru $m = 0{,}9$ (deci pentru un volet avînd o lungime doar de 10 % din coardă), corespunde (fig. 5), $\mu = 0{,}72$, pentru care dezvoltările sînt destul de rapid convergente.

Din (50) și (51) avem astfel

$$-\frac{\pi}{4}\frac{1}{V_\infty c}\frac{d\overline{\Psi}}{d\sigma}\cos^3\sigma = -\beta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu_k}{k}(k\cos\sigma\cdot\cos k\sigma + 2\sin\sigma\cdot\sin k\sigma) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\beta\sum_{i=1}^{\infty}\bar{b}_i\cos i\sigma, \tag{53}$$

$$-\frac{\pi}{4}\frac{1}{V_\infty c}\frac{d\overline{\overline{\Psi}}}{d\sigma}\cos^3\sigma = -\beta m\cos^3\sigma\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\cos k\sigma =$$

$$= \frac{4}{\pi}\beta\sum_{i=1}^{\infty}\bar{\bar{b}}_i\cos i\sigma. \tag{54}$$

Făcînd în (53) și (54) dezvoltările

$$(\cos\sigma)^* = \sum_{l=0}^{\infty}p_l\cos l\sigma, \tag{55}$$

$$(\sin\sigma)^* = \sum_{l=0}^{\infty}q_l\sin l\sigma, \tag{56}$$

$$(\cos^3\sigma)^* = \sum_{l=0}^{\infty}r_l\cos l\sigma, \tag{57}$$

unde

$$p_0 = \frac{2}{\pi}, \qquad p_l = \frac{4}{\pi}\frac{\sin(l-1)\frac{\pi}{2}}{l^2-1}, \tag{58}$$

$$q_0 = 0, \qquad q_l = \frac{4}{\pi}\frac{l}{l^2-1}\sin(l-1)\frac{\pi}{2}, \tag{59}$$

$$r_0 = 0; \qquad r_l = -\frac{24}{\pi}\frac{\sin(l-1)\frac{\pi}{2}}{(l^2-1)(l^2-9)} \tag{60}$$

(vezi tabela 1), se obțin următoarele relații, din care se pot extrage coeficienții $\bar{b}_i$ și $\bar{\bar{b}}_i$:

$$\left(-\frac{\pi}{4V_\infty c}\frac{d\overline{\Psi}}{d\sigma}\cos^3\sigma\right)^* = -\beta\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\frac{\nu_k}{k}\left[\left(\frac{k}{2}p_l + q_l\right)\cos(k-l)\sigma + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{k}{2}p_l - q_l\right)\cos(k+l)\sigma\right]\right\}, \tag{61}$$

$$\left(-\frac{\pi}{4V_\infty c}\frac{d\overline{\overline{\Psi}}}{d\sigma}\cos^3\sigma\right)^* = -\beta\frac{m}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\mu^k r_l[\cos(l-k)\sigma + \cos(l+k)\sigma]\right\}. \tag{62}$$

Se găsește pînă la urmă

$$b_i = \bar{b}_i - \bar{\bar{b}}_i = -\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\bar{e}_{ki} + \frac{m}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\bar{\bar{e}}_{ki}, \tag{63}$$

unde
$$\bar{e}_{ki} = \frac{1}{2k}\left[k\left(p_{k-i} + p_{k+i} + p_{i-k}\right) + 2\left(q_{k-i} + q_{k+i} - q_{i-k}\right)\right], \tag{64}$$
$$\bar{\bar{e}}_{ki} = r_{k+i} + r_{k-i} + r_{i-k} \tag{65}$$
și $\varkappa_\alpha = 0$, dacă $\alpha < 0$.

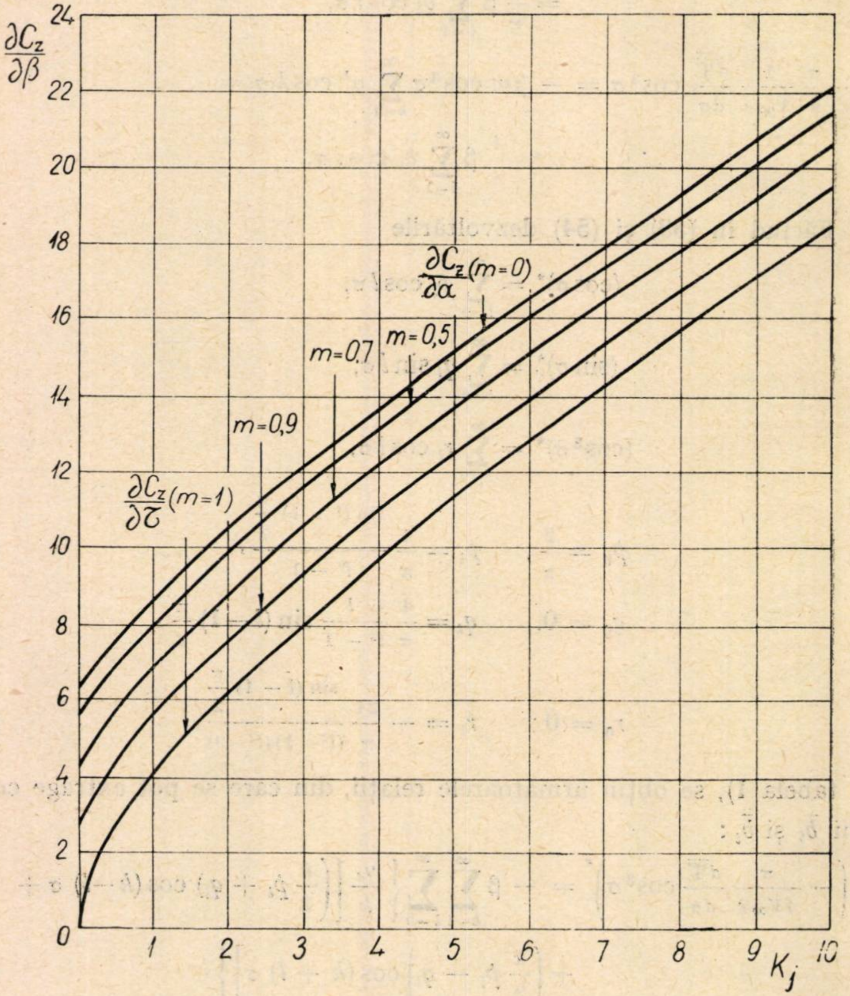


Fig. 6

Matricile coeficienților $\bar{e}_{ki}$ și $\bar{\bar{e}}_{ki}$ sînt trecute în tabelele 12 și 13, iar coeficienții b_i, pentru cîteva valori ale parametrului m, în tabela 1.

Din formulele de mai sus (30), (31), (47) și (63), rezultă în sfîrșit, expresia coeficienților B_i (14), pentru cazul profilului cu volet
$$B_i = Gg_i + (\alpha + \beta)\, a_i - \beta\, b_i. \tag{66}$$

Cu ajutorul relației (24) se deduc coeficienții A_n, care determină scurgerea

$$A_n = \sum_{i=1}^{\infty} s_{ni}[Gg_i + (\alpha + \beta)\, a_i - \beta\, b_i] \quad (n = 1,3, \cdots), \tag{67}$$

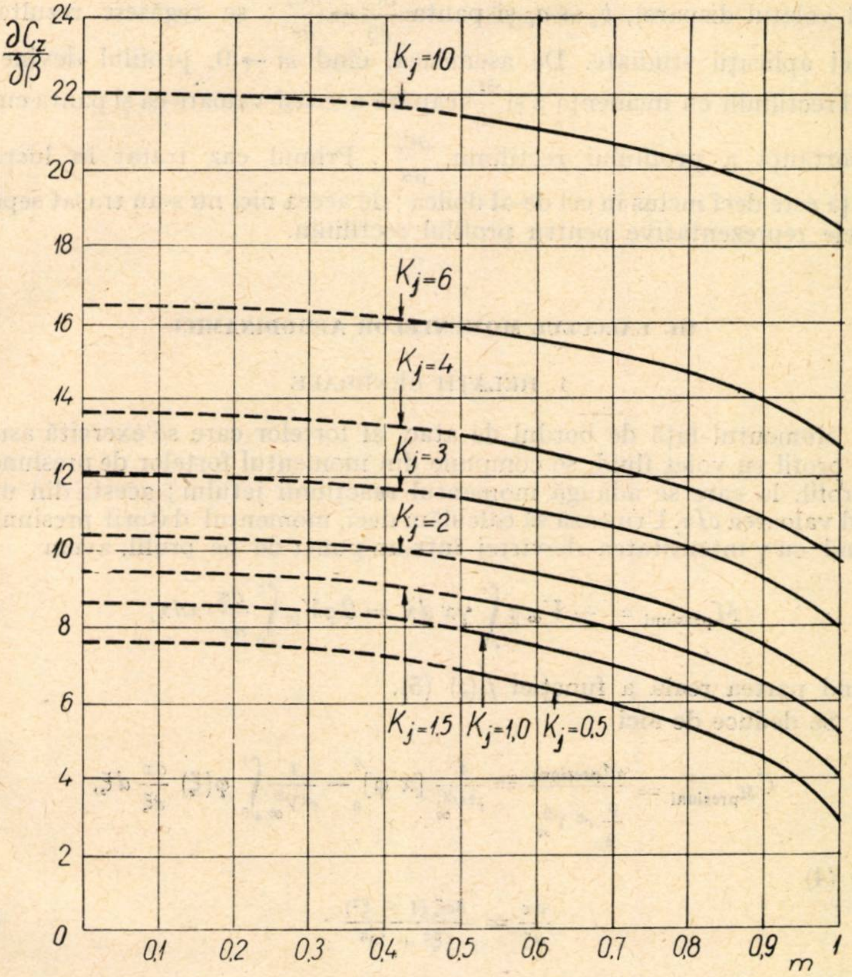


Fig. 7

precum și portanța

$$C_z = \frac{2\pi}{\Sigma S_i\, g_i}\left[\left(\frac{K_j}{4} + \sum S_i\, a_i\right)\alpha + \left(\frac{K_j}{4} + \sum S_i\, a_i - \sum S_i\, b_i\right)\beta\right] \cdot \tag{68}$$

În diagramele din figurile 6 și 7 s-a reprezentat variația derivatelor $\frac{\partial C_z}{\partial \alpha}$ și $\frac{\partial C_z}{\partial \beta}$ ca funcție de parametrii K_j și m.

Rezultatele de mai sus permit să se facă unele observaţii, şi anume :

Se constată întîi că portanţa profilului cu volet este mai mare decît a celui rectiliniu, pentru aceeaşi intensitate a jetului, ceea ce constituie un important avantaj practic. Se mai poate remarca faptul că, pentru $m \to 1$ (cînd voletul dispare), $b_i \to a_i$ şi panta $\frac{\partial C_z}{\partial \beta} \to \frac{\partial C_z}{\partial \tau}$; se regăsesc rezultatele primei aplicaţii studiate. De asemenea, cînd $m \to 0$, profilul devine un profil rectiliniu cu incidenţa β şi $\frac{\partial C_z}{\partial \beta}$ capătă aceeaşi valoare ca şi panta curbei de portanţă a profilului rectiliniu, $\frac{\partial C_z}{\partial \alpha}$. Primul caz tratat în lucrarea de faţă este deci inclus în cel de-al doilea ; de aceea nici nu s-au trasat separat curbele reprezentative pentru profilul rectiliniu.

III. CALCULUL MOMENTELOR AERODINAMICE

1. RELAŢII GENERALE

Momentul faţă de bordul de atac, al forţelor care se exercită asupra unui profil cu volet fluid, se compune din momentul forţelor de presiune de pe profil, la care se adaugă momentul reacţiunii jetului ; acesta din urmă avînd valoarea $cI\tau$. Urmează să calculăm deci, momentul datorit presiunilor. Notînd cu γ intensitatea de vîrtej într-un punct de pe profil, avem

$$M_{\text{presiuni}} = -V_\infty \rho \int_0^c \gamma x \, dx = 2\rho V_\infty \int_0^c \frac{\partial \varphi}{\partial x} x dx, \tag{69}$$

φ fiind partea reală a funcţiei $f(z)$ (5).

Se deduce de aici

$$C_{M_{\text{presiuni}}} = \frac{M_{\text{presiuni}}}{\frac{\rho}{2} c^2 V_\infty^2} = \frac{4}{c^2 V_\infty^2} [x\,\varphi]_0^c - \frac{4}{c^2 V_\infty^2} \int_0^1 \varphi(\xi) \frac{dx}{d\xi} d\xi, \tag{70}$$

unde (4)

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{8c\xi (1-\xi^2)}{(\xi^2+1)^3} . \tag{71}$$

Avem însă (vezi relaţia (5))

$$\varphi(\zeta) = \Phi_\Gamma + \Phi_P + \Phi_\Sigma, \tag{72}$$

în care Φ_Σ este partea reală a funcţiei $F(\zeta) = V_\infty c \, \Sigma A_n \zeta^n$ (9).

Rezultă

$$C_M = K_i \, \tau + C_{M_\Gamma} + C_{M_P} + C_{M_\Sigma}. \tag{73}$$

Coeficienţii C_{M_Γ}, C_{M_P} şi C_{M_Σ} se vor obţine înlocuind pe φ în relaţia (70) respectiv cu Φ_Γ, Φ_P sau Φ_Σ.

2. CALCULUL COEFICIENTULUI $C_{M\Gamma}$

Acest coeficient se poate determina direct, observînd că funcția $F_\Gamma(\zeta)$ (6) reprezintă potențialul complex de perturbație al mișcării în jurul unei plăci plane fără incidență, dar avînd o circulație Γ. Din motive de simetrie, forța protantă se aplică în mijlocul plăcii (fig. 8), astfel încît coeficientul de moment față de bordul de atac are expresia

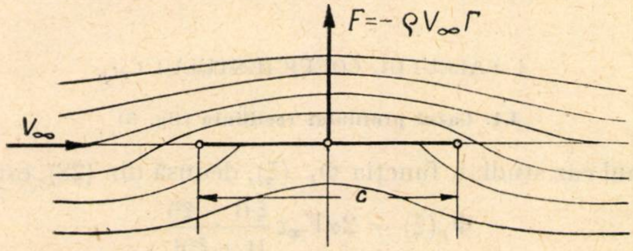


Fig. 8

$$C_{M\Gamma} = -\frac{\Gamma}{V_\infty c}. \tag{74}$$

3. CALCULUL COEFICIENTULUI $C_{M\Sigma}$

Din formula (9), deducem

$$\Phi_\Sigma = V_\infty c \sum_{n=1}^{\infty} A_n \xi^n, \tag{75}$$

iar aplicînd relația (70), obținem

$$C_{M\Sigma} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[1 - 8 \int_0^1 \frac{\xi^{n+1}(1-\xi)^2}{(1+\xi^2)^3} d\xi\right]. \tag{76}$$

Notăm

$$L_n = 4 - 32 \int_0^1 \frac{\xi^{n+1}(1-\xi^2)}{(1+\xi^2)^3} d\xi \tag{77}$$

(vezi valorile mărimilor L_n în tabela 1). Înlocuind în (76) expresia coeficienților A_n din (24), putem scrie

$$C_{M\Sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot L_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} s_{ni} B_i L_n = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i B_i\,, \tag{78}$$

unde am introdus notația

$$\Lambda_i = \sum_{n=1}^{\infty} s_{ni} L_n. \qquad (79)$$

Valorile sumelor Λ_i depind de parametrul K_j și au fost trecute în tabelele 4—11. Pentru o formă de profil dată, valoarea coeficientului C_{M_Σ} se obține deci particularizînd în relația (78), coeficienții B_i, dați de (14).

4. CALCULUL COEFICIENTULUI C_{M_P}

4.1. Cazul profilului rectiliniu (fig. 3)

În primul caz studiat, funcția Φ_P (ξ), dedusă din (28), este

$$\Phi_P(\xi) = 2\alpha V_\infty c \frac{\xi(1-\xi^2)}{(1+\xi^2)^2}. \qquad (80)$$

Aplicînd relația (70), rezultă formula simplă

$$C_{M_P} = -64\alpha \int_0^1 \frac{\xi^2(1-\xi^2)^2}{(1+\xi^2)^5}\, d\xi = -\frac{\pi}{2}\alpha. \qquad (81)$$

4.2. Cazul profilului rectiliniu cu volet

În acest caz, în conformitate cu relația (44), avem

$$\Phi_P = \Phi'_P - \Phi''_P, \qquad (82)$$

deci

$$C_{M_P} = C'_{M_P} - C''_{M_P} \qquad (83)$$

Primul coeficient are o formă analoagă cu (81), (vezi (45)) și rezultă

$$C'_{M_P} = -\frac{\pi}{2}(\alpha + \beta). \qquad (84)$$

Pentru calculul coeficientului de moment C''_{M_P}, considerînd partea reală a funcției F''_P (ζ) (46), sînt conduși, prin aplicarea relației (70), la evaluarea următoarelor integrale

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\xi^3(1-\xi^2)}{(1+\xi^2)^5} Re \left[\ln\frac{\xi-\mu}{\xi+\mu} - \ln' \frac{\xi - \dfrac{1}{\mu}}{\xi + \dfrac{1}{\mu}} + i\pi \right] d\xi, \qquad (85)$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{\xi(1-\xi^2)}{(1+\xi^2)^3} Re \left[\ln\frac{\xi-\mu}{\xi+\mu} - \ln' \frac{\xi - \dfrac{1}{\mu}}{\xi + \dfrac{1}{\mu}} + i\pi \right] d\xi, \qquad (86)$$

precum și o integrală analoagă cu (81).

Pentru calculul lui I_1 și I_2, vom considera integralele

$$\mathcal{J}_1 = \oint \frac{\zeta^3(1-\zeta^2)}{(1+\zeta^2)^5}\left[\ln\frac{\zeta-\mu}{\zeta+\mu} - \ln'\frac{\zeta-\frac{1}{\mu}}{\zeta+\frac{1}{\mu}} + i\pi\right]d\zeta, \tag{87}$$

$$\mathcal{J}_2 = \oint \frac{\zeta(1-\zeta^2)}{(1+\zeta^2)^3}\left[\ln\frac{\zeta-\mu}{\zeta+\mu} - \ln'\frac{\zeta-\frac{1}{\mu}}{\zeta+\frac{1}{\mu}} + i\pi\right]d\zeta, \tag{88}$$

luate pe conturul din figura 9 ; ele sînt nule, întrucît funcțiile de sub semnul integral sînt olomorfe în domeniul din figură. Pe porțiunea de pe axa absciselor a conturului, J_1 și J_2 coincid cu I_1 și I_2 ; pe semicercul $|\zeta| = 1$, avem $\int_0^{\frac{\pi}{2}} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$, astfel încît rămîne

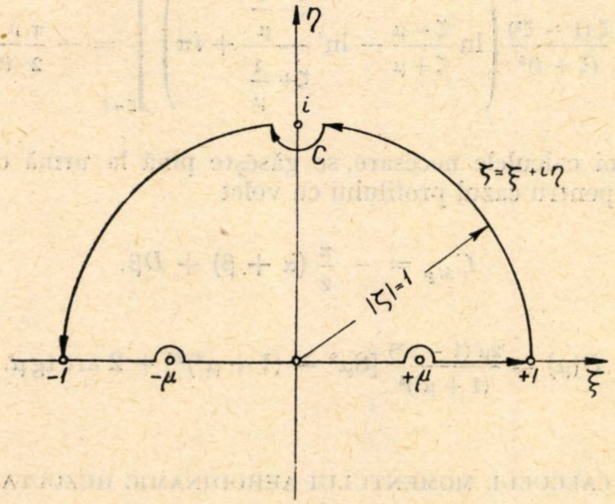


Fig. 9

$$I_1 + \int_C \frac{\zeta^3(1-\zeta^2)}{(1+\zeta^2)^5}\left[\ln\frac{\zeta-\mu}{\zeta+\mu} - \ln'\frac{\zeta-\frac{1}{\mu}}{\zeta+\frac{1}{\mu}} + i\pi\right]d\zeta = 0, \tag{89}$$

$$I_2 + \int_C \frac{\zeta(1-\zeta^2)}{(1+\zeta^2)^3}\left[\ln\frac{\zeta-\mu}{\zeta+\mu} - \ln'\frac{\zeta-\frac{1}{\mu}}{\zeta+\frac{1}{\mu}} + i\pi\right]d\zeta = 0. \tag{90}$$

Integralele luate pe semicercul C se determină cu ajutorul formulei semireziduului, calculînd reziduurile funcțiilor respective în punctul $\zeta = i$; se obține astfel, din (89) și (90),

$$I_1 = \pi i \cdot \frac{1}{4!}\left[\frac{\zeta^3(1-\zeta^2)}{(\zeta+i)^5}\left(\ln\frac{\zeta-\mu}{\zeta+\mu} - \ln'\frac{\zeta-\dfrac{1}{\mu}}{\zeta+\dfrac{1}{\mu}} + i\pi\right)\right]^{\mathrm{IV}}_{\zeta=i} = -\frac{\pi}{32}\,\frac{\mu(1-\mu^2)[(1+\mu^2)^2+8\mu^2]}{(1+\mu^2)^4}, \tag{91}$$

$$I_2 = \pi i \cdot \frac{1}{2!}\left[\frac{\zeta(1-\zeta^2)}{(\zeta+i)^3}\left(\ln\frac{\zeta-\mu}{\zeta+\mu} - \ln'\frac{\zeta-\dfrac{1}{\mu}}{\zeta+\dfrac{1}{\mu}} + i\pi\right)\right]''_{\zeta=i} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{\mu(1-\mu^2)}{(1+\mu^2)^2}. \tag{92}$$

Efectuînd apoi calculele necesare, se găsește pînă la urmă coeficientul de moment C_{M_P} pentru cazul profilului cu volet

$$C_{M_P} = -\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta) + D\beta, \tag{93}$$

unde

$$D(\mu) = \frac{2\mu(1-\mu^2)}{(1+\mu^2)^4}[8\mu^2-(1+\mu^2)^2] + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\mu. \tag{94}$$

5. CALCULUL MOMENTULUI AERODINAMIC REZULTANT

5.1. Profilul rectiliniu cu jet

Coeficientul total de moment aerodinamic față de bordul de atac se obține din (73), înlocuind $C_{M\Gamma}$, C_{M_P} și $C_{M\Sigma}$ din (74), (81) și (78). Ținînd seama de rezultatele din partea a II-a a lucrării de față, găsim pînă la urmă

$$C_M = \left[\frac{\pi - \Sigma\Lambda_i g_i}{\Sigma S_i g_i}\left(\frac{K_j}{4} + \Sigma S_i a_i\right) + \Sigma\Lambda_i a_i - \frac{\pi}{2}\right]\alpha + K_j\left[1 + \frac{\pi - \Sigma\Lambda_i g_i}{4\,\Sigma S_i g_i}\right]\tau. \tag{95}$$

Se observă că și momentul, ca și portanța, crește liniar cu incidența și cu bracajul voletului fluid. În diagramele din figura 10 sînt reprezentate curbele $\frac{\partial C_M}{\partial \alpha}$ și $\frac{\partial C_M}{\partial \tau}$; valorile numerice obținute sînt în excelent acord cu cele ale altor autori și cu experiența [6], [8].

5.2. Profilul rectiliniu cu volet și jet

Făcînd aceleași operații ca în cazul precedent și luînd din (93), se obține următoarea formulă

$$C_M = \left\{ \frac{\pi - \Sigma\Lambda_i g_i}{\Sigma S_i g_i} \left(\frac{K_j}{4} + \Sigma S_i a_i \right) + \Sigma\Lambda_i a_i - \frac{\pi}{2} \right\} \alpha +$$

$$+ \left\{ K_j \left[1 + [1 + \frac{4}{K_j} (\Sigma S_i a_i - \Sigma S_i b_i)] \frac{\pi - \Sigma\Lambda_i g_i}{4 \Sigma S_i g_i} \right] + \right.$$

$$\left. + \Sigma\Lambda_i a_i - \Sigma\Lambda_i b_i + D - \frac{\pi}{2} \right\} \beta. \qquad (96)$$

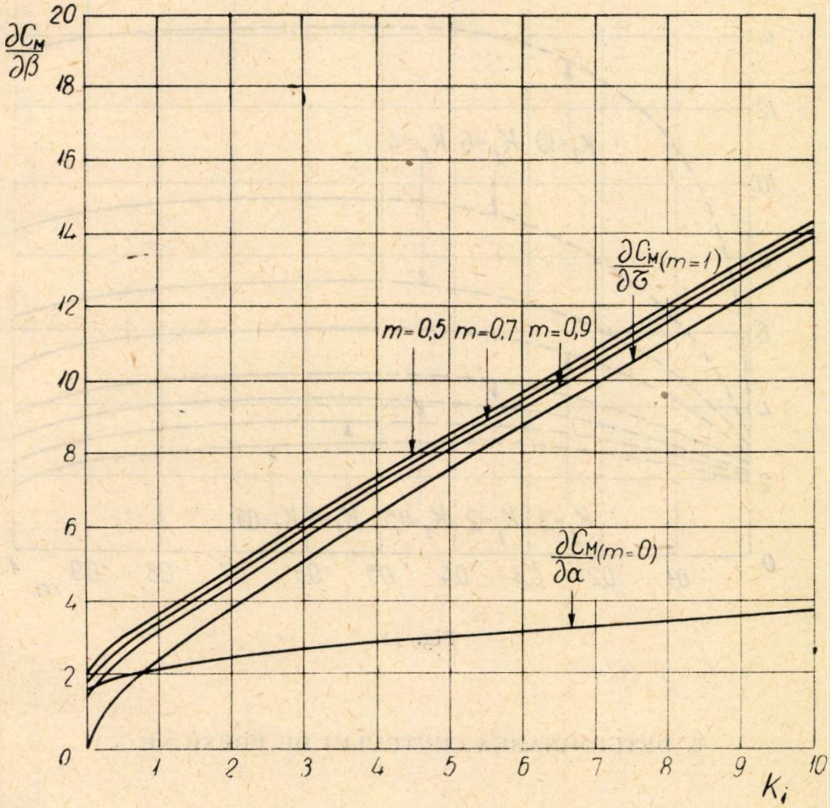


Fig. 10

În diagramele din figurile 10 și 11 sînt trasate curbele de variație ale pantelor $\frac{\partial C_M}{\partial \alpha}$ și $\frac{\partial C_M}{\partial \beta}$ ca funcție de parametrii K_j și m. Ca și la portanță, găsim și aici că, pentru $m \to 1$, avem $\frac{\partial C_M}{\partial \beta} \to \frac{\partial C_M}{\partial \tau}$, iar pentru $m \to 0$, $\frac{\partial C_M}{\partial \beta} \to \frac{\partial C_M}{\partial \alpha}$ astfel încît și aici, curbele pentru cazul profilului rectiliniu fără volet n-au fost trasate separat.

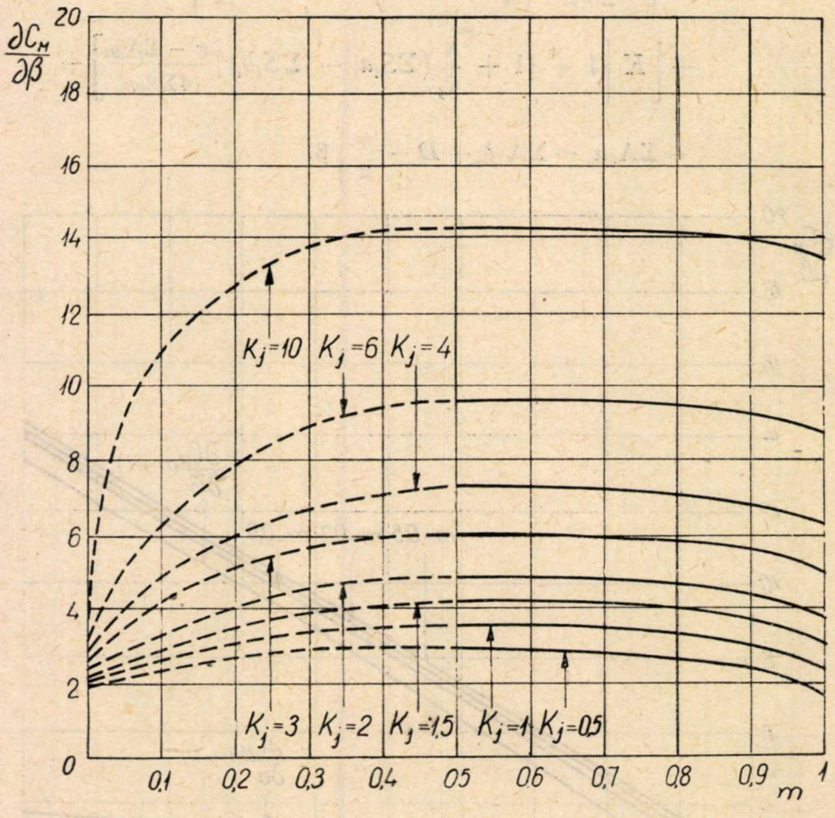


Fig. 11

6. DETERMINAREA CENTRULUI DE PRESIUNE

Fie x_p abscisa centrului de presiune, adică a punctului de aplicație a rezultantei aerodinamice ; avem relația evidentă

$$\frac{x_p}{c} = \frac{C_M}{C_Z}. \tag{97}$$

Din relațiile prezentate în lucrare, se poate deduce valoarea lui x_p, pentru orice situație; este interesant însă cazul profilului fără incidență, $\alpha = 0$ la care x_p nu depinde de bracajul voletului β — respectiv al voletului fluid τ. S-a trasat astfel variația lui $\frac{x_p}{c}$ pentru $\alpha = 0$ ca funcție de parametrii K_j și m, în diagrama din figura 12.

Se observă că la profilul cu volet bracat, centrul de presiune este mai apropiat de bordul de atac decît la profilul rectiliniu, încît și din acest punct de vedere, folosirea unui profil cu volet, după schema propusă anterior, [12], [13], este mai avantajoasă.

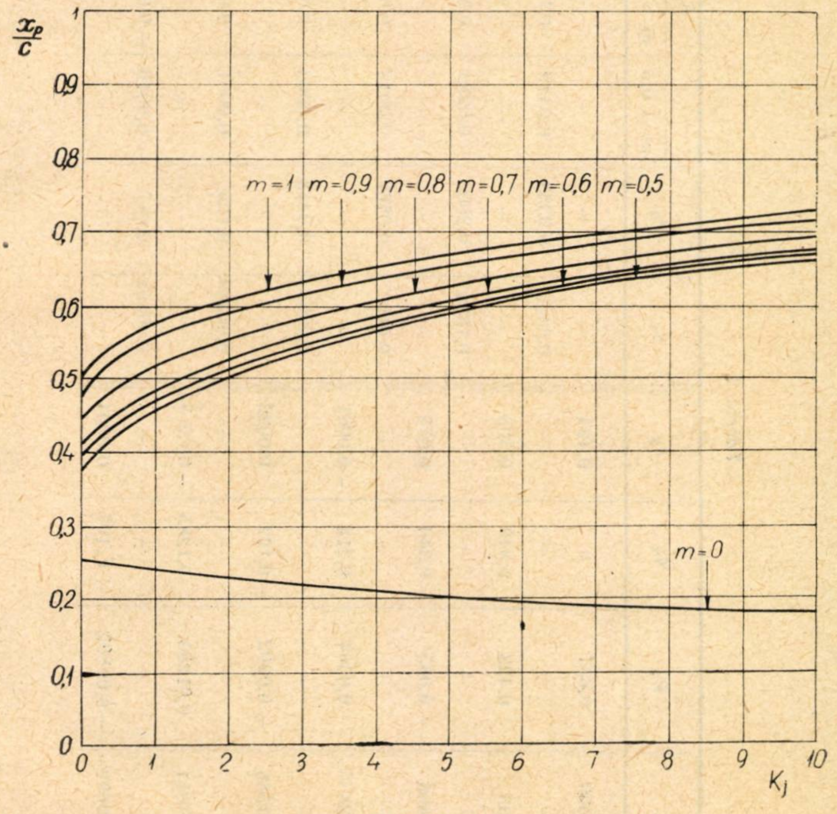


Fig. 12

Tabela 1

α	c_α	d_α	p_α	q_α	r_α	g_α	a_α	b_α			L_α
								$m = 0,5$	$m = 0,7$	$m = 0,9$	
0	0,16666	0,5000	0,637	0	0,424	—	—	—	—	—	—
1	—	—	—	—	—	0,6666	0,3333	0,0489	0,1495	0,2373	2,305
2	0,200	− 0,333	0,423	0,849	0,508	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	0,1334	0,2000	0,0284	0,07681	0,1264	3,4635
4	0,02856	− 0,0666	− 0,085	− 0,340	0,073	—	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	—	− 0,019	0,0860	0,0049	0,01839	0,0395	3,7520
6	0,003176	− 0,02856	0,0364	0,218	− 0,0081	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	0,0063	0,0413	− 0,0002	0,00213	0,0107	3,8605
8	0,000865	− 0,01588	− 0,0202	− 0,162	0,0022	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	− 0,00289	0,025	0,0001	0,00083	0,0027	3,9088
10	− 0,00037	− 0,01011	0,01285	0,1285	−0,00085	—	—	—	—	—	—
11	—	—	—	—	—	0,00155	0,017	− 0,0010	− 0,00239	− 0,0037	3,9385
12	0,000155	−0,00699	−0,00892	− 0,107	0,0004	—	—	—	—	—	—

Tabela 2

P_{nl}

$n \backslash l$	1	3	5	7	9	11
1	0,20	0,6857	0,1273	−0,0166	0,0045	−0,0022
3	0,2285	−0,0093	1,0043	0,1981	−0,027	0,008
5	0,0254	0,5976	−0,0018	1,407	0,2571	−0,0285
7	−0,0024	0,0849	1,0005	−0,00056	1,800	0,3142
9	0,0005	−0,009	0,1420	1,400	−0,00023	2,200
11	−0,00022	−0,0024	−0,0155	0,1999	1,800	−0,00021

Tabela 3

Q_{nl}

$n \backslash l$	1	3	5	7	9	11
1	−0,333	−0,3996	−0,0951	−0,0444	−0,0260	−0,017
3	−0,3996	−0,0285	−0,3489	−0,0767	−0,0350	−0,0209
5	−0,0951	−0,3488	−0,0101	−0,3400	−0,0717	−0,0341
7	−0,0444	−0,0767	−0,3399	−0,0051	−0,333	−0,0666
9	−0,0260	−0,0350	−0,0717	−0,333	−0,0031	−0,333
11	−0,0170	−0,0209	−0,0341	−0,0666	−0,333	−0,0025

Tabela 4

$K_j = 0{,}5$

s_{ni}

$n \backslash i$	1	3	5	7	9	11
1	0,2100	0,0687	0,0296	0,0152	0,0080	0,0046
3	0,0800	0,1470	0,0357	0,0145	0,0080	0,0041
5	0,0375	0,0417	0,1186	0,0192	0,0071	0,0046
7	0,0186	0,0176	0,0234	0,1029	0,0097	0,0033
9	0,0099	0,0090	0,0090	0,0134	0,0930	0,0042
11	0,0058	0,0052	0,0051	0,0048	0,0075	0,0864
S_i	0,3618	0,2892	0,2214	0,1700	0,1333	0,1075
Λ_i	0,9851	0,9470	0,7826	0,6258	0,5028	0,4112

Tabela 5

$K_j = 1{,}0$

s_{ni}

$n \backslash i$	1	3	5	7	9	11
1	0,3440	0,0699	0,0213	0,0119	0,0069	0,0050
3	0,1003	0,2280	0,0211	0,0071	0,0053	0,0034
5	0,0366	0,0373	0,1828	0,0031	0,0089	0,0037
7	0,0158	0,0116	0,0113	0,1597	−0,0098	0,0026
9	0,0070	0,0055	0,0039	−0,0014	0,1445	−0,0159
11	0,0046	0,0039	0,0039	0,0004	−0,0086	0,1310
S_i	0,5083	0,3562	0,2443	0,1808	0,1472	0,1298
Λ_i	1,3828	1,1729	0,8823	0,6757	0,5600	0,5571

Tabela 6

$K_j = 1{,}5$

s_{ni}

$n \backslash i$	1	3	5	7	9	11
1	0,4520	0,0498	0,0124	0,0108	0,0043	0,0036
3	0,1050	0,2910	−0,0018	0,0027	0,0068	0,0017
5	0,0308	0,0244	0,2340	−0,0229	0,0024	0,0051
7	0,0119	0,0068	−0,0046	0,2020	−0,0346	0,0023
9	0,0049	0,0048	0,0017	−0,0188	0,1865	−0,0367
11	0,0040	0,0027	0,0036	0,0017	−0,0267	0,1637
S_i	0,6186	0,3795	0,2453	0,1755	0,1387	0,1397
Λ_i	1,6003	1,2720	0,9035	0,6616	0,5364	0,5428

Tabela 7

$K_j = 2{,}0$

s_{ni}

$n \backslash i$	1	3	5	7	9	11
1	0,5430	0,0218	0,0066	0,0108	0,0075	0,0016
3	0,1033	0,3430	−0,0235	0,0024	0,0088	0,0001
5	0,0247	0,0090	0,2790	−0,0448	−0,0183	0,0109
7	0,0123	0,0063	−0,0208	0,2330	0,0570	−0,0210
9	0,0044	0,0041	0,0016	−0,0352	0,2050	−0,0566
11	0,0034	0,0020	0,0039	0,0037	−0,0419	0,1888
S_i	0,6911	0,3862	0,2468	0,1699	0,2181	0,1238
Λ_i	1,7792	1,3302	0,9213	0,6412	0,8352	0,4859

Tabela 8

$K_j = 3$

s_{ni}

i n	1	3	5	7	9	11
1	0,6950	−0,0474	0,0058	0,0145	−0,0024	0,0041
3	0,0888	0,4370	−0,0818	0,0106	0,0090	−0,0028
5	0,0169	−0,0221	0,3580	−0,0973	0,0158	0,0043
7	0,0082	0,0023	−0,0568	0,3160	−0,1035	0,0214
9	0,0035	0,0046	0,0064	−0,0734	0,2850	−0,0970
11	0,0028	0,0009	0,0034	0,0118	−0,0770	0,2270
S_i	0,8152	0,3753	0,2350	0,1822	0,1269	0,1570
Λ_i	2,0280	1,3510	0,8938	0,6845	0,4959	0,6134

Tabela 9

$K_j = 4$

s_{ni}

i n	1	3	5	7	9	11
1	0,8170	− 0,1213	0,0234	0,0052	0,0044	0,0021
3	0,0690	0,5170	− 0,1370	0,0097	0,0136	0,0058
5	0,0056	− 0,0530	0,4220	− 0,1340	0,0272	0,0223
7	0,0089	0,0057	− 0,0880	0,3710	− 0,1450	− 0,0505
9	0,0023	0,0043	0,0133	− 0,1040	0,3360	0,0780
11	0,0025	0,00005	0,0021	0,0208	− 0,1014	0,1920
S_i	0,9053	0,3527	0,2358	0,1687	0,1348	0,2497
Λ_i	2,1932	1,3515	0,8802	0,6509	0,5242	0,9745

Tabela 10

$K_j = 6$

s_{ni}

i n	1	3	5	7	9	11
1	1,0160	− 0,2740	0,0570	0,0097	− 0,0121	0,0101
3	0,0178	0,6600	− 0,2390	0,0644	− 0,0080	− 0,0139
5	0,0101	− 0,1194	0,5450	− 0,2390	0,0760	0,0088
7	0,0074	0,0199	− 0,1569	0,4830	− 0,2300	0,0710
9	0,0009	0,0014	0,0364	− 0,1730	0,4240	− 0,1800
11	0,0022	− 0,0005	− 0,0032	0,0440	− 0,1460	0,2950
S_i	1,0544	0,2874	0,2393	0,1891	0,1039	0,1734
Λ_i	2,4803	1,2883	0,8721	0,7116	0,4249	0,8363

Tabela 11

$K_j = 10$

s_{ni}

n \ i	1	3	5	7	9	11
1	1,3020	−0,5500	0,1900	−0,0389	−0,0109	0,0153
3	−0,0803	0,8960	−0,4380	0,1710	−0,0404	0,0013
5	0,0239	−0,2380	0,7470	−0,4120	0,1616	−0,0409
7	0,0033	0,0599	−0,2800	0,6590	−0,3650	0,1330
9	0,00003	−0,0108	0,0877	−0,2830	0,5500	−0,2550
11	0,0020	0,0016	−0,0196	0,0848	−0,2100	0,3460
S_i	1,2509	0,1587	0,2871	0,1809	0,0853	0,1997
Λ_i	2,8323	1,1346	0,9068	0,7264	0,3549	0,7671

Tabela 12

$\bar{e}_{ki}$

i \ k	1	3	5	7	9	11
1	1,6973	0,3380	−0,0486	0,0161	−0,0073	0,0049
3	−1,0191	0,7240	0,3396	−0,0661	0,1110	−0,0133
5	0,5337	−0,1342	0,6682	0,3140	−0,0668	0,0283
7	−0,3719	0,1198	0,0167	0,6520	0,2953	−0,0650
9	0,2873	−0,0941	0,0471	0,0770	0,6360	0,2825
11	−0,1804	0,0773	−0,0439	0,0182	0,1094	0,6420

Tabela 13

$\bar{\bar{e}}_{ki}$

i \ k	1	3	5	7	9	11
1	1,2940	0,5633	0,0750	−0,0122	0,0058	−0,0037
3	0,5633	0,8057	0,4761	0,0930	−0,0217	0,0122
5	0,0750	0,4761	0,8237	0,4666	0,0994	−0,0264
7	−0,0122	0,0930	0,4666	0,8301	0,4619	0,1031
9	0,0058	−0,0217	0,0994	0,4619	0,8338	0,4589
11	−0,0037	0,0122	−0,0264	0,1031	0,4589	0,8362

CONCLUZII

Rezultatele concretizate în diagramele din figurile 6, 7, 10, 11 şi 12 determină complet caracteristicile aerodinamice ale clasei de profile cu jet considerate ; trebuie să remarcăm că, pentru alte forme de profile, este probabil că valorile coeficienţilor aerodinamici nu vor diferi mult de cele calculate în această lucrare, dar că, în orice caz, determinarea scurgerii în jurul oricărui profil este mult simplificată prin folosirea metodei prezentate mai sus. Într-adevăr, pentru un profil oarecare, este suficient să se determine eventual pe cale grafică, funcţia F_p (ζ) (7) şi valorile coeficienţilor B_i (14), pentru ca întreaga mişcare, precum şi caracteristicile aerodinamice ale profilului considerat, să fie cunoscute.

Din punct de vedere practic, din lucrare se pot deduce avantajele folosirii profilului cu volet de curbură, atît din punct de vedere al portanţei, cît şi al poziţiei centrului de presiune ; folosirea metodei de suflaj cu ejecţie pe extrados [12], [13] elimină posibilitatea desprinderii scurgerii în punctul de schimbare a pantei, şi oferă în plus un spor de portanţă, datorit ejecţiei, prin efectul de volet *activ* de extrados.

Primită la redacţie la 26 iulie 1957.

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОФИЛЕЙ С ЖИДКИМ ЗАКРЫЛКОМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В первой части этой работы излагается метод определения комплексного потенциала возмущения f (ζ) (5), представляющего обтекание профилей с жидким закрылком [7].

Потенциал $f(\zeta)$ состоит из известной части F_Γ (ζ) (6), из части F_p (ζ) (7), зависящей от вида исследуемого профиля, и из неизвестной части $F(\zeta)$ (9). Решение задачи приводит к соотношению (10) позволяющему определить коэффициенты A_n (9). Показан способ определения этих коэффициентов по форме профиля, заключающийся в разложении правой части соотношения (10) в виде (14), где коэффициенты B_i зависят от формы профиля ; затем коэффициенты A_i пишутся в виде (24), где S_{ni} не зависят от формы профиля, а только от интенсивности струи K_j. Для S_{ni} имеется система линейных уравнений (25), решение которой получено путем последовательных приближений (таблицы IV — XI).

Таким образом исследование обтекания различных струйных профилей приводится к определению функции $F_p(\zeta)$ и коэффициентов B_i, при помощи которых соотношения (24) и (9) полностью определяют обтекание.

Во второй части рассмотрены два случая : прямолинейный профиль со струей (рис. 3) и профиль с закрылком и струей (рис. 4). Для пер-

вого случая функция $F_p(\zeta)$ имеет вид (28) и приводит к коэффициентам B_i (35), а для второго случая $F_p(\zeta)$ определяется соотношениями (44), (45) и (46) с коэффициентами B_i (66) ; подъемная сила находится соответственно из формул (38) и (68) и изображена на рис. 6 и 7.

В третьей части этой работы вычисляются аэродинамические моменты и позиция центра давления для двух рассмотренных случаев, причем получаются формулы (95) и (96) (рис. 10, 11, 12). Для прямолинейного профиля значения подъемной силы и момента находятся в хорошем согласии с опытами и с теоретическими результатами, полученными другими авторами более трудоемкими способами.

Из приведенных графиков видно, что профиль с закрылком и струей дает большую подъемную силу при одной и той же обдувке и в то же время центр давлений расположен ближе к передней кромке ; в результате профиль такого типа выгоднее с практической точки зрения ; во избежание отрыва потока с верхней части профиля рекомендуется применять метод обдувки с эжекцией [12, 13], дающий также добавочную подъемную силу.

Напомним, что результаты первой части нашей работы и матрицы коэффициентов S_{ni} (таблицы III — XI) могут быть использованы без изменений и для других задач, как например исследование крыльев конечного размаха с жидким закрылком по методу [9] или же для крыльев с струей с комбинированным эффектом [10].

LES CARACTÉRISTIQUES AÉRODYNAMIQUES DES PROFILS À VOLET FLUIDE

RÉSUMÉ

La première partie de l'article expose la méthode de détermination du potentiel complexe des perturbations $f(\zeta)$, (5), qui représente l'écoulement autour d'un profil à volet fluide [7].

Ce potentiel se compose d'une partie connue, $F_\Gamma(\zeta)$ (6), d'une partie ($F_P(\zeta)$, (7)) qui dépend de la forme du profil considéré et d'une partie inconnue $F(\zeta)$ (9). Les conditions aux limites conduisent à une relation (10) qui permet de déterminer les coefficients A_n (9). On montre ensuite comment on peut trouver ces coefficients, dépendants de la forme du profil, par développement de la partie droite de la relation (10), sous la forme (14), où les coefficients B_i dépendent du profil étudié ; on écrit ensuite les coefficients A_n sous la forme (24), en mettant en évidence les coefficients s_{ni}, qui sont fonction uniquement de l'intensité du jet, K_j. Pour déterminer ces derniers, la relation 10 conduit à un système d'équations linéaires (25), qui a été résolu par approximations successives (tableaux 4—11).

L'étude du mouvement autour de divers profils à jet se réduit ainsi à la déduction de la fonction $F_P(\zeta)$ et des coefficients B_i, à l'aide desquels l'écoulement est entièrement déterminé, de (24) et (9).

La seconde partie de l'article traite ainsi deux cas : profil rectiligne à jet (fig. 3) et profil à volet de courbure et jet (fig. 4). Dans le premier cas, la

fonction F_p (ζ) a la forme (28) et conduit aux coefficients B_i (35), tandis que dans le second cas, les fonctions F_p (ζ) et B_i sont données respectivement par (44), (45), (46) et (66) ; la portance s'exprime par les formules(38) et (68) (fig. 6, 7).

Dans la troisième partie, on calcule les moments aérodynamiques et la position du centre des pressions, pour le deux profils étudiés, en obtenant les formules (95) et (96) (fig. 10, 11, 12). Les valeurs trouvées pour le profil rectiligne sont en accord avec les expériences et les résultats théoriques obtenus par des méthodes plus laborieuses.

Des diagrammes présentés, on peut déduire que le profil à volet de courbure offre, à égalité de soufflage, une portance augmentée et en même temps une position du centre des presions plus avantageuse ; ce profil est donc à préférer en pratique. Afin d'éviter les décollements de la couche limite sur l'extrados, il y a lieu d'utiliser la méthode de soufflage par éjection [12], [13], qui offre en même temps un gain de portance supplémentaire.

Remarquons que les résultats de la première partie de ce travail et les matrices des coefficients s_{ni} (tableaux 4—11), peuvent aussi servir à l'étude d'autres problèmes, tel celui des ailes à jet d'envergure finie, par la méthode exposée en [9].

BIBLIOGRAFIE

1. I. M. DAVIDSON, *The jet flap.* Journ. of the Royal Aeronaut. Soc. Londra, ianuarie (1956).
2. MAURICE ROY, *Principes d'étude de l'aile à jet.* La Recherche Aéronautique, Paris, *52* (1956).
3. — *Théorie du profil d'aile à jets.* C. R. Acad. Sci. Paris, iunie (1956).
4. N. N. PATRAULEA, *Profile aerodinamice cu voleți fluizi.* Congresul matematicienilor romîni, 29 mai 1956.
5. R. SISTRUNCK, J. J. BERNARD, *Sur une méthode de détermination des potentiels de perturbation dans la théorie linéarisée du soufflage au bord de fuite des ailes.* C. R. Acad. Sci. Paris, 26 Mai 1956.
6. L. MALAVARD, PH. POISSON-QUINTON, P. JOUSSERANDOT, *Recherches théoriques et expérimentales sur le controle de la circulation par soufflage appliqué aux ailes d'avion.* ONERA N. T., Paris, *37* (1956).
7. N. N. PATRAULEA, *Contributions théoriques à l'étude des profils à volets fluides* (Jet-flap). IXe Congres Intern. de Méc. Appl., Bruxelles (1956).
8. D. A. SPENCE, *The lift coefficient of a thin, jet-flapped wing.* Proceedings of the Royal Society, Londra, Series A, *1212* (1956).
9. N. N. PATRAULEA, *Aripi de anvergură finită cu volet fluid.* Comunicările Acad. R.P.R., *1* (1957).
10. — *Profile aerodinamice cu jeturi cu efect combinat.* Comunicările Acad. R.P.R., *2* (1957).
11. N. N. PATRAULEA, E. LARISCH, *A theory for blown airfoils and airfoils with porous flaps.* Revue de Mécanique Appliquée, București, *2* (1956).
12. N. N. PATRAULEA, *La théorie des mouvements à sillages presque rectilignes et son application à l'hypersustention par soufflage des ailes.* IXe Congrès Intern. de Méc. Appl., Bruxelles, 1956.
13. N. N. PATRAULEA, L. DUMITRESCU, C. POPESCU, D. CĂPRIȚĂ, H. GAB, *Cercetări experimentale asupra profilelor aerodinamice suflate.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, *2* (1957).

[illegible] la forme (28) et comme une variante de (23). [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

BIBLIOGRAPHIE

[illegible]

PROFILE AERODINAMICE CU JET ÎN PREZENȚA SOLULUI

DE

LUCIAN DUMITRESCU

În lucrarea de față vom propune o metodă pentru studierea influenței apropierii de sol asupra caracteristicilor aerodinamice ale profilelor prevăzute cu jeturi de bord de fugă, pentru hipersustentație (jet-flap) [1] — [7], (fig. 1 *a*) ; metoda expusă folosește rezultatele anterioare obținute de N. N. Patraulea [2], [6].

Interesul rezolvării acestei probleme se poate deduce din faptul că, datorită circulațiilor considerabile care iau naștere pe asemenea profile, prezența solului modifică sensibil spectrul scurgerii precum și forma liniei de jet ; ca urmare, modificarea portanței profilelor de către prezența solului nu mai poate fi neglijată nici în prima aproximație.

1. Punerea problemei. Condiții la limite

Liniarizînd problema, vom considera mișcarea în jurul aripii ca fiind definită de un potențial complex de perturbație față de viteza curentului general $\overline{V}_\infty$, $f(z)=\varphi+i\psi$ $(z=x+iy)$. Condițiile la limite pentru determinarea acestui potențial vor fi și ele liniarizate ; pentru aceasta, presupunînd că în orice punct, înclinația θ a profilului sau jetului, față la viteza $\overline{V}_\infty$, este mică, condițiile la limite se vor scrie pe o linie CBA, paralelă cu solul (fig. 1 *b*), care nu se depărtează prea mult de linia reală a profilului și a jetului [6]. Efectul solului va fi luat în considerare prin plasarea unei imagini a aripii și jetului, simetrică față de linia Ox.

Neglijînd efectul imaginii aripii asupra vitezei orizontale de perturbație, în scrierea condițiilor la limită, acestea se pot enunța astfel : pe profil

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=h} = -\theta\cdot V_\infty \qquad (0 < x < 1), \qquad (1)$$

pe linia de jet

$$-\frac{1}{2}K_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=h} = \Gamma_\infty - \Gamma(x) \qquad (1 < x < \infty), \tag{2}$$

unde

$$K_j = \frac{I}{\frac{\rho}{2}V_\infty^2}, \tag{3}$$

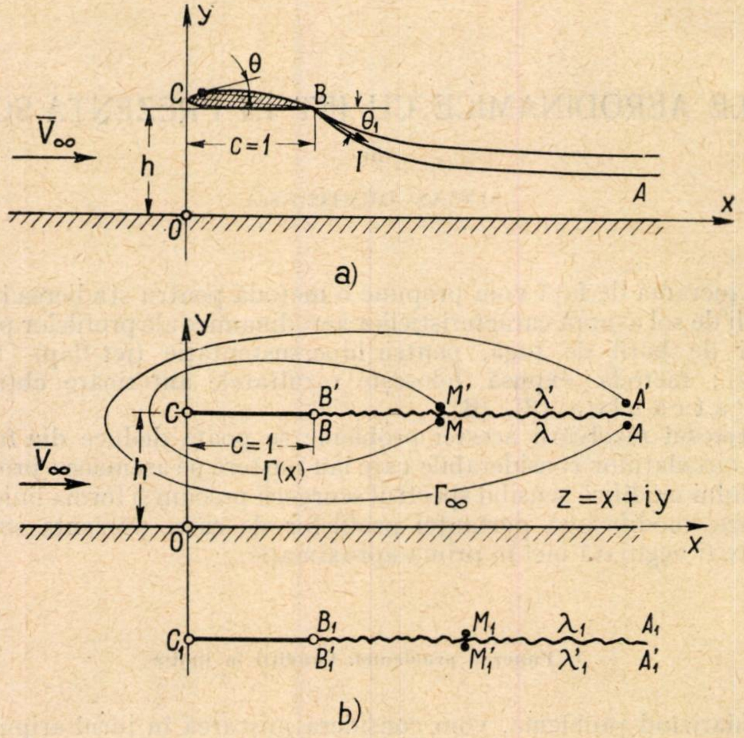

y
θ
C
B
θ₁
V∞
h
c=1
I
A
x
0
a)
y
B'
M'
λ'
A'
C
B
M
λ
A
c=1
Γ(x)
V∞
h
Γ∞
z=x+iy
0
x
C₁
B₁
M₁
λ₁
A₁
B'₁
M'₁
λ'₁
A'₁
b)

Fig. 1

I fiind debitul de impuls al jetului, iar restul notațiilor fiind vizibile pe figura 1.

Alegînd $\psi = 0$ pe axa Ox, rezultă următoarele condiții pentru imaginea aripii

$$\begin{aligned} \varphi(x, h) &= \varphi(x, -h), \\ \psi(x, h) &= -\psi(x, -h). \end{aligned} \tag{4}$$

Cu toate simplificările aduse, problema rămîne destul de dificilă, datorită în special faptului că, față de cele două fețe ale liniei $C\,B\,A$, care reprezintă aripa și jetul, nu se poate constata o simetrie a problemei, astfel încît nici potențialul φ nu va lua valori simetrice pe cele două fețe ale liniei $C\,B\,A$.

2. Reducerea problemei pe o semicoroană circulară

Transformarea conformă

$$z = \frac{h}{\pi}\left(z_1^2 - 2 \ln z_1 - 1 + i\pi\right) \tag{5}$$

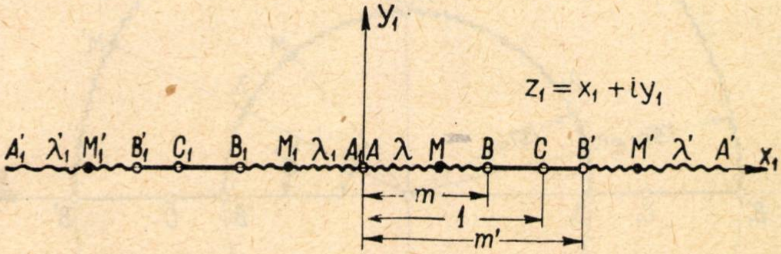


Fig. 2

reprezintă domeniul din planul z, cu excepția tăieturilor $A'\,B'\,C\,B\,A$ și $A_1\,B_1\,C_1\,B'_1\,A'_1$, pe semiplanul superior $z_1 = x_1 + iy_1$ (fig. 2), m și m' fiind abscisele imaginilor punctelor B și B'.

Apoi, prin transformarea

$$\ln \zeta = \frac{i\pi}{2}\left[\frac{m'}{K(k)}\int_0^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{\left(z_1^2 - m^2\right)\left(z_1^2 - m'^2\right)}} + 1\right], \tag{6}$$

unde $K\,(k)$ este integrala eliptică completă de speța întîia și modul k, iar

$$k = \frac{m}{m'}, \qquad k' = \sqrt{1 - k^2}, \tag{7}$$

se trece pe semicoroana circulară din figura 3, de raze 1 și e^{p}, cu

$$p = \frac{\pi}{2}\,\frac{K\,(k')}{K\,(k)}. \tag{8}$$

Două puncte omoloage M și M' (fig. 1 b) de afix $x+ih$ vor avea afixele transformate $\zeta_M = e^{i\sigma}$, $\zeta_{M'} = e^{p-}\cdot e^{i\sigma'}$, relația

$$\sigma' = S(\sigma) \tag{9}$$

putînd fi determinată și reprezentată grafic cu ajutorul expresiilor (5) și (6).

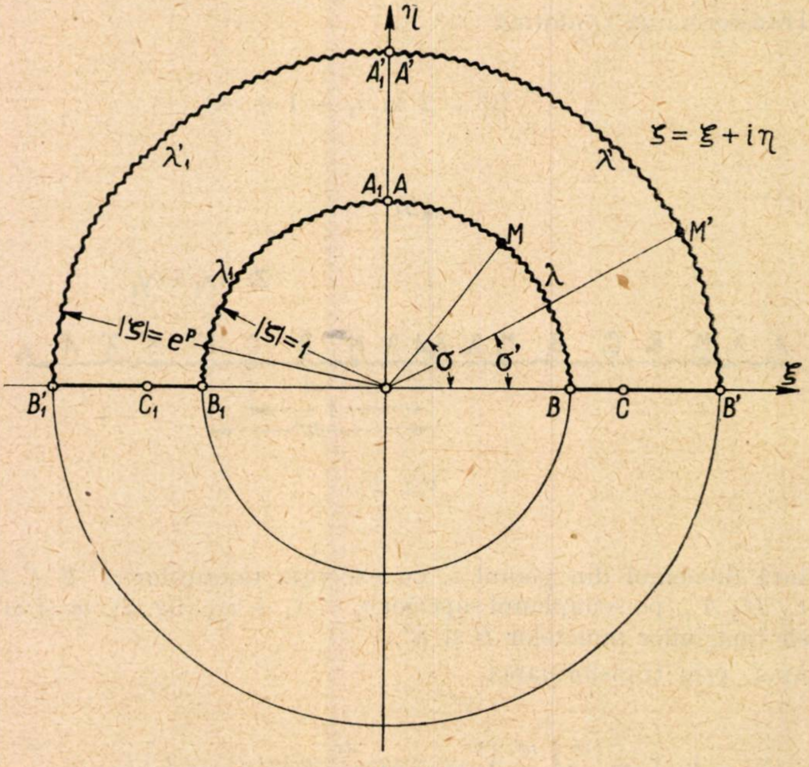


Fig. 3

3. Rezolvarea problemei

Fie

$$\psi_1 = \psi(0, h) = -\psi(0, -h) \tag{10}$$

valoarea — deocamdată nedeterminată — a funcției ψ în punctul C.

Atunci, într-un punct oarecare de pe profil, vom avea

$$\psi(x, h) = -\int_0^x \theta\, V_\infty\, dx + \psi_1 \qquad (0 < x < 1). \tag{11}$$

Partea imaginară a funcției *cunoscute*

$$f_p(\zeta) = \varphi_p + i\,\psi_p = \frac{2}{\pi}\int_1^{e^p} \frac{\psi(\xi)\cdot\xi\,d\xi}{\xi^2 - \zeta^2} \tag{12}$$

va lua atunci, pe liniile $B\,B'$ și $B_1\,B_1'$ din planul ζ, valorile prescrise de condiția la limită (1) de pe profil. Dacă vom scrie acum potențialul căutat al mișcării, sub forma

$$f(\zeta) = f_p(\zeta) + f_j(\zeta) \tag{13}$$

se poate vedea ușor că funcția $f_j(\zeta)$ va avea partea imaginară nulă pe axa $O\xi$, și deci va putea fi prelungită prin simetrie în toată coroana circulară din figura 3, admițînd o dezvoltare de forma

$$f_j(\zeta) = V_\infty \sum (A_n\,\zeta^n + B_n\,\zeta^{-n}). \tag{14}$$

Din condițiile de simetrie și din relațiile (4), se vede că coeficienții A_n și B_n sînt reali și de rang par.

Pentru determinarea acestor coeficienți, ne servim de condiția la limită de pe linia de jet (2), care devine

$$\begin{aligned} \frac{K_j}{2}\,V_\infty \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| \sum n\,(A_n - B_n)\cos n\sigma + V_\infty \sum (A_n + B_n)\cos n\sigma - \\ - V_\infty \sum (A_n\,e^{np} + B_n\,e^{-np})\cos n\sigma' = \Gamma_\infty + \varphi_p(\sigma') - \varphi_p(\sigma) - \\ - \frac{K_j}{2}\frac{d\psi_p}{d\sigma}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|, \end{aligned} \tag{15}$$

precum și de relația $\psi(\sigma) = \psi(\sigma')$

$$V_\infty \sum (A_n\,e^{np} - B_n\,e^{-np})\sin n\sigma' - V_\infty \sum (A_n - B_n)\sin n\sigma = \psi_p(\sigma') - \psi_p(\sigma). \tag{16}$$

Cu ajutorul relației (9) se pot exprima funcțiile $\cos n\sigma'$, $\sin n\sigma'$, $\varphi_p(\sigma')$ și $\psi_p(\sigma')$ în funcție de variabila σ (eventual dezvoltate în polinoame trigonometrice convenabile) și astfel, presupunînd în mod provizoriu coeficienții B_n cunoscuți, se deduc din (15), prin aproximații succesive, o serie de relații de forma

$$A_n = F_n(B_m) \qquad (n, m = 0,\ 2,\ 4,\ \cdots). \tag{17}$$

În mod analog, din (16) se pot obține relațiile

$$B_p = G_p(A_q) \qquad (p, q = 0,\ 2,\ 4,\ \cdots). \tag{18}$$

Combinarea relațiilor (17) și (18) permite aflarea coeficienților A_n și B_n.

Constanta necunoscută ψ_1 intervine în expresia funcției $f_p(\zeta)$ și a coeficienților A_n și B_n; pentru aflarea ei, se aplică relația

$$\varphi(A) - \varphi(A') = \Gamma_\infty, \tag{19}$$

care conduce la o relație între mărimile Γ_∞ și ψ_1.

În sfîrșit, circulația în jurul aripii se determină din relația [6]

$$\frac{1}{2} K_j \theta_1 V_\infty = \Gamma_\infty - \Gamma_{profil}, \tag{20}$$

θ_1 fiind unghiul de emisie al jetului la bordul de fugă al profilului.

Remarcăm că, pentru $K_j = 0$, se obține prin metoda de mai sus o soluție a problemei mișcării în jurul unui profil clasic (fără jet), în prezența solului [8].

Într-o lucrare ulterioară, ne propunem să aplicăm metoda expusă mai sus la studiul cîtorva probleme concrete.

Primită la redacție la 5 noiembrie 1957.

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОФИЛИ С СТРУЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Задача сводится к определению комплексного потенциала возмущения $f(z)$, $(z = x + iy)$, причем генерализованные граничные условия даются соотношениями (1) и (2) (рис. 1 *a*, *b*). Влияние земной поверхности заменяется рассматриванием подходящего отображения профиля и линии струи (рис. 1), что приводит к дополнительным условиям (4).

При помощи преобразований (5) и (6), плоскость отображается на полувенец (рис. 3), где потенциал $f(\zeta)$ имеет вид (13), причем функция $f_p(\zeta)$ известна. Нетрудно видеть, что остающаяся от $f(\zeta)$ часть $f_j(\zeta)$ оломорфна во всем венце и допускает разложение вида (19). Коэффициенты A_n и B_n определяются при помощи уравнений (15) и (16); в последних функции $\varphi_p(\sigma')\,\psi_p(\sigma')$, $\cos n\sigma' \sin n\sigma'$ надо будет заменить в зависимости от переменной σ, при помощи соотношения (9). Входящая в ψ_1 постоянная $f_p(\zeta)$ определяется при помощи соотношения (11), а общая циркуляция Γ_∞ определяется из (20).

PROFILS AÉRODYNAMIQUES À JET EN PRÉSENCE DU SOL

RÉSUMÉ

Le problème se réduit à la détermination d'un potentiel complexe de perturbation $f(z)$, $(z = x + iy)$, les conditions aux limites linéarisées étant données par (1) et (2) (fig. 1, *a*, *b*).

L'influence du sol est remplacée par la considération d'une image convenable du profil et de la ligne de jet (fig. 1, *b*), ce qui conduit aux conditions supplémentaires (4). A l'aide des transformations (5) et (6), on

représente le plan z sur la demi-couronne de la figure 3, où le potentiel a l'expression (13), la fonction $f_p(\zeta)$ étant connue (12). On remarquera que la partie restante de $f(\zeta)$, $f_l(\zeta)$ est holomorphe dans la couronne entière et admet un développement de la forme (14). La détermination des coefficients A_n et B_n a lieu à l'aide des équations (15) et (16) ; dans ces dernières, on devra remplacer les fonctions $\varphi_p(\sigma')$, $\psi_p(\sigma')$, $\cos n\sigma'$ et $\sin n\sigma'$ en fonction de σ, par l'intérmédiaire de (9). La constante ψ_1, qui intervient dans $f_p(\zeta)$ est déterminée à l'aide de (19), et la circulation totale Γ_∞, de la relation (20).

BIBLIOGRAFIE

1. I. M. DAVIDSON, *The Jet Flap.* Journ. of the Royal Aeronaut. Soc. Londra, V, *541* 60, (1956).
2. N. N. PATRAULEA, *Profile aerodinamice cu voleți fluizi.* Congresul matematicienilor romîni, 1956 ; Bul. științ. Acad.R.P.R., Secțiunea de științe matematice și fizice, IX, *2* (1957).
3. R. LEGENDRE, *Influence de l'émision d'un jet au bord de fuite d'un profil sur l'écoulement autour de ce profil.* C. R. Acad. Sci. Paris, 26 Mai 1956.
4. L. MALAVARD, *Sur une théorie linéaire du soufflage au bord de fuite d'un profil d'aile.* C. R. Acad. Sci. Paris, 26 Mai 1956.
5. M. ROY, *Principes d'étude de l'aile à jet.* La Recherche Aéronautique, ONERA Paris, *2* (1956).
6. N. N. PATRAULEA, *Contributions théoriques à l'étude des profils à volet fluide (jet-flap).* IXe Congres International de Mécanique Appliquée, Bruxelles, 1956.
7. N. N. PATRAULEA, L. DUMITRESCU, *Profile aerodinamice cu jet în curent limitat.* Comunicările Acad. R.P..R., VII, *7*, 657 (1957).
8. E. CARAFOLI, *Aerodinamica.* Ed. tehnică, București, 463 (1951).

AEROMECANICĂ

ASUPRA DEFLECTĂRII UNEI VÎNE LIBERE DE CURENT

DE

N. N. PATRAULEA

1. Introducere. Pentru diverse scopuri se pune problema deflectării unei vîne de curent cu un anumit unghi. Voi cita în mod special deflectarea unui curent produs de o serie de elici ale unui avion pentru a da curentului o direcție verticală, care să facă posibilă decolarea la verticală.

Problema deflectării unui curent a mai fost considerată în legătură cu sufleriile aerodinamice cu vînă liberă [1] *). În soluția dată acolo s-au făcut următoarele ipoteze simplificatoare pentru determinarea mișcării plane fluide corespunzătoare :

a) S-a înlocuit profilul printr-un vîrtej circulația în jurul lui fiind aceeași cu aceea care se formează în jurul profilului.

b) S-a admis că deflecția curentului este mică astfel încît condițiile la limită să se poată scrie pe drepte paralele cu o direcție medie, Ox.

Aproximația *b*), cu totul justificată pentru calcule privind corecțiile de suflerie, este discutabilă însă în cazul deflecțiunilor mari care se cer în alte scopuri ca de pildă cel menționat mai sus. În lucrarea de față noi vom renunța la această ipoteză de calcul și vom scrie condițiile la limită chiar pe liniile de discontinuitate care mărginesc vîna și care sînt necunoscute apriori.

2. Ipoteze și condiții la limită. Fie scurgerea plană permanentă, incompresibilă a unei vîne libere. Presupunem că fluidul exterior vînei este în repaus și că mișcarea în domeniul de scurgere este irotațională cu excepția unui vîrtej legat datorită căruia se realizează deflecția.

Spectrul liniilor de curent va avea o axă de simetrie pe care o alegem ca axă Oy, originea axelor coincizînd cu poziția vîrtejului (fig. 1).

În planul complex $z = x + iy$ asociat mișcării, viteza complexă la infinit amonte este $-V \cdot e^{i\alpha}$, iar la infinit aval $-V \cdot e^{-i\alpha}$, adică un unghi total de deflecție $2a$. Am admis prin aceasta că vîna are o direcție asimptotică la infinit și fie s secțiunea dreaptă a curentului la infinit.

---

*) E. Carafoli, *Aerodinamica*. Ed. tehnică, București, 1951, p. 468.

Deoarece s-a considerat că fluidul exterior vînei se găsește în repaus, rezultă, conform teoriei lui Helmholtz că viteza de scurgere pe liniile de discontinuitate λ_1, λ_2 care mărginesc vîna are modulul constant, egal cu V.

În sfîrșit, problema pare fizic determinată dacă se mai dă circulația Γ în jurul vîrtejului precum și poziția vîrtejului față de asimptotele liniilor λ_1 și λ_2 de la infinit amonte. Dacă presupunem că secțiunea s, de la infinit amonte este dată, pentru precizarea poziției vîrtejului față de asimptote va fi suficient să se dea distanța d_1 de la vîrtej la o asimptotă a liniei superioare de discontinuitate, λ_1.

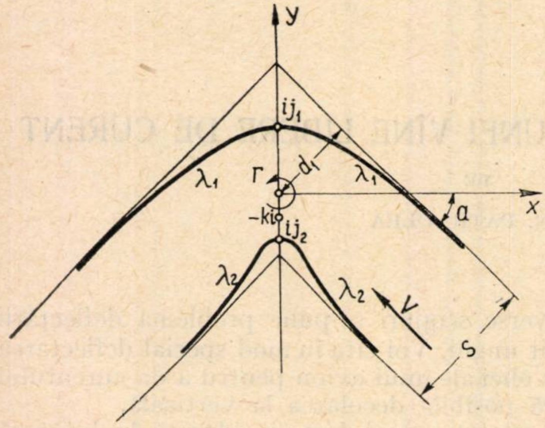


Fig. 1

3. **Aplicarea teoremei impulsului.** Înainte de rezolvarea matematică a problemei să vedem ce deducții se pot scoate din aplicarea teoremei impulsului la vîna de fluid închisă de liniile λ și de două suprafețe de control la infinit amonte și aval. Derivata componentei verticale a impulsului va fi $-2\rho sV \sin a$, ρ fiind masa specifică a fluidului. Aceasta trebuie egalată cu rezultanta forțelor de presiune aplicate de către fluidul exterior și de forța $-Y$ aplicată fluidului de către vîrtejul legat. Dar presiunile fiind constante de jur împrejurul vînei rezultanta lor va fi nulă, așa încît,

$$2\rho Vs \cdot \sin a = Y, \tag{3.1}$$

ceea ce arată că pentru a obține o deflecție anumită a vînei de curent trebuie aplicată o forță care este *independentă de poziția vîrtejului față de vînă de la infinit amonte.* Forța de portanță, Y, se poate pune și sub forma,

$$Y = \rho\Gamma V^\star, \tag{3.2}$$

unde prin $v^\star$ s-a însemnat viteza efectivă în dreptul vîrtejului. Așadar pentru a obține o deflecție dată, $2a$, produsul $\Gamma V^\star$ se poate calcula pe baza teoremei impulsului. Pentru a calcula însă pe fiecare în parte este necesar să se rezolve matematic problema. Se va arăta că valorile acestor două mărimi depind de poziția vîrtejului legat față de vîna de la infinit amonte. Din punct de vedere practic vor fi interesante acele poziții care implică, pentru producerea unei deflecțiuni anumite, circulații Γ cît mai mici și viteze efective cît mai mari.

4. Rezolvarea matematică a problemei. Presupunînd că soluția există, fie $z = z\,(\zeta)$ transformarea conformă a domeniului fizic de scurgere, necunoscut apriori în interiorul cercului unitar din planul complex auxiliar $\zeta = \xi + i\eta$ astfel încît imaginea vîrtejului să fie în centrul cercului (fig. 2). Imaginile punctelor de la infinit amonte, respectiv aval sînt $e^{i\alpha}$ și $-\alpha^{-i\alpha}$.

Fie mai departe $f(\zeta)$ potențialul complex al mișcării exprimat în funcție de variabila ζ și $w(\zeta)$ viteza complexă exprimată de asemenea în funcție de variabila ζ (adică se ia la puncte care se corespund în transformare conformă aceleași valori pentru w).

Vom vedea că aceste funcții se pot determina destul de ușor și atunci reprezentarea conformă va rezulta din relația

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{1}{w(\zeta)}, \tag{4.1}$$

ceea ce rezolvă, în esență, întreaga problemă.

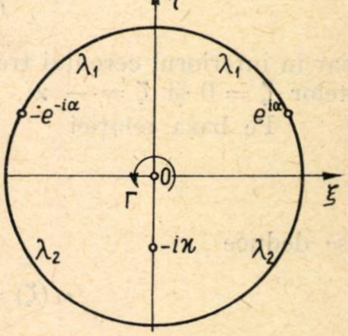


Fig. 2

Condițiile la limită pentru determinarea funcției $f(\zeta)$ sînt

$$\left.\begin{aligned} Im\, f(e^{i\theta}) &= -\frac{sV}{2}, \text{ pentru } \alpha < \theta < \pi - \alpha, \\ Im\, f(e^{i\theta}) &= \frac{sV}{2}, \text{ pentru } \alpha > \theta > \pi - \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

În afară de acestea, funcția $f(\zeta)$ este olomorfă peste tot în interiorul cercului cu excepția originii, unde există o singularitate logaritmică corespunzînd vîrtejului din planul fizic. Se deduce ușor că $f(\zeta)$ va avea expresia

$$f\,(\zeta) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \ln \zeta + \frac{sV}{\pi} \ln \frac{\zeta - e^{i\alpha}}{\zeta + e^{-i\alpha}} \cdot e^{i\alpha}. \tag{4.3}$$

Puțin mai dificilă este determinarea funcției $w(\zeta)$, care trebuie să satisfacă următoarelor condiții

$$|\,w\,| = \text{const} = V, \text{ pe cerc} \tag{4.4}$$

și în afară de aceasta ea devine infinită în origine și se anulează în un punct, $-\varkappa i$ $(\varkappa > 0)$. Punctul $-\varkappa i$ este imaginea punctului unde viteza este nulă în planul fizic. Există, în condițiile problemei un astfel de punct în planul fizic unde viteza este nulă, deoarece se știe că vîrtejul are o ,,atmosferă'' proprie în jurul său, adică un domeniu în jurul vîrtejului umplut mereu cu aceleași particule fluide. În cazul de față, pe semiaxa negativă, Oy și în vecinătatea vîrtejului vitezele au sensul opus sensului general al mișcării pînă la un punct $-ki$, unde viteza se anulează.

Pentru a construi mai ușor această funcție $w(\zeta)$ ne vom servi, așa cum se face în mod curent în astfel de ocazii, de funcția

$$\omega(\zeta) = \ln \frac{w}{V}, \tag{4.5}$$

care va trebui să satisfacă următoarelor condiții

$$Re\,\omega(\zeta) = 0, \text{ pe cerc}, \tag{4.6}$$

iar în interiorul cercului trebuie să fie olomorfă peste tot cu excepția punctelor $\zeta = 0$ și $\zeta = -\varkappa i$.

Pe baza relației

$$w(\zeta) = \frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} \cdot \tag{4.7}$$

se deduce

$$\omega(\zeta) = \ln \frac{1}{V} + \ln \frac{df}{d\zeta} + \ln \frac{d\zeta}{dz} \cdot \tag{4.8}$$

În punctele menționate $\zeta = 0$ și $\zeta = -\varkappa i$, ω va avea singularități datorită numai funcției $\ln \frac{df}{d\zeta}$, deoarece $\frac{d\zeta}{dz}$ nu poate deveni nici nulă nici infinită în cerc, reprezentarea fiind presupusă conformă. Din (4.3), rezultă că în vecinătatea originei, funcția $\frac{df}{d\zeta}$ este de forma

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} + \text{funcție olomorfă de } \zeta, \tag{4.9}$$

așa încît funcția,

$$\omega_1(\zeta) = \omega(\zeta) + \ln \zeta, \tag{4.10}$$

va fi olomorfă în vecinătatea originei.

În ceea ce privește punctul $\zeta = -\varkappa i$ este clar că $\frac{df}{d\zeta}$ se anulează aici, deoarece $w(-\varkappa i) = 0$, iar $\frac{d\zeta}{dz} \neq 0$ (relația (4.7)). Urmează atunci că funcția $\ln \frac{df}{d\zeta}$ are o dezvoltare în jurul acestui punct de forma:

$$\ln \frac{df}{d\zeta} = \ln\, [A_1(\zeta + \varkappa i) + \ldots A_n(\zeta + \varkappa i)^n + \ldots]. \tag{4.11}$$

Funcția $\ln \frac{df}{d\zeta} - \ln(\zeta + \varkappa i)$ va fi olomorfă în această vecinătate.

Din discuția de mai sus rezultă că funcția

$$\omega_2 = \omega(\zeta) + \Omega(\zeta), \tag{4.12}$$

unde

$$\Omega(\zeta) = \ln \frac{\zeta}{\zeta + \varkappa i}$$

este olomorfă peste tot în interiorul cercului, adică,

$$\omega(\zeta) = -\Omega(\zeta) + \text{funcție olomorfă în cerc.} \tag{4.13}$$

Deoarece $Re\,\omega = 0$ pe cerc, se poate scrie imediat expresia funcției, care satisface relația de mai sus,

$$\omega(\zeta) = -\left[\Omega(\zeta) - \bar{\Omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] + C \tag{4.14}$$

și deci luînd constanta pur imaginară, C de natură ca să fie compatibilă cu direcția vitezei în domeniul considerat, vom avea

$$\omega(\zeta) = \ln \frac{\zeta + \varkappa i}{\zeta(-1 + \varkappa i\zeta)}, \tag{4.15}$$

de unde

$$w = V \frac{\zeta + \varkappa i}{\zeta(-1 + \varkappa i\zeta)}. \tag{4.16}$$

Ținînd seama de expresia potențialului complex $f(\zeta)$ dată de (4.3), de viteza complexă (4.14) precum și de relația (4.1) se deduce

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{\Gamma}{2\pi i V} \cdot \frac{\varkappa i\zeta - 1}{\zeta + \varkappa i} + \frac{2s}{\pi} \frac{\cos\alpha \cdot \zeta(\varkappa i\zeta - 1)}{\zeta - e^{i\alpha}}. \tag{4.17}$$

Parametrii din această relație nu sînt toți independenți. Astfel funcția $\frac{dz}{d\zeta}$ nu poate deveni infinită și pentru aceasta este necesar ca coeficientul lui $\frac{1}{\zeta + \varkappa i}$ din relația de mai sus să se anuleze în punctul $\zeta = -\varkappa i$. Din această condiție se deduce relația

$$\frac{\Gamma}{sV} = \frac{4\varkappa\cos\alpha}{|\varkappa i + e^{i\alpha}|^2}. \tag{4.18}$$

Pe de altă parte, deflecția totală, $2a$, este legată de $\varkappa$ și α prin relația,

$$e^{ia} = \frac{1 + \varkappa i e^{-i\alpha}}{1 - \varkappa i e^{i\alpha}}, \tag{4.19}$$

care se obține dînd lui ζ, în (4.16), valoarea $e^{i\alpha}$.

Reprezentarea conformă se obține acum integrînd ecuația (4.17)

$$z = \frac{\Gamma\varkappa}{2\pi V} \cdot \zeta + \frac{s}{\pi}\left[e^{ia}\ln(1 + \zeta e^{i\alpha}) - e^{-ia}\ln(1 - \zeta e^{-i\alpha})\right]. \tag{4.20}$$

În această formulă trebuie considerate acele ramuri ale logaritmilor pentru care părțile lor imaginare sînt cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$.

5. Parametrii importanți adimensionali. Vom adopta mai departe, următorii parametrii adimensionali

$$\bar{z} = \frac{z}{s}\,; \quad \bar{I_1} = \frac{I_m\, z(i)}{s}\,; \quad \bar{I}_2 = \frac{Im\, z(-i)}{s}\,,$$

$$\bar{d_1} = \frac{d_1}{s}\,; \quad \bar{\Gamma} = \frac{\Gamma}{Vs}\,; \quad \bar{f}(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{Vs}$$

$$\bar{w}(\zeta) = \frac{w}{V}\,; \quad \bar{v}^{\star} = \frac{v^{\star}}{V}\,,$$

$\bar{c} = \frac{c}{s}$, coarda adimensională a unui profil care ar realiza circulația Γ,

c_z, coeficient unitar de portanță, definit prin raportarea forței portante la $\frac{\rho}{2}\, cV^2$,

c_z^{*}, coeficient unitar de portanță definit prin raportarea forței portante la $\frac{\rho}{2}\, c\, v^{\star 2}$.

Cu aceste notații formulele principale stabilite pînă acum se vor scrie

$$\bar{f}(\zeta) = \frac{\bar{\Gamma}}{2\pi i} \ln \zeta + \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{\zeta - e^{i\alpha}}{\zeta + e^{-i\alpha}} \cdot e^{i\alpha} \right), \tag{5.1}$$

$$\bar{w}(\zeta) = \frac{\zeta + \varkappa i}{\zeta(\varkappa i\, \zeta - 1)}\,, \tag{5.2}$$

$$\bar{\Gamma} = \frac{4\, \varkappa \cos \alpha}{|\varkappa i + e^{i\alpha}|^2} = \frac{4 \sin \frac{a}{2}}{|1 + \varkappa i\, e^{-i\alpha}|}\,, \tag{5.3}$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{\Gamma} \cdot \varkappa}{2\pi} \cdot \zeta + \frac{1}{\pi} \left[e^{ia} \ln (1 + \zeta\, e^{i\alpha}) - e^{-ia} \ln (1 - \zeta\, e^{-i\alpha}) \right]. \tag{5.4}$$

Identitatea celor două expresii pentru $\bar{\Gamma}$ de la (5.3) se stabilește folosind relația (4.19) [1]).

---

[1]) A se vedea figura 3 și să se remarce că din (4.19) rezultă că $\frac{a}{2} = \arg\,(1 + \varkappa\, ie^{-i\alpha})$.

Din (5.4) se deduce ecuația liniilor de discontinuitate, în funcție de argumentul variabilei ζ, θ:

$$\left.\begin{aligned} \pi\bar{x} &= \frac{\bar{\Gamma}\,\varkappa\cos\theta}{2} + \cos a \ln\left|\frac{\cos\frac{\theta+\alpha}{2}}{\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}\right| - (\sin a)\left(\theta + \varepsilon\frac{\pi}{2}\right), \\ \pi\bar{y} &= \frac{\bar{\Gamma}\,\varkappa\sin\theta}{2} + (\cos a)\left(\alpha - \varepsilon\frac{\pi}{2}\right) + \sin a \ln\left|4\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\right| \\ &\varepsilon = -1 \text{ pentru } \theta > \alpha, \\ &\varepsilon = 1 \quad \text{ pentru } \theta < \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

Din expresia lui y de mai sus se obține y_1 și y_2

$$\bar{y}_1,\ \bar{y}_2 = \pm\frac{\bar{\Gamma}\varkappa}{2\pi} + \left(\frac{\alpha}{\pi} \pm \frac{1}{2}\right)\cos a + \frac{\sin a}{\pi}\ln 4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{4}\right). \tag{5.6}$$

Distanța, $\bar{d}_1$, de la vîrtej la o asimptotă superioară va fi dată de relația

$$\bar{d}_1 = \lim_{\zeta \to e^{i(\alpha+0)}} \bar{z} \cdot e^{ia}.$$

Ținînd seama de (5.9) și efectuînd calculele, se obține

$$\bar{d}_1 = \frac{1}{2} + \frac{\bar{\Gamma}}{2\pi}\varkappa\sin(a+\alpha) + \frac{1}{\pi}\left[\alpha\cos 2a + \sin 2a \ln\cos\alpha\right]. \tag{5.7}$$

Din egalitatea expresiilor

$$\rho\Gamma\,\bar{v}^{\star} = 2\rho s V^2 \sin a = \frac{\rho}{2}\, c\bar{v}^{\star 2}\ c_z^{*} = \frac{\rho}{2}\, cV^2 c_z, \tag{5.8}$$

care reprezintă portanța sub diferite forme, se deduce mai departe

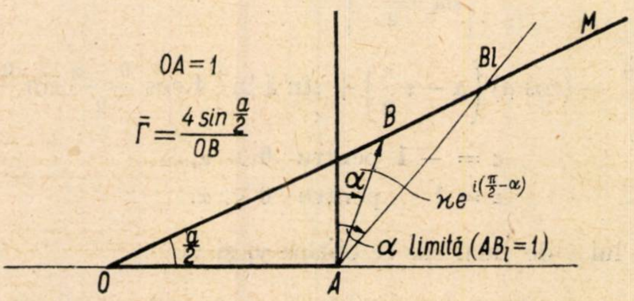
$$\bar{v}^{\star} = \frac{2\sin a}{\bar{\Gamma}}\ ;\ c_z^{*} = \frac{\bar{\Gamma}^2}{\bar{c}\sin a}\ ;\ c_z = \frac{4}{c}\sin a. \tag{5.9}$$

6. Procedeul pentru calcule numerice și cîteva rezultate numerice. Pentru efectuarea calculelor numerice se poate proceda în felul următor:

a) Se alege o valoarea pentru unghiul de deflecție dorit $2a$.

b) Se ia ca parametru independent unghiul α și se dă valori acestui parametru, cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$.

c) Cu ajutorul relației (4.19) sau cu ajutorul construcției geometrice din figura 3, se calculează $\varkappa$ și $|1 + e^{i(\pi-\alpha)}|$. În construcția geometrică, aceste ultime elemente sînt egale respectiv cu lungimea segmentelor AB și OB. Se înțelege că sînt excluse acele valori ale lui α cărora le corespund valori supraunitare pentru $\varkappa$.



OA=1
$\bar{\Gamma} = \frac{4\sin\frac{a}{2}}{OB}$
M
Bl
B
α
$\varkappa e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$
$\frac{a}{2}$
α limită ($AB_l = 1$)
O
A

Fig. 3

d) Cu ajutorul formulei (5.4) se determină circulația sau geometric,

$$\overline{\Gamma} = \frac{4\sin\dfrac{a}{2}}{OB}.$$

e) Se calculează mai departe parametrii $v^\star$, $c_z^\star$, c_z dați de (5.9), liniile de discontinuitate cu ajutorul formulei (5.5), distanța $\overline{d_1}$ etc.

f) Se repetă calculele pentru altă valoare a unghiului α.

Dăm mai jos rezultate numerice corespunzînd semiunghiurilor de deflecție $a = 20°$ și $a = 45°$.

Tabela 1

Parametrii diverselor mișcări pentru $a = 20°$

($c.c_z = 1{,}373$)

$\alpha°$	$\varkappa$	$\overline{\Gamma}$	$v^\star$	$\bar{c} \cdot c_z^\star$	$\overline{d_1}$	$\overline{y_1}$	$\overline{y_2}$
−80	0,495	1,32	0,519	5,05	−0,290	0,306	−1,376
−70	0,335	1,00	0,686	2,90	−0,056	0,306	−1,121
−50	0,222	0,816	0,840	1,94	0,182	0,377	−0,844
−30	0,185	0,748	0,915	1,62	0,339	0,421	−0,584
0	0,175	0,680	1,02	1,34	0,5	0,565	−0,413
30	0,225	0,615	1,11	1,045	0,615	0,648	−0,216
50	0,333	0,548	1,25	0,87	0,642	0,676	−0,100
60	0,495	0,480	1,43	0,67	0,651	0,676	−0,099

Tabela 2

Parametrii diverselor mişcări pentru $a = 45°$

$(c.c_z = 2{,}83)$

$\alpha°$	$\varkappa$	$\overline{\Gamma}$	$\overline{v}^*$	$\overline{c} \cdot c_z^*$	$\overline{d}_1$	$\overline{y}_1$	$\overline{y}_2$
−80	0,70	4,52	0,313	28,80	−0,425	0,854	−1,956
−70	0,56	2,98	0,473	12,45	0,270	0,671	−1,353
−60	0,478	2,42	0,585	8,27	0,459	0,585	−0,863
−50	0,425	2,09	0,675	6,16	0,570		
−40	0,4	1,9	0,742	5,07	0,648		
−30	0,382	1,765	0,797	4,4	0,709	0,590	−0,579
−20	0,38	1,62	0,87	3,72	0,743		
−10	0,39	1,51	0,93	3,22	0,770		
0	0,415	1,42	0,995	2,82	0,784	0,596	−0,301
10	0,455	1,31	1,08	2,4	0,793		
20	0,522	1,204	1,17	2,03	0,793		
30	0,633	1,07	1,31	1,6	0,785	0,580	−0,096
40	0,84	0,915	1,535	1,18	0,760	0,558	−0,049

7. Observaţii şi concluzii. În urma calculelor efectuate mai sus rezultă următoarele : *a*) Deoarece $\overline{\Gamma} = \dfrac{4 \sin \dfrac{a}{2}}{OB}$ (fig. 3) rezultă că pentru o anumită deflecţie $2a$, *circulaţia necesară va fi cu atît mai mică cu cît OB este mai mare.* S-ar părea deci, că elementele optime în construcţia geometrică din figura 3 corespund intersecţiei liniei *OM* cu un cerc unitar avînd centrul în *A*. Nu trebuie uitat însă că fluidul s-a presupus ideal în teorie, ori în vecinătatea acestei valori limită pentru *OB*, corespund valori foarte mici pentru $\overline{y}_2$ (a se vedea tabelele 1 şi 2). Vîrtejul fiind foarte apropiat de linia de discontinuitate, influenţa frecării dintre fluidul vînei şi fluidul exterior, în repaus, nu mai poate fi neglijată.

Pe de altă parte, dacă circulaţia este obţinută cu ajutorul unui profil clasic, este clar că înlocuirea acestuia prin un vîrtej nu este justificată decît în cazul cînd coarda profilului este mică în raport cu distanţa de la vîrtej la linia de discontinuitate.

Dacă circulaţia este obţinută cu ajutorul unui cilindru rotitor, pare posibil să se ia o valoare a parametrului α mai apropiată de valoarea limită.

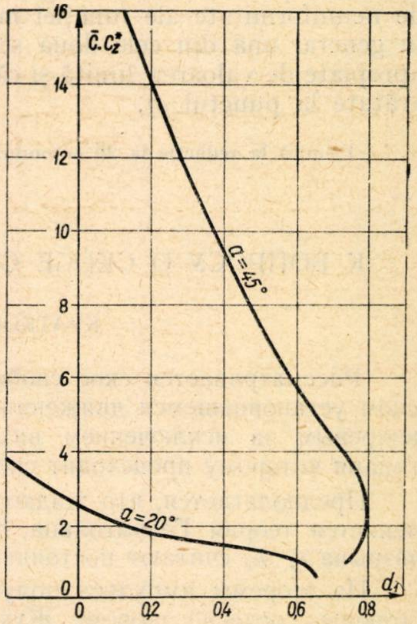


Fig. 4

b) În cazul cînd circulaţia se obţine cu ajutorul unui profil clasic, numărul $\bar{c}\cdot c_z^{\star}$ introdus mai sus exprimă un criteriu pentru posibilitatea de a realiza circulaţia necesară. Dar acest număr este proporţional cu $\bar{\Gamma}^2$, de unde se deduce importanţa pe care o prezintă alegerea parametrului α, cît mai aproape de valoarea sa limită arătată la punctul *a*).

c) Din tabelele numerice prezentate s-au dedus diagramele din figura 4, care pun în lumină un fapt de mare importanţă practică şi anume că pentru realizarea unei aceleiaşi deflecţii, valorile mici ale circulaţiei necesare, corespund în general, valorilor mari ale distanţei d_1, adică *este bine ca vîrtejul, respectiv profilul, să fie situat către partea inferioară a vînei care trebuie deflectată către în jos*. De altfel din diagrame se vede că valorile corespunzătoare ale numărului $\bar{c}\cdot c_z^{\star}$ variază mult cu poziţia vîrtejului faţă de vîna de la infinit amonte. Se vede de asemenea că variaţia este mai pronunţată pentru deflecţiunile mari.

d) Din tabelele de mai sus, trebuie eliminate, eventual, rezultatele care corespund acelor valori ale lui α pentru care $d_1 < 0$.

Credem că neconsiderarea acestor situaţii, nu este o necesitate de ordin fizic ci mai curînd o necesitate de ordin practic şi anume profilul fiind în afara vînei în momentul iniţial, amorsarea fenomenului nu este posibilă (cu excepţia poate a adoptării unor dispozitive speciale).

e) Din figura 4 se observă că este posibil ca pe anumite intervale de variaţie a variabilei $\bar{d}_1$, funcţia $c_z^{\star}(d_1)$ să nu fie uniformă. Aceasta înseamnă că pentru aceeaşi deflecţie totală şi pentru aceeaşi poziţie a vîrtejului sînt posibile două scurgeri diferite. Se remarcă însă că intervalele de neuniformitate ale funcţiei menţionate sînt de mică importanţă şi că în general una din cele două scurgeri posibile corespunde valorilor lui α apropiate de valoarea limită şi că deci trebuie să fie eliminată din motivele arătate la punctul *a*).

Primită la redacţie la 29 octombrie 1957.

К ВОПРОСУ О СКОСЕ СВОБОДНОЙ СТРУИ ЖИДКОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается скос свободной струи идеальной жидкости в плоском установившемся движении. Движение в струе предполагается безвихревым за исключением вихря, связанного с циркуляцией Γ, благодаря которому происходит скос струи на угол $2\,a$.

Предполагается, что жидкость вне струи находится в покое, и применяется теория Гельмгольца, то есть на заранее неизвестных линиях разрыва λ_1, λ_2 считают постоянным модуль скорости V.

Из теоремы импульса получается подъемная сила (5.1). С другой стороны, согласно теореме Жуковского, подъемная сила дана соотношением (3. 2), где $v^{\star}$ — эффективная скорость.

Определяется комплексный потенциал (4. 3) внутри единичного круга в плоскости ζ и комплексная скорость (4. 16). Далее следует конформное отображение (4. 20).

После введения безразмерных параметров главные формулы получают вид: (5. 1), (5. 2), (5. 3), (5. 4). (5, 5) представляют уравнения линий разрыва.

Расстояние d_1 от вихря до верхней асимптоты дано соотношением (5. 7). Определяется местный коэффициент подъемной силы делением подъемной силы на $\frac{\rho}{2} cv^{\star 2}$.

В параграфе 6 дается метод численного расчета и приводятся две численные таблицы для основных параметров, соответствующих $a = 20°$ и $a = 45°$.

На рис. 4 показано влияние положения вихря относительно струи на бесконечности вверх по течению, на значение $\overset{\star}{c}_z$ необходимое для осуществления данного отклонения струи. Оказывается, что весьма выгодно помещать крыло во внутреннюю часть струи.

Рассматриваются также другие стороны теоретических и численных результатов.

SUR LA DÉFLEXION D'UNE VEINE LIBRE FLUIDE

RÉSUMÉ

L'auteur étudie la déflexion d'une veine infinie de fluide parfait, incompressible, en mouvement plan, permanent.

Le mouvement est supposé irrotationnel, à l'exception d'un tourbillon lié de circulation Γ, qui réalise la déflexion d'angle $2a$. Le fluide extérieur à la veine est supposé au repos et l'on applique la théorie de Helmholtz, c'est-à-dire qu'on admet que, sur les lignes de discontinuité λ_1, λ_2, la vitesse a un module constant, V. Du théorème de l'impulsion, résulte la force portante (5.1) qui peut aussi être écrite sous la forme (3.2) où $v^\star$ est la vitesse effective.

On établit le potentiel complexe (4.3) à l'intérieur du cercle unitaire du plan ζ et la vitesse complexe (4.16) et l'on en tire la représentation conforme (4.20).

Quelques paramètres sans dimensions sont introduits et les principales formules obtenues deviennent (5.1), (5.2), (5.3), (5.4). § (5.5) représentent les équations des lignes de discontinuité.

La distance d_1 du tourbillon à une asymptote supérieure est donnée par (5.7). On définit un coefficient local de portance $\overset{\star}{c}_z$, en rapportant la force portante à $\frac{\rho}{2} cv^{\star 2}$.

Dans le 6e paragraphe, on indique une méthode de calcul numérique et l'on donne deux tableaux avec les valeurs des principaux paramètres correspondant à $a = 20°$ et $a = 45°$.

Dans la figure 4, on montre l'influence de la position du tourbillon par rapport à la veine à l'infini amont, sur le $c_z^{\star}$ nécessaire pour réaliser une déflexion donnée.

On constate qu'il est fort avantageux de placer l'aile à la partie inférieure de la veine qui doit être défléchie vers le bas.

On discute également certains autres aspects des résultats théoriques et numériques.

AEROMECANICĂ

STABILITATEA DINAMICĂ, ÎN ZBOR ORIZONTAL, A ELICOPTERELOR AVÎND ROTOARE CU PALE PRINSE ELASTIC DE BUTUC*)

DE

AL. MARINESCU

NOTAȚII

$Oxyz$ — sistem de axe de coordonate rigid legate de corpul elicopterului;

R — raza rotorului;

r — raza unui element de pală față de axul de rotație;

h — distanța planului articulațiilor de bătaie **), față de centrul de greutate;

d — distanța punctului neutru al rotorului față de planul articulațiilor;

a — distanța articulațiilor față de axul de rotație;

t_p — profunzimea palei (constantă);

V_0 — viteza de zbor orizontal;

w — viteze induse axiale;

V_x, V_y, V_z — viteza de translație a elicopterului în direcțiile axelor x, y, z;

$\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z$ — perturbațiile vitezelor în direcția axelor x, y, z;

$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ — viteze de rotație a elicopterului în jurul axelor x, y, z;

$\Delta\Omega_x, \Delta\Omega_y, \Delta\Omega_z$ — perturbațiile vitezelor de rotație în jurul axelor x, y, z;

$U = \omega R$ — viteza periferică a palei;

---

*) În unele lucrări se utilizează denumirea „rotoare cu pale rigide", în altele „rotoare cu pale cantilever".

**) Legătura elastică a palei se asimilează într-o schemă simplificată cu o articulație și un resort (fig. 1).

$\xi\omega R$ — viteza aerului care lovește elementul de pală paralel cu axul rotorului;

$\eta\omega R$ — viteza aerului care lovește elementul de pală în planul de rotație;

ω — viteza unghiulară a rotorului care se presupune constantă;

ω_0 — $\frac{K}{I}$ = frecvența proprie a palei;

R_t — forța rezultantă a rotorului;

R_x, R_y, R_z — forțe aerodinamice în direcția axelor x, y, z;

$\Delta R_x, \Delta R_y, \Delta R_z$ — perturbațiile forțelor aerodinamice în direcția axelor x, y, z;

G_x, G_y, G_z — componentele greutății de-a lungul axelor x, y, z;

R_p — rezistența pasivă a elicopterului;

M_x, M_y, M_z — momente ale forțelor aerodinamice în jurul axelor x, y, z;

$\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_z$ — perturbații ale momentelor forțelor aerodinamice în jurul axelor x, y, z;

M_s — momentul forțelor aerodinamice de pe pală în raport cu punctul $r = a$;

M_d — cuplul motor în sbor orizontal;

M_g — momentul greutății palei în raport cu punctul $r = a$;

$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ — unghiuri de poziție a axelor x, y, z față de direcția verticalei;

$\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z$ — perturbații ale unghiurilor de poziție;

θ_0 — unghiul de așezare la punct fix al profilului palei (netorsionată);

i_r — unghiul total de incidență al palei;

β — unghiul de bătaie al palei;

χ — unghiul azimutal al palei măsurat dinspre înapoi;

α — unghiul de înclinare prin comandă a planului vîrfurilor palelor față de direcția de zbor;

i — unghiul de incidență al rotorului;

$\mu \sim \frac{V_0}{\omega R}$ — grad de înaintare;

$\lambda = \lambda' + \lambda'' = \frac{V_0 \sin i - w}{\omega R} - \frac{V_0 \sin\alpha}{\omega R}$ — grad de permeabilitate;

$x = \frac{r}{R}$,

$\zeta = \frac{h}{R}$,

z — numărul de pale ale rotorului;

$\sigma = \frac{z t_p}{\pi R}$ — soliditatea rotorului;

$B = 1 - \frac{t_p}{2R}$ — factor de scădere a portanței la capătul palei;

C_a' — panta curbei de portanță a profilului palei;

C_z — coeficientul de portanță al profilului palei;

C_x — coeficientul mediu de rezistență al profilului palei (constant);
C_{xf} — coeficient de rezistență pasivă;
K — constanta de rigiditate a palei la încastrare;
$\gamma = \frac{\rho C'_a t_p R^4}{I}$ — constanta masei palei;
ρ — densitatea aerului;
g — accelerația gravitației;
t — timpul;
m_p — masa palei pe unitate de lungime;
$M_p = \int_0^R m_p \, r dr$,
I — momentul de inerție al palei în raport cu un ax trecînd prin $r = a$;
I_r — momentul polar de inerție al rotorului;
I_x, I_y, I_z — momente de inerție ale elicopterului față de axele x, y, z;
S_f — suprafața frontală a fuselajului.

Problema stabilității dinamice în zbor orizontal a elicopterelor cu rotoare avînd palele articulate a fost studiată și putem menționa în referințele [1], [2], [3] lucrări excelente.

În ceea ce privește însă elicopterele cu rotoare avînd palele prinse elastic de butuc nu putem afirma același lucru.

De aceea în lucrarea de față ne propunem să studiem stabilitatea dinamică în zbor orizontal a elicopterului cu rotor antrenat prin jet și a celui cu rotoare coaxiale contrarotative, la care se utilizează prinderea elastică a palei rotorului de butuc.

I. CONSIDERAȚII CU PRIVIRE LA ZBORUL ORIZONTAL DE REGIM

O analiză riguroasă a fenomenelor care au loc pe rotoarele elicopterelor de care ne ocupăm este fără îndoială dificilă dacă nu imposibilă.

În ipoteza că există o mișcare de bătaie a palei prinsă elastic la butuc (fig. 1) mai restrînsă ca la cea articulată, vom introduce o schemă simplă pentru stabilirea reacțiunilor aerodinamice pe rotor pornind de la zborul la punct fix.

Să considerăm mai întîi că elicopterul cu un singur rotor de al cărui centru de greutate am legat sistemul *Oxyz*, zboară la punct fix (fig. 2).

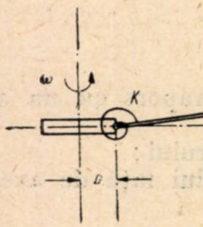
Palele vor fi dispuse pe un con a cărei axă coincide cu direcția forței rezultante a rotorului.

Pe de altă parte, direcția forței rezultante coincide cu axa de comandă a rotorului.

Unghiul de comandă la punct fix fiind mic în genere vom presupune că direcția forței rezultante coincide aproximativ cu axa de rotație.

Din poziția indicată în figura 2, prin deplasarea corespunzătoare a manșei se dă o variație ciclică a pasului palelor datorită căreia discul rotorului se înclină astfel că direcţia rezultantei face unghiul α cu vechea direcţie.

Corpul elicopterului se va înclina în mod corespunzător pînă ce direcţia lui R_t trece prin C. G (fig. 3).



Fig, 1

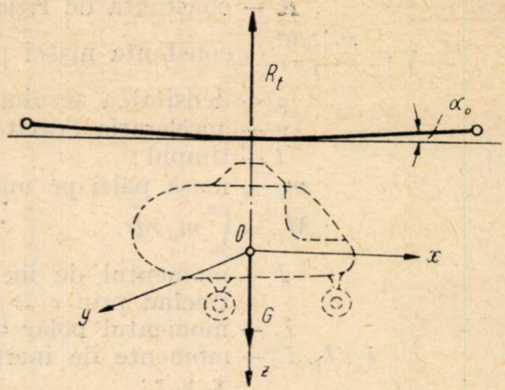


Fig. 2

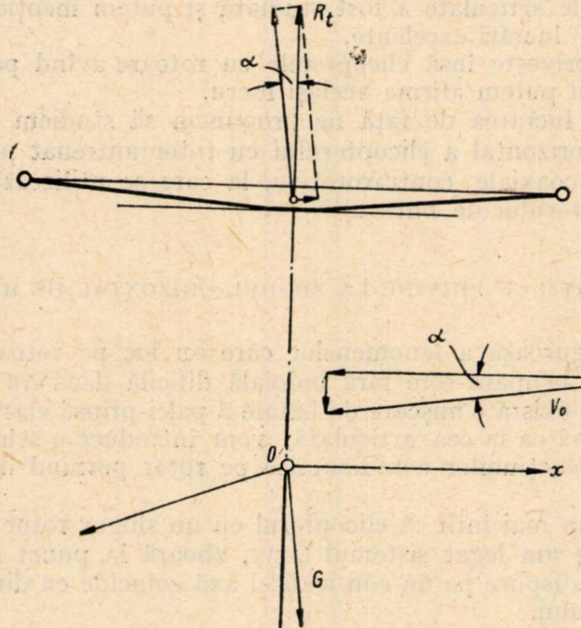


Fig. 3

Apare o componentă în direcţia orizontală $R_t \sin \alpha$ şi datorită căreia elicopterul începe să înainteze.

Datorită vitezei $V_0 \cos \alpha$ discul rotorului capătă o înclinare către înapoi cu un unghi i față de poziția precedentă (fig. 4).

Abia în această situație admițînd ceea ce nu-i tocmai exact că rezistența pasivă a fuselajului acționează în C.G. se poate determina viteza

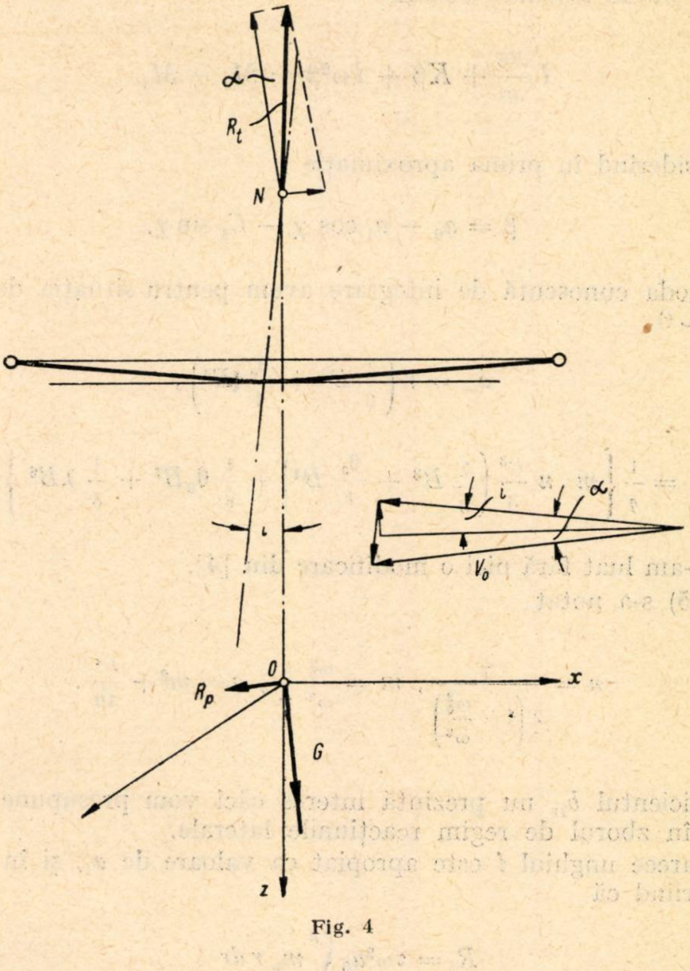


Fig. 4

de regim V_0 pentru un unghi α dat, utilizînd relațiile care leagă mărimile i și V_0

$$i = i\,(V_0), \qquad (1)$$

$$\frac{\rho}{2} S_f V_0^2 C_{xf} = R_t\,(\alpha - i).$$

În condițiile unui elicopter pentru care avem datele constructive în plus ω și α date, va trebui să asociem relațiilor (1) următoarea relație

$$\lambda = \lambda\,(V_0), \qquad (2)$$

căci atît i cît și R_t depind de λ. Pentru a prezenta relațiile (1) și (2) într-o formă explicită utilizabilă în calcule, vom face uz de cîteva lucruri cunoscute din aerodinamica rotorului.

Se știe că unghiul de bătaie β pentru rotoarele a căror pale sînt prinse elastic de butuc satisface ecuația

$$I \frac{d^2\beta}{dt^2} + K\beta + I\omega^2\beta = M_s - M_g. \tag{3}$$

Considerînd în prima aproximație

$$\beta = a_0 - a_1 \cos \chi - C_1 \sin \chi, \tag{4}$$

după metoda cunoscută de integrare avem pentru situația de regim făcînd $M_g \sim 0$

$$\begin{aligned} a_{0r} &= n\left(\frac{\lambda}{3} B^3 + \frac{\theta_0}{4} B^4\right), \\ a_{1r} &= \frac{1}{q}\left\{m \,.\, n \frac{B^3}{3}\left(\frac{\lambda}{3} B^3 + \frac{\theta_0}{4} B^4\right) + \frac{1}{6} \theta_0 B^7 + \frac{1}{8} \lambda B^6 \right\}\frac{V_0}{\omega R}, \end{aligned} \tag{5}$$

pe care le-am luat fără nici o modificare din [4].

În (5) s-a notat

$$n = \frac{\gamma}{2\left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}, \quad m = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{2}{\gamma}, \quad q = m^2 + \frac{b^8}{16}.$$

Coeficientul b_{1r} nu prezintă interes căci vom presupune că pilotul anulează în zborul de regim reacțiunile laterale.

Deoarece unghiul i este apropiat ca valoare de a_{1r} și în consecință $i \sim a_{1r}$ scriind că

$$R_t = z\omega^2 a_0 \int_0^R m_p \, r \, dr \tag{6}$$

mai rămîne să explicăm relația (2).

Pentru aceasta ne vom servi de ecuația de echilibru a momentelor forțelor de pe pală în jurul axei de rotație pe care o scriem [4]

$$M_d + \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{BR} \frac{1}{2} \rho t_p \eta^2 \omega^2 R^2 C_z \frac{\xi}{\eta} r \, dr \, d\chi - \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{1}{2} \rho t_p \eta^2 \omega^2 R^2 C_x r \, dr \, d\chi = 0. \tag{7}$$

Al doilea termen este momentul datorit portanței, cel de al treilea datorit rezistenței și putem reține în definitiv după ce se fac toate calculele

$$\frac{M_d}{\frac{3}{4}\,\omega^2 R^4 \pi\sigma C'_a} + \frac{\mu^2 B^4}{4q^2}\left\{ m\,.\,n\,\frac{B^3}{3}\left(\frac{\lambda}{3}\,B^3 + \frac{\theta_0}{4}\,B^4\right) + \frac{1}{6}\,\theta_0 B^7 + \frac{1}{8}\,\lambda B^6 \right\}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\mu^2 B^2 n^2 \left(\frac{\lambda}{3}\,B^3 + \frac{\theta_0}{4}\,B^4\right)^2 + \frac{\lambda}{q}\,\mu^2 B^2 \left[m \cdot n\,\frac{B^3}{3}\left(\frac{\lambda}{3}\,B^3 + \frac{\theta_0}{4}\,B^4\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\,\theta_0 B^7 + \frac{1}{8}\,\lambda B^6 \right] + \frac{2}{3}\,\lambda\theta_0 B^3 + \lambda^2 B^2 - \frac{\lambda^2}{2}\,\mu^2 \sim 0. \qquad (8)$$

A doua relație (1) și (5) împreună cu (8) se pot rezolva acum prin aproximații succesive.

Pentru rotoarele coaxiale contrarotative se vor aplica rezultatele unui singur rotor căci după cum am pus în evidență în [6] interacțiunea rotoarelor duce la modificări insensibile pentru calculele de stabilitate.

II. ECUAŢIILE GENERALE DE MIŞCARE ALE ELICOPTERULUI

a) Ecuaţiile mişcării neperturbate

Deoarece în [5] s-a arătat pe larg modul cum au fost obținute, în lucrarea de față vom reține pentru elicopterul cu un singur rotor, fără a mai face vreo altă considerație, următoarele ecuații ale mișcării neperturbate

$$\begin{aligned}
\frac{dV_x}{dt} &= \frac{g}{G}\,(R_x + G\cos\varphi_x) + \Omega_z V_y - \Omega_y V_z = F_1\,(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y),\\
\frac{dV_y}{dt} &= \frac{g}{G}\,(R_y + G\cos\varphi_y) + \Omega_x V_z - \Omega_z V_x = F_2\,(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y),\\
\frac{dV_z}{dt} &= \frac{g}{G}\,(R_z + G\cos\varphi_z) + \Omega_y V_x - \Omega_x V_y = F_3\,(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y),\\
\frac{d\Omega_x}{dt} &= \frac{M_x}{I_x} + \frac{I_z - I_y}{I_x}\,\Omega_y \Omega_z - \frac{I_r}{I_x}\,\Omega_y \cdot \omega = F_4\,(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y),\\
\frac{d\Omega_y}{dt} &= \frac{M_y}{I_y} + \frac{I_x - I_z}{I_y}\,\Omega_z \Omega_x + \frac{I_r}{I_y}\,\Omega_x \omega = F_5\,(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y),\\
\frac{d\Omega_z}{dt} &= \frac{M_z}{I_z} + \frac{I_y - I_x}{I_z}\,\Omega_x \Omega_y = F_6\,(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y),\\
\frac{d\varphi_x}{dt} &= \frac{\Omega_y \cos\varphi_z - \Omega_z \cos\varphi_y}{\sin\varphi_x} = F_7\,(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y),\\
\frac{d\varphi_y}{dt} &= \frac{\Omega_z \cos\varphi_x - \Omega_x \cos\varphi_z}{\sin\varphi_y} = F_8\,(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y).
\end{aligned} \qquad (9)$$

Pentru elicopterul cu rotoare coaxiale contrarotative ecuațiile sistemului (9) rămîn aceleași afară de a patra și a cincea în care vom face $\frac{I_r}{I_x}\,\Omega_y\omega = = \frac{I_r}{I_y}\,\Omega_x\omega = 0.$

În acest fel vedem că avem de a face cu un sistem de 8 ecuații față de mărimile V_x, V_y, V_z, Ω_x, Ω_y, Ω_z, φ_x, φ_y.

b) Ecuațiile mișcării perturbate

Mișcarea de bază a cărei stabilitate o cercetăm este definită de următorul grup de soluții al sistemului de ecuații diferențiale (9)

$$\begin{gathered} V_x \sim V_0,\ V_y = 0,\ V_z = 0, \\ \Omega_x = 0,\ \ \Omega_y = 0,\ \Omega_z = 0, \\ \varphi_x \sim \frac{\pi}{2},\ \ \varphi_y = \frac{\pi}{2}\,. \end{gathered} \tag{10}$$

Ținînd seama că prin ΔV_x, ΔV_y, ΔV_z, $\Delta\Omega$, $\Delta\Omega_y$, $\Delta\Omega_z$, $\Delta\varphi_y$, $\Delta\varphi_x$ am notat perturbațiile mărimilor V_x, V_y, V_z, Ω , Ω_y, Ω_z, φ_x, φ_y și că funcțiile $F_1, F_2, \ldots, F_8$ din sistemul (9) sînt analitice, sistemul de ecuații diferențiale al mișcării perturbate în primă aproximație se scrie observînd soluțiile (10)

$$\begin{gathered} \frac{d\Delta V_x}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial \Delta V_x}\,\Delta V_x + \frac{\partial F_1}{\partial \Delta V_y}\,\Delta V_y + \ldots \frac{\partial F_1}{\partial \Delta\varphi_x}\,\Delta\varphi_x, \\ \frac{d\Delta V_y}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial \Delta V_x}\,\Delta V_x + \frac{\partial F_2}{\partial \Delta V_y}\,\Delta V_y + \ldots \frac{\partial F_2}{\partial \Delta\varphi_x}\,\Delta\varphi_x, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\Delta \varphi_x}{dt} = \frac{\partial F_8}{\partial \Delta V_x}\,\Delta V_x + \frac{\partial F_8}{\partial \Delta V_y}\,\Delta V_y + \ldots \frac{\partial F_8}{\partial \Delta\varphi_x}\,\Delta\varphi_x\,. \end{gathered} \tag{11}$$

Termenul datorit perturbației ΔV_z se va calcula ca în [5] și în ipoteza că nu avem mișcare în jurul axei Oz, perturbația $\Delta\Omega_z$ nu introduce vreun termen care să fie luat în considerație.

În expresiile funcțiilor $F_1, F_2, \ldots, F_8$, perturbațiile $\Delta\varphi_x$, $\Delta\varphi_y$ intră prin termeni aditivi așa că singura dificultate este stabilirea acelor termeni care depind numai de ΔV_x, ΔV_y, $\Delta\Omega_x$, $\Delta\Omega_y$, adică ΔR_x, ΔR_y, ΔM_x, ΔM_y.

Pentru a găsi acești termeni vom urma procedeul arătat în [5], deducînd în condițiile zborului perturbat coeficienții de bătaie pentru translație și rototranslație ca urmare a deplasării în sensul pozitiv al axelor x, y a elicopterului cu vitezele ΔV_x, ΔV_y, respectiv a rotirii în sens pozitiv a lui în jurul axelor x, y cu vitezele $\Delta\Omega_x$, $\Delta\Omega_y$.

Scriem [5]

$$M_s = \int_0^{BR} \frac{\rho}{2}\, t_p \eta^2 \omega^2 R^2 c_z\, r dr = \frac{\rho}{2}\, t_p \omega^2 R^4 c_a' \int_0^{B} \eta^2 \left(\theta_0 + \frac{\xi}{\eta}\right) x dx \tag{12}$$

și pe de altă parte

$$M_s = \frac{\rho}{2} t_p \omega^2 R^4 c_a' (a_0^* + a_1^* \cos\chi + b_1^* \sin\chi). \tag{13}$$

Din aceste două relații scoatem

$$a_0^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^B (\theta_0\eta^2 + \xi\eta)\, x\, dx\, d\chi, \tag{14}$$

$$a_1^* = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^B (\theta_0\eta^2 + \xi\eta)\, x \cos\chi\, dx d\chi,$$

$$b_1^* = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^B (\theta_0\eta^2 + \xi\eta)\, x \sin\xi\, dx\, d\chi.$$

Ținînd seama de (3) și de (4) prin identificare scoatem

$$a_0 = \frac{\gamma}{2\left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)} a_0^*, \tag{15}$$

$$a_1 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{\gamma}{2} a_1^*,$$

$$b_1 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{\gamma}{2} b_1^*.$$

Sistemul (15) va trebui rezolvat în patru cazuri luînd în (14) valorile lui ξ și η după cum urmează.

1) Pentru deplasarea elicopterului în direcția axei x cu viteza ΔV_x

$$\left.\begin{aligned} \eta &= x + \frac{V_0 + \Delta V_x}{U}\sin\chi, \\ \xi &= \lambda - \frac{x}{\omega}\frac{d\beta}{dt} - \frac{V_0 + \Delta V_x}{U}\beta\cos\chi. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

2) Pentru deplasarea elicopterului în direcția axei y cu viteza ΔV_y

$$\begin{aligned} \eta &= x + \frac{\Delta V_y}{U}\sin\chi - \frac{V_0}{U}\cos\chi, \\ \xi &= \lambda - \frac{x}{\omega}\frac{d\beta}{dt} - \frac{\Delta V_y}{U}\beta\cos\chi - \frac{V_0}{U}\beta\sin\chi. \end{aligned} \tag{17}$$

3) Pentru rotirea elicopterului în jurul axei x cu viteza $\Delta\Omega_x$

$$\begin{aligned} \eta &= x + \zeta\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\sin\chi - \frac{V_0}{U}\cos\chi, \\ \xi &= \lambda - \frac{x}{\omega}\frac{d\beta}{dt} - \zeta\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\beta\cos\chi - x\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\cos\chi - \frac{V_0}{U}\beta\sin\chi. \end{aligned} \tag{18}$$

4) Pentru rotirea elicopterului în jurul axei y cu viteza $\Delta\Omega_y$

$$\begin{aligned}
\eta &= x + \zeta\frac{\Delta\,\Omega_y}{\omega}\sin\chi - \frac{V_0}{U}\sin\chi,\\
\xi &= \lambda - \frac{x}{\omega}\,\frac{d\beta}{dt} - \zeta\frac{\Delta\,\Omega_x}{\omega}\beta\cos\chi - x\frac{\Delta\,\Omega_x}{\omega}\cos\chi - \frac{V_0}{U}\beta\sin\chi. \qquad (19)
\end{aligned}$$

În funcție de aceste patru expresii ale mărimilor η, ξ se obțin din (15) pentru deplasările cu vitezele $\Delta V_x, \Delta V_y$ coeficienții a_{1x}, b_{1x}, a_{1y}, b_{1y}, iar pentru rotațiile cu vitezele $\Delta\Omega_x$, $\Delta\Omega_y$ coeficienții $\overline{a}_{1y}$, $\overline{b}_{1y}$, $\overline{a}_{1x}$, $\overline{b}_{1x}$ ale căror derivate care ne interesează le dăm mai jos

$$\frac{\partial a_{1x}}{\partial\Delta V_x} = \frac{K_1}{U} = \frac{1}{qU}\left\{m\,.\,n\frac{B^3}{3}\left(\frac{\lambda}{3}B^3 + \frac{\theta_0}{4}B^4\right) + \frac{1}{6}\theta_0 B^7 + \frac{1}{8}\lambda B^6\right\},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_{1y}}{\partial\Delta V_y} = \frac{K_2}{U} = \frac{1}{qU}\biggl\{&\frac{\theta_0}{4}B^5\frac{V_0^2}{U^2} + \frac{3}{16}B^4\lambda\frac{V_0^2}{U^2} +\\
&+ m\,.\,n\frac{B^3}{3}\left(\frac{\lambda}{3}B^3 + \frac{\theta_0}{4}B^4\right) + \frac{1}{6}\theta_0 B^7 + \frac{1}{8}B^6\lambda\biggr\},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial b_{1x}}{\partial\Delta V_x} = \frac{K_1'}{U} = \frac{1}{qU}\left\{-m\left(\frac{2}{3}\theta_0 B^3 + \frac{\lambda}{2}B^2\right) + \frac{1}{12}B^7 n\left(\frac{\lambda}{3}B^3 + \frac{\theta_0}{4}B^4\right)\right\}, \qquad (20)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b_{1y}}{\partial\Delta V_y} = \frac{K_2'}{U} = \frac{1}{qU}\biggl\{&-m\left(\frac{2}{3}\theta_0 B^3 + \frac{\lambda}{2}B^2\right) +\\
&+ \frac{1}{12}B^7 n\left(\frac{\lambda}{3}B^3 + \frac{\theta_0}{4}B^4\right) - n\frac{B^5}{8}\frac{V^2}{U^2}\left(\frac{\lambda}{3}B^3 + \frac{\theta_0}{4}B^4\right)\biggr\},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\overline{a}_{1x}}{\partial\Delta\,\Omega_y} = \frac{\overline{K}_1}{\omega} = \frac{1}{q\omega}\left\{\frac{B^4}{4}\left(\frac{2}{3}B^3\zeta\theta_0 + \frac{B^2}{2}\zeta\lambda\right) + m\left[\frac{B^3}{3}\zeta n\left(\frac{\lambda}{3}B^3 + \frac{\theta_0}{4}B^4\right) + \frac{B^4}{4}\right]\right\},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{a}_{1y}}{\partial\Delta\,\Omega_x} = \frac{\overline{K}_2}{\omega} = \frac{1}{q\omega}\biggl\{&m\left[\frac{B^3}{3}\zeta n\left(\frac{\lambda}{3}B^3 + \frac{\theta_0}{4}B^4\right) + \frac{B^4}{4}\right] +\\
&+ \frac{\theta_0}{6}B^7\zeta + \frac{B^6}{8}\lambda\zeta + \frac{\theta_0}{4}B^5\zeta\frac{V_0^2}{U^2} + \frac{3}{16}\lambda B^4\zeta\frac{V_0^2}{U^2}\biggr\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{b}_{1x}}{\partial\Delta\,\Omega_y} = \frac{\overline{K}_1'}{\omega} = \frac{1}{q\omega}\biggl\{&\frac{B^4}{4}\left[\frac{B^3}{3}n\zeta\left(\frac{\lambda}{3}B^3 + \frac{\theta_0}{4}B^4\right) + \frac{B^4}{4}\right] -\\
&- m\left(\frac{2}{3}B^3\zeta\theta_0 + \frac{B^2}{2}\zeta\lambda\right)\biggr\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{b}_{1y}}{\partial\Delta\,\Omega_x} = \frac{\overline{K}_2'}{\omega} = \frac{1}{q\omega}\biggl\{&\frac{1}{12}B^7\zeta n\left(\frac{\lambda}{3}B^3 + \frac{\theta_0}{4}B^4\right) +\\
&+ \frac{B^8}{16} - \frac{2}{3}m\theta_0 B^3\zeta - m\lambda\frac{B^2}{2}\zeta - \frac{B^5}{8}\zeta\frac{V_0^2}{U^2}n\left(\frac{\lambda}{3}B^3 + \frac{\theta_0}{4}B^4\right)\biggr\}.
\end{aligned}$$

Trebuie remarcat că deplasarea unghiulară $\Delta\varphi_y$ se traduce în cazul sborului orizontal spre deosebire de cel la punct fix, printr-o creștere a tracțiunii și o deviere către înapoi a discului rotorului.

Pentru un calcul mai exact se poate stabili o corespondență cu mișcarea în direcția axei z introducîndu-se un termen echivalent de forma $K\Delta V_z$, iar devierea către înapoi a discului fiind mică se neglijează.

Conicitatea cu oarecare aproximație rămîne cea dată de prima relație (5). Cu aceste precizări perturbațiile reacțiunilor vor fi în cazul elicopterului cu un singur rotor

$$\begin{aligned}
\Delta R_x &= R_t\left\{-K_1\frac{\Delta V_x}{U}-K_2'\frac{\Delta V_y}{U}+\bar{K}_1\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}-K_2'\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\right\}-\rho S_f C_{xf} U V_0\frac{\Delta V_x}{U}\,,\\
\Delta R_y &= R_t\left\{-K_2\frac{\Delta V_y}{U}+K_1'\frac{\Delta V_x}{U}-\bar{K}_2\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}-K_1'\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right\}\\
\Delta M_x &= (h+d)\,R_t\left\{-K_2\frac{\Delta V_y}{U}+K_1'\frac{\Delta V_x}{U}-\bar{K}_2\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}-\bar{K}_1'\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right\},\\
\Delta M_y &= (h+d)\,R_t\left\{K_1\frac{\Delta V_x}{U}+K_2'\frac{\Delta V_y}{U}-\bar{K}_1\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}+\bar{K}_2'\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\right\}.
\end{aligned}\tag{21}$$

Sistemul de ecuații diferențiale (11) al mișcării perturbate pentru elicopterul cu un singur rotor poate fi scris acum sub forma

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta V_x}{dt} &= \frac{g}{G}R_t\left\{-K_1\frac{\Delta V_x}{U}-K_2'\frac{\Delta V_y}{U}+\bar{K}_1\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}-\bar{K}_2'\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\right\}-\\
&\qquad -\frac{g}{G}\rho S_f C_{xf} U V_0\frac{\Delta V_x}{U}-g\Delta\varphi_y\\
\frac{d\Delta V_y}{dt} &= \frac{g}{G}R_t\left\{-K_2\frac{\Delta V_y}{U}+K_1'\frac{\Delta V_x}{U}-\bar{K}_2\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}-\bar{K}_1'\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right\}+g\Delta\varphi_x,\\
\frac{d\Delta V_z}{dt} &= -\frac{g}{G}K_3\frac{\Delta V_z}{U}+V_0\Delta\Omega_y,\\
\frac{d\Delta\Omega_x}{dt} &= \frac{h+d}{I_x}R_t\left\{-K_2\frac{\Delta V_y}{U}+K_1'\frac{\Delta V_x}{U}-\bar{K}_2\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}-\bar{K}_1'\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right\}+\frac{I_r}{I_x}\,\omega\Delta\Omega_y,\\
\frac{d\Delta\Omega_y}{dt} &= \frac{h+d}{I_y}R_t\left\{K_1\frac{\Delta V_x}{U}+K_2'\frac{\Delta V_y}{U}-\bar{K}_1\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}+\bar{K}_2'\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\right\}-\frac{I_r}{I_y}\,\omega\Delta\Omega_x,\\
\frac{d\Delta\varphi_y}{dt} &= \Delta\Omega_y,\\
\frac{d\Delta\varphi_x}{dt} &= \Delta\Omega_x.
\end{aligned}\tag{22}$$

Am ajuns la acest sistem fiindcă cea de a șasea ecuație a sistemului (11) ca și termenul ce conține pe $\Delta\Omega_z$ din ecuația a doua s-au exclus pe baza ipotezei menționate anterior.

Introducem notațiile adimensionale

$$\frac{\Delta V_x}{U} = \Delta\overline{V}_x\,;\ \frac{\Delta V_y}{U} = \Delta\overline{V}_y\,;\ \frac{\Delta V_z}{U} = \Delta\overline{V}_z\,;\ \frac{\Delta\,\Omega_x}{\omega} = \Delta\overline{\Omega}_x\,;\ \frac{\Delta\Omega_y}{\omega} = \Delta\overline{\Omega}_y \tag{23}$$

$$\overline{t} = \frac{g}{U}t\,;\ \overline{I}_x = \frac{gI_x}{GR^2}\,;\ \overline{I}_y = \frac{gI_y}{GR^2}\,;\ \frac{U\omega}{g} = \sigma.$$

Cu care sistemul (22) devine

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta\overline{V}_x}{d\overline{t}} &= -\alpha_1\Delta\overline{V}_x - \alpha_2\Delta\overline{V}_y + \alpha_3\Delta\overline{\Omega}_y - \alpha_4\Delta\overline{\Omega}_x - \Delta\overline{\varphi}_y,\\
\frac{d\Delta\overline{V}_y}{d\overline{t}} &= -\alpha_1'\Delta\overline{V}_y + \alpha_2'\Delta\overline{V}_x - \alpha_3'\Delta\overline{\Omega}_x - \alpha_4'\Delta\overline{\Omega}_y + \Delta\overline{\varphi}_x,\\
\frac{d\Delta\overline{V}_z}{d\overline{t}} &= -\alpha_5\,\Delta\overline{V}_z + \alpha_6\Delta\overline{\Omega}_y,\\
\frac{d\Delta\overline{\Omega}_x}{d\overline{t}} &= -\beta_1\Delta\overline{V}_y + \beta_2\Delta\overline{V}_x - \beta_3\Delta\overline{\Omega}_x - \beta_4\Delta\overline{\Omega}_y + \beta_5\Delta\overline{\Omega}_y,\\
\frac{d\Delta\overline{\Omega}_y}{d\overline{t}} &= \beta_1'\Delta\overline{V}_x + \beta_2'\Delta\overline{V}_y - \beta_3'\Delta\overline{\Omega}_y + \beta_4'\Delta\overline{\Omega}_x - \beta_5'\Delta\overline{\Omega}_x,\\
\frac{d\Delta\overline{\varphi}_x}{d\overline{t}} &= \sigma\Delta\overline{\Omega}_x,\\
\frac{d\Delta\overline{\varphi}_y}{d\overline{t}} &= \sigma\Delta\overline{\Omega}_y,
\end{aligned} \tag{24}$$

unde

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \frac{R_t}{G}K_1 + \frac{1}{G}\rho S_f C_{xf} U V_0\,;\ \alpha_2 = \frac{R_t}{G}K_2'\,;\ \alpha_3 = \frac{R_t}{G}K_1\,;\ \alpha_4 = \frac{R_t}{G}K_2',\\
&\alpha_1' = \frac{R_t}{G}K_2\,;\ \alpha_2' = \frac{R_t}{G}K_1'\,;\ \alpha_3' = \frac{R_t}{G}K_2\,;\ \alpha_4' = \frac{R_t}{G}\overline{K}_1',\\
&\alpha_5 = \frac{1}{G}\frac{\gamma}{6\left(1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}\cdot z\,M_p\omega^2B^2\,;\qquad \alpha_6 = \frac{V_0\omega}{g},\\
&\beta_1 = \frac{U(h+d)R_t}{\overline{I}_xGR^2\omega}K_2\,;\quad \beta_2 = \frac{U(h+d)R_t}{\overline{I}_xGR^2\omega}K_1'\,;\ \beta_3 = \frac{U(h+d)R_t}{\overline{I}_xGR^2\omega}K_2,\\
&\beta_4 = \frac{U(h+d)R_t}{\overline{I}_xGR^2\omega}\overline{K}_1'\,;\\
&\beta_5 = \frac{I_r}{I_x}\sigma\,;\quad \beta_1' = \frac{U(h+d)R_t}{\overline{I}_yGR^2\omega}K_1\,;\quad \beta_2' = \frac{U(h+d)R_t}{\overline{I}_yGR^2\omega}K_2'\,;\\
&\beta_3' = \frac{U(h+d)R_t}{\overline{I}_yGR^2\omega}K_1\,;\quad \beta_4' = \frac{U(h+d)R_t}{\overline{I}_yGR^2\omega}\overline{K}_2'\,;\quad \beta_5' = \frac{I_r}{I_y}\sigma.
\end{aligned} \tag{24'}$$

Pentru elicopterul cu două rotoare coaxiale contrarotative a căror viteze unghiulare sînt presupuse egale și de sens contrar, vom avea următoarele perturbații ale reacțiunilor

$$\Delta R_x = R_t \left\{ -2K_1 \frac{\Delta V_x}{U} + \overline{K}'_1 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} + \overline{K}_1^2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\} - \rho S_f C_{xf} U V_0 \frac{\Delta V_x}{U},$$

$$\Delta R_y = R_t \left\{ -2K_2 \frac{\Delta V_y}{U} - \overline{K}'_2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} - \overline{K}_2^2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\},$$

$$\Delta M_x \sim (h_1 + d_1) R_t \left\{ -K_2 \frac{\Delta V_y}{U} - \overline{K}'_2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} + \tag{25}$$

$$+ (h_2 + d_2) R_t \left\{ -K_2 \frac{\Delta V_y}{U} - \overline{K}_2^2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\},$$

$$\Delta M_y \sim (h_1 + d_1) R \left\{ K_1 \frac{\Delta V_x}{U} - \overline{K}'_1 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\} +$$

$$+ (h_2 + d_2) R_t \left\{ K_1 \frac{\Delta V_x}{U} - \overline{K}_1^2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\},$$

cu care sîntem conduși, făcînd aceeași observație ca și în cazul precedent, la următorul sistem de ecuații diferențiale al mișcării perturbate

$$\frac{d \Delta V_x}{dt} = \frac{g}{G} R_t \left\{ -2K_1 \frac{\Delta V_x}{U} + (\overline{K}'_1 + \overline{K}_1^2) \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\} - \frac{g}{G} \rho S_f C_{xf} U V_0 \frac{\Delta V_x}{U} - g \Delta \varphi_y,$$

$$\frac{d \Delta V_y}{dt} = \frac{g}{G} R_t \left\{ -2K_2 \frac{\Delta V_y}{U} - (\overline{K}_2^1 + \overline{K}_2^2) \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} + g \Delta \varphi_x,$$

$$\frac{d \Delta V_z}{dt} = -2 \frac{g}{G} K_3 \frac{\Delta V_z}{U} + V_0 \Delta \Omega_y, \tag{26}$$

$$\frac{d \Delta \Omega_x}{dt} = \frac{h_1 + d_1}{I_x} R_t \left\{ -K_2 \frac{\Delta V_y}{U} - \overline{K}'_2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\} + \frac{h_2 + d_2}{I_x} R_t \left\{ -K_2 \frac{\Delta V_y}{U} - \overline{K}_2^2 \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} \right\},$$

$$\frac{d \Delta \Omega_y}{dt} = \frac{h_1 + d_1}{I_y} R \left\{ K_1 \frac{\Delta V_x}{U} - \overline{K}'_1 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\} + \frac{h_2 + d_2}{I_y} R_t \left\{ K_1 \frac{\Delta V_x}{U} - \overline{K}_1^2 \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} \right\},$$

$$\frac{d \Delta \varphi_y}{dt} = \Delta \Omega_y,$$

$$\frac{d \Delta \varphi_x}{dt} = \Delta \Omega_x.$$

În relațiile (25) ca și în sistemul (26) coeficienții $\overline{K}_1^1$ și $\overline{K}_2^2$ sînt dați de cea de a cincea și a șasea relație (20), în care vom înlocui ζ cu $\zeta_1 = \frac{h_1}{R}$ respectiv $\zeta_2 = \frac{h_2}{R}$, h_1, d_1 fiind mărimile relative la rotorul amonte, iar h_2, d_2 relative la rotorul aval.

Cu notațiile adimensionale (23) sistemul (26) devine

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta\overline{V}_x}{d\overline{t}} &= -\alpha_1\Delta\overline{V}_x+\alpha_2\Delta\overline{\Omega}_y-\Delta\overline{\varphi}_y,\\
\frac{d\Delta\overline{V}_y}{d\overline{t}} &= -2\alpha_1'\Delta\overline{V}_y-\alpha_2'\Delta\overline{\Omega}_x+\Delta\overline{\varphi}_x,\\
\frac{d\Delta\overline{V}_z}{d\overline{t}} &= -\alpha_3\,\Delta\overline{V}_z+\alpha_4\Delta\overline{\Omega}_y,\\
\frac{d\Delta\overline{\Omega}_x}{d\overline{t}} &= -(\beta_1+\beta_2)\Delta\overline{V}_y-(\beta_3+\beta_4)\Delta\overline{\Omega}_x,\\
\frac{d\Delta\overline{\Omega}_y}{d\overline{t}} &= (\beta_1'+\beta_2')\Delta\overline{V}_x-(\beta_3'+\beta_4')\,\Delta\overline{\Omega}_y,\\
\frac{d\Delta\overline{\varphi}_y}{d\overline{t}} &= \sigma\Delta\overline{\Omega}_y,\\
\frac{d\Delta\overline{\varphi}_x}{d\overline{t}} &= \sigma\Delta\overline{\Omega}_x,
\end{aligned}\tag{27}$$

unde

$$\alpha_1=2\frac{R_t}{G}K_1+\frac{1}{G}\rho S_f C_{xf}UV_0\,;\quad \alpha_2=\frac{R_t}{G}(\overline{K}_1^1+\overline{K}_1^2)\,;$$

$$\alpha_1'=\frac{R_t}{G}K_2\,;\quad \alpha_2'=\frac{R_t}{G}(\overline{K}_2^1+\overline{K}_2^2)\,;\quad \alpha_3=\frac{1}{G}\frac{\gamma}{3\left(1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}zM_p\,\omega^2B^3\,;$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_4=\frac{V_0\omega}{g}\,;\quad \beta_1=\frac{U(h_1+d_1)R_t}{\overline{I}_xGR^2\omega}K_2\,;\quad \beta_2=\frac{U(h_2+d_2)R_t}{\overline{I}_xGR^2\omega}K_2\,;\\
&\beta_3=\frac{U(h_1+d_1)R_t}{\overline{I}_xGR^2\omega}\overline{K}_2^1\,;\quad \beta_4=\frac{U(h_2+d_2)R_t}{\overline{I}_xGR^2\omega}\overline{K}_2^2\,;\\
&\beta_1'=\frac{U(h_1+d_1)R_t}{\overline{I}_yGR^2\omega}K_1\,;\quad \beta_2'=\frac{U(h_2+d_2)R_t}{\overline{I}_yGR^2\omega}K_1\,;\\
&\beta_3'=\frac{U(h_1+d_1)R_t}{\overline{I}_yGR^2\omega}\overline{K}_1^1\,;\quad \beta_4'=\frac{U(h_2+d_2)R_t}{\overline{I}_yGR^2\omega}\overline{K}_1^2\,;
\end{aligned}\tag{27'}$$

Să ne ocupăm acum de sistemele (24), (27) pentru cercetarea stabilității dinamice în zbor orizontal a tipurilor amintite de elicopter.

Este vizibil că în sistemul (24), așa cum se prezintă, nu se poate face schimbarea de variabilă utilizată în [5] și nici separarea în longitudinal și lateral. De aceea vom introduce o aproximație cu care soluționarea problemei devine simplă dar nu tocmai exactă.

Vom presupune mai ales pentru rotoare cu pale ușoare antrenate prin jet rece că $\frac{I_r}{I_x} \sim \frac{I_r}{I_y} \sim 0$. Această presupunere este acoperitoare. Apoi, deoarece derivatele coeficienților *b* din relațiile (20) sînt în general mult mai mici ca cele ale coeficienților *a* putem reține următoarele sisteme de ecuații respectiv pentru mișcarea longitudinală și laterală

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Delta V_x}{d\bar{t}} &= -\alpha_1 \overline{\Delta V}_x + \alpha_3 \overline{\Delta\Omega}_y - \overline{\Delta\varphi}_y, \\
\frac{d\overline{\Delta V}_z}{d\bar{t}} &= -\alpha_5 \overline{\Delta V}_z + \alpha_6 \overline{\Delta\Omega}_y, \\
\frac{d\overline{\Delta\Omega}_y}{d\bar{t}} &= \beta_1' \overline{\Delta V}_x - \beta_3' \overline{\Delta\Omega}_y, \\
\frac{d\overline{\Delta\varphi}_y}{d\bar{t}} &= \sigma \overline{\Delta\Omega}_y,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

și

$$
\begin{aligned}
\frac{d\overline{\Delta V}_y}{d\bar{t}} &= -\alpha_1' \overline{\Delta V}_y - \alpha_3' \overline{\Delta\Omega}_x + \overline{\Delta\varphi}_x, \\
\frac{d\overline{\Delta\Omega}_x}{d\bar{t}} &= -\beta_1 \overline{\Delta V}_y - \beta_3 \overline{\Delta\Omega}_x, \\
\frac{d\overline{\Delta\varphi}_x}{d\bar{t}} &= \sigma \overline{\Delta\Omega}_x.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Din sistemul (27) care se referă la elicopterul cu două rotoare coaxiale contrarotative, avem următoarele sisteme de ecuații pentru mișcarea longitudinală respectiv cea laterală *)

$$
\begin{aligned}
\frac{d\overline{\Delta V}_x}{d\bar{t}} &= -\alpha_1 \overline{\Delta V}_x + \alpha_2 \overline{\Delta\Omega}_y - \overline{\Delta\varphi}_y, \\
\frac{d\overline{\Delta V}_z}{d\bar{t}} &= -\alpha_3 \overline{\Delta V}_z + \alpha_4 \overline{\Delta\Omega}_y, \\
\frac{d\overline{\Delta\Omega}_y}{d\bar{t}} &= (\beta_1' + \beta_2') \overline{\Delta V}_x - (\beta_3' + \beta_4') \overline{\Delta\Omega}_y, \\
\frac{d\overline{\Delta\varphi}_y}{d\bar{t}} &= \sigma \overline{\Delta\Omega}_y,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

---

*) În referința [6] s-a ținut sema și de interacțiunea rotoarelor care în lucrarea de față se neglijează.

şi

$$\frac{d\overline{\Delta V_y}}{d\bar{t}} = -2\alpha_1'\,\overline{\Delta V}_y - \alpha_2'\,\overline{\Delta\Omega}_x + \overline{\Delta\varphi}_x\,,$$

$$\frac{d\overline{\Delta\,\Omega_x}}{d\bar{t}} = -(\beta_1+\beta_2)\,\overline{\Delta V}_y - (\beta_3+\beta_4)\,\overline{\Delta\,\Omega}_x\,, \tag{31}$$

$$\frac{d\overline{\Delta\varphi_x}}{d\bar{t}} = \sigma\,\overline{\Delta\Omega}_x\,.$$

c) Ecuaţiile caracteristice. Criterii de stabilitate. Soluţiile ecuaţiilor caracteristice

Dacă facem substituţiile

$$\overline{\Delta V}_x = \overline{\Delta V}_{x0}\,e^{\Lambda\bar{t}}\,;\quad \overline{\Delta V}_y = \overline{\Delta V}_{y0}\,e^{\Lambda\bar{t}}\,;\quad \overline{\Delta V}_z = \overline{\Delta V}_{z0}\,e^{\Lambda\bar{t}}\,;$$

$$\overline{\Delta\Omega}_x = \overline{\Delta\Omega}_{x0}\,e^{\Lambda\bar{t}}\,;\quad \overline{\Delta\Omega}_y = \overline{\Delta\Omega}_{y0}\,e^{\Lambda\bar{t}}\,;$$

$$\overline{\Delta\varphi}_x = \overline{\Delta\varphi}_{x0}\,e^{\Lambda\bar{t}}\,;\quad \overline{\Delta\varphi}_y = \overline{\Delta\varphi}_{y0}\,e^{\Lambda\bar{t}}\,;$$

sistemele de ecuaţii diferenţiale (28), (29), (30), (31) devin sisteme de ecuaţii algebrice omogene pentru care condiţiile de a nu avea soluţii toate nule ne conduc la următoarele ecuaţii caracteristice.

1) Elicopterul cu un singur rotor : longitudinal

$$\Lambda^4 + A_1\,\Lambda^3 + A_2\,\Lambda^2 + A_3\,\Lambda + A_4 = 0, \tag{32}$$

unde

$$A_1 = \alpha_1 + \alpha_5 + \beta_3',$$

$$A_2 = \alpha_5\beta_3' + \alpha_1\,\beta_3' + \alpha_5\,\alpha_1 - \alpha_3\,\beta_1',$$

$$A_3 = \alpha_1\alpha_5\,\beta_3' - \alpha_3\,\alpha_5\,\beta_1' + \sigma\,\beta_1',$$

$$A_4 = \alpha_5\,\beta_1'\,\sigma,$$

lateral

$$\Lambda^3 + A_1\Lambda^2 + A_2\,\Lambda + A_3 = 0, \tag{33}$$

unde

$$A_1 = \alpha_1' + \beta_3\,,$$

$$A_2 = \alpha_1'\,\beta_3 - \alpha_3'\,\beta_1\,,$$

$$A_3 = \sigma\,\beta_1\,.$$

2) Elicopterul cu două rotoare coaxiale contrarotative longitudinal

$$\Lambda^4 + A_1\Lambda^3 + A_2\Lambda^2 + A_3\Lambda + A_4 = 0, \tag{34}$$

unde

$$A_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_3' + \beta_4',$$

$$A_2 = (\alpha_1 + \alpha_3)\left(\beta_3' + \beta_4'\right) + \alpha_1\,\alpha_2 - \alpha_2\left(\beta_1' + \beta_2'\right),$$

$$A_3 = \alpha_1\alpha_2\left(\beta_3' + \beta_4'\right) - \alpha_2\alpha_3\left(\beta_1' + \beta_2'\right) + \sigma\left(\beta_1' + \beta_2'\right),$$

$$A_4 = \sigma\,\alpha_3\left(\beta_1' + \beta_2'\right);$$

lateral

$$\Lambda^3 + A_1\Lambda^2 + A_2\Lambda + A_3 = 0, \tag{35}$$

unde

$$A_1 = 2\alpha_1' + \beta_3 + \beta_4,$$

$$A_2 = 2\alpha_1'(\beta_3 + \beta_4) - \alpha_2'(\beta_1 + \beta_2),$$

$$A_3 = \sigma(\beta_1 + \beta_3).$$

Spre a evita orice confuzie în ce privește mărimile α, β din coeficienții ecuațiilor caracteristice, reamintim că pentru elicopterul cu un singur rotor vom utiliza pe cei indicați de (24'), iar pentru elicopterul cu două rotoare coaxiale contrarotative pe cei dați de relația (27').

Un prim pas în cercetarea stabilității și totodată o primă confirmare a justei metode de calcul o avem din verificarea criteriilor de stabilitate.

Pentru ecuațiile (32), (34) criteriile lui Hurvitz sînt

$$\begin{aligned} &A_1 > 0,\\ &A_1A_2 - A_3 > 0,\\ &A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_4A_1^2 > 0,\\ &A_4 > 0. \end{aligned} \tag{35'}$$

Cea de-a doua și a treia din inegalitățile (35) neputînd fi în genere satisfăcute din cauza termenilor care conțin pe σ și care sînt foarte mari în raport cu ceilalți, rezultă că elicopterele de care ne ocupăm sînt longitudinale dinamic instabile.

Pentru ecuațiile (33), (35) criteriile lui Hurvitz sînt :

$$\begin{aligned} A_1 &> 0,\\ A_1A_2 - A_3 &> 0,\\ A_3 &> 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Aici a doua inegalitate nu poate fi satisfăcută din cauza termenului care conține pe σ deci și lateral se constată instabilitate dinamică.

Instabilitatea dinamică rezultă teoretic pe baza criteriilor (35'), (36) și este confirmată de experiență [8].

Cum criteriile de stabilitate ne oferă numai un aspect calitativ, vom merge mai departe și spre a căpăta o idee asupra mișcărilor perturbate printre care se găsesc și cele instabile vom rezolva ecuațiile caracteristice.

Pentru fiecare din ecuațiile (32), (34) urmînd metoda lui Ferari se obține cîte o ecuație redusă de forma

$$\overline{\mu}^3 + \overline{A}_1\,\overline{\mu}^2 + A_2\,\overline{\mu} + \overline{A}_3 = 0, \tag{37}$$

unde

$$\overline{A}_1 = -\frac{A_2}{2},$$

$$\overline{A}_2 = \frac{A_1\,A_3 - 4\,A_4}{4},$$

$$\overline{A}_3 = -\left[\left(\frac{A_1^2}{4} - A_2\right)\frac{A_4}{2} + \frac{A_3^2}{8}\right].$$

Cum ecuația (37) nu este altceva decît condiția ca membrul al doilea al expresiei

$$\left(\Lambda^2 + \frac{A_1}{2}\Lambda + \overline{\mu}\right)^2 = \left(\frac{A_1}{4} + 2\overline{\mu} + A_2\right)\Lambda^2 + (A_1\,\overline{\mu} - A_3)\,\Lambda + \overline{\mu} - A_4 \tag{38}$$

să fie un pătrat perfect, înlocuind în (38) pe $\overline{\mu}$ cu $\overline{\mu}_1$, una din rădăcinile ecuației (37), se obțin următoarele rădăcini pentru fiecare din ecuațiile (32), (34)

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \frac{1}{2}\left[\Phi_1 - \frac{A_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{A_2}{2} - \Phi_1\right)^2 - 4\,(\overline{\mu}_1 - \Phi_2)}\,\right],\\
\Lambda_2 &= \frac{1}{2}\left[\Phi_1 - \frac{A_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{A_2}{2} - \Phi_1\right)^2 - 4\,(\overline{\mu}_1 - \Phi_2)}\,\right],\\
\Lambda_3 &= \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{A_2}{2} + \Phi_1\right) + \sqrt{\left(\frac{A_2}{2} + \Phi_1\right)^2 - 4\,(\overline{\mu}_1 + \Phi_2)}\,\right],\\
\Lambda_4 &= -\frac{1}{2}\left[\frac{A_2}{2} + \Phi_1 + \sqrt{\left(\frac{A_2}{2} + \Phi_1\right)^2 - (4\,\overline{\mu}_1 + \Phi_2)}\,\right],
\end{aligned} \tag{39}$$

unde Φ_1, Φ_2 sînt expresii ce rezultă din strîngerea termenilor în (38). Pentru ecuațiile (33), (35) care sînt de gradul trei vom utiliza pentru obținerea expresiilor rădăcinilor metoda lui Cardan. Dacă se pune

$$\begin{aligned}
p &= A_2 - \frac{A_1^2}{3},\\
q &= \frac{2A_1^3}{27} - \frac{A_1A_2}{3} + A_3,
\end{aligned} \tag{40}$$

se poate constata că întotdeauna

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0, \tag{41}$$

ceea ce conduce la următoarele expresii ale rădăcinilor

$$\Lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1,$$

$$\Lambda_2 = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1 - \beta_1), \tag{42}$$

$$\Lambda_3 = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_1 - \beta_1),$$

unde

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$\beta_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Două din relațiile (39) ca și două din (42) conduc la rădăcini complexe cu părți reale pozitive care arată că mișcările instabile sînt oscilatorii cu amplitudine crescîndă.

Perioada oscilațiilor instabile se obține înmulțind inversa părții imaginare a rădăcinilor complexe cu $\frac{2\pi U}{g}$.

CONCLUZII

Metoda prezentată în această lucrare este fără îndoială aproximativă deoarece o apreciere exactă a fenomenelor care au loc este aproape imposibilă.

Cu toate că s-au făcut multe aproximații, se pare că principalii factori au fost considerați, deoarece criteriile de stabilitate duc la concluzia că există mișcări instabile, lucru pe care realitatea îl confirmă pentru elicopterele și evoluția în cauză.

Metoda prezintă deci un acord calitativ cu experiența și ne dă posibilitatea unui studiu cantitativ al mișcărilor instabile prin soluțiile ecuațiilor caracteristice.

Primită la redacție la 14 martie 1956.

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ПОЛЕТЕ ВЕРТОЛЕТОВ С НЕСУЩИМИ ВИНТАМИ ТИПА КАНТИЛЕВЕРА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В данной работе исследуется общая задача динамической устойчивости при горизонтальном полете для вертолетов с несущими винтами типа Кантилевера.

Из числа вертолетов, обладающих такими несущими винтами, здесь рассмотрены два типа, а именно: вертолет с одним несущим винтом, приводимым в движение реактивной силой струи, и вертолет с двумя противодвижущими соосными несущими винтами.

Исходя из общих уравнений невозмущенного движения, определяют уравнения возмущенного движения, причем указано, при каких условиях получаются по две группы уравнений соответственно для продольного и бокового возмущенных движений.

Выводятся характеристические уравнения, на основе которых проверяются критерии устойчивости и получаются формулы для корней уравнений.

Получается хорошее совпадение с опытными данными, и указывается способ расчета периодов колебаний вертолетов.

STABILITÉ DYNAMIQUE, DANS LE VOL HORIZONTAL, DES HÉLICOPTÈRES AYANT DES ROTORS À PALES CANTILEVER

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur étudie le problème général de la stabilité dynamique dans le vol horizontal des hélicoptères à rotors aux pales cantilever.

Parmi les hélicoptères munis de pareils rotors, deux types sont notamment étudiés dans ce travail : l'hélicoptère avec un seul rotor, entraîné par jet, et l'hélicoptère à deux rotors co-axiaux contre-rotatifs.

Prenant les équations générales du mouvement non perturbé pour point de départ, on établit les équations du mouvement perturbé et on indique quelles sont les conditions permettant d'obtenir deux groupes d'équations pour chacun des mouvements perturbés, longitudinal et latéral.

On en déduit les équations caractéristiques, en vertu desquelles sont vérifiés les critères de stabilité, et l'on donne des formules pour les racines de ces équations.

Et enfin, on constate un parfait accord avec l'expérience et l'on indique le mode de calcul des périodes d'oscillation des hélicoptères.

BIBLIOGRAFIE

1. W. IUST, *Calcul de la stabilité des hélicoptères.* Interavia, (1946).
2. K. HOHRNEMESER, *Über die dinamische Stabilität des Hubschranber mit angelenktern Flügeln.* Ingenieur Archiv, Berlin, **IX**, (1938).
3. — *Lifting rotor with inherent stability.* J. A. S., New York, (1950).
4. AL. MARINESCU, *Aerodinamica rotorului cu pale rigide de elicopter.* Revista transporturilor. *12*, (1955).
5. — *Problema stabilității elicopterului cu rotor antrenat prin jet cu zbor la punct fix.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, VI, *3—4*, (1955).
6. — *Asupra stabilității elicopterului cu rotoare coaxiale contrarotative.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, VI, *1*, (1956).
7. B. A. FUCHS, V. Y. LEVIN, *Funkții compleksnogo peremennogo,* Moscova, (1951).
8. A. YUNGE, *Hélicoptère et stabilité.* Interavia, (1947).

SOLUŢII PARTICULARE ALE ECUAŢIEI SCURGERII PRIN MEDII POROASE NEOMOGENE

DE

T. OROVEANU

1. Dacă se consideră scurgerea unui fluid incompresibil printr-un mediu poros de permeabilitate variabilă, în domeniul de valabilitate al legii lui Darcy, problema constă în rezolvarea ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)=0, \tag{1}$$

unde $k\ (x,\ y,\ z)$ este permeabilitatea, iar

$$\varphi=-\frac{1}{\mu}\,(p+U), \tag{2}$$

μ fiind viscozitatea fluidului, p presiunea şi U potenţialul forţelor exterioare. Găsirea soluţiilor ecuaţiei de mai sus pentru anumite domenii şi cu condiţii la limită date prezintă în general mari dificultăţi şi în unele lucrări anterioare [1] — [4], am căutat aceste soluţii în unele situaţii particulare care simplifică oarecum problema.

În cele ce urmează vom urma un alt punct de vedere şi anume vom căuta soluţii particulare ale ecuaţiei (1) care, la rîndul lor, ar putea fi aplicate la rezolvarea anumitor probleme.

2. Să considerăm cazul mişcării plane, pentru care ecuaţia (1) se reduce la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)=0, \tag{3}$$

componentele vitezei de filtrare avînd expresiile

$$v_x=k\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\quad,\quad v_y=k\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,. \tag{4}$$

Este evident că, deoarece permeabilitatea este variabilă, rotorul vitezei de filtrare nu este nul ci are valoarea

$$\Omega_z = \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,. \tag{5}$$

Punînd condiția ca rotorul să fie totuși nul

$$\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

aceasta se realizează dacă avem

$$\frac{\partial k}{\partial x} = m\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = m\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,, \tag{7}$$

unde m este o constantă pozitivă sau negativă, diferită de zero.

Ținînd seama de acest fapt, ecuația (1) devine

$$\frac{\partial^2(k^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(k^2)}{\partial y^2} = 0 \tag{8}$$

funcția k^2 fiind prin urmare armonică.

Din relațiile (7) rezultă însă că funcția φ este de forma

$$\varphi = \lambda k + C \tag{9}$$

cu

$$\lambda = \frac{1}{m} \tag{10}$$

și C o constantă arbitrară. Liniile de permeabilitate constantă (izoperme) coincid așadar cu liniile echipotențiale.

Prin urmare, pentru ca rotorul vitezei de filtrare să fie nul într-o scurgere printr-un mediu poros neomogen, trebuie ca permeabilitatea să fie rădăcina pătrată a unei funcții armonice și să se satisfacă relația (9).

În particular, putem alege constanta C egală cu zero și atunci se observă imediat că și funcția φ^2 este armonică. În acest caz, pot fi utilizate soluțiile găsite pentru scurgerea prin medii poroase omogene. Într-adevăr, dacă Φ este o funcție armonică ce reprezintă soluția unei astfel de probleme, putem înlocui mediul poros omogen cu un altul a cărui permeabilitate variază după legea

$$k^2 = a\Phi + b, \tag{11}$$

a și b fiind constante arbitrare. Din cele de mai sus rezultă că funcția

$$\varphi = \sqrt{\lambda\,(a\Phi + b) + \lambda_0}\,, \tag{12}$$

unde am introdus încă o constantă λ_0, reprezintă o mișcare posibilă în mediul poros neomogen definit prin (11), condițiile la limită rezultînd din acelea satisfăcute de funcția Φ.

Pentru exemplificare, să considerăm domeniul cuprins între două cercuri concentrice, cu centrul în origină și avînd razele r_c și r_s ($r_c > r_s$). Să admitem de asemenea că permeabilitatea variază după legea

$$k^2 = a \log r + b. \tag{13}$$

Dacă ne referim la scurgerea sub presiune fără suprafață liberă în care se face abstracție de efectul gravitațional, există o soluție de forma

$$\varphi = -\frac{p}{\mu} = \sqrt{\lambda(a \log r + b) + \lambda_0}, \tag{14}$$

care reprezintă o scurgere radială. Liniile izoperme, în același timp și linii de presiune constantă, sînt cercuri concentrice cu cele date.

În ceea ce privește funcția de curent ψ, condiția ca rotorul să fie nul este echivalentă, după cum se știe, cu aceea ca ψ să fie armonică. Din relațiile de definiție cunoscute

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{15}$$

precum și din (4) și (7) rezultă

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}\frac{\partial(\varphi^2)}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ \frac{m}{2}\frac{\partial(\varphi^2)}{\partial y} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned} \tag{16}$$

și prin urmare ψ este conjugată armonic cu $\frac{\varphi^2}{2\lambda}\cdot$

Pentru completarea considerațiilor precedente, mai trebuie cercetat și cazul în care permeabilitatea k este funcție de o singură variabilă, de exemplu y. Condiția ca rotorul vitezei de filtrare să fie nul se reduce la

$$\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \tag{17}$$

și este satisfăcută (cu excepția cazului neinteresant în care k este o constantă), atunci cînd φ este de asemenea funcție numai de variabila y.

3. Revenind la ecuația fundamentală (1) scrisă sub forma

$$k\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \tag{18}$$

se observă că funcția φ este armonică dacă există relația

$$\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \tag{19}$$

ceea ce revine la

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{20}$$

Prin urmare, dacă permeabilitatea este o funcție armonică, funcția armonic conjugată ei este o soluție a ecuației (18).

Pentru funcția de curent, rezultă imediat

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -k\frac{\partial k}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -k\frac{\partial k}{\partial y}, \tag{21}$$

ceea ce înseamnă că vectorii grad ψ și grad k sînt paraleli, adică liniile de curent coincid cu liniile izoperme. Funcția ψ nu este însă armonică deoarece rotorul vitezei de filtrare diferă de zero.

Mai trebuie să precizăm, că alegerea domeniilor la care pot fi aplicate aceste soluții trebuie să fie astfel făcute încît funcțiile k și φ să fie uniforme, așa cum cer condițiile fizice ale problemei. Pentru a da un exemplu simplu, vom considera domeniul delimitat de dreptele $\theta = 0$ și $\theta = \theta_0$ $(0 < \theta_0 < 2\pi)$ și cercurile cu centrul în origine, de rază respectiv r_c și r_s $(r_c > r_s)$.

Dacă luăm

$$k = a\theta + b \tag{22}$$

funcția

$$\varphi = -\frac{p}{\mu} = a \log r + c \tag{23}$$

reprezintă o scurgere radială în acest domeniu.

4. Condiția ca rotorul vitezei de filtrare să fie nul poate conduce la relații mai generale între funcțiile k și φ. Astfel, în locul condiției (7) putem pune

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lambda(x, y)\frac{\partial k}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \lambda(x, y)\frac{\partial k}{\partial y} \tag{24}$$

cu condiția ca atunci cînd se fixează domeniul în care se produce scurgerea, $\lambda(x, y)$ să fie o funcție mărginită și continuă în acest domeniu.

După înlocuirea în (1) se ajunge, după cîteva calcule simple, la ecuația

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial k^2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial k^2}{\partial y}\right) = 0 \tag{25}$$

și cu schimbarea de funcție cunoscută, care a mai fost utilizată și în altă lucrare [1], se obține

$$k^2 = \lambda^{-\frac{1}{2}} F, \tag{26}$$

unde $F(x, y)$ este o funcție armonică. Funcția φ rezultă din (24) și pe această cale pot fi construite scurgeri în domenii date.

Primită la redacție la 4 noiembrie 1957.

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНУЮ ПОРИСТУЮ СРЕДУ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение течения жидкости в пористой среде с переменной проницаемостью и ищутся некоторые частные решения этого уравнения. Так, например, если поставить условие, чтобы вихрь скорости фильтрации был равным нулю, получается, что квадрат проницаемости должен быть гармонической ффункцией, а решение дифференциального уравнения течения должно иметь вид (9). В частности квардат этого решения также может быть гармонической функцией, и в этом случае можно применять некоторые известные решения для однородных пористых сред.

Другие простые решения рассматриваемого уравнения находятся в том случае, когда проницаемость является гармонической функцией.

В заключение показано, что условие равенства нулю вихря скорости фильтрации приводит к более общим законам изменения проницаемости, которые также могут быть использованы.

SOLUTIONS PARTICULIÈRES DE L'ÉQUATION DE L'ÉCOULEMENT À TRAVERS LES MILIEUX POREUX NON HOMOGÈNES

RÉSUMÉ

L'auteur considère l'équation différentielle de l'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux, dont la perméabilité est variable, et cherche des solutions particulières de cette équation. Ainsi, la condition que le rotor de la vitesse de filtration soit nul conduit à la conclusion que le carré de la perméabilité doit être une fonction harmonique et que la solution de l'équation de l'écoulement doit être de la forme (9). En particulier, le carré de cette solution peut aussi être une fonction harmonique et, dans ce cas, on peut utiliser certaines solutions connues pour les milieux poreux homogènes.

On trouve également des solutions simples de l'équation considérée, lorsque la perméabilité est une fonction harmonique.

Enfin, la condition que le rotor de la vitesse de filtration soit nul conduit à des lois plus générales, de variation de la perméabilité, qu'on peut toujours utiliser.

BIBLIOGRAFIE

1. T. OROVEANU, *Scurgerea unui fluid incompresibil printr-un mediu poros cu neomogenitate redusă.* Comunicările Acad. R.P.R., **V**, *5*, 843–846 (1955).
2. — *Asupra unei probleme de scurgere printr-un mediu poros neomogen.* Comunicările Acad. R.P.R., **V**, *11*, 1625–1629 (1955).
3. — *Asupra unei probleme de scurgere spre sondă în cazul unei variații oarecare a permeabilității.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VI**, *3–4*, 333–338 (1955).
4. — *Cîteva probleme de scurgere printr-un mediu poros cu variație unidimensională a permeabilității.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *4* (1956).

DINAMICA MIŞCĂRII ALUVIUNILOR ÎN SCURGERILE SUB PRESIUNE

DE

M. KAHAN şi S. HÎNCU

Studiul mişcării aluviunilor în scurgerile sub presiune prezintă un dublu interes. În primul rînd, legat de modelarea construcţiilor în curenţi de aer, problema interesează pentru justa dimensionare a modelelor de albie cu pat mobil şi interpretarea corectă a rezultatelor ce se obţin pe asemenea modele, în al doilea rînd problema interesează în scopul de a utiliza încercările în curenţi de aer sub presiune în determinarea anumitor caracteristici ale mişcării aluviunilor în curenţi de apă cu nivel liber.

Cel de-al doilea aspect expus mai sus, merită o deosebită atenţie, dat fiind caracterul complex, delicat şi greoi al studiilor mişcării aluviunilor în curenţi de apă cu nivel liber.

Astfel prin completarea şi înlocuirea parţială a încercărilor în curenţi de apă cu încercări în curenţi de aer, studiul mişcării aluviunilor va putea fi mult simplificat. Prezentul studiu se extinde numai asupra mişcării aluviunilor, în lungul unui pat format din material aluvionar ; el nu are în vedere transportul pneumatic, la care mişcarea particulelor solide are loc în lungul unor pereţi rigizi. Lucrarea de faţă cuprinde rezultatele obţinute în cadrul studiilor comparative asupra mişcării aluviunilor în curenţi de apă cu nivel liber şi curenţi de aer sub presiune, efectuate cu scopul de a lămuri cele două aspecte enunţate mai sus.

Încercările în curenţi de apă cu nivel liber au fost executate cu colaborarea ing. Filoti A. şi ing. Delican Dumitru.

Încercările în curenţi de aer sub presiune au fost efectuate cu ajutorul lui Pîrvan I., Bodoagă B. şi Juster V., tehnicieni cercetători.

Cu toate că mişcarea aluviunilor a stat în centrul atenţiei cercetătorilor hidraulicieni, stadiul actual al cunoştinţelor noastre arată că problema este departe de a fi epuizată.

În domeniul mişcării aluviunilor există astăzi nenumărate cercetări efectuate în curenţi de apă, o serie mai redusă de lucrări în curenţi de aer, și cîteva lucrări, în care se tratează problema sub ambele aspecte. Nu se poate vorbi însă de o teorie unitară a mișcării aluviunilor, ci din contra ne aflăm încă în fața a numeroase ipoteze și teorii adesea contradictorii. Această situație se datorește complexității fenomenului și condițiilor grele în care se fac studiile de mișcarea aluviunilor.

Este interesant de subliniat că studiile efectuate asupra mișcării aluviunilor în curenți de aer sub presiune, fie că au fost efectuate în paralel cu încercări cu apă sau nu, au scos în evidență o analogie puternică cu mișcarea aluviunilor în curenți de apă cu nivel liber.

Astfel Zingg A. W. [7] a constatat că în ecuația repartiției vitezei în cazul unui curent de aer fără transport de aluviuni, valoarea constantei lui Karman (k) poate fi luată egală cu $\approx 0,4$ ca și în cazul curenților de apă. În același timp însă în cazul curenților de aer ce transportă aluviuni în suspensie, experiențele sale au arătat că valoarea constantei (k) scade. Or, acestea sînt și concluziile recente ale unui grup de cercetători a căror rezultate experimentale reproduse în lucrarea lui Ning-Chien confirmă scăderea valorii lui k într-un curent de apă o dată cu creșterea transportului aluvionar în suspensie [4].

În ceea ce privește valoarea critică a forței de tîrîre pentru începutul transportului aluvionar în curenți de aer, ea a fost dată de către Zingg sub forma

$$\tau_s = 0{,}007\, d, \tag{1}$$

în care

d = diametrul particulei în mm,
τ_s = forța de tîrîre critică în pound/sq. fort

și este analoagă cu relațiile pentru mișcarea aluviunilor în curenți de apă, date de

$$\begin{aligned}
&\textit{Krey} && \tau_s = \gamma_s'' \frac{1}{8 \div 20}\, d,\\
&\textit{Kamer} && \tau_s = \frac{100}{6M}\,(\gamma_1 - \gamma/d_m),\\
&\textit{Mayer Peter} && \tau_s = 0{,}03 + 0{,}047\,\gamma_s''\, d_m\,,\\
&\textit{Levy} && \tau_s = \frac{1{,}95}{C}\, g\gamma d,
\end{aligned} \tag{1'}$$

unde în plus s-au folosit notațiile

γ — greutatea specifică a apei;
γ_1 — greutatea specifică a aluviunilor în aer;
γ_s'' — greutatea specifică a aluviunilor sub apă;
g — accelerația gravitațională;
C — coeficientul lui Chezy.

Bagnold și Chepil au determinat momentul de pornire a particulelor prin viteza de frecare a curentului dînd o relație de forma

$$U_x = A\sqrt{\beta g d}, \tag{2}$$

în care

A = constanta experimentală pentru care Bagnold a dat valoarea 0,1, în timp ce Chepil a dat valoarea 0,09 ÷ 0,11;
β = densitatea relativă;

$$\beta = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma}$$

g = accelerația gravitațională;
d = diametrul particulelor.

Relația de mai sus este analoagă cu cea dată de către Levy I. I. sub forma

$$U_{cr} = a\sqrt{gd}\, f\left(\frac{h}{d}\right), \tag{2}$$

în care

$$a = \sqrt{\frac{\gamma'}{\gamma}}\, f_m.$$

În sfîrșit și pentru determinarea valorii debitului solid, g_s, s-au obținut expresii analoage, atît în aer cît și în apă.

Astfel Zingg a determinat relația între g_s și τ_0 sub forma

$$g_s = 175\,(10^3)\, d^{3/4}\, \tau_0^{3/2}, \tag{3}$$

iar Bagnold și Chepil sub forma

$$g_s = C\left(\frac{d}{D}\right)^{1/2} \frac{\rho}{g}\left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{3/2},$$

care este analoagă cu relația dată de Meyer-Peter pentru transportul într-un curent de apă

$$\tau_0 = A + B g_s^{2/3}. \tag{3'}$$

Și într-un domeniu atît de complex ca cel al mișcării riflurilor de nisip există experiențe care demonstrează analogia fenomenului în curent de apă și aer. Astfel Velikanov [6] citează experiențe asupra vitezei de înaintare a riflurilor efectuate de către Minski E. M. în curenți de aer și Pușkarev în curenți de apă. Rezultatele acestor experiențe, prezentate în graficul din figura 1 dovedesc într-adevăr existența unor legi comune după care are loc mișcarea riflurilor în ambele scurgeri.

Din cele de mai sus se desprind următoarele aspecte importante pentru studiul nostru :

a) Există material experimental și teoretic care permite să se facă ipoteza că mecanismul mișcării aluviunilor în curenți de aer sub presiune și apă cu nivel liber este în foarte multe privințe analog și că studiul aspectelor comune și eventual al celor distincte, poate duce la concluzii importante pentru problema enunțată la începutul articolului.

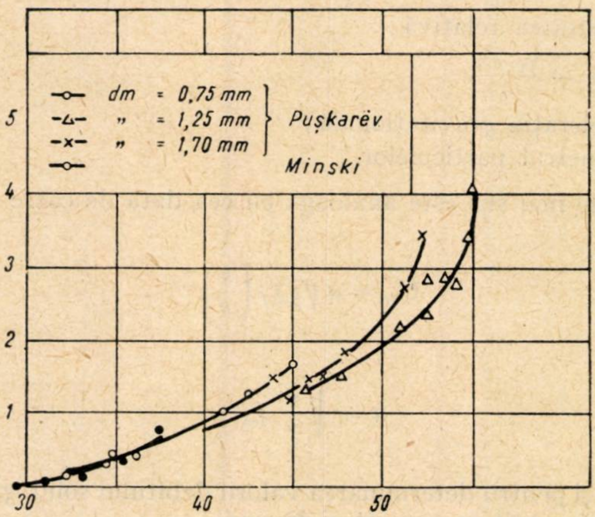


Fig. 1. — Studiul comparativ al vitezei de înaintare a dunelor de nisip în curent de apă și aer.

b) Mecanismul mișcării aluviunilor este foarte complex și influențat de o serie întreagă de factori într-o măsură atît de accentuată, încît astăzi nu se poate face încă trecerea directă de la rezultatele unui cercetător la ale altuia, chiar atunci cînd este vorba de studii în același tip de curent și cu atît mai puțin dacă este vorba de curenți de tipuri diferite.

c) Factorii care influențează cu precădere mecanismul transportului aluvionar sînt legați în primul rînd de materialul aluvionar, în al doilea rînd de instalația de cercetare utilizată și în sfîrșit în al treilea rînd de metodica adoptată în studiul și în prelucrarea rezultatelor. Avînd în vedere cele de mai sus a devenit clar că, pentru a rezolva cu succes cele două aspecte ale problemei enunțate la început, este necesar un studiu asupra mișcării aluviunilor efectuate :

a) în paralel în curent sub presiune și cu nivel liber ;

b) pentru aceeași serie de materiale ;

c) cu o metodică unică de studiu (observații și măsurători) și de prelucrare a rezultatelor ;

d) în instalații specifice de laborator permanente.

Un asemenea studiu s-a inițiat de către colectivul nostru și rezultatele primelor serii de experiențe se expun în cele ce urmează.

1. Instalaţia, metodica şi materialul aluvionar studiat

a) Pentru încercări în curenţi de apă cu nivel liber s-a utilizat un canal vitrat cu pantă variabilă, şi un canal vitrat fix sub presiune (fig. 2) pentru încercările cu aer.

Instalaţia şi metodica de studiu în curenţi de apă au fost prezentate într-o lucrare anterioară [4].

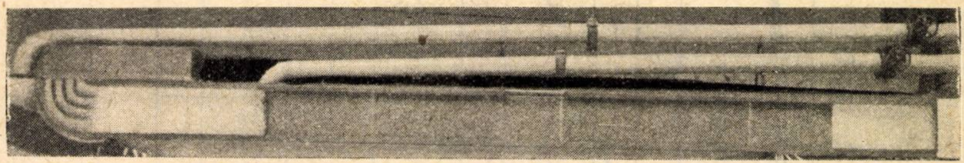


Fig. 2. — Instalaţie pentru studiul mişcării aluviunilor în curenţi de aer.

Canalul pentru încercările în curenţi de aer a avut următoarele caracteristici :

lungime	400 cm ;
lăţime	20 cm ;
adîncimea curentului de aer	$1 \div 4$ cm ;
lungimea de lucru	200 cm ;
lungimile de acces	125 cm amonte ; 75 cm aval.

Ca şi în cazul încercărilor cu apă s-a lucrat fără recircularea debitului solid. Captarea debitului solid transportat se realizează într-un buncher-decantor construit în partea aval a canalului.

b) Avînd în vedere faptul că ne-am propus să determinăm momentul critic al începutului transportului aluvionar, s-a trecut la o metodică de studiu prin care s-a determinat legea debitului solid în funcţie de forţa de tîrîre pentru domeniul de început al mişcării şi s-a considerat începutul mişcării, momentul în care conform legii stabilite, debitul solid devine nul.

Desigur că faţă de acest moment critic, astfel determinat şi care corespunde mişcării generale, au existat şi unele deplasări de particule izolate, care nu sînt însă caracteristice pentru mişcarea aluviunilor.

c) Studiul s-a efectuat pentru trei sorturi de nisip cu $d_m = 0{,}175$; $0{,}178$; $1{,}16$ mm şi trei sorturi de cărbune $d = 1 \div 2$ mm, $d = 2 \div 3$ mm, $d = 3 \div 4$ mm, conform curbelor granulometrice din figura 3.

Mărimea hidraulică corespunzătoare materialului studiat a fost determinată pe cale experimentală şi anume : pentru nisip $w = 2{,}50$ cm/s ; $2{,}62$ cm/s ; $14{,}91$ cm/s ; pentru cărbune $w = 4{,}50$ cm/s ; $6{,}59$ cm/s ; $8{,}47$ cm/s ; greutatea specifică a nisipului $\gamma_n = 2660$ kg/m³ ; greutatea specifică a cărbunelui $\gamma_c = 1250$ kg/m³.

Materialul studiat a fost omogen, nisipul cu particule rotunjite și uniforme ; cărbunele a fost un material rezultat din concasaj, cu muchiile ascuțite și mai puțin uniforme, conform figurii 4.

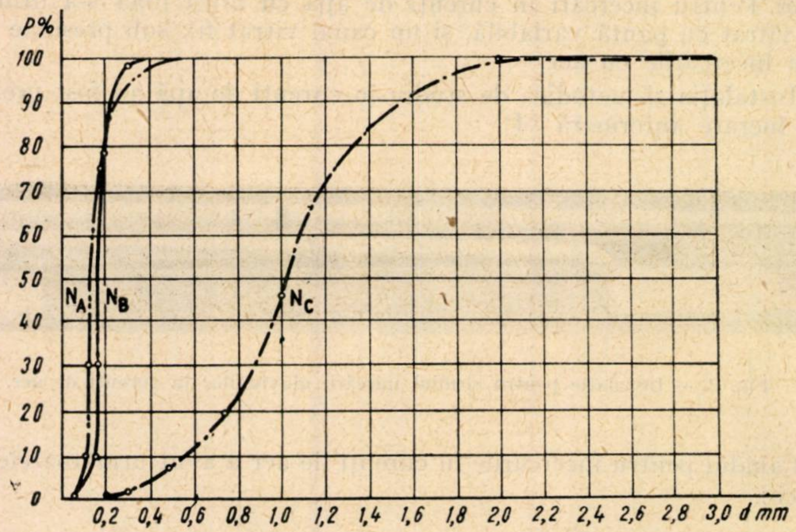


Fig. 3. — Curbele granulometrice ale materialului studiat.

Așa cum reiese din datele de mai sus, materialul studiat corespunde celor ce se utilizează în majoritatea cazurilor în laboratoarele hidraulice.

2. Rezultatele încercărilor

În cadrul încercărilor s-au căutat să se determine momentul începutului transportului aluvionar. Condițiile critice de pornire a particulelor au fost caracterizate prin forța de tîrîre medie a curentului.

a) Rezultatele încercărilor în curent de apă au fost prezentate în articolul amintit mai sus [4].

Valorile forțelor de tîrîre critice sînt date în tabela 1.

Tabela 1

$N_{0,175}$	$N_{0,178}$	$N_{1,16}$	$C_{1\div2}$	$C_{2\div3}$	$C_{3\div4}$
$\tau = 13,0$	19,7	51,0	14,9	18,7	27,5 g/m²

Forțele de tîrîre critice pentru cărbune au fost reduse la valorile corespunzătoare nisipului, proporțional, cu raportul greutăților specifice sub apă, adică :

$$\tau_{0c} = \tau_0 \frac{\gamma''_n}{\gamma''_c} . \qquad \text{(IV.5)}$$

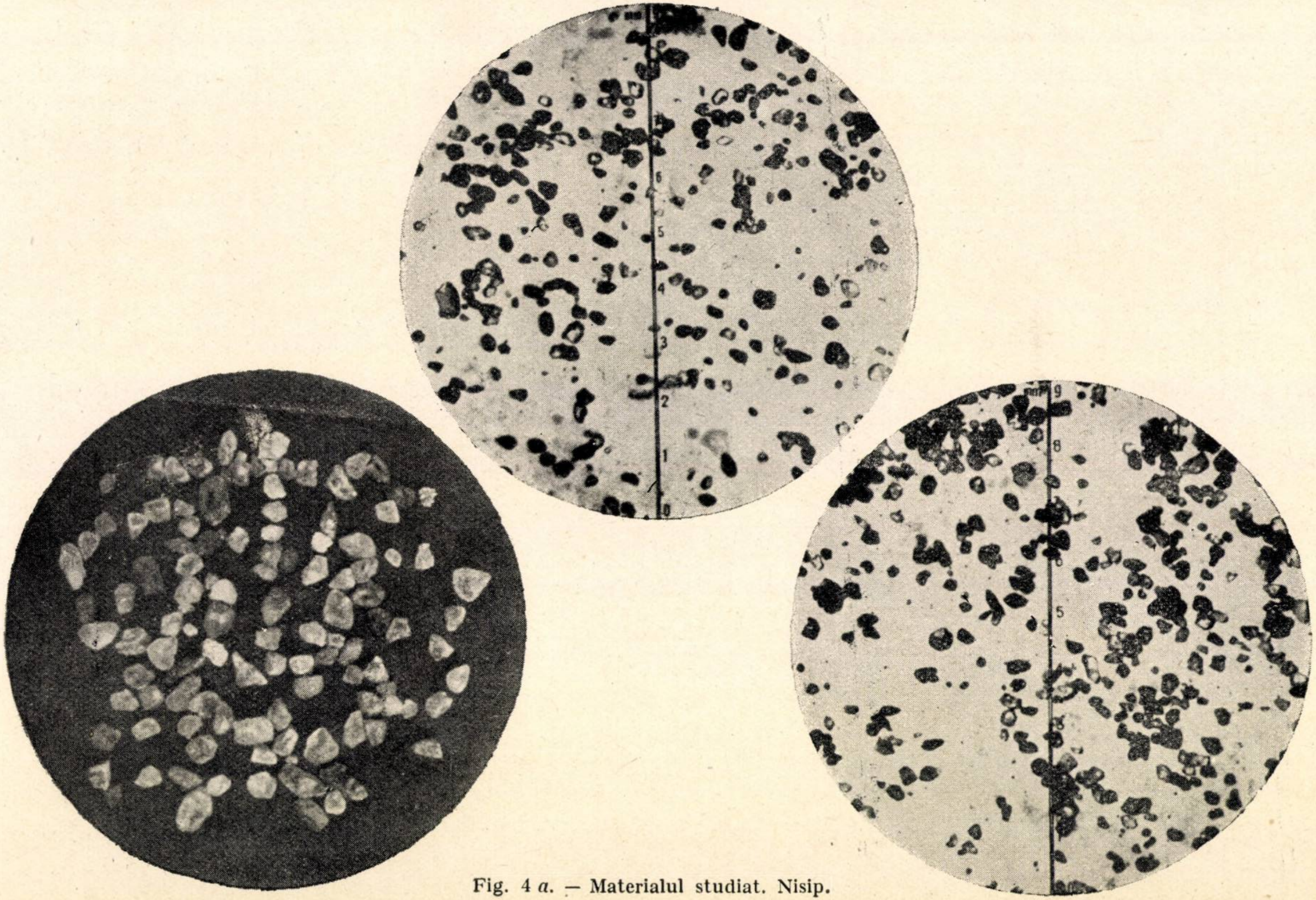


Fig. 4 *a*. — Materialul studiat. Nisip.

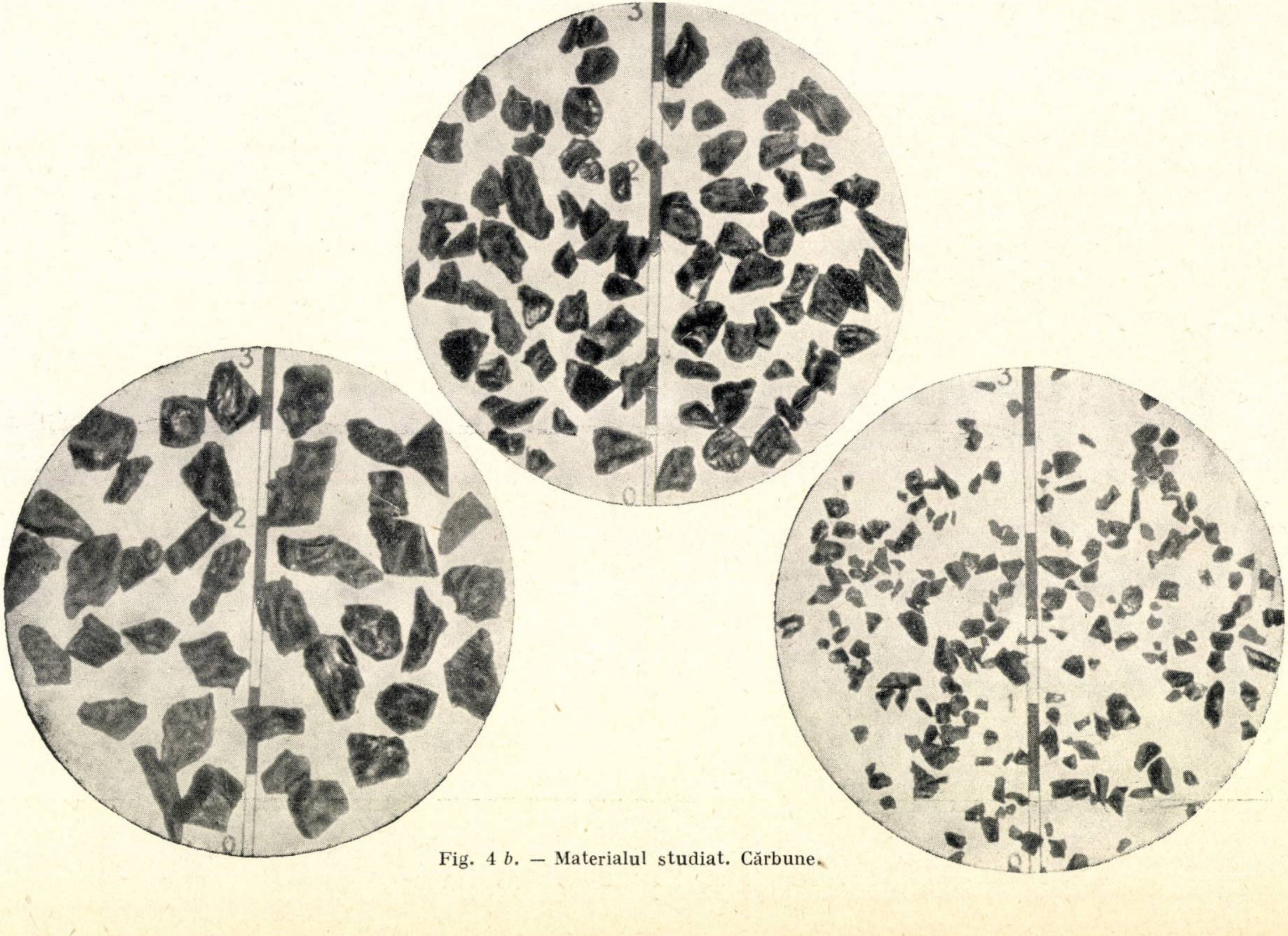


Fig. 4 *b*. — Materialul studiat. Cărbune.

Valorile astfel calculate suprapuse graficului lui Nieng-Chien, conform figurii 5, au arătat că rezultatele se încadrează între curbele date de Meyer-Peter și Kalinske.

Pentru verificare, rezultatele obținute au fost prelucrate conform metodicei date de White și Tisch L. [5], care în lucrările lor au căutat să scoată în evidență influența gradului de turbulență asupra pornirii particulelor.

Suprapunerea valorilor pe graficul cercetătorilor amintiți mai sus (fig. 6) a arătat că ele se încadrează satisfăcător între rezultatele obținute de aceștia.

b) Pentru determinarea vitezei medii critice de antrenare în curenți de aer s-a reprezentat relația $G = f(h_1)$ în care :

G = debitul solid în g/min.m ;

$h_1 = k.v^2$;

h_1 = indicația la diafragmă a manometrului ;

v = viteza medie a curentului.

Relația a fost apoi extrapolată la valorile minime ale lui G și s-au determinat valorile h_1 corespunzătoare. Pentru determinarea forței de tîrîre critice s-a reprezentat relația $h_1 = f(h_2)$ în care

h_1 are semnificația de mai sus,

h_2 este pierderea de sarcină globală în col. alcool pe tronsonul de lucru.

Apoi s-a determinat valoarea lui h_2 corespunzătoare lui h_1 critic determinat anterior.

Deoarece în ambele cazuri, punctele experimentale s-au grupat pe o serie de drepte, s-au calculat expresiile dreptelor respective $G = f(h_1)$ și $h_1 = f(h_2)$ prin metoda patratelor minime a erorilor și s-au obținut astfel relațiile

— nisip N_A $G = -2769 + 11{,}2\ h_1$
— nisip N_B $G = -2633 + 10{,}4\ h_1$
— nisip N_C $G = 8440 - 24{,}9\ h_1$
— cărbune $C_{1\div 2}$ $G = -4340 + 34{,}4\ h_1$
— cărbune $C_{2\div 3}$ $G = -5035 + 23{,}6\ h_1$
— cărbune $C_{3\div 4}$ $G = -5147 + 15{,}1\ h_1$

și

— nisip N_A $h_1 = 206{,}9 + 3{,}65\ h_2$
— nisip N_B $h_1 = 182 + 5{,}38\ h_2$
— nisip N_C $h_1 = 152{,}0 + 1{,}075\ h_2$
— cărbune $C_{1\div 2}$ $h_1 = 84{,}2 + 0{,}596\ h_2$
— cărbune $C_{2\div 3}$ $h_1 = 84 + 1{,}06\ h_2$
— cărbune $C_{3\div 4}$ $h_1 = -301{,}3 + 3{,}87\ h_2$.

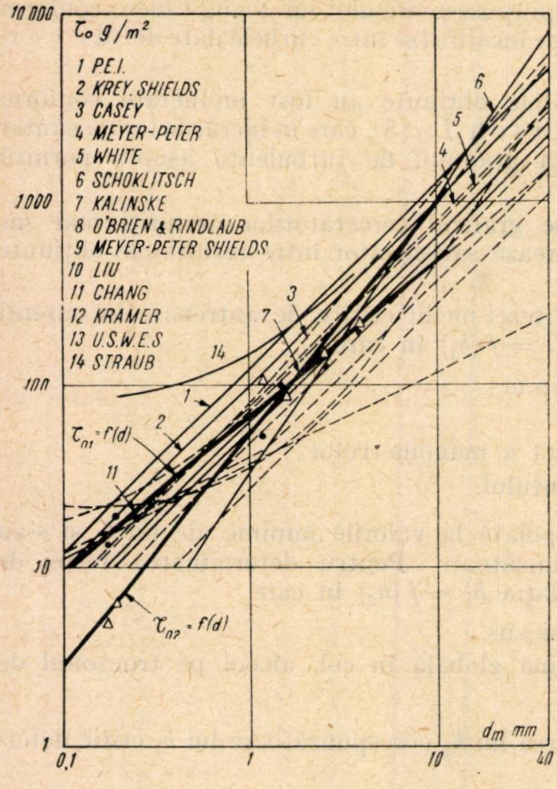


Fig. 5. — Graficul relațiilor între forțele de tîrîre critice și diametrul aluviunilor de nisip propuse de diferiți autori.

Δ — încercări în curenți de aer sub presiune (τ_{02}); ● — încercări în curenți de apă cu nivel liber (τ_{01}).

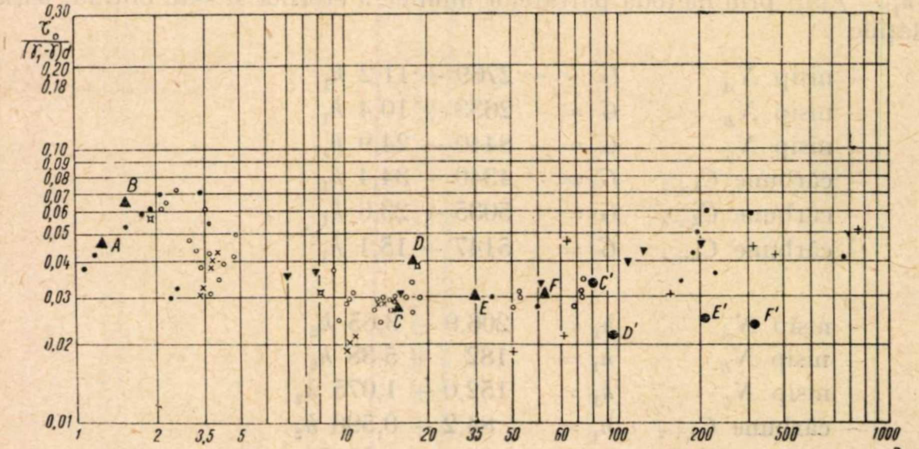


Fig. 6. — Graficul Tison-White. ▲ — încercări în apă, ● — încercări în aer.

Pe baza acestor relații s-au dedus următoarele valori caracteristice ale începutului transportului aluvionar

	h_1	h_2
— nisip N_A	247,0	11,04
— nisip N_B	253,0	13,26
— nisip N_C	339,0	178,50
— cărbune $C_{1\div 2}$	126,0	68,40
— cărbune $C_{2\div 3}$	215,5	124,0
— cărbune $C_{3\div 4}$	340,8	165,8

Cu ajutorul valorilor h_1 s-au determinat pe baza curbei de etalonare a instalației următoarele valori ale vitezei medii de tîrîre

— nisip N_A	302,5	cm/s
— nisip N_B	307,5	cm/s
— nisip N_C	1055,5	cm/^{3}
— cărbune $C_{1\div 2}$	637,9	cm/s
— cărbune $C_{2\div 3}$	837,55	cm/s
— cărbune $C_{3\div 4}$	1058	cm/s

Pentru calculul forței de tîrîre critice, s-au folosit concluziile studiului de rugozitate mixtă expus într-o lucrare anterioară adică s-a admis relația :

$$\lambda_m = \frac{\lambda_1' + \lambda_2'}{2}.$$

Rugozitatea geamului λ_2' s-a determinat pe curba lui Blazius pe baza numărului Re calculat cu V_m și $R = h/2$.

Rugozitatea medie λ_m a rezultat direct din experiențe.

Valorile λ_1', care au fost calculate cu formula de mai sus, au permis găsirea valorilor forței de tîrîre critice cu ajutorul relației :

$$\tau_0 = \frac{\lambda_1^2}{2} \rho V_m^2 .$$

S-au obținut astfel următoarele valori ale forței de tîrîre critice :

— nisip N_A	$\tau =$	4,745	g/m^2
— nisip N_B	$\tau =$	6,463	,,
— nisip N_C	$\tau =$	107,93	,,
— cărbune $C_{1\div 2}$	$\tau =$	40,51	,,
— cărbune $C_{2\div 3}$	$\tau =$	77,33	,,
— cărbune $C_{3\div 4}$	$\tau =$	97,87	,,

Pentru a putea reprezenta valorile corespunzătoare cărbunelui pe acelaşi grafic cu cele ale nisipului s-a folosit relaţia :

$$\tau_{0c} = \tau_0 \frac{\gamma_n'}{\gamma_c'},$$

în care

γ_n' — greutatea specifică a nisipului în aer ;
γ_c' — greutatea specifică a cărbunelui în aer.

S-au obţinut astfel valorile :

— cărbune $C_{1\div 2}$	$\tau_{0c} = 86{,}20$ g/m²
— cărbune $C_{2\div 3}$	$\tau_{0c} = 164{,}55$,,
— cărbune $C_{3\div 4}$	$\tau_{0c} = 208{,}26$,, .

Curbele $\tau_0 = f(d)$ pentru începutul mişcării în curent de aer au fost trecute pe graficul lui Nieng-Chien (fig. 5).

Din analiza graficului rezultă că se poate face trecerea de la valorile critice de antrenare obţinute pentru acelaşi material în curent de aer şi apă. Se răspunde astfel pozitiv la problema, aşa cum a fost ea enunţată la început.

Prin urmare, în ceea ce priveşte justa dimensionare a modelelor, alegerea materialului granular pentru fundul mobil al albiei se poate face pe baza forţei de antrenare critice.

Pentru aceasta este necesar ca forţele de tîrîre în natură şi pe model să se găsească în raportul forţelor de tîrîre critice corespunzătoare, adică :

$$\alpha_\tau = \frac{\tau_{0N}}{\tau_{0M}}.$$

În care indicii N şi M corespund materialelor din natură şi model.

Desigur că un asemenea mod de a pune problema, presupune că legea debitului solid este similară pe model şi natură. Or, din acest punct de vedere atît din încercările noastre cît şi din cele ale altor autori, rezultă că debitul solid în curent de aer creşte mult mai repede cu diferenţa dintre viteza curentului şi viteza de antrenare ($V - V_0$), decît în curent de apă. Acest lucru se explică prin faptul, remarcat de altfel de nenumăraţi cercetători, că saltul mediu al unei particule este de multe ori mai mare în aer decît în apă, în aceste condiţii dacă se asigură modelarea aluviunilor pe baza criteriilor de mai sus, procesele morfologice devin pe model deosebit de intense şi este posibil să fie deformate cantitativ şi chiar calitativ faţă de natură.

Din aceste motive, în încercările de albie cu fund mobil am adoptat curenţi de aer cu caracteristici puţin superioare celor de antrenare, în care transportul aluvionar puţin dezvoltat pe model se apropie mai mult de natură.

În ceea ce priveşte cel de-al doilea aspect al problemei, graficele obţinute mai sus ne permit să trecem cu uşurinţă de la valorile critice de antrenare, determinate experimental în aer, la valorile corespunzătoare ale antrenării în apă, după schema simplă din figura 7.

Se determină experimental valoarea forței de tîrîre în aer, după care se trece pe verticală la valoarea corespunzătoare a forței de tîrîre în apă. Este de remarcat că valorile forței de tîrîre în aer sînt mai mici decît cele corespunzătoare în apă pentru valorile particulei de diametru mic și tind spre același ordin de mărime la particule de diametru mare. Pentru a explica cele de mai sus, s-au calculat și reprezentat valorile corespunzătoare $\frac{\tau_{02}}{(\gamma_1 - \gamma)\, d}$ și *Re* pe graficul lui Tison (fig. 5). Se observă pe acest grafic că mișcarea particulelor mici în aer are loc la numere *Re* mult mai mari, decît în apă, deci la un grad de turbulență sporit, ceea ce explică desigur și valoarea mai mică a raportului dintre efortul de tîrîre real și cel teoretic față de mișcarea în apă. Se observă că pentru numere *Re* mari, deci la un grad dezvoltat al turbulenței, acest raport devine același atît în apă cît și în aer. În concluzie, din cele de mai sus rezultă că, pentru asemenea valori caracteristice ale transportului aluvionar, încercările în curenți de apă, care sînt greoaie și de durată, pot fi înlocuite cu succes cu încercări mult simplificate, în curenți de aer. Facem însă observația că cele de mai sus trebuie privite ca o metodă cu caracter general. Valorile cantitative ale vitezelor și ale forțelor de tîrîre critice în aer și apă pot varia de la o instalație la alta. De aceea este recomandabil ca fiecare mare laborator să-și organizeze asemenea experiențe pentru instalațiile proprii de care dispune.

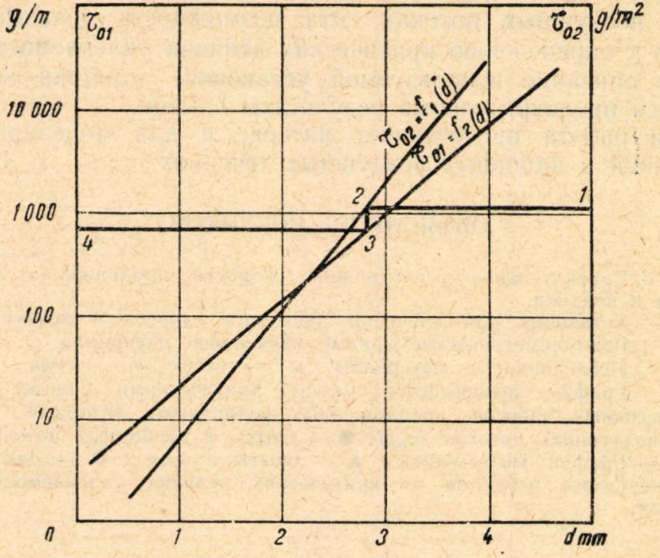


Fig. 7. — Schema de trecere de la valorile critice a antrenării aluviunilor în apă și aer.

Primită la redacție la 6 martie 1957, completată la 1 noiembrie 1957.

ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ НАНОСОВ В НАПОРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе рассматривается возможность замены исследования движения наносов в водяных потоках — исследованием этого явления в воздушных потоках. Эта возможность доказывается применительно к определению критических величин увлекаемости.

Дается описание используемой установки, методики исследований и приводятся предварительные результаты опытов.

Данная работа представляет интерес и для моделирования русловых явлений в напорных воздушных течениях.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Сравнительное исследование скорости продвижения дюн песка в потоках воды и воздуха.

Рис. 2. — Установка для изучения движения наносов в воздушных потоках.

Рис. 3. — Гранулометрические кривые изученного материала.

Рис. 4. — Исследованные материалы : *a* — песок ; *b* — уголь.

Рис. 5. — График зависимостей между критическими силами увлечения и диаметром песочных наносов, предложенных различными авторами ; △ — опыты в напорных воздушных потоках (τ_{02}) ; ● — опыты в свободных потоках воды (τ_{01}).

Рис. 6. — График Тисон-Уайта ; ▲ — опыты в воде ; ● — опыты в воздухе.

Рис. 7. — Схема перехода от критических величин увлекаемости наносов в воде и воздухе.

DYNAMIQUE DU MOUVEMENT DES ALLUVIONS DANS LES ÉCOULEMENTS SOUS PRESSION

RÉSUMÉ

Les auteurs étudient la possibilité de substituer à l'étude du mouvement des alluvions dans les courants d'eau, l'étude du même phénomène, dans les courants d'air. Ils démontrent cette possibilité en ce qui concerne la détermination des valeurs critiques d'entraînement.

Les auteurs indiquent l'installation utilisée, la méthode de travail, ainsi que les premiers résultats expérimentaux.

L'étude offre également de l'intérêt pour l'étude sur maquette des phénomènes de chenal dans les courants d'air sous pression.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Etude comparée de la vitesse d'avance des dunes de sable en courant d'eau et d'air.

Fig. 2. — Installation pour l'étude du mouvement des alluvions en courant d'air.

Fig. 3. — Courbes granulométriques du matériel étudié.

Fig. 4. — Matériel étudié : *a*) sable ; *b*) charbon.

Fig. 5. — Graphique des relations entre les forces critiques d'entraînement et le diamètre des alluvions de sable, proposées par différents auteurs. Δ — essais en courants d'air sous pression (τ_{02}) ; ● — essais en courants d'eau à niveau libre (τ_{01}).

Fig. 6. — Graphique Tison-White. ▲ — essais dans l'eau ; ● — essais dans l'air.

Fig. 7. — Schéma de transition des valeurs critiques d'entraînement des alluvions dans l'eau et dans l'air.

BIBLIOGRAFIE

1. CHIEN N., *The presents status of research on sediment transport.* Procedings of the American. Society of Civil Engineers, **80**, *565* (1954).
2. KNOROZ V. S., *Peremeşcenie pescenih materialov napornîmi potokami jidkosti.* Izvestia V.N.I.I.G., *40*, (1949).
3. LEVI I. I., *Dinamika ruslovih potokah.* Gosenergoizdat. Moscova, 1948.
4. MATEESCU C., KAHAN M., FILOTTI A., DELICAN D., *Studiul mişcării aluviunilor în regim uniform.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *3* (1957).
5. TISON L. J., *Recherches sur la tension limite d'entraînement des matériaux constitutifs du lit.* Annales de la Soc. Scientifique de Bruxelles, Ser F., (1947).
6. VELIKANOV M. A., *Dinamika ruslovih potokov.* Ghimizdat Moscova-Leningrad, (1948).
7. ZINGG A. W., *Wind tunnel studies of the movement of sedimentary material.* Congresul al V-lea de Hidraulică, Iowa, 1952.

INFLUENŢA TURBULENŢEI ASUPRA MIŞCĂRII ÎN STRATUL DE LUBRIFIANT

DE

V. N. CONSTANTINESCU

1. INTRODUCERE

În general mişcarea în stratul de lubrifiant este considerată ca fiind laminară, deoarece, datorită grosimii foarte reduse a stratului de lubrifiant, numărul Reynolds al scurgerii are, în condiţii uzuale, valori relativ reduse. În ultimul timp însă, datorită regimurilor de lucru la viteze din ce în ce mai mari şi a utilizării şi a altor categorii de lubrifianţi decît uleiurile şi cu o viscozitate mai redusă decît acestea (apă, gaze), se pune din ce în ce mai mult problema unei funcţionări a lagărelor în condiţiile unei mişcări turbulente şi implicit studiul lubrificaţiei în regim turbulent.

Pentru lubrificaţia cu lichide, G. I. Taylor [1], [2] a găsit că pentru lagărele circulare neîncărcate, numărul Reynolds critic, de la care mişcarea în stratul de lubrifiant devine turbulentă, are valoarea

$$Re_c = \frac{\rho V \Delta}{\mu} = \frac{41{,}1}{\sqrt{\psi}}, \tag{1}$$

în care ρ este densitatea lichidului, V viteza relativă dintre suprafeţe, Δ jocul radial, μ viscozitatea, r raza fusului, iar $\psi = \frac{\Delta}{r}$ este jocul relativ.

Valoarea numărului Reynolds critic, dată de relaţia (1), concordă bine cu încercările experimentale făcute de D. F. Wilcock [3] şi de M. I. Smith şi D. D. Fuller [4] pentru lagăre circulare. De asemenea un fenomen asemănător a fost observat şi pentru alte tipuri de lagăre, ca de exemplu lagăre în trepte [5].

Rezultă deci ca un fenomen general că prin creşterea numărului Reynolds al scurgerii în stratul de lubrifiant, mişcarea laminară îşi pierde stabilitatea şi degenerează într-o mişcare turbulentă. În condiţii uzuale, turația corespunzătoare numărului Reynolds critic pentru lagărele la care se utilizează apa în cantitate de lubrifiant este de ordinul de mărime 2 000 rot/min, la lagărele cu ulei este de ordinul de mărime 20 000 rot/min, iar la lagărele cu aer, de ordinul de mărime 100 000 rot/min. Turațiile de mai sus sînt destul de mari, dar totuși comparabile cu vitezele atinse astăzi în unele mașini moderne.

În cele ce urmează, dat fiind că cercetările efectuate pînă în prezent au mai mult un caracter experimental, vom căuta să facem un studiu teoretic asupra mișcării în stratul de lubrifiant în ipoteza că aceasta are un caracter turbulent cu scopul de a determina distribuția vitezelor și presiunilor în lagăre, ca și forțele și momentele de frecare.

2. ECUAŢII GENERALE

Pentru a scrie ecuațiile de mișcare în stratul de lubrifiant, vom considera toate mărimile care caracterizează mișcarea de forma

$$\varphi = \overline{\varphi} + \varphi' ; \qquad \overline{\varphi} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi \, dt, \tag{2}$$

$\overline{\varphi}$ fiind valoarea medie în timp a mărimei φ, iar φ' pulsația acesteia ($\overline{\varphi'} = 0$).

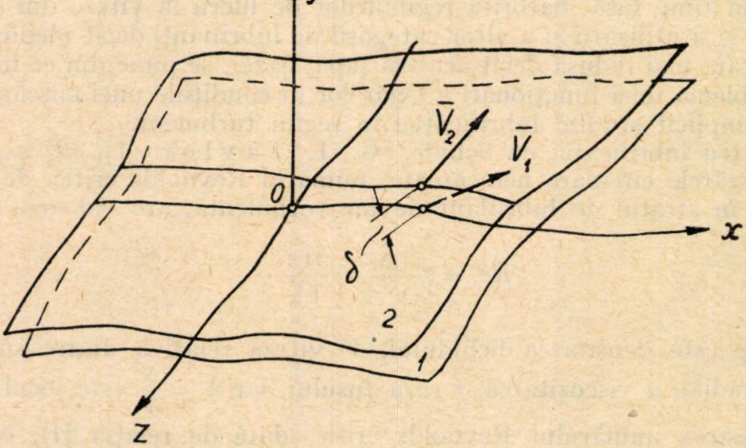


Fig. 1

Să considerăm un sistem de axe *Oxyz* (fig. 1), avînd axa *Ox* cuprinsă în întregime pe suprafața *1* (se neglijează deci curbura suprafeței față de grosimea stratului de lubrifiant δ) și axa *Oy* dirijată după normala la aceeași suprafață, sistem curent întrebuințat în problemele de lubrificație.

În aceste condiții, ecuațiile lui Reynolds pentru fluide incompresibile scriu

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\mu\Delta\bar{u}+\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'^2})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{u'v'})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{u'w'}),\\
&\rho\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}+\mu\Delta\bar{v}+\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'v'})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'^2})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v'w'}),\\
&\rho\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}+\mu\Delta\bar{w}+\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'w'})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'w'})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{w'^2})
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

sau, introducînd simplificările ce rezultă din considerarea că mișcarea se efectuează în straturi foarte subțiri, sistemul (3) devine

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}&=\mu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'^2})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{u'v'})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{u'w'}),\\
\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'v'})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'^2})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v'w'}),\\
\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}&=\mu\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'w'})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'w'})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{w'^2}).
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Tensiunile turbulente $\overline{u'u'}$, $\overline{u'v'}$, $\overline{u'w'}$ etc. au toate același ordin de mărime, și, deoarece mișcarea se efectuează în straturi subțiri, derivatele în raport cu x și z ale acestor mărimi sînt în raportul $\frac{\delta}{x}$ $(\sim 10^{-3})$ mai mici decît derivatele acelorași mărimi în raport cu y și deci neglijabile față de acestea din urmă. În consecință, sistemul (4) se scrie

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}&=\mu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{u'v'}),\\
\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'^2}),\\
\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}&=\mu\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'w'}).
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Pentru mișcarea bidimensională, punînd $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, $w = 0$, sistemul (5) capătă forma mai simplă

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho \overline{u'v'}\right), \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho \overline{v'^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ecuația de continuitate se scrie

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Sistemul (5), respectiv sistemul (6) este aplicabil în prima aproximație și pentru mișcările compresibile (lubrificația cu gaze) dacă studiul se face în ipoteza că se consideră densitatea constantă în secțiune, variația densității în raport cu x și z fiind pusă în funcție de presiune, sub forma unei transformări politropice oarecare [6], [7]

$$\frac{p}{\rho^{\varkappa}} = \text{const.}\,; \qquad 1 \leqslant \varkappa \leqslant 1{,}4, \tag{8}$$

iar ecuația de continuitate poate fi atunci scrisă în prima aproximație sub forma

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho}\, \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho}\, \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{\rho}\, \bar{w})}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

Sistemul (5) împreună cu ecuația de continuitate (7) sau cu ecuațiile (8) și (9) permit rezolvarea problemei, cu condiția să se cunoască tensiunile turbulente $\overline{u'v'}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{v'w'}$, care deosebesc ecuațiile (6) de ecuațiile mișcării în regim laminar. O primă deosebire care apare este constatarea că în regim turbulent $\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \neq 0$ (5) și anume presiunea are un minim către mijlocul stratului de lubrifiant și crește către pereți.

Integrînd a doua relație (5) în raport cu y, și notînd

$$\sigma(x, y, z) = -\rho \overline{v'^2}, \tag{10}$$

atunci presiunea va fi de forma

$$\bar{p} = \bar{\varpi}(x, z) + \sigma(x, y, z)\,; \qquad \frac{\partial \bar{\varpi}}{\partial y} = 0, \tag{11}$$

iar la pereți

$$\bar{p} = \bar{\varpi}(x, z) \tag{12}$$

deoarece la $y = 0$, δ, $\sigma = 0$. De asemenea

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\varpi}(x, z)}{\partial x}\,; \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{\varpi}(x, z)}{\partial z}\,, \tag{13}$$

deoarece derivatele $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial z}$ sînt, după cum s-a arătat și mai înainte, neglijabile, față de $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$, $\frac{\partial \bar{\varpi}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{\varpi}}{\partial z}$ etc.

În consecință, deși presiunea variază pe normala la stratul de lubrifiant, această variație nu influențează decît într-o măsură cu totul neglijabilă distribuția vitezelor, deoarece aceasta depinde de derivatele $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ și $\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$ care nu variază practic cu y. De asemenea debitul de lubrifiant nefiind influențat, rezultă că nici distribuția presiunilor pe cele două suprafețe lubrificate nu este influențată de faptul că presiunea variază cu y. Deoarece interesează presiunea pe cele două suprafețe, vom înțelege prin $\bar{p}$, $\bar{\varpi}$ adică presiunea la perete.

3. STUDIUL DISTRIBUȚIEI VITEZELOR

Să considerăm distribuția de viteze $\bar{u}$, care este guvernată de ecuația diferențială (6)

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho \overline{u'v'}\right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0. \tag{14}$$

Pentru a putea integra această ecuație trebuie să facem o ipoteză asupra funcției $\overline{u'v'}$. Pentru mișcările unidimensionale principala ipoteză utilizată este aceea a lungimii de amestec a lui Prandtl, căreia, deși i s-au adus unele obiecții [8], rezultatele obținute pentru mișcarea Poiseuille sînt foarte apropiate de cele experimentale, iar din punct de vedere teoretic permite obținerea de soluții riguroase ale ecuației diferențiale (14). În afară de aceasta remarcăm prin simplitatea ei soluția dată de S. I. Pai [9], care pentru mișcarea plană de tip Poiseuille, consideră distribuția vitezelor sub forma unei serii de puteri din care păstrează trei termeni $1 + a_2 y^2 + a_{2n} y^{2n}$ și alege exponentul n astfel încît rezultatele să concorde cu experiențele lui Laufer [10]. Pai extinde acest procedeu și pentru condițiile la limită ale mișcării de tip Couette, punînd soluția sub o formă asemănătoare : $1 + a_1 y + a_{2n+1} y^{2n+1}$ și consideră același n ca și pentru mișcarea Poiseuille. Acest procedeu însă, aplicat la condițiile unei mișcări cu gradient de presiune și cu o viteză relativă între suprafețe, așa cum este cazul în problema lubrificației, ar conduce la concluzia că, întocmai ca pentru scurgerea laminară, ar fi posibilă o suprapunere a efectelor în sensul că distribuția vitezelor s-ar prezenta ca o sumă între o mișcare Poiseuille și o mișcare Couette, concluzie care, după cum se arăta, nu este aplicabilă.

De aceea, în cele ce urmează, avînd în vedere că condițiile în care se poate utiliza ipoteza lungimii de amestec sînt îndeplinite în primă aproximație, vom considera că

$$-\rho\overline{u'v'} = \rho l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|, \tag{15}$$

în care vom pune

$$\left.\begin{aligned} l &= \varkappa y\,; \qquad 0 \leqslant y \leqslant \frac{\delta}{2}, \\ l &= \varkappa(\delta - y)\,; \quad \frac{\delta}{2} \leqslant y \leqslant \delta, \end{aligned}\right\} \quad \varkappa = 0{,}4. \tag{16}$$

Lungimea de amestec poate fi pusă și sub forma unei serii în y din care să păstrăm și al doilea termen, dar diferențele sînt reduse, din cauza faptului că grosimea δ este foarte redusă.

În aceste condiții ecuația diferențială (14) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\varkappa^2 y^2 \frac{\partial u}{\partial y}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\right] + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{17}$$

pentru $0 \leqslant y \leqslant \frac{\delta}{2}\cdot$

În această ecuație s-au suprimat barele deoarece de acum înainte vom utiliza numai valorile medii pentru parametrii ce determină mișcarea și nu valorile instantanee.

Pentru $\frac{\delta}{2} \leqslant y \leqslant \delta$, în scopul de a nu avea o ecuație diferențială deosebită de cea precedentă vom considera axa y îndreptată în sens invers, adică $y' = \delta - y$. Față de această nouă axă, ecuația diferențială a vitezelor este

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\varkappa^2 y'^2 \frac{\partial u}{\partial y'}\left|\frac{\partial u}{\partial y'}\right|\right] + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0\,; \qquad 0 \leqslant y' \leqslant \frac{\delta}{2} \tag{18}$$

identică cu (17).

Pentru a pune în evidență influența numărului Reynolds, să considerăm variabilele adimensionale

$$\bar{u} = \frac{u}{V}\,; \qquad \bar{y} = \frac{y}{\delta}, \qquad \bar{y}' = \frac{y'}{\delta} \tag{19}$$

și

$$Re = \frac{\rho V \delta}{\mu}\,. \tag{20}$$

În aceste condiții ecuația (17) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial\bar y}\left[\varkappa^2\bar y^2 Re\,\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}\left|\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}\right|\right]+\mu\frac{\partial^2\bar u}{\partial\bar y^2}-\frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{21}$$

sau, notînd cu

$$A=\varkappa^2 Re\,;\qquad B=-\frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{22}$$

și integrînd o dată în raport cu y, ecuația (21) devine

$$A\bar y^2\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}\left|\frac{\partial\bar u}{\partial y}\right|+\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}+B\bar y-C=0. \tag{23}$$

Prezența termenului care are ca factor $\left|\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}\right|$ introduce o oarecare complicație, deoarece trebuie luate în considerare atît cazul $\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}>0$ cît și $\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}<0$. În plus atît B cît și constanta de integrare C pot avea valori negative, zero sau pozitive, iar pentru fiecare caz soluția ecuației (23) va avea aspecte diferite. Cazurile care pot interveni sînt rezumate în tabela 1.

Tabela 1

Cazul	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*i*
B	−	−	−	−	0	0	+	+	+	+
$\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}$	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+
C	−	−	0	+	+	−	−	0	+	+

Ecuația (23) poate fi integrată fără dificultăți atît în mod riguros, fiind conduși la integrale eliptice sau soluția poate fi construită cu ajutorul funcțiilor eliptice (cum a procedat D. Dumitrescu pentru studiul distribuției vitezelor în mișcarea turbulentă a unui lichid greu în canale deschise [11], unde se ajunge la o ecuație diferențială asemănătoare cu (23)), sau mult mai simplu, introducînd unele aproximații.

Soluții riguroase

Pentru cazul $\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}>0$, ecuația (23) se scrie:

$$A\bar y^2\left(\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}\right)^2+\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}+B\bar y-C=0 \tag{24}$$

sau

$$\frac{\partial\bar u}{\partial y}=\frac{-1+\sqrt{1+4A\bar y^2(C-B\bar y)}}{2A\bar y^2}. \tag{25}$$

Pentru cazul $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} < 0$, ecuația (23) poate fi pusă sub forma

$$A\bar{y}^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right|^2 + \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right| - B\bar{y} + C = 0 \tag{26}$$

sau

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\,A\bar{y}^2 (C - B\bar{y})}}{2A\bar{y}^2}. \tag{27}$$

În cazurile *e* și *f* din tabela 1 (mișcarea Couette) $B = 0$ și distribuția vitezelor poate fi obținută în mod riguros prin mijloace elementare. Într-adevăr integrînd ecuația (25) se obține :

$$\bar{u} = \frac{1}{2A} \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 + 4\,AC\bar{y}^2}}{\bar{y}} + 2\sqrt{AC}\,\ln\left[2\bar{y}\sqrt{AC} + \sqrt{1 + 4\,AC\bar{y}^2}\right] \right\} + C_2. \tag{28}$$

În mod asemănător, pentru cazul $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} < 0$ (*f*), integrala ecuației (27) este

$$\bar{u} = -\frac{1}{2A} \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 - 4AC'\bar{y}^2}}{\bar{y}} - 2\sqrt{AC'}\,\arcsin 2\bar{y}\sqrt{AC'} \right\} + C_2, \tag{29}$$

unde $C' = -C > 0$.

În celelalte cazuri, integrarea ecuațiilor (25) și (27) conduce la integrale eliptice, avînd diferite aspecte pentru fiecare din cazurile arătate în tabela 1. De aceea nu vom urma această cale, ci vom căuta să punem direct aceste ecuații, sub forma unor funcții eliptice.

Pentru restul cazurilor să facem atunci transformarea [11].

$$\bar{y} = m\eta + n, \tag{30}$$

în care *m* și *n* să fie aleși astfel încît radicalul din ecuațiile (25) și (27) să se scrie sub forma

$$\sqrt{1 + 4A\bar{y}^2 (C - B\bar{y})} = \sqrt{4\eta^3 - g_2\eta - g_3}. \tag{31}$$

Punînd aceste condiții rezultă

$$m = -\frac{1}{(AB)^{1/3}}\,; \quad n = \frac{1}{3}\frac{C}{B} \tag{32}$$

și

$$g_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{AC^3}{B^2}\right)^{2/3}; \quad g_3 = -\left(1 + \frac{8}{27}\frac{AC^3}{B^2}\right) \tag{33}$$

indiferent dacă *B* și *C* au valori pozitive sau negative (*C* putînd lua și valoarea $C = 0$, dar $B \neq 0$).

În acest mod ecuația diferențială (25) se scrie

$$\frac{1}{m}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = \frac{1}{2A}\left[-\frac{1}{(m\eta+n)^2} + \frac{1}{(m\eta+n)^2}\sqrt{4\eta^3 - g_2\eta - g_3}\right] \tag{34}$$

iar, efectuînd transformarea

$$\eta = \mathfrak{P}(\varphi, g_2, g_3), \tag{35}$$

unde $\mathfrak{P}(\varphi, g_2, g_3)$ este funcția lui Weierstrass de invarianți g_2, g_3, ecuația (34) se scrie, ținînd seama că

$$\left(\frac{d\mathfrak{P}}{d\varphi}\right)^2 = 4\mathfrak{P}^3(\varphi) - g_2\mathfrak{P}(\varphi) - g_3 \tag{36}$$

sub forma

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} = \frac{1}{2A}\left\{-\frac{m\mathfrak{P}'^2(\varphi)}{[m\mathfrak{P}(\varphi)+n]^2} + \frac{m\mathfrak{P}'^2(\varphi)}{[m\mathfrak{P}(\varphi)+n]^2}\right\} \tag{37}$$

a cărei integrală este, cu $\mathfrak{P}(\varphi) = -\zeta'(\varphi)$

$$u(\varphi) = \frac{1}{2A[m\mathfrak{P}(\varphi)+n]} - \frac{2\zeta(\varphi)}{mA} + \frac{m}{2A}\int\frac{D\mathfrak{P}(\varphi)+E}{[m\mathfrak{P}(\varphi)+n]^2}d\varphi + C_2, \tag{38}$$

în care

$$D = \frac{12\,n^2 - m^3 g_2}{m^3}\,; \qquad E = \frac{8\,n^3 - g_3 m^3}{m^8}\,. \tag{39}$$

Integrala care intervine în relația (38) a fost calculată de D. Dumitrescu [11], fiind egală cu

$$\begin{aligned}\int\frac{D\mathfrak{P}(\varphi)+E}{[m\gamma(\varphi)+n]^2}d\varphi = G_2\Bigg\{&-\frac{\mathfrak{P}''(\varphi_0)}{\mathfrak{P}'^3(\varphi_0)}\left[\ln\frac{\sigma(\varphi-\varphi_0)}{\sigma(\varphi+\varphi_0)} + 2\varphi\zeta(\varphi_0)\right] + \\ &+\frac{1}{\mathfrak{P}'^2(\varphi_0)}\left[-\zeta(\varphi-\varphi_0) - \zeta(\varphi+\varphi_0) + 2\varphi\zeta'(\varphi_0)\right]\Bigg\} + \\ &+\frac{G_1}{\mathfrak{P}'(\varphi_0)}\left\{\ln\frac{\sigma(\varphi-\varphi_0)}{\sigma(\varphi+\varphi_0)} + 2\varphi\zeta(\varphi_0)\right\},\end{aligned} \tag{40}$$

în care

$$G_1 = \frac{D}{m^2}\,; \qquad G_2 = \frac{mE - nD}{m^3}, \tag{41}$$

iar φ_0 este definit de relația

$$\mathfrak{P}(\varphi_0) = -\frac{n}{m}\cdot \tag{42}$$

Funcțiile $\mathfrak{P}$, ζ și σ sînt definite de relațiile [12]

$$\left.\begin{aligned} \eta = \mathfrak{P}(\varphi) &= \frac{1}{\varphi^2} + \frac{g_2\varphi^2}{20} + \frac{g_3\varphi^4}{28} + \frac{g_2\varphi^6}{1\,200} + \frac{3g_2g_3\varphi^8}{6\,160} + \ldots \\ \zeta(\varphi) = -\int \mathfrak{P}(\varphi)\,d\varphi &= \frac{1}{\varphi} - \frac{g_2\varphi^3}{60} - \frac{g_3\varphi^5}{140} - \frac{g_2^2\varphi^7}{8\,400} - \ldots \\ \sigma(\varphi) = e^{\int\zeta(\varphi)\,d\varphi} &= \varphi - \frac{g_2\varphi^5}{240} - \frac{g_3\varphi^7}{840} - \frac{g_2^2\varphi^9}{161\,280} - \ldots \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

și se găsesc intabulate.

În consecință distribuția vitezelor va fi dată de relația

$$\begin{aligned} \bar{u}(\varphi) = \frac{1}{2A\,[m\mathfrak{P}(\varphi) + n]} - \frac{2}{mA}\left[\zeta(\varphi) - \frac{4n\varphi}{m}\right] + \\ + \frac{m}{2A}\,[G_2\,P(\varphi) + G_1\,Q(\varphi)] + C_2, \end{aligned} \tag{44}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} P(\varphi) = -\frac{\mathfrak{P}''(\varphi_0)}{\mathfrak{P}'^3(\varphi_0)}\left[\ln\frac{\sigma(\varphi-\varphi_0)}{\sigma(\varphi+\varphi_0)} + 2\varphi\zeta(\varphi_0)\right] + \\ + \frac{1}{\mathfrak{P}'^2(\varphi_0)}\left[-\zeta(\varphi-\varphi_0) - \zeta(\varphi+\varphi_0) + 2\varphi\zeta'(\varphi_0)\right], \\ Q(\varphi) = \frac{1}{\mathfrak{P}'(\varphi_0)}\left[\ln\frac{\sigma(\varphi-\varphi_0)}{\sigma(\varphi+\varphi_0)} + 2\varphi\zeta'(\varphi_0)\right]\cdot \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

În cazul ecuației diferențiale (27), raționamente cu totul asemănătoare conduc la ecuația

$$\begin{aligned} \bar{u}(\varphi) = -\frac{1}{2A\,[m\mathfrak{P}(\varphi) + n]} + \frac{2}{mA}\left[\zeta(\varphi) - \frac{4n\varphi}{m}\right] - \\ - \frac{m}{2A}\left[G_2\,P(\varphi) + G_1\,Q(\varphi)\right] + C_2, \end{aligned} \tag{46}$$

în care $P(\varphi)$ și $Q(\varphi)$ au aceleași expresii (45).

Pentru fiecare valori $A\,(Re)$ și $B\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ aceste soluții trebuie scrise pentru cele două domenii $0 \leqslant \bar{y} \leqslant \frac{1}{2}$ și $\frac{1}{2} \leqslant \bar{y} \leqslant 1 \left(0 \leqslant \bar{y}' \leqslant \frac{1}{2}\right)$, iar cele două grupuri de constante C și C_2 se determină prin condițiile la limită

$$\left.\begin{aligned} &\text{la}\quad \bar{y} = 0\,; && \bar{u} = 1 \\ &\bar{y} = 1\,(\bar{y}' = 0)\,; && \bar{u} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

și două condiții de racordare în ceea ce privește $\bar{u}$ și $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$ la $\bar{y} = 0{,}5$ $(\bar{y}' = 0{,}5)$.

Determinarea distribuției vitezelor pe această cale riguroasă este foarte laborioasă și de aceea soluțiile (44) și (46) prezintă mai mult un interes formal, mai ales că, după cum se va arăta, se pot deduce soluții aproximative ale ecuațiilor (24) și (26), care introduc erori practic nule față de valorile date de soluțiile (44) și (46).

Soluții aproximative

Distribuția vitezelor poate fi obținută foarte simplu, prin mijloace elementare, dacă se observă că pentru $\bar{y}_{\mathrm{I}} \leqslant \bar{y} \leqslant 0{,}5$ $(\bar{y}'_{\mathrm{I}} \leqslant \bar{y}' \leqslant 0{,}5)$, termenul $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$ este neglijabil față de $A\bar{y}^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right|$, iar pentru $\bar{y}\,(\bar{y}') \to 0$ $(0 \leqslant \bar{y} \leqslant \bar{y}_{\mathrm{I}},$ $0 \leqslant \bar{y}' \leqslant \bar{y}'_{\mathrm{I}})$ termenul $A\bar{y}^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{j}} \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right|$ este neglijabil față de $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$. Acest mod de a privi problema presupune existența, în imediata apropiere a peretelui a unui strat limită laminar, ipoteză cu totul normală din punct de vedere fizic.

În aceste condiții, ecuațiile diferențiale împreună cu soluțiile lor, care dau distribuțiile vitezelor în interiorul stratului de lubrifiant pentru cazurile din tabela 1, sînt rezumate în tabela 2.

Tabela 2

Cazul	*a*	*b*
Ecuația diferențială	$-A\bar{y}^2 \left\lvert\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right\rvert^2 - B'\bar{y} + C' = 0 \begin{pmatrix} B' = -B \\ C' = -C \end{pmatrix}$	$A\bar{y}^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)^2 - B'\bar{y} + C' = 0$
$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$	$-\sqrt{\frac{C'}{A}}\,\frac{\sqrt{1 - \frac{B'}{C'}\bar{y}}}{\bar{y}}$	$\sqrt{\frac{C'}{A}}\,\frac{\sqrt{\frac{B'}{C'}\bar{y} - 1}}{\bar{y}}$
$\bar{u}$	$C_2 - \sqrt{\frac{C'}{A'}}\left[2\sqrt{1 - \frac{B'}{C'}\bar{y}} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{B'}{C'}\bar{y}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{B'}{C'}\bar{y}}}\right]$	$C_2 + 2\sqrt{\frac{C'}{A}}\left[\sqrt{\frac{B'}{C'}\bar{y} - 1} - \right.$ $\left. - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{B'}{C'}\bar{y} - 1}\right.$

Tabela 2 (*continuare*)

Cazul	*c*	*d*
Ecuaţia diferenţială	$A\bar{y}^2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)^2 - B'\bar{y} = 0$	$A\bar{y}^2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)^2 - B'\bar{y} - C = 0$
$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}$	$\sqrt{\frac{B'}{A}}\,\frac{1}{\sqrt{\bar{y}}}$	$\sqrt{\frac{C}{A}}\,\frac{\sqrt{\frac{B'}{C}\bar{y}+1}}{\bar{y}}$
$\bar{u}$	$C_2 + 2\sqrt{\frac{B'}{A}}\sqrt{\bar{y}}$	$C_2 + \sqrt{\frac{C}{A}}\left[2\sqrt{\frac{B'}{C}\bar{y}+1} - \ln\frac{\sqrt{\frac{B'}{C}\bar{y}+1}+1}{\sqrt{\frac{B'}{C}\bar{y}+1}-1}\right]$

Cazul	*e*	*f*
Ecuaţia diferenţială	$A\bar{y}^2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)^2 - C = 0$	$-A\bar{y}^2\left\|\frac{\partial\bar{u}}{\partial^{-}}\right\|^2 + C' = 0$
$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}$	$\sqrt{\frac{C}{A}}\,\frac{1}{\bar{y}}$	$-\sqrt{\frac{C'}{A}}\,\frac{1}{\bar{y}}$
$\bar{u}$	$C_2 + \sqrt{\frac{C}{A}}\ln\bar{y}$	$C_2 - \sqrt{\frac{C'}{A}}\ln\bar{y}$

Cazul	*g*	*h*
Ecuaţia diferenţială	$-A\bar{y}^2\left\|\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right\|^2 + B\bar{y} + C' = 0$	$-A\bar{y}^2\left\|\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right\|^2 + B\bar{y} = 0$
$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}$	$-\sqrt{\frac{C'}{A}}\,\frac{\sqrt{1+\frac{B}{C'}\bar{y}}}{\bar{y}}$	$-\sqrt{\frac{B}{A}}\,\frac{1}{\sqrt{\bar{y}}}$
$\bar{u}$	$C_2 - \sqrt{\frac{C'}{A}}\left[2\sqrt{1+\frac{B}{C'}\bar{y}} - \ln\frac{\sqrt{1+\frac{B}{C'}\bar{y}}+1}{\sqrt{1+\frac{B}{C'}\bar{y}}-1}\right]$	$C_2 - 2\sqrt{\frac{B}{A}}\sqrt{\bar{y}}$

Tabela 2 (*continuare*)

Cazul	*i*	*j*
Ecuația diferențială	$-A\bar{y}^2\left\|\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right\|^2+B\bar{y}-C=0$	$A\bar{y}^2\left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)^2+B\bar{y}-C=0$
$\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}$	$-\sqrt{\dfrac{C}{A}}\,\dfrac{\sqrt{\dfrac{B}{C}\bar{y}-1}}{\bar{y}}$	$\sqrt{\dfrac{C}{A}}\,\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{B}{C}\bar{y}}}{\bar{y}}$
$\bar{u}$	$C_2-2\sqrt{\dfrac{C}{A}}\left[\sqrt{\dfrac{B}{C}\bar{y}-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{B}{C}\bar{y}-1}\right]$	$C_2+\sqrt{\dfrac{C}{A}}\left[2\sqrt{1-\dfrac{B}{C}\bar{y}}-\ln\dfrac{1+\sqrt{1-\dfrac{B}{C}\bar{y}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{C}{B}\bar{y}}}\right]$

Cu ajutorul acestor soluții, împreună cu distribuțiile parabolice ale vitezelor în stratul laminar din imediata apropiere a peretelui se pot construi distribuțiile de viteze din stratul de lubrifiant. Ținînd seama că distribuțiile de viteze în diferite secțiuni ale stratului de lubrifiant au aspectul din figura 2, putem deosebi 8 cazuri de profile de viteze și anume.

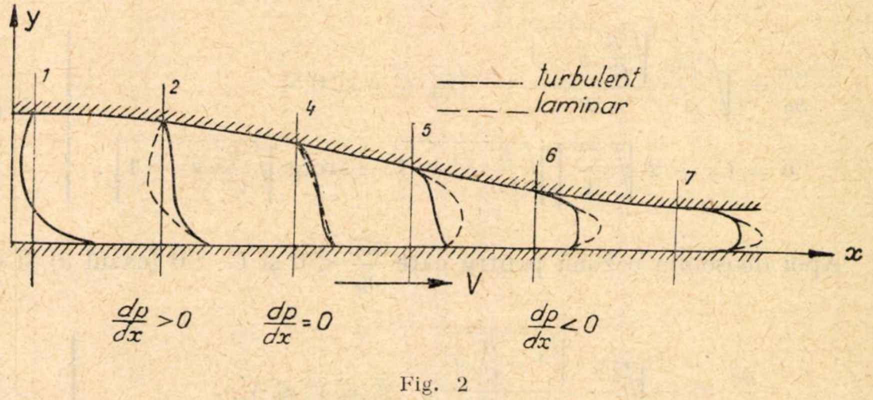


Fig. 2

Cazul 1 ($B<0$). Profilul de viteze arătat în figura 3 și care corespunde unor valori $B<0$, mari în valoare absolută.

Pentru prima zonă $(0 \leqslant \bar{y} \leqslant 0{,}5)$ avem $B < 0$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} < 0$, $C < 0$ (cazul *a*) și deci viteza este egală cu

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\sqrt{\frac{C'}{A}}\,\frac{\sqrt{1-\frac{B'}{C'}\bar{y}}}{\bar{y}}\,; \quad (\bar{y}_{\mathrm{I}} \leqslant \bar{y} \leqslant 0{,}5)\,, \\ \bar{u} &= C_2 - \sqrt{\frac{C'}{A}}\left[2\sqrt{1-\frac{B'}{C'}\bar{y}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{B'}{C'}\bar{y}}}{1-\sqrt{1-\frac{B'}{C'}\bar{y}}}\right], \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

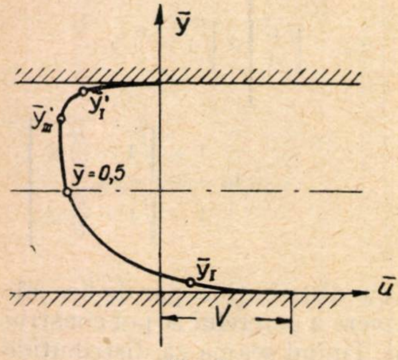


Fig. 3

unde $B' = -B$, iar pentru stratul laminar

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = B'\bar{y} - C'\,; \quad \bar{u} = 1 - C'\bar{y} + \frac{B'}{2}\bar{y}^2\,;$$

$$(0 \leqslant \bar{y} \leqslant \bar{y}_{\mathrm{I}}). \tag{49}$$

Pentru a doua zonă $(0 \leqslant \bar{y}' \leqslant 0{,}5)$ deosebim mai întîi o zonă $\bar{y}_{\mathrm{II}} \leqslant \bar{y} \leqslant 0{,}5$, în care $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} > 0$, $C < 0$ (cazul *b*), iar la $\bar{y}' = \bar{y}'_{\mathrm{II}}$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} = 0$. Pentru acest interval distribuția de viteze este:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \sqrt{\frac{C''}{A}}\,\frac{\sqrt{\frac{B'}{C''}\bar{y}'-1}}{\bar{y}'}\,; \quad (\bar{y}_{\mathrm{II}} \leqslant \bar{y} \leqslant 0{,}5), \\ \bar{u} &= C'_2 + 2\sqrt{\frac{C''}{A}}\left[\sqrt{\frac{B'}{C''}\bar{y}'-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{B'}{C''}\bar{y}'-1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Apoi deosebim o zonă pentru care $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} < 0$ și $C < 0$ (cazul *a*) și deci

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} &= -\sqrt{\frac{C''}{A}}\,\frac{\sqrt{1-\frac{B'}{C''}\bar{y}'}}{\bar{y}'}\,; \quad \bar{y}'_{\mathrm{I}} \leqslant \bar{y}' \leqslant \bar{y}'_{\mathrm{II}}\,, \\ \bar{u} &= C''_2 - \sqrt{\frac{C''}{A}}\left[2\sqrt{1-\frac{B'}{C''}\bar{y}'} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{B'}{C''}\bar{y}'}}{1-\sqrt{1-\frac{B'}{C''}\bar{y}'}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

În sfîrșit pentru stratul laminar:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} = B'\bar{y}' - C''; \quad \bar{u} = -C''\bar{y}' + \frac{B'}{2}\bar{y}'^{2}; \quad (0 \leqslant \bar{y}' \leqslant \bar{y}'_{\mathrm{I}}). \tag{52}$$

Constantele C', $\bar{y}_{\mathrm{I}}$, C_2, C'', C'_2, $\bar{y}'_{\mathrm{II}}$, C''_2, $\bar{y}'_{\mathrm{I}}$ se determină punînd condiții de racordare pentru $\bar{u}$ și $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$ în punctele $\bar{y}_{\mathrm{I}}$, 0,5, $\bar{y}'_{\mathrm{II}}\,\bar{y}'_{\mathrm{I}}$ (fig. 3). Se obține astfel sistemul:

$$\left.\begin{aligned}
& C' - B'\bar{y}_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{C'}{A}}\,\frac{\sqrt{1 - \frac{B'}{C'}\bar{y}_{\mathrm{I}}}}{\bar{y}_{\mathrm{I}}}, \qquad \left(\bar{y}_{\mathrm{I}}\sqrt{1 - \frac{B'}{C'}\bar{y}_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{\sqrt{AC'}}\right), \\
& C_2 = \sqrt{\frac{C'}{A}}\left[2\sqrt{1 - \frac{B'}{C'}\bar{y}_{\mathrm{I}}} - \ln\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{B'}{C'}\bar{y}_{\mathrm{I}}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{B'}{C'}\bar{y}_{\mathrm{I}}}}\right] + 1 + \frac{B'}{2}\bar{y}_{\mathrm{I}}^{2} - C'\bar{y}_{\mathrm{I}} \\
& C_2 - \sqrt{\frac{C'}{A}}\left[2\sqrt{1 - \frac{B'}{2C'}} - \ln\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{B'}{2C'}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{B'}{2C'}}}\right] = \\
& \qquad\qquad = C'_2 + 2\sqrt{\frac{C''}{A}}\left[\sqrt{\frac{B'}{2C''} - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{B'}{2C''} - 1}\right] \\
& 2\sqrt{\frac{C'}{A}}\sqrt{1 - \frac{B'}{2C'}} = 2\sqrt{\frac{C''}{A}}\sqrt{\frac{B'}{2C''} - 1}; \quad \bar{y}'_{\mathrm{II}} = \frac{C''}{B'}; \quad C'_2 = C''_2 \\
& C''_2 = \sqrt{\frac{C''}{A}}\left[2\sqrt{1 - \frac{B'}{C''}\bar{y}'_{\mathrm{I}}} - \ln\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{B'}{2C''}\bar{y}'_{\mathrm{I}}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{B'}{2C''}\bar{y}'_{\mathrm{I}}}}\right] - C''\bar{y}'_{\mathrm{I}} + \frac{B'}{2}\bar{y}'^{2}_{\mathrm{I}} \\
& \qquad\qquad \bar{y}'_{\mathrm{I}}\sqrt{1 - \frac{B'}{C''}\bar{y}'_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{\sqrt{AC''}}.
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Cazul 2 ($B < 0$). În cazul arătat în figura 4, pentru prima zonă ($0 \leqslant \bar{y} \leqslant 0{,}5$) condițiile sînt aceleași ca și pentru cazul 1 și deci sînt valabile relațiile (48) și (49).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Pentru a doua zonă $(0 \leqslant \bar{y}' \leqslant 0{,}5)$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} > 0$ și $C = 0$ (cazul *c*). Distribuția vitezelor va fi dată de relațiile

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} &= \sqrt{\frac{B'}{A}}\,\frac{1}{\sqrt{\bar{y}'}}; \quad (\bar{y}'_{\mathrm{I}} \leqslant \bar{y}' \leqslant 0{,}5), \\ \bar{u} &= C'_2 + 2\sqrt{\frac{B'}{A}}\sqrt{\bar{y}'}, \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

iar în substratul laminar

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} = B'\bar{y}'; \quad \bar{u} = \frac{B'}{2}\,\bar{y}'^2; \quad (0 \leqslant \bar{y}' \leqslant \bar{y}'_{\mathrm{I}}). \tag{55}$$

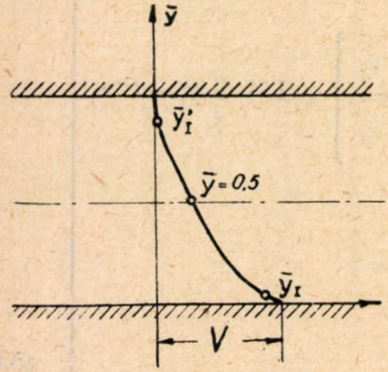


Fig. 4

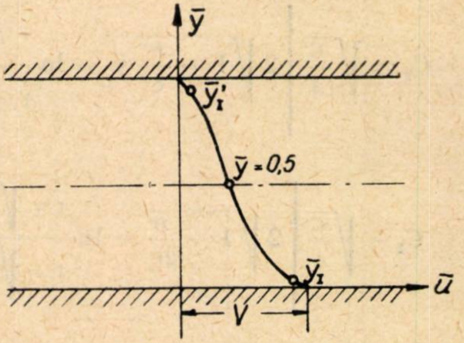


Fig. 5

Deoarece pentru zona a doua $C = 0$, constantele problemei sînt C', $\bar{y}_{\mathrm{I}}$, C_2, B', C'_2, $\bar{y}'_{\mathrm{I}}$ care se pot determina într-un mod asemănător, punînd condiții de racordare în punctele $\bar{y}_{\mathrm{I}}$, 0,5 și $\bar{y}'_{\mathrm{I}}$ obținîndu-se sistemul

$$\left.\begin{aligned} & C' = B'; \; \bar{y}_{\mathrm{I}}\sqrt{1-\bar{y}_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{\sqrt{AB'}}, \\ & C_2 = 1 - B'\bar{y}_{\mathrm{I}}\left(1 - \frac{\bar{y}_{\mathrm{I}}}{2}\right) + \sqrt{\frac{B'}{A}}\left[2\sqrt{1-\bar{y}_{\mathrm{I}}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\bar{y}_{\mathrm{I}}}}{1-\sqrt{1-\bar{y}_{\mathrm{I}}}}\right], \\ & C_2 - \sqrt{\frac{B'}{A}}\left[\sqrt{2} - \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right] = C'_2 + \sqrt{2\frac{B'}{A}}, \\ & C'_2 = \frac{B'}{2}\,\bar{y}'^2_{\mathrm{I}} - 2\sqrt{\frac{B'}{A}}\sqrt{\bar{y}'_{\mathrm{I}}}; \; \bar{y}'_{\mathrm{I}} = \frac{1}{(AB')^{1/3}}. \end{aligned}\right| \tag{56}$$

Cazul 3 $(B < 0)$ (fig. 5). Pentru prima zonă condițiile rămîn aceleași ca pentru cazul 1, relațiile (48) și (49).

Pentru a doua zonă, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} > 0$, $C > 0$ (cazul *d*) și distribuția vitezelor este dată de relațiile

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \sqrt{\frac{C}{A}}\,\frac{\sqrt{\frac{B'}{C}\bar{y}'+1}}{\bar{y}'}\,; \quad (\bar{y}'_{\mathrm{I}} \leqslant \bar{y}' \leqslant 0{,}5), \\ &\bar{u} = C'_2 + \sqrt{\frac{C}{A}}\left[2\sqrt{\frac{B'}{C}\bar{y}'+1} - \ln\frac{\sqrt{\frac{B'}{C}\bar{y}'+1}+1}{\sqrt{\frac{B'}{C}\bar{y}'+1}-1}\right], \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

iar pentru stratul laminar

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} = B'\bar{y}' + C\,; \quad \bar{u} = \frac{B'}{2}\,\bar{y}'^2 + C\bar{y}'\,; \quad (0 \leqslant \bar{y}' \leqslant \bar{y}'_{\mathrm{I}}). \tag{58}$$

Necunoscutele C', $\bar{y}_{\mathrm{I}}$, C_2, C, $\bar{y}'_{\mathrm{I}}$, C'_2 se determină din sistemul

$$\left.\begin{aligned} &\bar{y}_{\mathrm{I}}\sqrt{1-\frac{B}{C'}\bar{y}_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{\sqrt{AC'}}\,; \; C_2 = 1 + \frac{B'}{2}\,\bar{y}_{\mathrm{I}}^2 - C'\bar{y}_{\mathrm{I}} + \\ &\qquad + \sqrt{\frac{C'}{A}}\left[2\sqrt{1-\frac{B'}{C'}\bar{y}_{\mathrm{I}}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{B'}{C'}y_{\mathrm{I}}}}{1-\sqrt{1-\frac{B'}{C'}\bar{y}_{\mathrm{I}}}}\right], \\ &\qquad 2\sqrt{\frac{C'}{A}}\sqrt{1-\frac{B'}{2C'}} = 2\sqrt{\frac{C}{A}}\sqrt{\frac{B'}{2C}+1}\,, \\ &C_2 - \sqrt{\frac{C'}{A}}\left[2\sqrt{1-\frac{B'}{2C'}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{B'}{2C'}}}{1-\sqrt{1-\frac{B'}{2C'}}}\right] = \\ &\qquad = C'_2 + \sqrt{\frac{C}{A}}\left[2\sqrt{\frac{B'}{2C}+1} - \ln\frac{\sqrt{\frac{B'}{2C}+1}+1}{\sqrt{\frac{B'}{2C}+1}-1}\right], \\ &C'_2 = \frac{B'}{2}\,\bar{y}'^2_{\mathrm{I}} + C\bar{y}'_{\mathrm{I}} - \sqrt{\frac{C}{A}}\left[2\sqrt{\frac{B'}{C}\bar{y}'_{\mathrm{I}}+1} - \ln\frac{\sqrt{\frac{B'}{C}y'_{\mathrm{I}}+1}+1}{\sqrt{\frac{B'}{C}\bar{y}'_{\mathrm{I}}+1}-1}\right]; \\ &\qquad \bar{y}'_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{B'}{C}\bar{y}'_{\mathrm{I}}+1} = \frac{1}{\sqrt{AC}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Cazul 4 ($B = 0$ Couette, fig. 6). Pentru prima zonă, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} < 0$, $C < 0$ (cazul *f*) și distribuția vitezelor este dată de relația

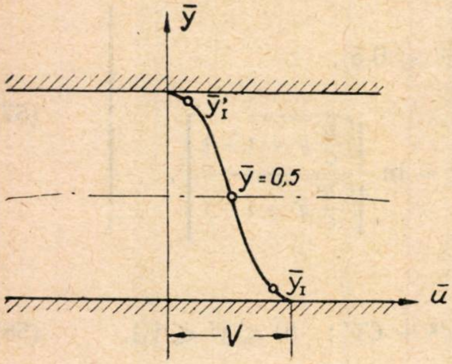


Fig. 6

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\sqrt{\frac{C'}{A}}\,\frac{1}{\bar{y}}\,; \quad (\bar{y}_I \leqslant \bar{y} \leqslant 0{,}5), \\ \bar{u} &= C_2 - \sqrt{\frac{C'}{A}}\,\ln \bar{y}, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

iar în interiorul stratului laminar

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\,C'\,; \quad \bar{u} = 1 - C'\bar{y}\,;$$

$$(0 \leqslant \bar{y} \leqslant \bar{y}_I) \tag{61}$$

Pentru a doua zonă $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} > 0$, $C > 0$ (cazul *e*) și distribuția vitezelor este dată de relația

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} &= \sqrt{\frac{C}{A}}\,\frac{1}{\bar{y}'}\,; \quad (\bar{y}'_I \leqslant \bar{y}' \leqslant 0{,}5), \\ \bar{u} &= C'_2 + \sqrt{\frac{C}{A}}\,\ln \bar{y}', \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

iar în interiorul stratului limită

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} = C\,; \quad \bar{u} = C\bar{y}'\,; \quad (0 \leqslant \bar{y}' \leqslant \bar{y}'_I). \tag{63}$$

Necunoscutele problemei C, C', $\bar{y}_I$, $\bar{y}'_I$, C_2, C'_2 se pot calcula cu ajutorul sistemului

$$\left.\begin{aligned} &\bar{y}_I = \frac{1}{\sqrt{AC'}}\,; \quad C_2 = 1 - C'\bar{y}_I + \sqrt{\frac{C'}{A}}\,\ln\frac{1}{\sqrt{AC'}}, \\ &C' = C\,; \quad C_2 + \sqrt{\frac{C'}{A}}\,\ln 2 = C'_2 - \sqrt{\frac{C}{A}}\,\ln 2 = \frac{1}{2}, \\ &C'_2 = C\bar{y}'_I - \sqrt{\frac{C}{A}}\,\ln\frac{1}{\sqrt{AC}}\,; \quad \bar{y}'_I = \frac{1}{\sqrt{AC}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Cazul 5 ($B > 0$, fig. 7). Pentru prima zonă, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} < 0$, $C < 0$ (cazul *g*) și distribuția vitezelor este dată de relațiile

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\sqrt{\frac{C'}{A}}\,\frac{\sqrt{1+\frac{B}{C'}\bar{y}}}{\bar{y}}; \quad (\bar{y}_{\mathrm{I}} \leqslant \bar{y} \leqslant 0{,}5), \\ \bar{u} &= C_2 - \sqrt{\frac{C'}{A}}\left[2\sqrt{1+\frac{B}{C'}\bar{y}} - \ln\frac{\sqrt{1+\frac{B}{C'}\bar{y}}+1}{\sqrt{1+\frac{B}{C'}\bar{y}}-1}\right], \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

iar în interiorul stratului laminar

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -C' + B\bar{y}; \quad \bar{u} = 1 - C'\bar{y} + \frac{B}{2}\bar{y}^2; \quad (0 \leqslant \bar{y} \leqslant \bar{y}_{\mathrm{I}}). \tag{66}$$

Pentru a doua zonă $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} > 0$, $C > 0$ (cazul *j*) și distribuția vitezelor este dată de relațiile

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} &= \sqrt{\frac{C}{A}}\,\frac{\sqrt{1-\frac{B}{C}\bar{y}'}}{\bar{y}'}; \quad (\bar{y}'_{\mathrm{I}} \leqslant \bar{y}' \leqslant 0{,}5), \\ \bar{u} &= C'_2 + \sqrt{\frac{C}{A}}\left[2\sqrt{1-\frac{B}{C}\bar{y}'} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{B}{C}\bar{y}'}}{1-\sqrt{1-\frac{B}{C}\bar{y}'}}\right], \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

iar în interiorul stratului laminar, de relațiile

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}'} = C - B\bar{y}'; \quad \bar{u} = C\bar{y}' - \frac{B}{2}\bar{y}'^2; \quad (0 \leqslant \bar{y}' \leqslant \bar{y}'_{\mathrm{I}}). \tag{68}$$

Necunoscutele C', $\bar{y}_{\mathrm{I}}$, C_2, C, $\bar{y}'_{\mathrm{I}}$, C'_2 se calculează cu ajutorul sistemului

$$\left.\begin{aligned} &\bar{y}_{\mathrm{I}}\sqrt{1+\frac{B}{C'}\bar{y}_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{\sqrt{AC'}}; \quad C_2 = 1 - C'\bar{y}_{\mathrm{I}} + \frac{B}{2}\bar{y}_{\mathrm{I}}^2 + \\ &\qquad + \sqrt{\frac{C'}{A}}\left[2\sqrt{1+\frac{B}{C'}\bar{y}_{\mathrm{I}}} - \ln\frac{\sqrt{\frac{B}{C'}\bar{y}_{\mathrm{I}}+1}+1}{\sqrt{\frac{B}{C'}\bar{y}_{\mathrm{I}}+1}-1}\right], \\ &\qquad 2\sqrt{\frac{C'}{A}}\sqrt{1+\frac{B}{2C'}} = 2\sqrt{\frac{C}{A}}\sqrt{1-\frac{B}{2C}} \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

$$\left.\begin{aligned}
&C_2-\sqrt{\frac{C'}{A}}\left[2\sqrt{1+\frac{B}{2C'}}-\ln\frac{\sqrt{1+\frac{B}{2C'}}+1}{\sqrt{1+\frac{B}{2C'}}-1}\right]= \\
&\qquad\qquad=C_2'+\sqrt{\frac{C}{A}}\left[2\sqrt{1-\frac{B}{2C}}-\ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{B}{2C}}}{1-\sqrt{1-\frac{B}{2C}}}\right] \\
&C_2'=C\bar{y}_I'-\frac{B}{2}\bar{y}_I'^2-\sqrt{\frac{C}{A}}\left[2\sqrt{1-\frac{B}{C}\bar{y}_I'}-\ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{B}{C}\bar{y}_I'}}{1-\sqrt{1-\frac{B}{C}\bar{y}_I'}}\right]; \\
&\qquad\qquad\bar{y}_I'\sqrt{1-\frac{B}{C}\bar{y}_I'}=\frac{1}{\sqrt{AC}}.
\end{aligned}\right\}\tag{69}$$

Cazul 6 ($B > 0$, fig. 8). Pentru prima zonă $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} < 0$, $C = 0$ (cazul *h*) și distribuția vitezelor va fi dată de relațiile

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}&=-\sqrt{\frac{B}{A}}\frac{1}{\sqrt{\bar{y}}};\quad (\bar{y}_I\leqslant\bar{y}\leqslant 0{,}5), \\
\bar{u}&=C_2-2\sqrt{\frac{B}{A}}\sqrt{\bar{y}},
\end{aligned}\right\}\tag{70}$$

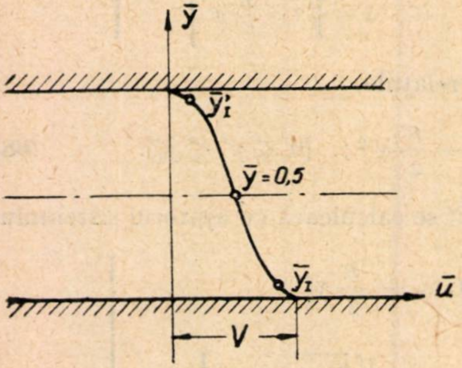


Fig. 7

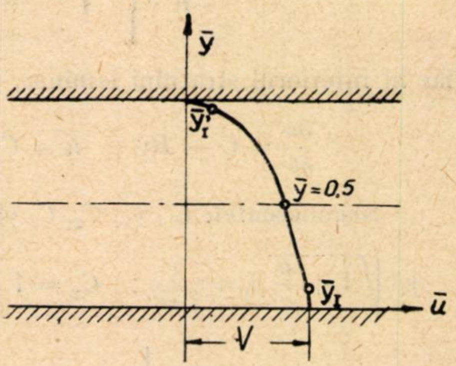


Fig. 8

iar în interiorul stratului laminar, de relațiile

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}=-\frac{B}{2}\bar{y};\quad \bar{u}=1-\frac{B}{2}\bar{y}^2;\quad (0\leqslant\bar{y}\leqslant\bar{y}_I).\tag{71}$$

Pentru a doua zonă, condițiile sînt aceleași ca și pentru cazul precedent și în consecință distribuția vitezelor este dată de relațiile (67) și (68).

Necunoscutele problemei B, $\bar{y}_{\mathrm{I}}$, C_2, C, $\bar{y}'_{\mathrm{I}}$, C'_2 se determină din sistemul

$$\left.\begin{aligned}
&C = B; \quad \bar{y}_{\mathrm{I}} = \frac{1}{(AB)^{1/3}}; \quad C_2 = 1 - \frac{B}{2}\,\bar{y}_{\mathrm{I}}^2 + 2\sqrt{\frac{A}{B}}\sqrt{\bar{y}_{\mathrm{I}}};\\
&C_2 - \sqrt{2\frac{B}{A}} = C'_2 + \sqrt{\frac{B}{A}}\left[\sqrt{2} - \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right],\\
&C'_2 = B\bar{y}'_{\mathrm{I}}\left(1 - \frac{\bar{y}'_{\mathrm{I}}}{2}\right) - \sqrt{\frac{B}{A}}\left[2\sqrt{1-\bar{y}'_{\mathrm{I}}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\bar{y}'_{\mathrm{I}}}}{1-\sqrt{1-\bar{y}'_{\mathrm{I}}}}\right];\\
&\qquad\qquad \bar{y}'_{\mathrm{I}}\sqrt{1-\bar{y}'_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{\sqrt{AB}}.
\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Cazul 7 ($B > 0$, fig. 9). În prima zonă, distingem intervalul ($0 \leqslant \bar{y} \leqslant \bar{y}_{\mathrm{II}}$), în care $\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} > 0$, $C > 0$ (cazul j) pentru care distribuția vitezelor este dată de relațiile

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = \sqrt{\frac{C''}{A}}\,\frac{\sqrt{1-\frac{B}{C''}\bar{y}}}{\bar{y}}; \quad (\bar{y}_{\mathrm{I}} \leqslant \bar{y} \leqslant \bar{y}_{\mathrm{II}}),\\
&\bar{u} = C_2 + \sqrt{\frac{C''}{A}}\left[2\sqrt{1-\frac{B}{C''}\bar{y}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{B}{C''}\bar{y}'}}{1-\sqrt{1-\frac{B}{C''}\bar{y}'}}\right],
\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

iar în interiorul stratului laminar, de relațiile

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = C'' - \frac{B}{2}\bar{y}; \quad \bar{u} = 1 + C''\bar{y} - \frac{B}{2}\bar{y}^2; \qquad (0 \leqslant \bar{y} \leqslant \bar{y}_{\mathrm{I}}). \tag{74}$$

La $\bar{y} = \bar{y}_{\mathrm{II}}$, $\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = 0$, iar pentru intervalul $\bar{y}_{\mathrm{II}} \leqslant \bar{y} \leqslant 0{,}5$, $\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} < 0$, $C > 0$ (cazul i) și deci distribuția vitezelor va fi dată de relațiile

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = -\sqrt{\frac{C''}{A}}\,\frac{\sqrt{\frac{B}{C''}\bar{y}-1}}{\bar{y}}; \quad (\bar{y}_{\mathrm{II}} \leqslant \bar{y} \leqslant 0{,}5),\\
&\bar{u} = C''_2 - 2\sqrt{\frac{C''}{A}}\left[\sqrt{\frac{B}{C''}\bar{y}-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{B}{C''}y-1}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Pentru zona a doua distribuția vitezelor este dată de relațiile (66) și (67).

Necunoscutele C'', $\bar{y}_{\mathrm{I}}$, C_2, $\bar{y}_{\mathrm{II}}$, C_2'', C, $\bar{y}_{\mathrm{I}}'$, C_2' se calculează cu ajutorul sistemului

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{y}_{\mathrm{I}}\sqrt{1-\frac{B}{C''}\bar{y}_{\mathrm{I}}}=\frac{1}{\sqrt{AC''}};\\
&C_2=1+C''\bar{y}_{\mathrm{I}}-\frac{B}{2}\bar{y}_{\mathrm{I}}^2-\sqrt{\frac{C''}{A}}\left[2\sqrt{1-\frac{B}{C''}\bar{y}_{\mathrm{I}}}-\ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{B}{C''}\bar{y}_{\mathrm{I}}}}{1-\sqrt{1-\frac{B}{C''}\bar{y}_{\mathrm{I}}}}\right],\\
&\bar{y}_{\mathrm{II}}=\frac{C''}{B};\ C_2-C_2'';\ 2\sqrt{\frac{C''}{A}}\sqrt{\frac{B}{2C''}-1}=2\sqrt{\frac{C}{A}}\sqrt{1-\frac{B}{2C}};\\
&C_2''-2\sqrt{\frac{C''}{A}}\left[\sqrt{\frac{B}{2C''}-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{B}{2C''}-1}\right]=\\
&\qquad\qquad=C_2'+\sqrt{\frac{C}{A}}\left[2\sqrt{1-\frac{B}{2C}}-\ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{B}{2C}}}{1-\sqrt{1-\frac{B}{2C}}}\right],\\
&C_2'=C\bar{y}_{\mathrm{I}}'-\frac{B}{2}\bar{y}_{\mathrm{I}}'^2-\sqrt{\frac{C}{A}}\left[2\sqrt{1-\frac{B}{C}\bar{y}_{\mathrm{I}}'}-\ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{B}{C}\bar{y}_{\mathrm{I}}'}}{1-\sqrt{1-\frac{B}{C}\bar{y}_{\mathrm{I}}'}}\right];\\
&\qquad\qquad\bar{y}_2'\sqrt{1-\frac{B}{C}\bar{y}_{\mathrm{I}}'}=\frac{1}{\sqrt{AC}}.
\end{aligned}\right\}\quad(76)$$

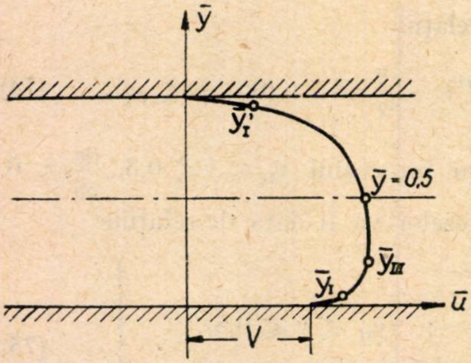


Fig. 9

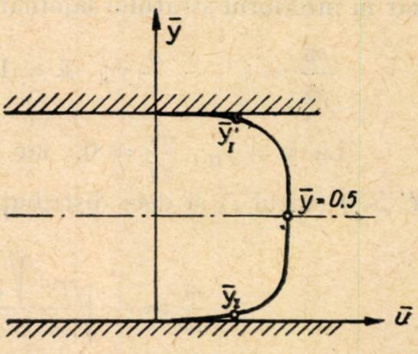


Fig. 10

Cazul 8 ($B > 0$, Poiseuille). În cazul cînd $B \to \infty$ distribuția vitezelor tinde către o distribuție Poiseuille, arătată în figura 10.

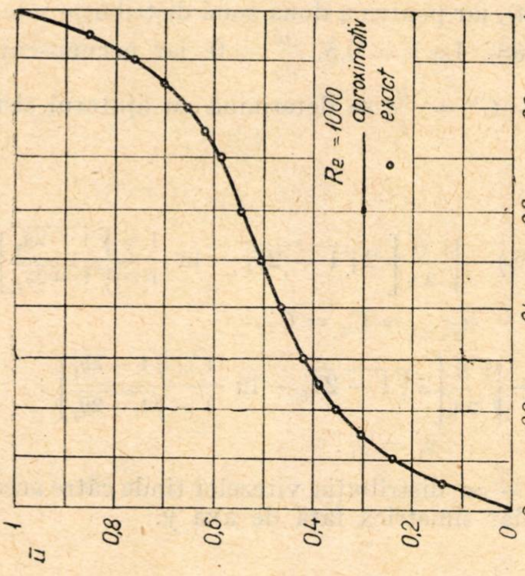

ū
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
ȳ
Re = 1000
aproximativ
exact

Fig. 12

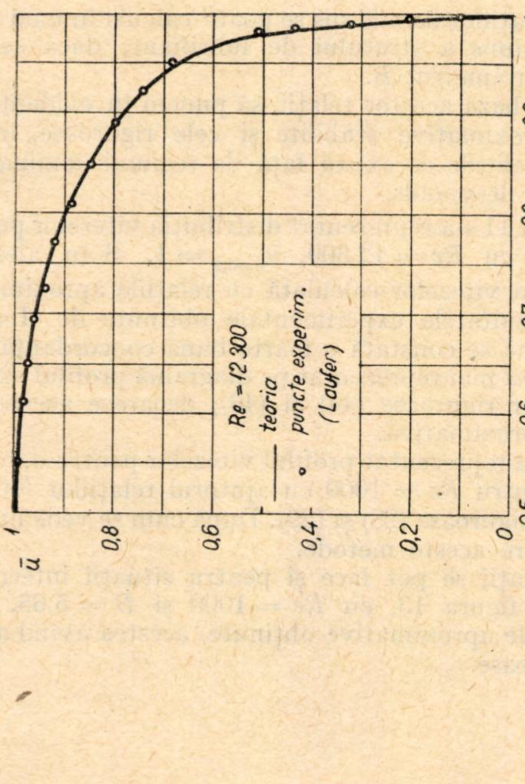

ū
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
y
Re = 12 300
teoria
puncte experim.
(Laufer)

Fig. 11

Pentru prima zonă $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} > 0$, $C > 0$ și distribuția vitezelor este dată de relațiile (73) și (74), iar pentru a doua zonă distribuția vitezelor este dată de relațiile (67) și (68). La $y = 0{,}5$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0$, iar necunoscutele problemei $\bar{y}_{\mathrm{I}}$, $\bar{y}'_{\mathrm{I}}$, C_2, C'_2, $C' = C'' = \frac{B}{2}$ se determină cu ajutorul sistemului

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{y}_{\mathrm{I}}\sqrt{1-2\bar{y}_{\mathrm{I}}} = \sqrt{\frac{2}{AB}};\\
&C_2 = 1 + \frac{B}{2}\bar{y}_{\mathrm{I}}(1-\bar{y}_{\mathrm{I}}) - \sqrt{\frac{B}{2A}}\left[2\sqrt{1-2\bar{y}_{\mathrm{I}}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-2\bar{y}_{\mathrm{I}}}}{1-\sqrt{1-2\bar{y}_{\mathrm{I}}}}\right],\\
&\qquad \bar{u}_{\bar{y}=0,5} = C_2 = C'_2,\\
&C'_2 = \frac{B}{2}\bar{y}'_{\mathrm{I}}\left(1-\frac{\bar{y}'_{\mathrm{I}}}{2}\right) + \sqrt{\frac{B}{2A}}\left[2\sqrt{1-2\bar{y}'_{\mathrm{I}}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-2\bar{y}'_{\mathrm{I}}}}{1-\sqrt{1-2\bar{y}_{\mathrm{I}}}}\right];\\
&\qquad \bar{y}'_{\mathrm{I}} = \bar{y}_{\mathrm{I}}.
\end{aligned}\right\} \quad (77)$$

În cazul $B \rightarrow -\infty$ distribuția vitezelor tinde către aceeași distribuție de timp Poiseuille dar simetrică față de axa y.

Rezultate

Cu ajutorul relațiilor de mai sus se poate calcula în mod simplu profilul vitezelor într-o secțiune a stratului de lubrifiant, dacă se cunoaște numărul Re (20) și parametrul B.

Vom căuta pe baza acestor relații, să punem în evidență concordanța între formulele aproximative stabilite și cele riguroase, influența parametrului B și deosebirile ce există față de regimul laminar, și în sfîrșit influența numărului Reynolds.

Astfel în figura 11 s-a reprezentat distribuția vitezelor pentru o mișcare Poiseuille (cazul 8) cu $Re = 12\,300$, $\bar{u}_{\bar{y}=0,5} = 1$. S-au ales aceste date pentru ca distribuția vitezelor calculată cu relațiile aproximative să poată fi comparată cu rezultatele experimentale obținute de Laufer [10]. Din această diagramă se constată o foarte bună concordanță cu rezultatele experimentale. Nu s-a mai reprezentat pe diagramă profilul vitezelor obținut cu ajutorul relațiilor riguroase (44) și (46), deoarece acestea se suprapun peste distribuția aproximativă.

În figura 12 s-a reprezentat profilul vitezelor pentru o mișcare Couette, $B = 0$ (cazul 4) pentru $Re = 1000$ cu ajutorul relațiilor (60) și (62) și cu ajutorul formulelor riguroase (28) și (29). După cum se vede nu există practic nici o deosebire între aceste metode.

Aceleași afirmații se pot face și pentru situații intermediare, ca de exemplu cazul din figura 13, cu $Re = 1000$ și $B = 5{,}65$. În consecință se pot utiliza relațiile aproximative obținute, acestea avînd aceeași precizie ca și relațiile riguroase.

Distribuția vitezelor în stratul de lubrifiant diferă sensibil de cea laminară, diferența crescînd cu B și cu numărul Reynolds. De asemenea ipoteza preconizată de Smith și Fuller [4] ca rezultat al unei analize a lucrării lui Pai [9] de care s-a mai amintit, de a considera profilul vitezelor ca fiind rezultat din suma vitezelor unei mișcări Couette și Poiseuille cu același B nu este aplicabilă, introducînd erori destul de mari. Aceste

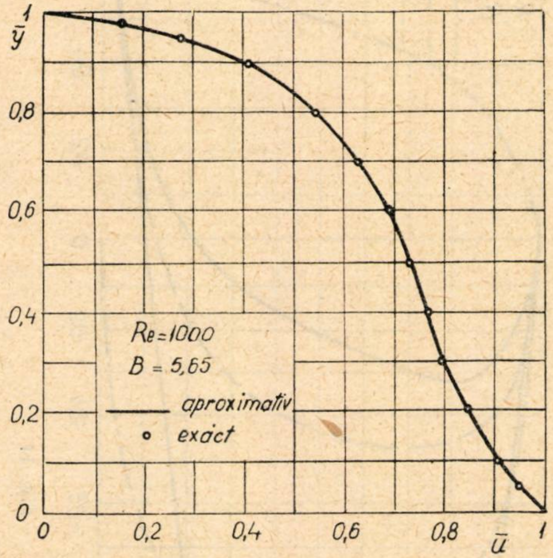


Fig. 13

considerații sînt oglindite în figurile 14—20, în care s-a trasat profilul vitezelor la $Re = 1000$ și pentru diferite valori B. Pe aceleași diagrame s-au trasat distribuțiile vitezelor în ipoteza suprapunerii efectelor amintită și în cazul laminar.

Se constată astfel că diferențele între mișcarea laminară și turbulență sînt mari, pentru aceeași valoare $B \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$. Evident, dacă s-ar fi luat drept criteriu debitul, adică viteza medie, această diferență este ceva mai redusă. De asemenea din aceste figuri se constată că ipoteza suprapunerii efectelor nu este acceptabilă.

Profilul vitezelor prezintă variații mari și în funcție de numărul Reynolds. Astfel în figura 21 se prezintă profilul vitezelor în mișcarea Couette la diferite numere Reynolds; în figura 22 se reprezintă distribuția vitezelor pentru $C = 0$ (cazul 2) la diferite numere Reynolds. Din această figură se vede că pentru a avea o distribuție de viteze de aproximativ același debit, cînd numărul Reynolds crește de 10 ori, B este aproximativ de 5 ori mai mare, iar cînd numărul Reynolds crește de 100 ori, B crește aproximativ de 30 ori. În consecință numărul Reynolds are o influență sensibilă, deoarece, după cum se vede, cînd $Re \to 0$ profilul vitezelor tinde către regimul laminar,

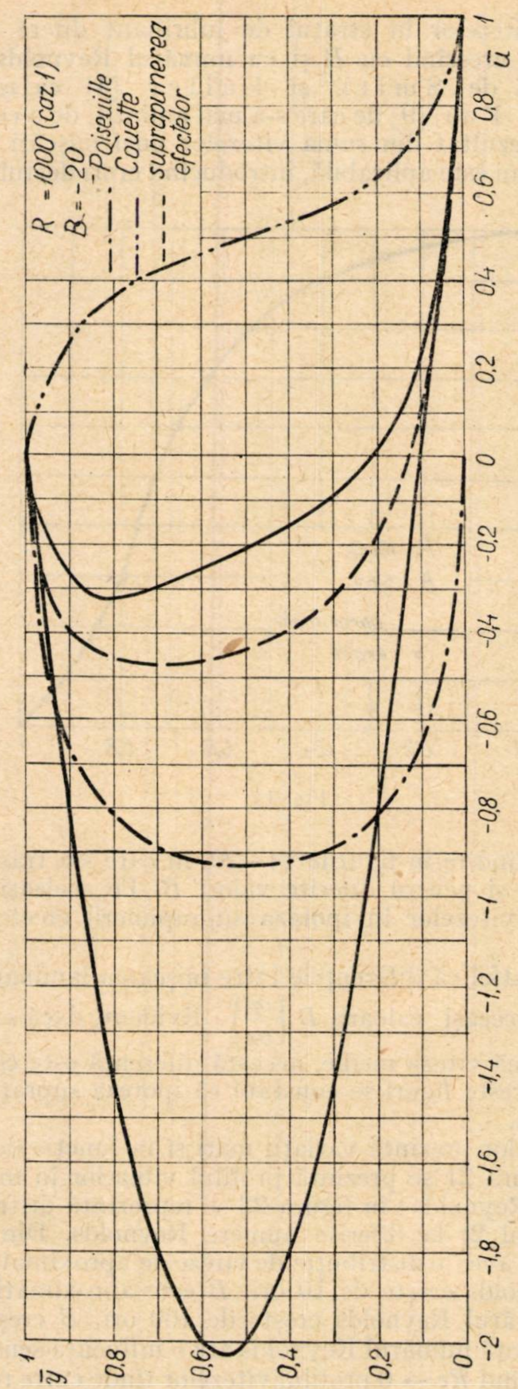
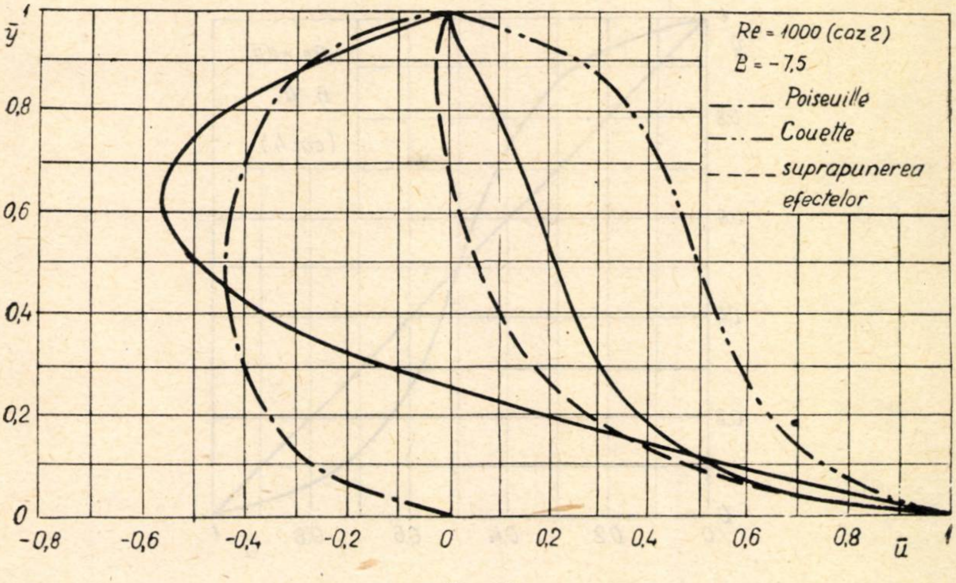
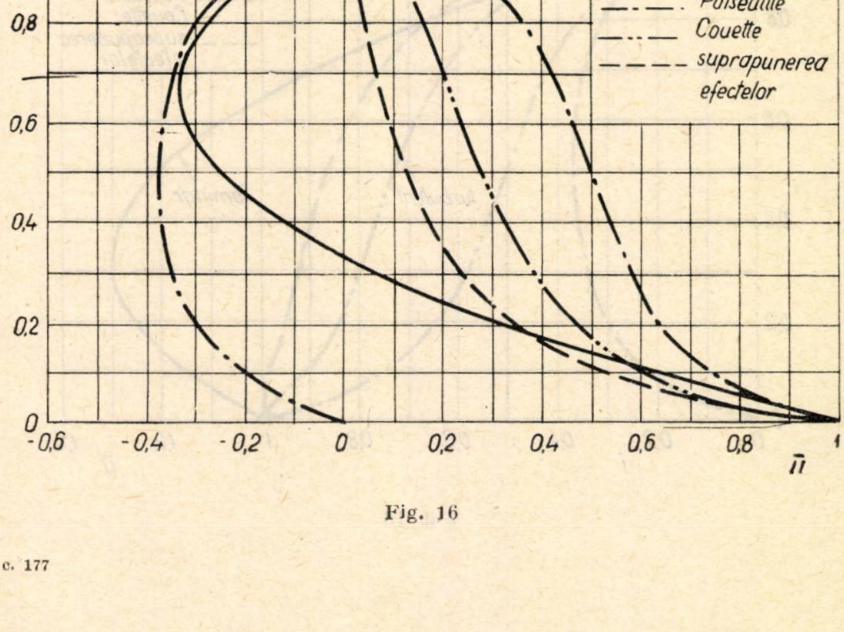

R = 1000 (caz 1)
B = -20
Poiseuille
Couette
suprapunerea efectelor
$\bar{y}$
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
$\bar{u}$
-2
-1,8
-1,6
-1,4
-1,2
-1
-0,8
-0,6
-0,4
-0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1

Fig. 14



$\bar{y}$
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-0,8
-0,6
-0,4
-0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\bar{u}$
Re = 1000 (caz 2)
B = -7,5
Poiseuille
Couette
suprapunerea efectelor

Fig. 15



$\bar{y}$
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-0,6
-0,4
-0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\bar{u}$
Re = 1000 (caz 3)
B = -6
Poiseuille
Couette
suprapunerea efectelor

Fig. 16

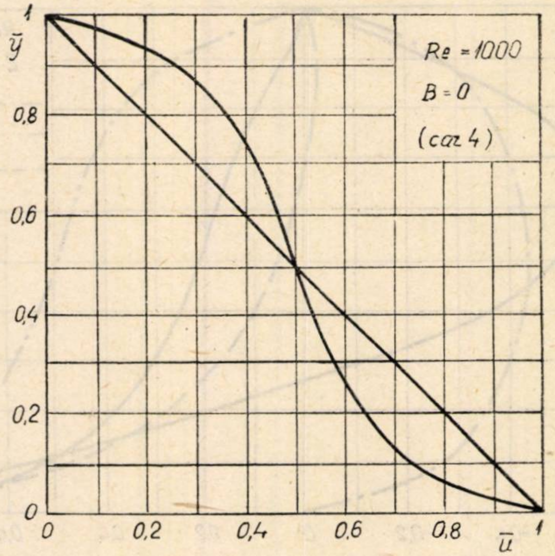

1
$\bar{y}$
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\bar{u}$
Re = 1000
B = 0
(caz 4)

Fig. 17

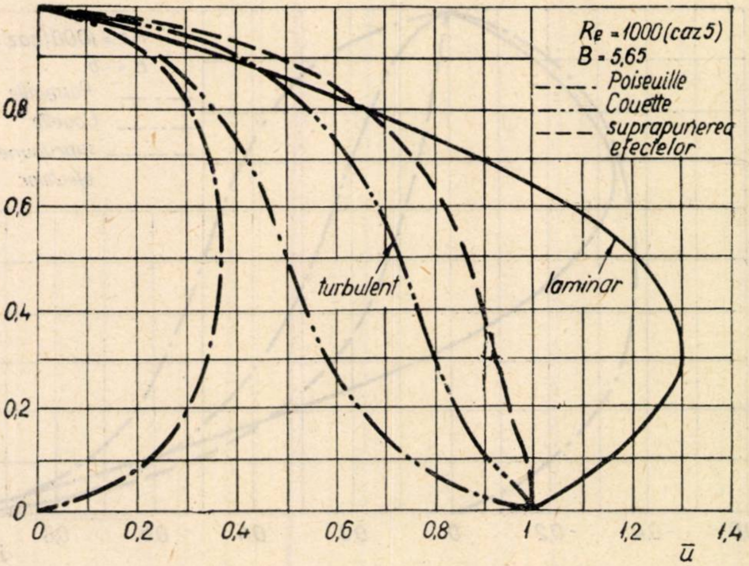

0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
$\bar{u}$
Re = 1000 (caz 5)
B = 5,65
Poiseuille
Couette
suprapunerea efectelor
turbulent
laminar

Fig. 18

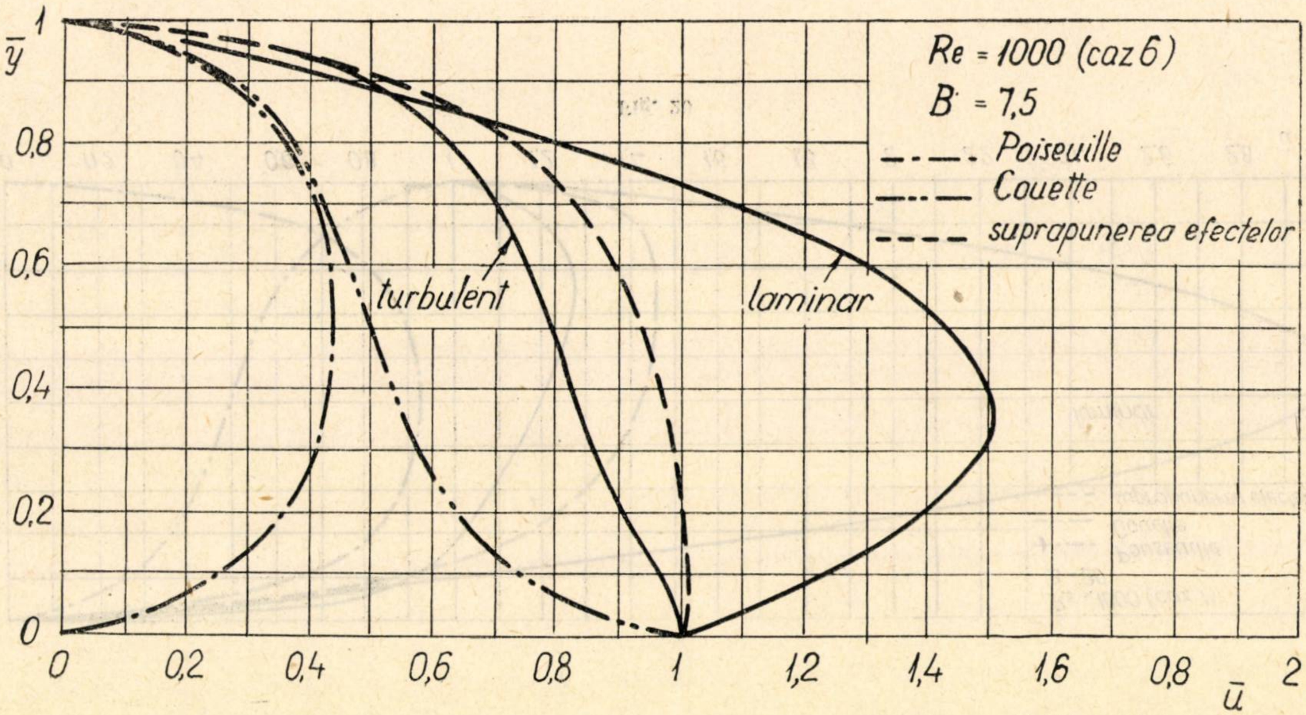

$\bar{y}$
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
0,8
2
$\bar{u}$
Re = 1000 (caz 6)
B = 7,5
Poiseuille
Couette
suprapunerea efectelor
turbulent
laminar

Fig. 19

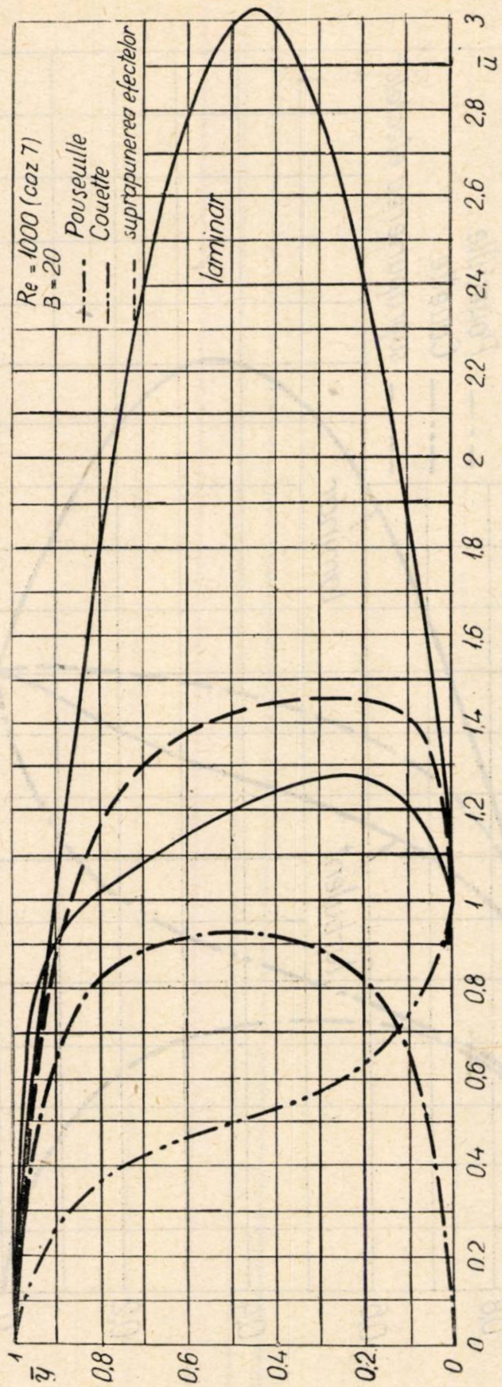

Re = 1000 (caz 7)
B = 20
Pouseuille
Couette
suprapunerea efectelor
laminar
ȳ
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0.2
0.4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
2,2
2,4
2,6
2,8
3
ū

Fig. 20

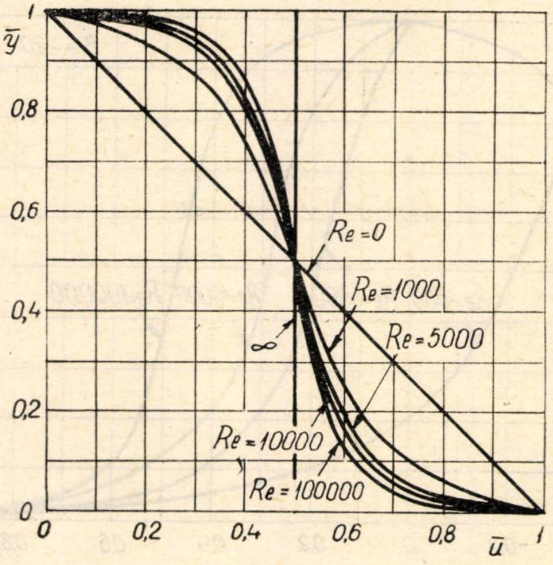

1
$\bar{y}$
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\bar{u}$
Re = 0
Re = 1000
Re = 5000
∞
Re = 10000
Re = 100000

Fig. 21

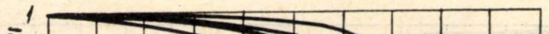

1
$\bar{y}$
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\bar{u}$
C = 0
Re = 1000 ; B = 7,5
Re = 5000 ; B = 22,4
Re = 10000 ; B = 36,3
Re = 100000 ; B = 208
Re = 100000
Re = 10000
Re = 5000
Re = 1000

Fig. 22

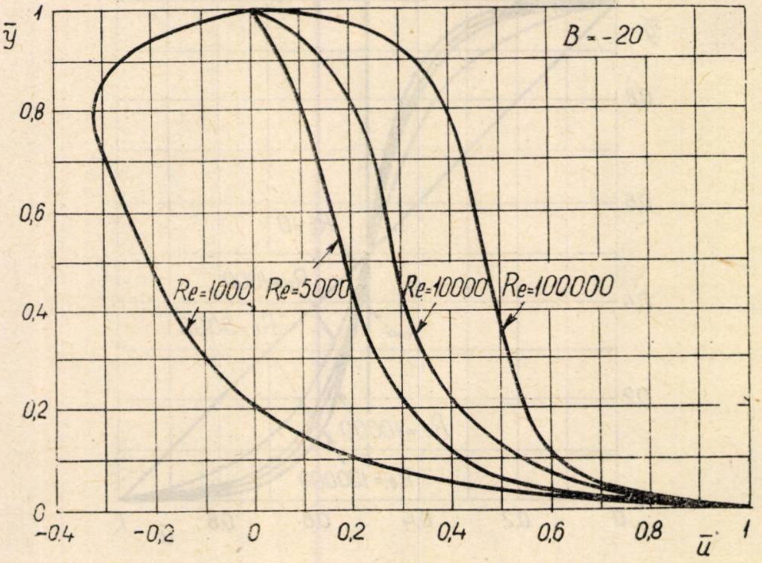

ȳ
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
B = -20
Re=1000
Re=5000
Re=10000
Re=100000
-0.4
-0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
ū

Fig. 23

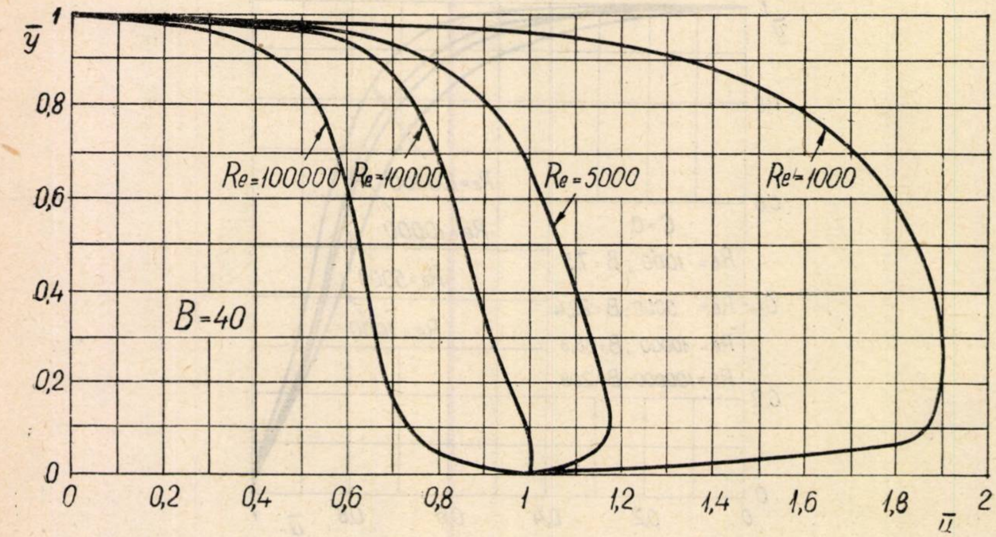

ȳ
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
B = 40
Re=100000
Re=10000
Re = 5000
Re=1000
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
ū

Fig. 24

iar cînd $Re \to \infty$ distribuția vitezelor tinde să devină constantă în raport cu y. Influența numărului Reynolds apare mai clară dacă se reprezintă profilul vitezelor pentru B = constant, după cum se vede din figura 23 ($B = -20$) și din figura 24 ($B = 40$).

4. CONCLUZII

În concluzie din considerațiile de mai sus rezultă că în condițiile obișnuite ale problemei lubrificației, se poate utiliza ipoteza lungimii de amestec pentru studiul distribuției vitezelor în regim turbulent. În acest mod ecuația diferențială poate fi integrată atît riguros cît și aproximativ, cu o precizie foarte bună. În acest ultim caz se obțin relații relativ simple pentru distribuția vitezelor.

Din studiul distribuției vitezelor se constată că aceasta depinde de numărul Reynolds și de parametrul B care este direct proporțional cu $\frac{\partial p}{\partial x}$. Diferența față de mișcarea laminară, este sensibilă, mai ales cînd B crește și anume debitul de lubrifiant este mai scăzut decît în cazul scurgerii laminare. În consecință pentru același debit de lubrifiant $\frac{\partial p}{\partial x}$ în regim turbulent va fi mai ridicat decît în regim laminar și de aceea se poate afirma că presiunile care se nasc în stratul de lubrifiant în regim turbulent sînt sensibil mai mari decît în regim laminar. Aceste diferențe sînt accentuate cînd numărul Reynolds crește.

Concluziile de mai sus sînt valabile pentru lubrificația cu lichide cît și pentru lubrificația cu gaze.

Aceste rezultate vor fi utilizate într-o altă lucrare, pentru determinarea distribuției presiunilor și a forțelor de frecare.

Primită la redacție la 19 iunie 1957.

ВЛИЯНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ДВИЖЕНИЕ В СЛОЕ СМАЗКИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В данной работе изучается турбулентное движение в слое смазки. Для этого пишут уравнения смазки при турбулентном режиме, исходя от общих уравнений движения Рейнольдса с обычными упрощениями для задачи смазки. В результате получаются уравнения движения в слое смазки как для несжимаемых, так и для сжимаемых течений (газовая смазка).

Затем изучается распределение скоростей и на основании гипотезы Прандтля относительно пути смешивания. В результате получаются точные и приближенные решения, дающие, однако, весьма незначительные погрешности. На основании исследования распределения ско-

ростей в различных случаях, устанавливается, что это распределение зависит от числа Рейнольдса течения (20) и от $\frac{\partial p}{\partial x}$ через посредство параметра B (22). Распределения скоростей существенно отличаются от ламинарного режима, особенно при больших значениях B, а имено: расход смазки ниже, чем при ламинарном движении. Следовательно, при одном и том же расходе смазки, для турбулентного режима $\frac{\partial p}{\partial x}$ будет выше, чем для ламинарного режима, и поэтому можно утверждать, что возникающие в слое смазки давления будут значительно выше, чем при ламинарном режиме расхождения, возрастающие с увеличением числа Рейнольдса. Эти выводы являются справедливыми как для жидкостной смазки, так и для газовой смазки.

L'INFLUENCE DE LA TURBULENCE SUR LE MOUVEMENT DANS LA COUCHE DE LUBRIFIANT

RÉSUMÉ

On étudie l'écoulement turbulent dans la couche de lubrifiant. A ces fins, on écrit les équations de la lubrification en régime turbulent, en partant des équations générales du mouvement de Reynolds et en faisant les simplifications courantes du problème de la lubrification. On obtient ainsi les équations du mouvement dans la couche de lubrifiant, tant pour l'écoulement incompressible, que pour l'écoulement compressible (lubrification aux gaz).

On étudie ensuite la distribution des vitesses en utilisant l'hypothèse de la longueur de mélange turbulent de Prandtl. On obtient ainsi des solutions rigoureuses et approximatives, qui donnent des erreurs extrêmement réduites. Il ressort de l'étude de la distribution des vitesses dans différents cas, que celle-ci dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement (20) et de $\frac{\partial p}{\partial x}$ par l'intermédiaire du paramètre B (22). Les distributions des vitesses diffèrent sensiblement du régime laminaire, surtout pour de grandes valeurs de B et, notamment, le débit de lubrifiant est plus réduit que lors de l'écoulement laminaire. Par conséquent, pour le même débit de lubrifiant, en régime turbulent, $\frac{\partial p}{\partial x}$ aura des valeurs plus grandes que pour le régime laminaire. On peut donc affirmer que les pressions qui se produisent dans la couche de lubrifiant seront sensiblement plus fortes en régime turbulent qu'en régime laminaire. Ces conclusions, valables pour la lubrification aux liquides aussi bien que pour la lubrification aux gaz, sont accentuées à mesure que le nombre de Reynolds croît.

BIBLIOGRAFIE

1. G. I. TAYLOR, *Stability of a Viscous Liquid Contained Between Two Rotating Cylinders*. Trans. of the Roy. Soc. London, Series A, **223**, 289—343 (1923).
2. — *Fluid Friction Between Rotating Cylinders*. Proc. Roy. Soc. London, Series A, **157**, 346—560.
3. D. F. WILCOCK, *Turbulence in High-Speed Journal Bearings*. Trans. ASME, **72**, 825—834 (1950).
4. M. I. SMITH, D. D. FULLER, *Journal Bearings Operation at Superlaminar Speeds*. Trans. ASME, **78**, 469—474 (1956).
5. S. ABRAMOVITZ, *Turbulence in a Tilting — Pad . Thrust Bearing*. Trans. ASME, **78**, 7—11 (1956).
6. N. TIPEI, *Ecuațiile lubrificației la gaze*. Comunicările Acad. R.P.R., **IV**, *11—12*, 699 (1954).
7. V. N. CONSTANTINESCU, *Repartiția presiunilor în lagărele de alungire infinită lubrificate cu gaze*. Comunicările Acad. R.P.R., **IV**, *2*, 377 (1955).
8. J. KAMPE de FERIET, *Sur l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible entre deux plaques parallèles indéfinies*. La Houille Blanche, **23**, 1—9 (1948).
9. S. I. PAI, *On Turbulent Flow Between Parallel Plates*. Journal of Applied Mechanics, **20**, *1*, 109—114 (1953).
10. T. LAUFER, *Some Recent Measurements in a Two-Dimensional Turbulent Channel*. Journal of Aeronautical Sciences, **17**, 277—287 (1950).
11. D. DUMITRESCU, *Distribuția vitezelor în mișcarea turbulentă a unui lichid greu cu suprafață liberă*. Comunicările Acad. R.P.R., 1954, **IV**, *11—12*, 705—713 (1954).
12. IANKE u. EMDE, *Funktiontafeln*.

UNGERE—FRECARE—UZURĂ

STUDIUL LUBRIFICAŢIEI BIDIMENSIONALE ÎN REGIM TURBULENT

DE

V. N. CONSTANTINESCU

INTRODUCERE

Într-o altă lucrare [1] s-au dedus ecuaţiile lubrificaţiei în regim turbulent şi s-a studiat distribuţia vitezelor în stratul de lubrifiant.

Astfel s-au stabilit formule pentru distribuţia de viteze u (u fiind viteza în direcţia mişcării) şi s-a arătat că profilul vitezelor depinde de numărul Reynolds definit de relaţia

$$Re = \frac{\rho V \delta}{\mu}, \tag{1}$$

în care ρ este densitatea lubrifiantului, μ viscozitatea lui, δ grosimea stratului de lubrifiant, iar V viteza relativă dintre suprafeţe, şi de derivata presiunilor în direcţia mişcării $\frac{\partial p}{\partial x}$, prin intermediul parametrului

$$B = \frac{-\delta^2}{\mu V}\,\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{2}$$

În cele ce urmează vom utiliza rezultatele obţinute şi lucrarea citată pentru determinarea distribuţiei presiunilor.

Ecuaţia presiunilor

Să notăm viteza medie din stratul de lubrifiant cu

$$u'_m = u_{m_c} + u_m\,; \quad u_{m_c} = \frac{V}{2} \tag{3}$$

sau, în variabilele adimensionale

$$\overline{u}'_m = \frac{u'_m}{V} = \overline{u}_{m_c} + \overline{u}_m \,; \quad \overline{u}_{m_c} = 0{,}5, \tag{4}$$

în care $u_{m_c} = \frac{1}{2} V$ este viteza medie corespunzătoare distribuției vitezelor într-o mișcare Couette.

În cazul regimului laminar, ținînd seama că distribuția vitezelor este dată de relația [2]

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y (y - \delta) + V\left(1 - \frac{y}{\delta}\right), \tag{5}$$

viteza medie $\overline{u}_m$ este egală cu

$$\overline{u}_m = -\frac{1}{12} \frac{\delta^2}{\mu V} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{12} B, \tag{6}$$

adică viteza medie $\overline{u}_m$ variază liniar cu parametrul B și este independentă de numărul Reynolds.

Pentru regimul turbulent, cu ajutorul formulelor stabilite în lucrarea [1] s-a calculat viteza medie $\overline{u}_m$ pentru diferite numere Reynolds și valori ale parametrului B. Rezultatele sînt concretizate în diagrama din figura 1, în care s-a prezentat B în funcție de $\overline{u}_m$ avînd numărul Reynolds ca parametru.

Din această diagramă se constată că variația parametrului B cu viteza medie $\overline{u}_m$ este sensibil antisimetrică și foarte apropiată de o linie dreaptă.

În consecință legătura ce există între $\overline{u}_m$ și $\frac{\partial p}{\partial x}$ este de aceeași natură cu cea obținută în cazul regimului laminar (6). În același timp rezultă că pentru regimul turbulent nu se poate face ipoteza posibilității suprapunerii efectelor, așa cum s-a arătat și anterior [1], deoarece în acest caz ar rezulta că $\frac{\partial p}{\partial x}$ variază proporțional cu $\overline{u}_m^{\beta}$ cu $1{,}5 < \beta < 2$.

Astfel de exemplu, pentru cazul cel mai defavorabil prezentat, $Re = 1000$, variația parametrului B cu $\overline{u}_m$ este

$$B = k\overline{u}_m^{n} = 34{,}6\, \overline{u}_m^{1{,}09}, \tag{7}$$

iar dacă se consideră o variație aproximativă liniară

$$B = k\, \overline{u}_m = 32{,}8\, \overline{u}_m \tag{8}$$

diferențele în intervalul $0 < B < 50$ rămîn sub 5% după cum se poate constata din figura 1.

Domeniul de variație considerat în diagrama din figura 1 pentru Re și B acoperă cu mult domeniul aplicațiilor. Astfel $Re = 50\,000$ corespunde unei viteze relative de ordinul 500 m/s pentru apă, iar $B = 50$ corespunde unui gradient $\frac{\partial p}{\partial x}$ de ordinul 10^9 kg/m^3.

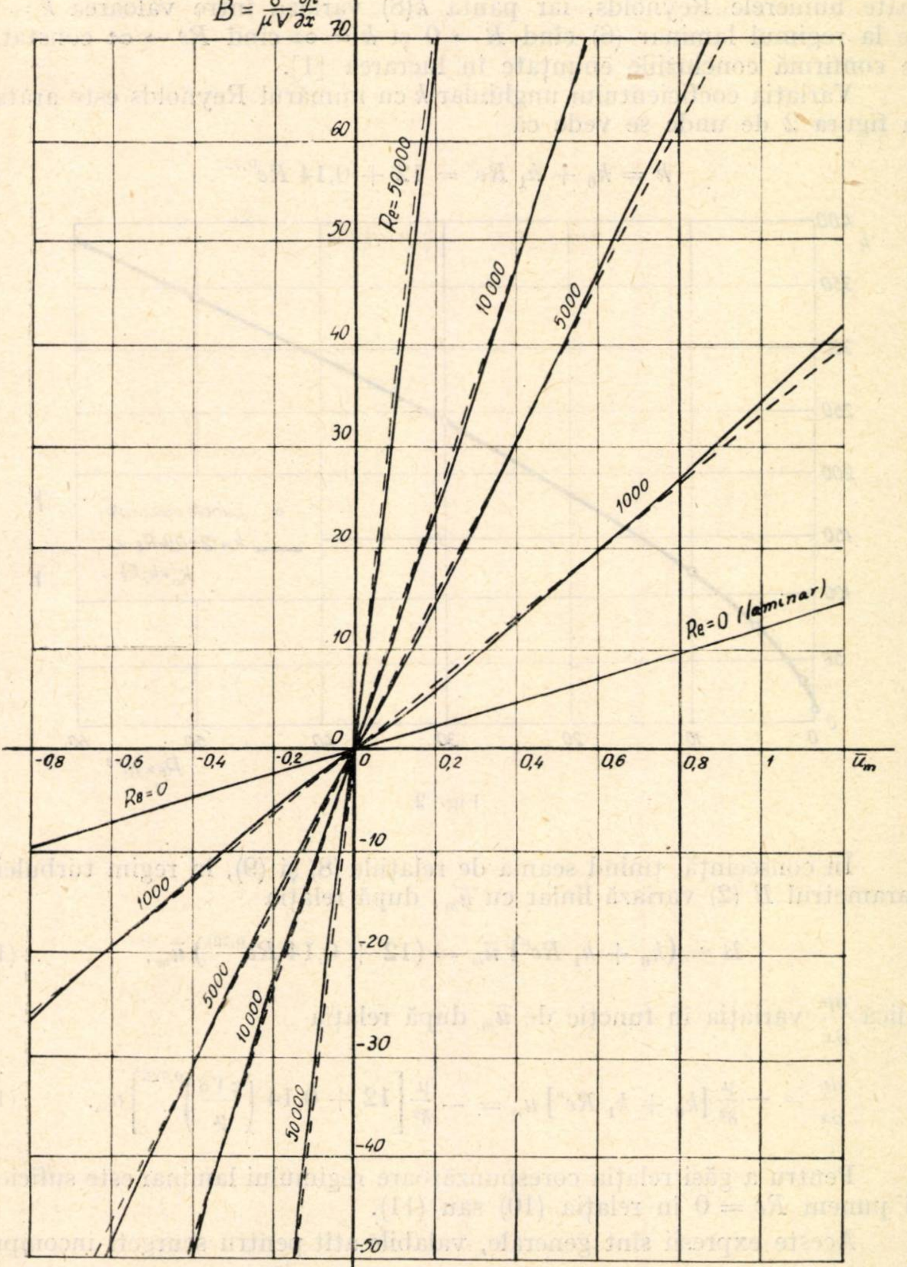

$B = \frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x}$
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-0,8
-0,6
-0,4
-0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\bar{u}_m$
Re = 50000
10000
5000
1000
Re=0 (laminar)
Re=0
1000
5000
10000
50000

Fig. 1

Caracterul liniar al variației parametrului B cu $\overline{u}_m$ se menține pentru toate numerele Reynolds, iar panta k(8) variază între valoarea $k = 12$ de la regimul laminar (6) cînd $R \to 0$ și $k = \infty$ cînd $Re \to \infty$ constatări ce confirmă concluziile enunțate în lucrarea [1].

Variația coeficientului unghiular k cu numărul Reynolds este arătată în figura 2 de unde se vede că

$$k = k_0 + k_1 Re^n = 12 + 0{,}14\, Re^{0{,}725}. \tag{9}$$

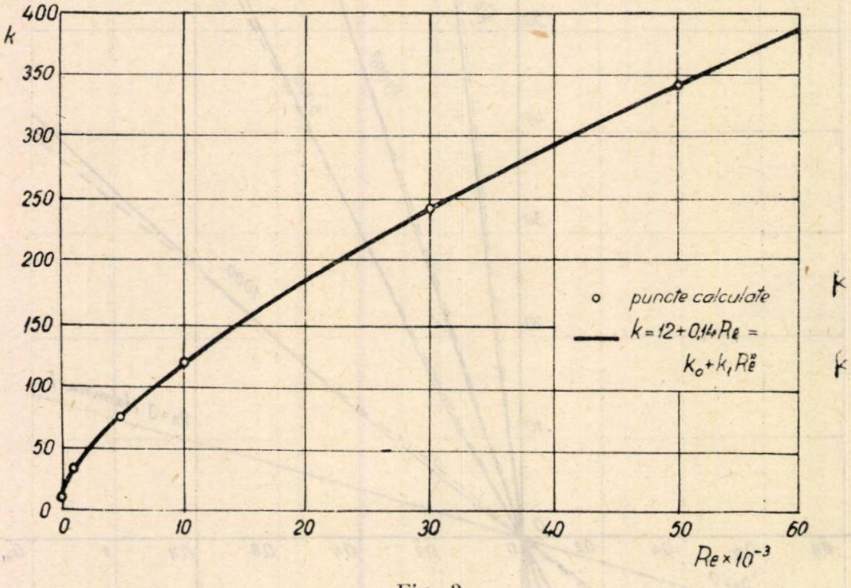


Fig. 2

În consecință, ținînd seama de relațiile (8) și (9), în regim turbulent, parametrul B (2) variază liniar cu $\overline{u}_m$, după relația

$$B = \left(k_0 + k_1\, Re^n\right) \overline{u}_m = \left(12 + 0{,}14\, Re^{0{,}725}\right) \overline{u}_m, \tag{10}$$

adică $\frac{\partial p}{\partial x}$ variația în funcție de $\overline{u}_m$ după relația

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu}{\delta^2}\left[k_0 + k_1\, Re^n\right] u_m = -\frac{\mu}{\delta^2}\left[12 + 0{,}14\left(\frac{\rho V \delta}{\mu}\right)^{0{,}725}\right] u_m. \tag{11}$$

Pentru a găsi relația corespunzătoare regimului laminar este suficient să punem $Re = 0$ în relația (10) sau (11).

Aceste expresii sînt generale, valabile atît pentru scurgeri incompresibile, cît și compresibile, ca și pentru cazul cînd $\frac{\partial p}{\partial x}$ depinde de z (problema tridimensională).

În cele ce urmează vom utiliza relația (11) pentru determinarea distribuției presiunilor în lagărele lubrificate cu lichide (scurgeri necompresibile) de alungire infinită (mișcare bidimensională).

În aceste condiții ecuația de continuitate se poate scrie global, punînd condiția că debitul de lubrifiant care traversează secțiunea în direcția x, pe unitatea de lățime a lagărului să fie constant și anume egal cu debitul din secțiunea în care $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, unde viteza medie totală este $1/2\ V$

$$u_{m_c}\delta + u_m\delta = \frac{1}{2}V\delta_0, \tag{12}$$

unde u_{m_c} și u_m au semnificațiile din relația (3), iar δ_0 este o constantă egală cu grosimea stratului de lubrifiant în secțiunea în care $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

Scriind ecuația (12) sub forma

$$u_m = -\frac{1}{2}V\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right) \tag{13}$$

și introducînd această valoare în relația (11) se obține

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu V}{2\delta^2}\left[k_0 + k_1\left(\frac{\rho V\delta}{\mu}\right)^n\right]\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right) = \frac{\mu V}{2\delta^2}\left[12 + 0{,}14\left(\frac{\rho V\delta}{\mu}\right)^{0{,}725}\right]\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right), \tag{14}$$

care reprezintă o ecuație diferențială de ordinul I în p, a cărei integrală dă distribuția presiunilor căutată.

Ecuația (14) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu V}{\delta^2}\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right) + \frac{0{,}07\ \mu\ V\ Re^{*0{,}725}}{\Delta^{0{,}725}}\ \frac{1}{\delta^{1{,}275}}\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right), \tag{15}$$

unde

$$Re^* = \frac{\rho V\Delta}{\mu}, \tag{16}$$

iar Δ este jocul mediu (pentru lagărele circulare, jocul radial).

Introducînd în locul grosimii δ, mărimea adimensională

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{\Delta};\ \bar{\delta}_0 = \frac{\delta_0}{\Delta}\ \text{ și }\ \bar{x} = \frac{x}{r} \tag{17}$$

ecuația (15) se scrie

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu Vr}{\Delta^2}\ \frac{1}{\bar{\delta}^2}\left(1 - \frac{\bar{\delta}_0}{\bar{\delta}}\right) + \frac{0{,}07\ \mu Vr\ Re^{*0{,}725}}{\Delta^2}\ \frac{1}{\bar{\delta}^{1{,}275}}\left(1 - \frac{\bar{\delta}_0}{\bar{\delta}}\right). \tag{18}$$

În ecuația (18) viscozitatea μ poate fi considerată constantă sau variabilă cu punctul. Dacă se consideră viscozitatea constantă și egală cu o valoare medie μ_m, ecuația (18) rămîne valabilă sub această formă, punîndu-se $\mu = \mu_m =$ constant.

Ca și pentru regimul laminar [2] se poate considera viscozitatea variabilă cu punctul, după relația

$$\mu = \mu_1 \left(\frac{\delta}{\delta_1} \right)^q ; \quad q = 1, \tag{19}$$

în care μ_1 este viscozitatea lubrifiantului la intrare, respectiv în punctul în care începe zona de suprapresiuni ($\delta = \delta_1$).

Notînd atunci

$$Re_1^{\star} = \frac{\rho V \Delta}{\mu_1} \tag{20}$$

ecuația (18) se scrie sub o formă mai simplă

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu_1 Vr}{\bar{\delta}_1 \Delta^2} \frac{1}{\bar{\delta}} \left(1 - \frac{\bar{\delta}_0}{\bar{\delta}}\right) + \frac{0{,}07\, \mu_1 Vr Re_1^{\star 0{,}725}}{\bar{\delta}_1^{\,0{,}275} \Delta^2} \frac{1}{\bar{\delta}} \left(1 - \frac{\bar{\delta}_0}{\bar{\delta}}\right) \tag{21}$$

sau

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu_1 Vr}{\bar{\delta}_1 \Delta^2} \left(1 + \frac{7}{600} \bar{\delta}_1^{0{,}725}\, Re_1^{\star 0{,}725}\right) \frac{1}{\bar{\delta}} \left(1 - \frac{\bar{\delta}_0}{\bar{\delta}}\right). \tag{22}$$

Această relație este aplicabilă în cazul cînd lubrifiantul utilizat este un ulei sau un alt tip de lubrifiant care prezintă o variație mare a viscozității cu temperatura. Pentru lubrifianții care prezintă o variație redusă a viscozității cu temperatura, cum este de exemplu apa, este recomandabil să se utilizeze ecuația (18) cu $\mu = \mu_m =$ constant.

Integrînd ecuațiile diferențiale obținute pentru $\frac{\partial p}{\partial x}$, se obține

$$p = p_0 + \frac{6\mu_m Vr}{\Delta^2} \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{\bar{\delta}^2} \left(1 - \frac{\bar{\delta}_0}{\bar{\delta}}\right) d\bar{x} + \frac{0{,}07\, \mu_m Vr\, Re^{\star 0{,}725}}{\Delta^2} \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{\bar{\delta}^{1{,}725}} \left(1 - \frac{\bar{\delta}_0}{\delta}\right) d\bar{x}, \tag{23}$$

în cazul ecuației (18) și

$$p = p_0 + \frac{6\mu_1 Vr}{\bar{\delta}_1 \Delta^2} \left(1 + \frac{7}{600} \bar{\delta}_1^{\,0{,}725}\, Re_1^{\star 0{,}725}\right) \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{\bar{\delta}} \left(1 - \frac{\bar{\delta}_0}{\bar{\delta}}\right) d\bar{x} \tag{24}$$

în cazul ecuației (22).

Condițiile la limită ale problemei vor fi aceleași ca și pentru mișcarea laminară în toate cazurile, adică

$$\text{la } \delta = \delta_1 ; \ \delta = \delta_2 ; \ p = p_0, \tag{25}$$

unde $\delta = \delta_1$ este începutul zonei de suprapresiuni (intrarea, grosimea maximă a stratului de lubrifiant pentru lagărele circulare), iar δ_2 este sfîrșitul zonei de suprapresiuni (ieșirea, grosimea minimă a stratului de lubrifiant pentru lagărele circulare), condiții verificate foarte bine de experiențele lui Smith [5].

În relațiile (23) și (24) prima condiție (25) este automat satisfăcută. În consecință constanta δ_0 trebuie determinată punînd condiția ca $p = p_0$ la $\delta = \delta_2$ (p_0 fiind presiunea din mediul înconjurător).

Se constată deci că distribuția presiunilor are o alură foarte apropiată de cea obținută în regim laminar. Alura curbei presiunilor este identică cu aceea obținută în regim laminar dacă se consideră viscozitatea variabilă după relația (19), iar dacă se consideră viscozitatea constantă soluția se compune dintr-o soluție laminară cu viscozitate constantă ($q = 0$) și dintr-o soluție de asemenea laminară [2] dar cu viscozitate variabilă după relația (19) cu $q = 0{,}725$, aceasta din urmă devenind preponderentă pe măsură ce crește numărul Reynolds *Re* *).

Lagăre plane

La acest tip de lagăre (fig. 3)

$$\Delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}, \qquad \nu = \frac{\delta_1 - \delta_2}{r}, \tag{26}$$

iar variația grosimii de lubrifiant

$$\bar{\delta} = 1 + \alpha - 2\alpha\bar{x}. \tag{27}$$

Atunci, pentru $q = 1$, relația (24) se scrie, efectuînd integrala

$$p = p_0 + \frac{6\mu_1 Vr}{\bar{\delta}_1 \Delta^2}\left(1 + \frac{7}{600}\,\bar{\delta}_1^{0,725}\,Re^{*0,725}\right)\frac{1}{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2}\left(\ln\frac{\delta_1}{\delta} - \frac{\bar{\delta}_0}{\bar{\delta}_1}\,\frac{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}}{\delta}\right). \tag{28}$$

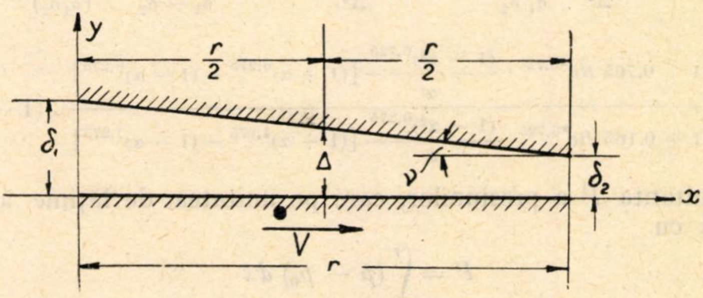


Fig. 3

Punînd a doua condiție la limită (25) rezultă

$$\bar{\delta}_0 = \frac{\bar{\delta}_1\,\bar{\delta}_2}{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2}\ln\frac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_2} = \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha}\ln\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \tag{29}$$

---

*) De fapt constanta p_0 este o funcție de y și anume egală cu $p_0 - \overline{\rho v'^2}$, v' fiind viteza pulsatorie turbulentă în direcția y, și nu devine egală cu presiunea din mediul înconjurător pentru secțiunile considerate în (25), decît la perete, unde $v' = 0$. Dar deoarece nu ne interesează decît presiunea pe cele două suprafețe, relațiile (23) și (24) sînt valabile sub forma dată (cu p_0 = constant și egală cu presiunea exterioară) fără să comitem vreo eroare.

astfel încît distribuția presiunilor (28) capătă în cele din urmă forma

$$p = p_0 + \frac{6\mu_1 Vr}{\bar{\delta}_1 \Delta_2}\left(1 + \frac{7}{600}\,\bar{\delta}_1^{0,725}\,Re_1^{*0,725}\right)\frac{1}{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2}\left(\ln\frac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}} - \frac{\bar{\delta}_2}{\bar{\delta}}\,\frac{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}}{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2}\ln\frac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_2}\right) \qquad (30)$$

sau, în funcție de $\bar{x}$

$$p = p_0 + \frac{3\mu_1 Vr}{\alpha(1+\alpha)\Delta^2}\left(1 + \frac{7}{600}\,\bar{\delta}_1^{0,725}\,Re_1^{*0,725}\right)$$

$$\left(\ln\frac{1}{1 - \dfrac{2\alpha}{1+\alpha}\bar{x}} - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\,\frac{\bar{x}}{1 - \dfrac{2\alpha}{1+\alpha}\bar{x}}\right). \qquad (31)$$

În cazul $q = 0$ ($\mu = \mu_m =$ constant) relația (23) se scrie

$$p = p_0 + \frac{6\mu_m Vr}{(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2)\Delta^2}\left(\frac{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}}{\bar{\delta}_1 \bar{\delta}} - \frac{\bar{\delta}_0}{2\bar{\delta}_1^2}\,\frac{\bar{\delta}_1^2 - \bar{\delta}^2}{\bar{\delta}^2}\right) +$$

$$+ \frac{0,07\,\mu_m Vr\,Re^{*0,725}}{(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2)\Delta^2}\left[\frac{1}{0,275\,\bar{\delta}_1^{0,275}}\,\frac{\bar{\delta}_1^{0,275} - \bar{\delta}^{0,275}}{\bar{\delta}^{0,275}} - \frac{\bar{\delta}_0}{1,275\,\bar{\delta}_1^{1,275}}\,\frac{\bar{\delta}_1^{1,275} - \bar{\delta}^{1,275}}{\bar{\delta}^{1,275}}\right] \qquad (32)$$

în care constanta $\bar{\delta}_0$ are valoarea

$$\bar{\delta}_0 = \frac{\dfrac{6\mu_m Vr}{\Delta^2}\,\dfrac{1}{\bar{\delta}_1\bar{\delta}_2} + \dfrac{0,255\,\mu_m Vr\,Re^{*0,725}}{\Delta^2}\,\dfrac{\bar{\delta}_1^{0,275} - \bar{\delta}_2^{0,275}}{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2}\cdot\dfrac{1}{(\bar{\delta}_1\bar{\delta}_2)^{0,275}}}{\dfrac{3\mu_m Vr}{\Delta^2}\,\dfrac{\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2}{\bar{\delta}_1^2\bar{\delta}_2^2} + \dfrac{0,055\,\mu_m Vr\,Re^{*0,725}}{\Delta^2}\,\dfrac{\bar{\delta}_1^{1,275} - \bar{\delta}_2^{1,275}}{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2}\,\dfrac{1}{(\bar{\delta}_1\bar{\delta}_2)^{1,275}}} \qquad (33)$$

sau

$$\delta_0 = \frac{1 + 0,765\,Re^{*0,725}\cdot\dfrac{(1-\alpha^2)^{0,725}}{\alpha}\left[(1+\alpha)^{0,275} - (1-\alpha)^{0,275}\right]}{1 + 0,165\,Re^{*0,725}\,\dfrac{(1-\alpha^2)^{0,275}}{\alpha}\left[(1+\alpha)^{1,275} - (1-\alpha)^{1,275}\right]}\cdot(1-\alpha^2). \qquad (34)$$

Rezultanta P a presiunilor, care pe unitatea de lățime a lagărului este egală cu

$$P = \int_0^r (p - p_0)\,dx \qquad (35)$$

poate fi calculată fără dificultăți. Astfel, introducînd coeficientul adimensional

$$\zeta = \frac{P\Delta^2}{2\mu Vr^2}, \qquad (36)$$

în care $\mu = \mu_1$ în cazul viscozității variabile sau $\mu = \mu_m$ în cazul viscozității constante, rezultă

$$\zeta = \frac{3}{2\alpha(1+\alpha)}\left[1 + \frac{7}{600}\,Re_1^{*0,725}(1+\alpha)^{0,725}\right]\left[1 + \frac{1-\alpha}{2\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\left(\alpha - \frac{1+\alpha}{2\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\right] \qquad (37)$$

în cazul viscozității variabile (relația (30)), sau

$$\zeta = \frac{3}{4\alpha^2}\left[\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{2}{1+\alpha}\left(\alpha - \frac{\overline{\delta}_0}{1-\alpha^2}\right)\right] + \frac{7\,Re^{*0,725}}{2400\,\alpha^2}\left\{\frac{1}{0,275}\left[\frac{(1+\alpha)^{0,725}-(1-\alpha)^{0,725}}{0,725} - \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^{0,275}}\right] - \frac{\overline{\delta}_0}{1,275\,(1+\alpha)^{1,275}}\left[\frac{1+\alpha}{0,275}\,\frac{(1+\alpha)^{0,275}-(1-\alpha)^{0,275}}{(1-\alpha)^{0,275}} - 2\alpha\right]\right\}. \tag{38}$$

Din această relație se constată creșterea sensibilă a capacității portante cu numărul Reynolds.

Lagăre circulare

În cazul lagărelor circulare (fig. 4)

$$\delta = \Delta + e\cos\theta \tag{39}$$

în care Δ este jocul radial, iar e excentricitatea.

Notînd

$$\alpha = \frac{e}{\Delta} \tag{40}$$

variația grosimii stratului de lubrifiant poate fi pusă sub forma

$$\delta_0 = \Delta\overline{\delta} = \Delta\,(1 + \alpha\cos\theta). \tag{41}$$

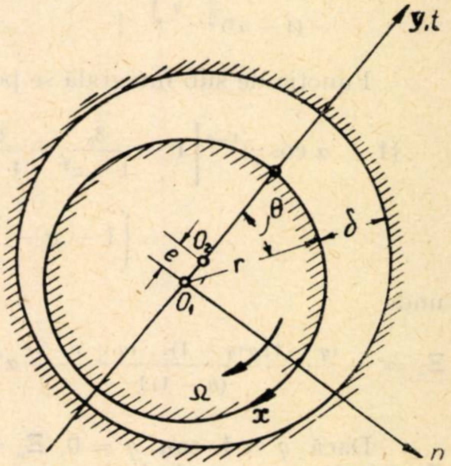


Fig. 4

În aceste condiții, pentru viscozitatea variabilă, relația (24) se scrie

$$p = p_0 + \frac{6\mu_1 Vr}{\Delta^2(1+\alpha)\sqrt{1-\alpha^2}}\left[1 + \frac{7}{600}(1+\alpha)^{0,725}\,Re_1^{*0,725}\right]\left\{\left(1 - \frac{\overline{\delta}_0}{1-\alpha^2}\right)\arccos\frac{\alpha+\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta} - \frac{\alpha\overline{\delta}_0}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,\frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}\right\}, \tag{42}$$

unde constanta $\overline{\delta}_0$ este egală cu

$$\overline{\delta}_0 = 1 - \alpha^2 \quad ; \quad \cos\theta_m = -\alpha \tag{43}$$

adică

$$p = p_0 + \frac{6\mu_1\,Vr\,\alpha}{(1+\alpha)\,\Delta^2}\left[1 + \frac{7}{600}(1+\alpha)^{0,725}\,Re_1^{*0,725}\right]\frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}. \tag{44}$$

Pentru a calcula distribuția presiunilor pentru $\mu = \mu_m =$ constant să observăm mai întîi că în expresia (23) intervine o integrală de forma

$$\mathcal{I} = \int\left[\frac{1}{(1+\alpha\cos\theta)^{2-q}} - \frac{\overline{\delta}_0}{(1+\alpha\cos\theta)^{3-q}}\right]d\theta, \tag{45}$$

în care $q=0,725$. Această integrală poate fi calculată în modul următor [2]: Introducînd substituțiile lui Sommerfeld

$$1+\alpha\cos\theta=\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha\cos\gamma}\,;\qquad d\theta=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}\,d\gamma}{1-\alpha\cos\gamma}\tag{46}$$

atunci integrala (45) se scrie

$$\mathcal{J}=\frac{1}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}-q}}\int(1-\alpha\cos\gamma)^{1-q}\left[1-\frac{\bar{\delta}_0}{1-\alpha^2}(1-\alpha\cos\delta)\right]d\gamma.\tag{47}$$

Funcția de sub integrală se poate dezvolta în serie după cum urmează

$$(1-\alpha\cos\gamma)^{1-q}\left[1-\frac{\bar{\delta}_0}{1-\alpha^2}+\frac{\bar{\delta}_0\,\alpha}{1-\alpha^2}\cos\gamma\right]=1-\frac{\delta_0}{1-\alpha^2}-$$

$$-\left(1-q-\frac{2-q}{1-\alpha^2}\,\bar{\delta}_0\right)\alpha\cos\gamma-\sum_{n=2}^{\infty}\Xi_n\cos^n\gamma,\tag{48}$$

unde

$$\Xi_n=-\frac{(q-1)\,q\,(q+1)\ldots(q+n-3)}{(n-1)\,!}\,\alpha^n\left[\left(1-\frac{\bar{\delta}_0}{1-\alpha^2}\right)\frac{q+n-2}{n}+\frac{\delta_0}{1-\alpha^2}\right].\tag{49}$$

Dacă $q=1$ sau $q=0$, $\Xi_n=0$. În rest, cum este cazul de față, $\Xi_n\neq 0$ dar nu are valori prea mari, putînd fi neglijat față de ceilalți termeni pentru $n>2$ [2].

Ținînd seama de expresia (48), integrala (47) este egală cu

$$\mathcal{J}=\frac{1}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}-q}}\int(1-\alpha\cos\gamma)^{1-q}\left[1-\frac{\bar{\delta}_0}{1-\alpha^2}(1-\alpha\cos\gamma)\right]d\gamma=$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}-q}}\left\{\left[1-\frac{\bar{\delta}_0}{1-\alpha^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\Xi_{2n}\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{n-1}}\right]\gamma-\right.$$

$$-\left[\alpha\left(1-q-\frac{2-q}{1-\alpha^2}\,\bar{\delta}_0\right)+\sum_{n=3,5}^{\infty}\Xi_n\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\right]\sin\gamma-\tag{50}$$

$$-\sum_{\nu=3,5}^{\infty}\sum_{n=3,5}^{\infty}\Xi_n\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{\frac{n-\nu}{2}}\frac{1}{\nu}\sin\nu\gamma-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Xi_{2n}\,\frac{1}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n-\nu}\frac{1}{2\nu}\sin 2\nu\gamma.$$

Notînd

$$\left.\begin{aligned} P_{1\nu} &= \frac{1}{\nu}\sum_{n=3,5}^{\infty}\Xi_n\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} n \\ \frac{n-\nu}{2}\end{pmatrix} \\ P_{2\nu} &= \frac{1}{2\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\Xi_{2n}\frac{1}{2^{2n-1}}\begin{pmatrix} 2n \\ n-\nu\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

și dezvoltînd $\sin\nu\gamma$, $\sin 2\nu\gamma$ în serie de puteri și înlocuind $\sin\gamma$, $\cos\gamma$ în funcție de $\sin\theta$ și $\cos\theta$ cu ajutorul relațiilor (46) se găsește în cele din urmă pentru distribuția presiunilor expresia

$$\begin{aligned} p = p_0 &+ \frac{6\mu_m Vr}{\Delta^2(1-\alpha^2)^{3/2}}\left\{\left(1-\frac{\overline{\delta}_0}{2}\frac{2+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)\arccos\frac{\alpha+\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta}-\right. \\ &\left.-\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\left(1-\frac{2\overline{\delta}_0}{1-\alpha^2}\right)\frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}-\frac{\overline{\delta}_0\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\frac{(\alpha+\cos\theta)\sin\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2}\right\}+ \\ &+\frac{0{,}07\,\mu_m Vr\,Re^{*0{,}725}}{\Delta^2(1-\alpha^2)^{0{,}725}}\left\{\left[1-\frac{\overline{\delta}_0}{1-\alpha^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\Xi_{2n}\begin{pmatrix}2n\\ n\end{pmatrix}\frac{1}{2^{2n}}\right]\arccos\frac{\alpha+\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta}-\right. \\ &-\left[\alpha\left(0{,}275-\frac{1{,}275}{1-\alpha^2}\,\overline{\delta}_0\right)+\sum_{n=3,5}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} n \\ \frac{n-1}{2}\end{pmatrix}\right]\frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}- \\ &-\sum_{\nu=3,5}^{\infty}P_{1\nu}\frac{\sum\limits_{\sigma=1,3}^{\alpha}(-1)^{\frac{\sigma-1}{2}}(1-\alpha^2)^{\frac{\sigma}{2}}\begin{pmatrix}\nu\\ \sigma\end{pmatrix}\sin^{\sigma}\theta\,(\alpha+\cos\theta)^{\nu-\sigma}}{(1+\alpha\cos\theta)^{\nu}}- \\ &\left.-\sum_{\nu=1}^{\infty}P_{2\nu}\frac{\sum\limits_{\sigma=1,3}^{\infty}(-1)^{\frac{\sigma-1}{2}}(1-\alpha^2)^{\frac{\sigma}{2}}\begin{pmatrix}2\nu\\ \sigma\end{pmatrix}\sin^{\sigma}\theta\,(\alpha+\cos\theta)^{2\nu-\sigma}}{(1+\alpha\cos\theta)^{2\nu}}\right\}, \end{aligned} \tag{52}$$

în care constanta $\overline{\delta}_0$ se determină punînd condiția ca $p = p_0$ la $\theta = \pi$ (condiția $p = p_0$ la $\theta = 0$ fiind automat satisfăcută de relația (52)).

Dacă în integrala (50) se neglijează termenii superiori $\nu > 2$ care conțin ca factori Ξ_n de indice $n > 2$, care sînt mici, se obține în locul relației (52) expresia mai simplă

$$\begin{aligned} p = p_0 &+ \frac{6\mu_m Vr}{\Delta^2(1-\alpha^2)^{3/2}}\left\{\left(1-\frac{\overline{\delta}_0}{2}\frac{2+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)\arccos\frac{\alpha+\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta}-\right. \\ &\left.-\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\left(1-\frac{2\overline{\delta}_0}{1-\alpha^2}\right)\frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}-\frac{\overline{\delta}_0\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\frac{(\alpha+\cos\theta)\sin\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2}\right\}+ \\ &+\frac{0{,}07\,\mu_m Vr\,Re^{*0{,}725}}{\Delta^2(1-\alpha^2)^{0{,}775}}\left\{\left(1-\frac{\overline{\delta}_0}{1-\alpha^2}-\frac{\Xi_2}{2}\right)\arccos\frac{\alpha+\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta}-\right. \\ &\left.-\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\left(0{,}275-\frac{1{,}275}{1-\alpha^2}\,\overline{\delta}_0\right)\frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}-\frac{1}{2}\,\Xi_2\sqrt{1-\alpha^2}\,\frac{\sin\theta(\alpha+\cos\theta)}{(1+\alpha\cos\theta)^2}\right\}, \end{aligned} \tag{53}$$

unde

$$\Xi_2 = 0{,}275\, \alpha^2 \left(0{,}3625 + 0{,}6375 \frac{\bar{\delta}_0}{1 - \alpha^2}\right) \tag{54}$$

relație suficient de precisă pentru aplicații.

Constanta $\bar{\delta}_0$ se poate calcula din relația

$$\bar{\delta}_0 = 2\,(1 - \alpha^2) \frac{1 + \frac{7}{600} Re^{*0,725} (1 - \alpha^2)^{0,725} (1 - 0{,}05\, \alpha^2)}{2 + \alpha^2 + \frac{7}{600} Re^{*0,725} (1 - \alpha^2)^{0,725} (2 + 0{,}176\, \alpha^2)} \,. \tag{55}$$

Cînd $Re^* = 0$, $\bar{\delta}_0$ are valoarea

$$\bar{\delta}_0 = 2 \frac{1 - \alpha^2}{2 + \alpha^2} \tag{56}$$

valoare corespunzătoare regimului laminar. Cînd numărul Re^* este mare, $\bar{\delta}_0$ tinde destul de repede către valoarea

$$\bar{\delta}_{0Re \to \infty} = 2 \frac{(1 - \alpha^2)\,(1 - 0{,}05\, \alpha^2)}{2 + 0{,}176\, \alpha^2\; 1 - \alpha^2} \,. \tag{57}$$

Se constată ușor că în general $1 - \alpha^2 \leqslant \bar{\delta}_0 \leqslant 2 \frac{1 - \alpha^2}{2 + \alpha^2}$ adică este cuprins între valoarea $\bar{\delta}_0$ corespunzător regimului laminar (sau turbulent (44), cu viscozitatea variind după relația (19) cu $q = 1$, și valoarea $\bar{\delta}_0$ corespunzătoare regimului laminar pentru $q = 0$, $q = 0$, fiind mai aproape de prima pentru $Re^*_{\to \infty}$ în raportul $\frac{q}{1 - q}$ adică

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{0Re^* \to \infty} &\cong q\,(1 - \alpha^2) + 2\,(1 - q) \frac{1 - \alpha^2}{2 + \alpha^2} = \\ &= 0{,}725\,(1 - \alpha^2) + 0{,}275 \frac{2\,(1 - \alpha^2)}{2 + \alpha^2} \,. \end{aligned} \tag{58}$$

Într-adevăr pentru $\alpha = 0{,}8$ de exemplu, relația aproximativă (58) dă $\bar{\delta}_0 = 0{,}336$ în timp ce din relația (57) rezultă $\bar{\delta}_0 = 0{,}332$, adică o eroare numai de 1,2%.

Precizia formulei (53) este foarte bună la valori α mai mici după cum se poate vedea ușor din studiul convergenței șirului Ξ_n (49). La valori α mari, apropiate de valoarea $\alpha = 1$ această convergență este mai redusă. Pentru a verifica eroarea introdusă, în diagrama din figura 5 s-a calculat în mod exact valorile integralei (45) în funcție de θ (determinînd și $\bar{\delta}_0$ prin condiţia $\mathcal{J} = 0$ la $\theta = \pi$, ceea ce corespunde distribuţiei presiunilor la $Re^* \to \infty$), pentru $q = 0$, $q = 1$ şi $q = 0{,}725$ (prin integrare grafică în ultimul caz). Se constată că erorile nu sînt mari. În plus se constată că rezultate şi mai bune se obţin dacă, avînd în vedere că variaţia lui $\mathcal{J}$ cu q

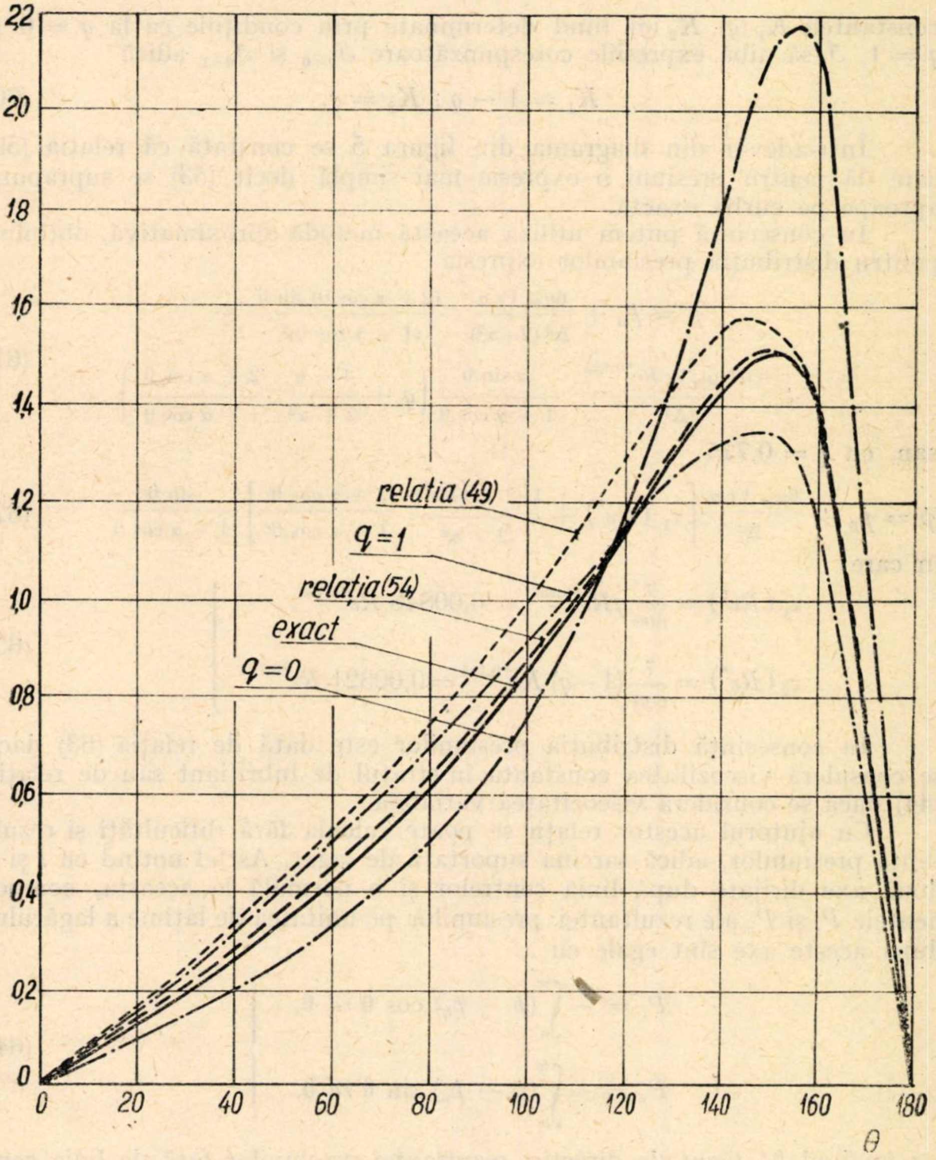


Fig. 5

este continuă și relativ redusă, se consideră $\mathcal{J}$ în mod aproximativ sub forma

$$\mathcal{J}_q = K_1 \mathcal{J}_{q=0} + K_2 \mathcal{J}_{q=1}, \tag{59}$$

constantele $K_1(q)$, $K_2(q)$ fiind determinate prin condițiile ca la $q = 0$ și $q = 1$, $\mathcal{J}$ să aibă expresiile corespunzătoare $\mathcal{J}_{q=0}$ și $\mathcal{J}_{q=1}$ adică

$$K_1 = 1 - q\,;\ K_2 = q. \tag{60}$$

Într-adevăr din diagrama din figura 5 se constată că relația (59) care dă pentru presiuni o expresie mai simplă decît (53) se suprapune aproape pe curba exactă.

În consecință putem utiliza această metodă aproximativă, obținînd pentru distribuția presiunilor expresia

$$\begin{aligned} p = p_0 + \frac{6\mu_m\, Vr\,\alpha}{\Delta^2(2+\alpha^2)}\ \frac{(2+\alpha\cos\theta)\sin\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2} + \\ + \frac{0{,}07\ \mu_m Vr\, Re^{\star 0{,}725}}{\Delta^2}\ \frac{\alpha\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}\left(q + \frac{1-q}{2+\alpha^2}\ \frac{2+\alpha\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta}\right) \end{aligned} \tag{61}$$

sau, cu $q = 0{,}725$

$$p = p_0 + \frac{6\mu_m\, Vr\,\alpha}{\Delta^2}\left[\varepsilon_1(Re^\star) + \frac{1+\varepsilon_2(Re^\star)}{2+\alpha^2}\ \frac{2+\alpha\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta}\right]\frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}, \tag{62}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1(Re^\star) &= \frac{7}{600}\,q Re^{\star 0{,}725} = 0{,}00846\ Re^{\star 0{,}725}, \\ \varepsilon_2(Re^\star) &= \frac{7}{600}\,(1-q)\, Re^{\star 0{,}725} = 0{,}00321\ Re^{\star 0{,}725}. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

În consecință distribuția presiunilor este dată de relația (63) dacă se consideră viscozitatea constantă în stratul de lubrifiant sau de relația (44) dacă se consideră viscozitatea variabilă.

Cu ajutorul acestor relații se poate calcula fără dificultăți și rezultanta presiunilor, adică sarcina suportată de lagăr. Astfel notînd cu t și n două axe dirijate după linia centrelor și o normală la aceasta, componentele P_t și P_n ale rezultantei presiunilor pe unitatea de lățime a lagărului după aceste axe sînt egale cu

$$\left.\begin{aligned} P_t &= -\int_0^\pi (p - p_0)\cos\theta\, r d\,\theta, \\ P_n &= -\int_0^\pi (p - p_0)\sin\theta\, r d\,\theta, \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

iar unghiul $\theta^\star$ făcut de direcția rezultantei presiunilor față de linia centrelor poate fi determinat din relația

$$\operatorname{tg}\theta^\star = \frac{P_n}{P_t}. \tag{65}$$

Vom introduce coeficienții adimensionali

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \frac{P_n\,\psi^2}{6\mu\ V},\\ C_t &= \frac{P_t\,\psi^2}{6\mu\ V}, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

în care $\psi = \frac{\Delta}{r}$ este jocul relativ, iar μ este viscozitatea la intrare μ_1 în cazul cînd se consideră viscozitatea variabilă sau este viscozitatea medie μ_m în cazul cînd se consideră viscozitatea constantă.

În cazul viscozității variabile (relația (44)) efectuînd integralele (64) se obține

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \frac{\pi}{\alpha\,(1+\alpha)}\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right)\left[1+\frac{7}{600}\,(1+\alpha)^{0{,}725}\,Re_1^{\star 0{,}725}\right],\\ C_t &= \frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-2\right)\left[1+\frac{7}{600}\,(1+\alpha)^{0{,}725}\,Re_1^{\star 0{,}725}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

În cazul viscozității constante integrînd relația (53) se obține

$$\left.\begin{aligned} -\,C_n = {} & \frac{\pi}{(1-\alpha^2)^{3/2}}\left[1-\frac{1}{2}\,\frac{2+\alpha^2}{1-\alpha^2}\,\bar{\delta}_0+\alpha\left(1-\frac{3}{2}\,\frac{\bar{\delta}_0}{1-\alpha^2}\right)\right]+\\ & +\frac{7}{600}\cdot Re^{\star 0{,}725}\left\{\frac{\pi}{\alpha\,(1-\alpha^2)^{0{,}725}}\left(0{,}725+\frac{0{,}275\,\bar{\delta}_0}{1-\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}\,\Xi_2\right)+\right.\\ & +\frac{\pi}{(1-\alpha^2)^{0{,}775}}\left\{\left(1-\frac{\bar{\delta}_0}{1-\alpha^2}-\frac{1}{2}\,\Xi_2\right)-\frac{1}{\alpha}\left[\alpha^2+0{,}725\,(1-\alpha^2)+\right.\right.\\ & \left.\left.\left.+\left(1{,}275-\frac{1}{1-\alpha^2}\right)\bar{\delta}_0-\frac{2-\alpha^2}{2\alpha^2}\,\Xi_2\right]\right\}\right\},\\ C_t = {} & \frac{1}{1-\alpha^2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{2+\alpha^2}{1-\alpha^2}\,\bar{\delta}_0\right)\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-\right.\\ & -\left(1-\frac{2\,\delta_0}{1-\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-2\right)+\\ & \left.+\frac{\alpha}{2}\,\frac{\delta_0}{1-\alpha^2}\left[\frac{4}{\alpha}-\left(\frac{2}{\alpha^2}-1\right)\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right]\right\}+\\ & +\frac{7}{600}\,\frac{Re^{\star 0{,}725}}{(1-\alpha^2)^{0{,}775}}\left\{\left(1-\frac{\bar{\delta}_0}{1-\alpha^2}-\frac{1}{2}\,\Xi_2\right)\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-\right.\\ & -\sqrt{1-\alpha^2}\left(0{,}275-\frac{1{,}275\,\bar{\delta}_0}{1-\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-2\right)+\\ & \left.+\frac{1}{2}\,\Xi_2\,\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\left[\frac{4}{\alpha}-\left(\frac{2}{\alpha^2}-1\right)\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

În sfîrșit, considerînd relația (62)

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \frac{\pi}{\alpha}\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right)\varepsilon_1\left(Re^*\right)+\frac{\pi\,\alpha}{(2+\alpha^2)\sqrt{1-\alpha^2}}\left[1+\varepsilon_2\left(Re^*\right)\right],\\ C_t &= \left(\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-2\right)\varepsilon_1\left(Re^*\right)+\frac{2\alpha^2}{(2+\alpha^2)(1-\alpha^2)}\left[1+\varepsilon_2\left(Re^*\right)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

Introducînd, ca și pentru regimul laminar [3] coeficientul adimensional

$$\zeta = \frac{P\,\psi^2}{2\mu\,V} \qquad (70)$$

rezultă, ținînd seama de relațiile (66)

$$\zeta = 3\sqrt{c_t^2 + c_n^2}. \qquad (71)$$

Variația coeficientului ζ în funcție de α, avînd numărul Reynolds Re^* ca parametru, este prezentată pentru cazul viscozității constante în figura 6 și în cazul viscozității variabile în figura 7.

Se constată că rezultanta presiunilor este sensibil mai mare decît în cazul regimului laminar, iar această diferență crește cu numărul Reynolds. De asemenea în figura 9 este prezentată poziția centrului fusului față de centrul cuzinetului pentru diferite numere Reynolds; în această privință numărul Reynolds nu are o influență mare, iar în cazul viscozității variabile traiectoria centrului fusului nu este influențată de numărul Reynolds.

Verificări experimentale

În lucrarea [1] s-a arătat că distribuția vitezelor obținută prin metoda prezentată, concordă foarte bine cu experiențele lui Laufer pentru scurgerea bidimensională cu gradient de presiune [4]. În cele ce urmează vom compara rezultatele obținute cu determinările experimentale efectuate de Smith și Fuller pe lagăre lubrificate cu apă. Aceste verificări au în special un caracter calitativ, deoarece lagărul experimental utilizat are o alungire $\lambda = \frac{b}{2r} = 1$ (b fiind lățimea lui) și deci, în ceea ce privește mărimea presiunilor, valorile experimentale vor fi sensibil mai reduse decît pentru mișcarea bidimensională ($\lambda = \infty$), pentru care se aplică teoria de mai sus.

În lucrarea [1] nu s-au putut verifica rezultatele, decît de mișcarea Poiseuille, deoarece nu există determinări experimentale în acest sens. Totuși se poate face o confruntare indirectă cu experiențele pentru o mișcare de tip Couette, în ceea ce privește forța de frecare la perete. Această confruntare este interesantă deoarece în general teoriile utilizate în prezent pentru scurgerea turbulentă nu sînt aplicate decît pentru determinarea profilului vitezelor și nu pentru forțele de frecare, deoarece o eroare redusă

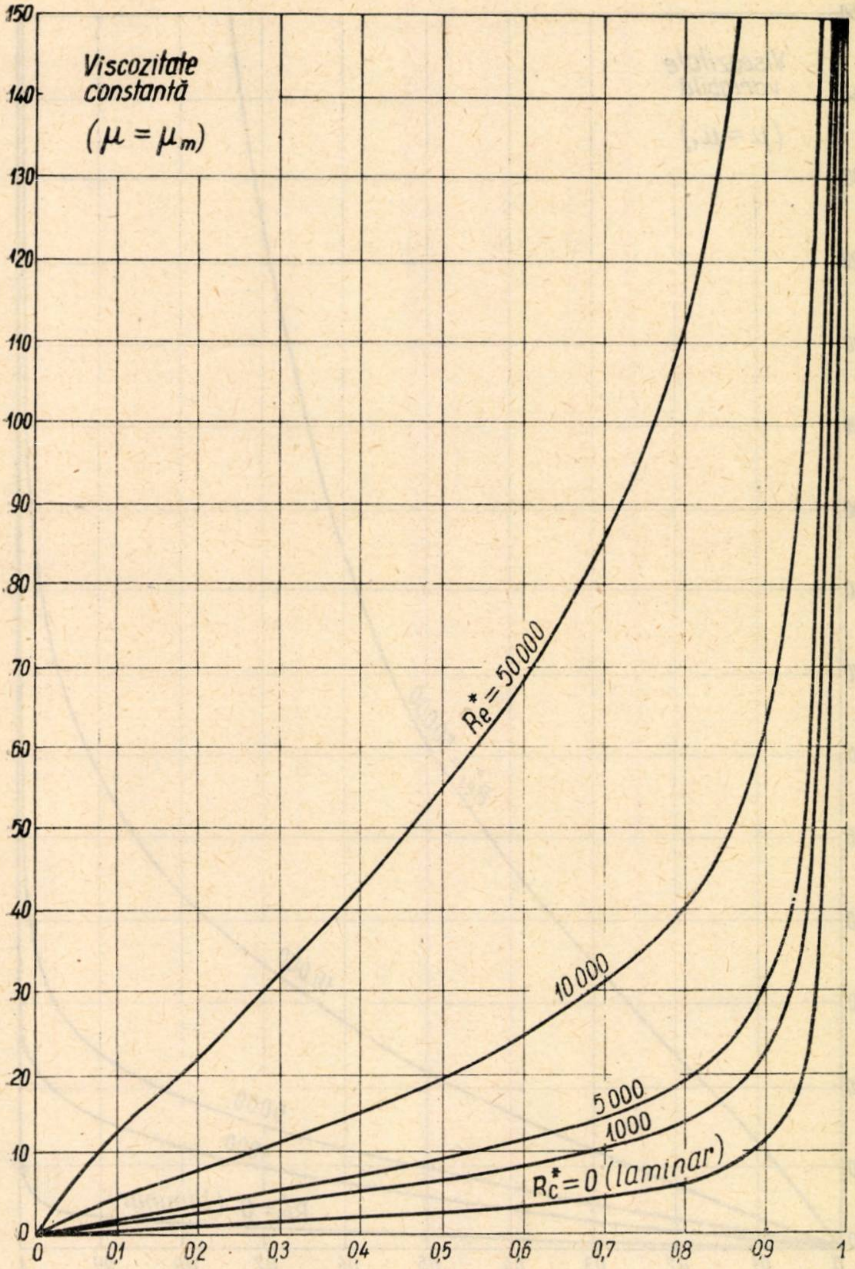

Viscozitate constantă
$(\mu = \mu_m)$
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
α
$Re^* = 50\,000$
10 000
5 000
1000
$R_c^* = 0$ (laminar)

Fig. 6

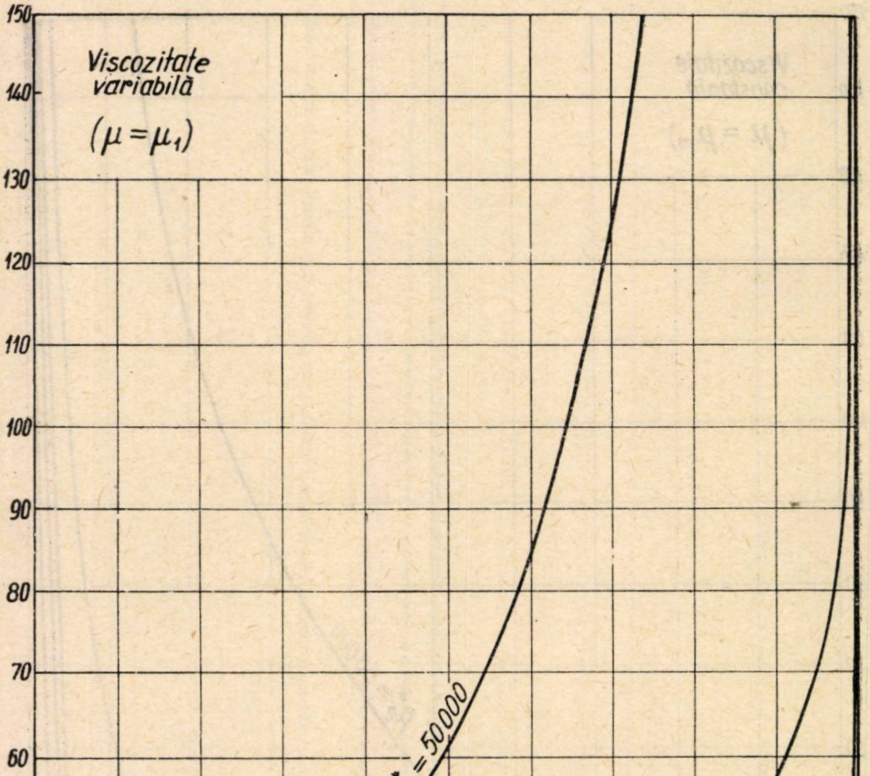

Viscozitate variabilă
$(\mu=\mu_1)$
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
$Re_1^*=50\,000$
10 000
5000
1000
$Re_1^*=0$ (laminar)
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
α

Fig. 7

asupra profilului vitezelor poate da o eroare mare asupra derivatei $\frac{\partial u}{\partial y}$ la perete și deci și asupra tensiunii de frecare, care, la perete este egală cu

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{72}$$

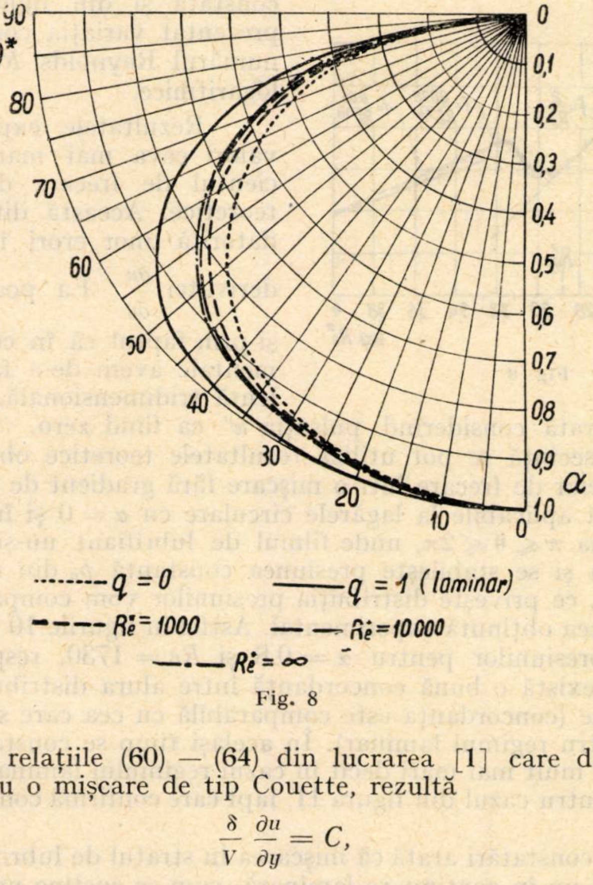


Fig. 8

Utilizînd relațiile (60) — (64) din lucrarea [1] care dau distribuția vitezelor pentru o mișcare de tip Couette, rezultă

$$\frac{\delta}{V}\,\frac{\partial u}{\partial y} = C, \tag{73}$$

în care constanta de integrare C se deduce din sistemul (64). Calculînd constanta C pentru diferite numere Reynolds Re (punînd $\delta = \Delta$ deoarece mișcarea în lagăr este de tip Couette la $\alpha = 0$) și definind coeficientul de frecare în același mod ca și Smith și Fuller

$$f = \frac{M}{\pi \rho V^2 r^2 b^2}, \tag{74}$$

unde M este momentul de frecare rezultă

$$f = \frac{0{,}05}{Re^{*0{,}389}}. \tag{75}$$

Experimental, Smith și Fuller au obținut pentru coeficientul de frecare f expresia

$$f = \frac{0{,}078}{Re^{*0{,}43}}\,. \tag{76}$$

Aceste două relații dau rezultate foarte apropiate (în domeniul $1000 < Re < 50\,000$ diferențele sînt de ordinul a 5–10%), după cum se constată și din figura 9, unde s-a prezentat variația coeficientului f cu numărul Reynolds Re în coordonate logaritmice.

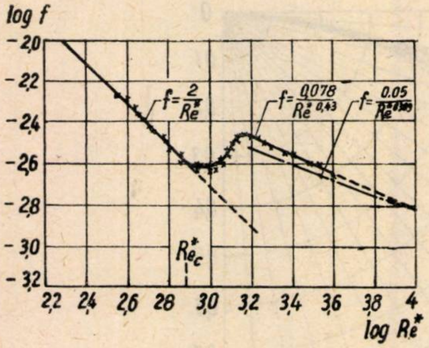


Fig. 9

Rezultatele experimentale dau valori ceva mai mari pentru coeficientul de frecare decît rezultatele teoretice. Această diferență poate fi datorită unor erori în determinarea derivatei $\frac{\partial u}{\partial y}$. Ea poate fi explicată și prin faptul că în condițiile experimentale avem de-a face cu o turbulentă tridimensională, pe cînd teoria a fost elaborată considerînd pulsația w' ca fiind zero.

În consecință se pot utiliza rezultatele teoretice obținute și pentru calculul forțelor de frecare într-o mișcare fără gradient de presiune. Aceste rezultate sînt aplicabile la lagărele circulare cu $\alpha = 0$ și în toate celelalte cazuri în zona $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, unde filmul de lubrifiant nu-și mai păstrează continuitatea și se stabilește presiunea constantă p_0 din mediul exterior.

În ceea ce privește distribuția presiunilor vom compara alura curbei teoretice cu cea obținută experimental. Astfel în figurile 10 și 11 se prezintă distribuția presiunilor pentru $\alpha = 0{,}8$ și $Re = 1730$, respectiv 3310. Se constată că există o bună concordanță între alura distribuției teoretice și experimentale (concordanța este comparabilă cu cea care se obține în mod obișnuit pentru regimul laminar). În același timp se constată că presiunile obținute sînt mult mai mari decît în cazul regimului laminar (de peste 3 ori mai mare) pentru cazul din figura 11, fapt care confirmă concluziile teoretice obținute.

Aceste constatări arată că mișcarea în stratul de lubrifiant este efectiv turbulentă și nu în continuare laminară, cum se susține uneori [5]. Totuși în aplicarea teoriei turbulente de mai sus trebuie să se verifice dacă numărul Reynolds efectiv din stratul de lubrifiant depășește numărul Reynolds critic. Astfel să definim acum numărul Reynolds în funcție de viteza medie din stratul de lubrifiant.

$$Re_m = \frac{2\rho u_m \delta}{\mu} \tag{77}$$

pentru a-l putea compara cu Re^* (16) $\left(\text{deoarece în mișcarea fără gradient de presiune } u_m = \frac{V}{2}\right)$.

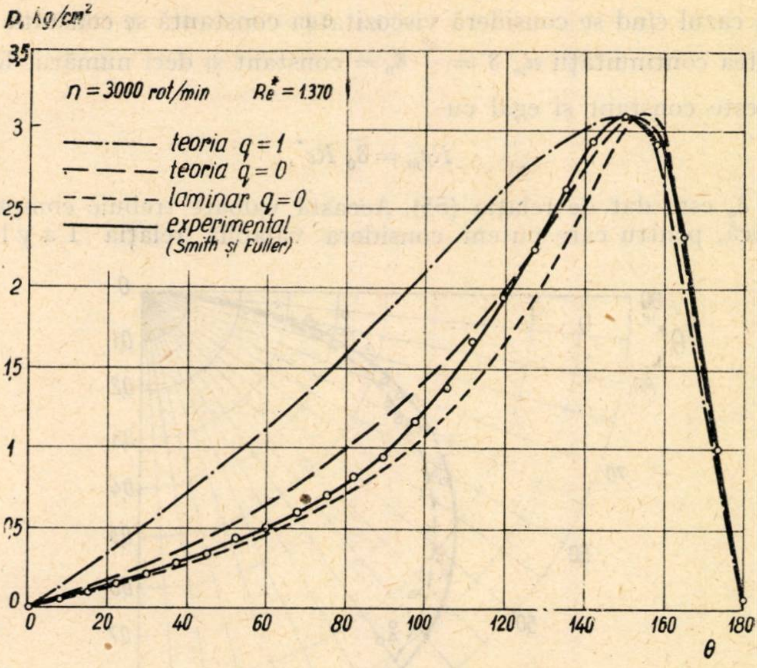

p, kg/cm²
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
n = 3000 rot/min
Re* = 1370
teoria q = 1
teoria q = 0
laminar q = 0
experimental
(Smith și Fuller)
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
θ

Fig. 10

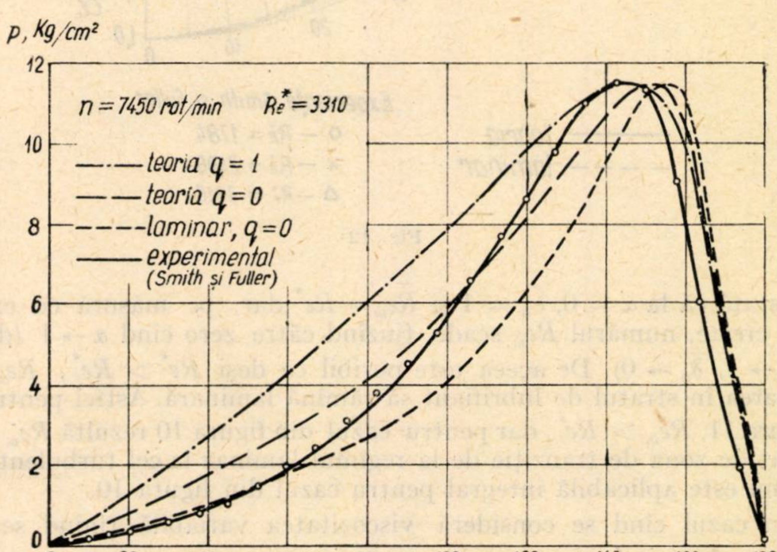

p, Kg/cm²
12
10
8
6
4
2
0
n = 7450 rot/min
Re* = 3310
teoria q = 1
teoria q = 0
laminar, q = 0
experimental
(Smith și Fuller)
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
θ

Fig. 11

În cazul cînd se consideră viscozitatea constantă se constată ușor că, în virtutea continuității $u_m\,\delta = \frac{V}{2}\,\delta_0 =$ constant și deci numărul Reynolds efectiv este constant și egal cu

$$Re_m = \bar{\delta}_0\, Re^*, \tag{78}$$

în care $\bar{\delta}_0$ este dat de relația (55). Această valoare trebuie comparată cu cea critică, pentru care putem considera valabilă relația Taylor [1].

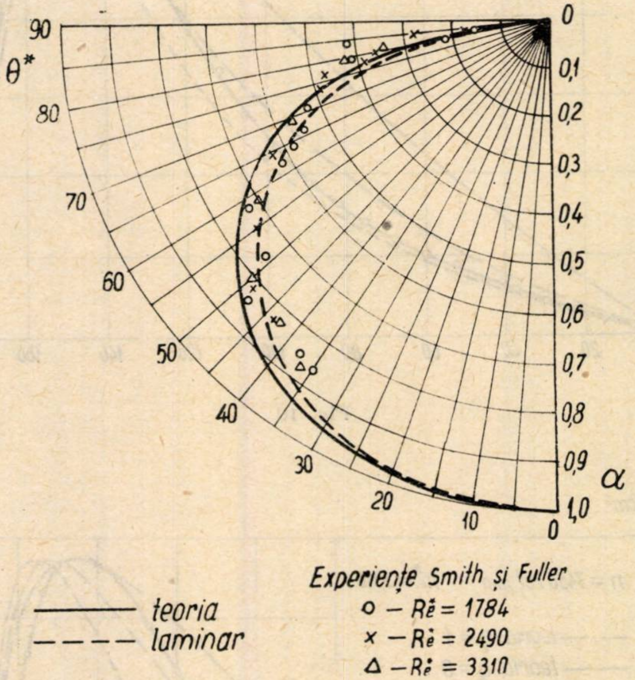


Fig. 12

Se constată că la $\alpha = 0$, $\bar{\delta}_0 = 1$ și $Re_m = Re^*$ dar, pe măsură ce excentricitatea crește, numărul Re_m scade, tinzînd către zero cînd $\alpha \to 1$ (deoarece cînd $\alpha \to 1$, $\bar{\delta}_0 \to 0$). De aceea este posibil ca deși $Re^* > Re_c^*$, $Re_m < Re_c^*$ și mișcarea în stratul de lubrifiant să rămînă laminară. Astfel pentru cazul din figura 11, $Re_m > Re_c^*$, dar pentru cazul din figura 10 rezultă $Re_m < Re_c^*$, apropiat de zona de tranziție de la regimul laminar la cel turbulent. Astfel teoria nu este aplicabilă integral pentru cazul din figura 10.

În cazul cînd se consideră viscozitatea variabilă ținînd seama că $\bar{\delta}_0 = 1 - \alpha^2$

$$Re_m = \frac{(1 - \alpha^2)\,(1 + \alpha)}{1 + \alpha \cos\theta}\, Re_1^*\,, \tag{79}$$

de unde se vede că Re_m nu mai este constant ci crește în lungul stratului de lubrifiant.

Rezultatele obținute mai sus concordă bine cu cele exeprimentale și în ceea ce privește direcția sarcinii, respectiv traiectoria centrului fusului (fig. 12). Diferențele ce există se datoresc probabil influenței forțelor de frecare, de care nu s-a ținut seama în calculul componentelor P_n și P_t.

CONCLUZII

Din cele de mai sus rezultă că, presupunînd valabile pentru mișcarea turbulentă în stratul de lubrifiant, aceleași ipoteze simplificatoare ca și pentru mișcarea laminară [1] și utilizînd ipoteza lungimii de amestec a lui Prandtl se poate determina distribuția vitezelor și legătura ce există între profilul vitezelor și $\frac{\partial p}{\partial x}$ și numărul Reynolds. Astfel, ca și pentru mișcarea laminară, viteza medie în stratul de lubrifiant variază aproximativ liniar cu $\frac{\partial p}{\partial x}$, dar scade cu numărul Reynolds (relația (11)).

În aceste condiții, cu ajutorul ecuației continuității se poate scrie ecuația presiunii atît în cazul cînd se consideră viscozitatea constantă, cît și variabilă, ecuație care are o structură asemănătoare cu ecuația care se obține în cazul mișcării laminare, și care poate fi integrată prin metode analoage [2]. Se pot obține astfel formule explicite pentru calculul mărimii și direcției rezultantei presiunilor. Capacitatea portantă a lagărelor în regim turbulent este sensibil sporită față de regimul laminar, diferență ce crește cu numărul Reynolds.

Rezultatele obținute prezintă o bună concordanță cu determinările experimentale efectuate de Smith și Fuller, atît în ceea ce privește alura distribuției presiunilor cît și în ceea ce privește direcția rezultantei presiunilor.

Primită la redacție la 3 iulie 1957.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХМЕРНОЙ СМАЗКИ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

На основании результатов одной из предыдущих работ [1], в которой рассматривалось распределение скоростей в слое смазки при турбулентном режиме, выводится дифференциальное уравнение давлений, имеющее аналогичную структуру с уравнением давлений при ламинарном режиме, и, для интегрирования которого, применяются аналогичные методы. В результате получаются простые формулы, которые легко могут быть использованы для распределения давлений и

для величины и направления равнодействующей силы давлений в плоских и круглых подшипниках, причем вязкость принимается как постоянная или переменная.

Полученные результаты сопоставляются с опытами, проведенными Смитом и Фуллером, причем получается хорошее совпадение не только для вида распределения давлений и направления равнодействующей силы давлений, но и для коэффициента трения в незагруженных подшипниках.

ÉTUDE DE LA LUBRIFICATION BIDIMENSIONNELLE EN RÉGIME TURBULENT

RÉSUMÉ

En utilisant les résultats d'un travail précédent [1], où l'on a étudié la distribution des vitesses dans la couche de lubrifiant en régime turbulent, on déduit l'équation différentielle des pressions, dont la structure est similaire à celle de l'équation des pressions pour le cas du régime laminaire et pour la solution de laquelle on utilise des méthodes analogues. On obtient ainsi, pour la distribution des pressions, pour la résultante des pressions et pour sa direction, des formules simples et facilement utilisables, tant pour les paliers plans, que pour les paliers circulaires. La viscosité du lubrifiant est supposée constante ou variable.

Les résultats obtenus sont comparés avec les expériences effectuées par Smith et Fuller, en obtenant une bonne concordance, non seulement en ce qui concerne l'allure de la distribution des pressions et la direction de la résultante des pressions, mais aussi en ce qui concerne le coefficient de frottement dans les paliers non chargés.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. CONSTANTINESCU, *Influenţa turbulenţei asupra mişcării în stratul de lubrifiant*, acest volum, p. 103.
2. N. TIPEI, *O metodă generală pentru studiul mişcării în pelicula de lubrifiant dintre două suprafeţe de dimensiuni finite.* Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, **II** 27—84 (1951).
3. — *Consideraţii asupra calculului lagărelor prin alunecare.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe tehnice şi chimice, **IV**, *3—4*, 291—301 (1952).
4. T. LAUFER, *Some Recent Measurements in a Two-Dimensional Turbulent Channel.* Journal of Aeronautical Sciences, **17**, 277—287 (1950).
5. M. I. SMITH, D. D. FULLER, *Journal Bearings Operation of Superlaminar Speeds.* Transactions of the A.S.M.E. **78**, 469—474 (1956).

ASUPRA REGIMULUI TERMIC OPTIM DE FUNCȚIONARE AL UNUI MATERIAL ANTIFRICȚIUNE LA LAGĂRELE CIRCULARE CU ALUNECARE

DE

GH. VASILCA și AL. NICA

Din examinarea caracteristicilor $p = g(V)$ la lagărele circulare cu alunecare, pentru diferite regimuri de funcționare la temperaturi constante, se poate constata că aceste curbe prezintă unele deosebiri de aspect. Cea mai importantă deosebire apare la unele materiale metalice antifricțiune încercate [1], mai ales în privința domeniului de viteze peste care se extinde un asemenea regim de funcționare la temperatură constantă. Se constată că la același lagăr și în aceleași condiții de alimentare cu lubrifiant, curba $p = g(V)$ acoperă un domeniu de viteze de funcționare mai mare în cazul regimurilor de funcționare la temperaturi constante mai ridicate, în limite de sarcini aproximativ aceleași (fig. 1).

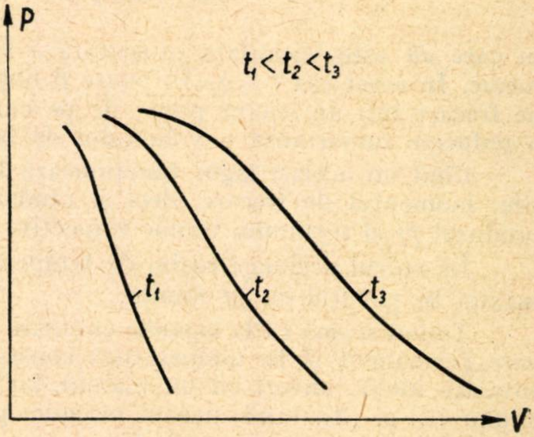


Fig. 1

Aceasta poate prezenta importanță, deoarece înseamnă că pentru lagărele care trebuie să funcționeze la temperaturi mai joase, proiectantul nu dispune decît de un interval de viteze redus pentru realizarea lor. Înseamnă de asemenea că din acest punct de vedere, în construcția lagărelor ar apare indicat să se imprime o tendință de folosire a regimurilor de funcționare la temperaturi mai ridicate.

Ținînd seama de aceasta, este util de știut dacă regimurile de funcționare la diferite temperaturi sau la aceeași temperatură nu se deosebesc între ele și prin alți parametri care să facă un domeniu de temperaturi sau o porțiune din curba $p = g\ (V)$ mai avantajoase.

Problema se poate pune de exemplu sub forma determinării regimului termic optim de funcționare al unui lagăr. Dacă și acest regim se situiază în zona temperaturilor de funcționare mai ridicate, alegerea lagărelor cu astfel de regimuri de funcționare (cînd proiectantul are latitudinea de a face o asemenea alegere), devine și mai întemeiată. Lagărele pot fi astfel concepute și construite pe baze mult mai raționale.

Caracteristicile funcționale $p = g\ (V)$ depinzînd în afară de elementele geometrice ale lagărului și de lubrifiant, de asemenea de materialul antifricțiune al cuzinetului și de materialul fusului, regimul termic optim poate constitui în același timp și o caracteristică a ansamblului în frecare, mai ales a materialului antifricțiune. O asemenea caracteristică permite deci diferențierea mai exactă a materialelor antifricțiune noi și de înlocuire.

Un criteriu pentru aprecierea regimului termic optim de funcționare la lagărele circulare cu alunecare îl poate constitui randamentul mecanic, care depinde de frecarea din acel lagăr.

De-a lungul unei caracteristici $p = g\ (V)$, curba de variație a momentului de frecare poate fi obținută prin măsurători directe.

Cînd se cunoaște variația coeficientului de frecare cu viteza, $f = g_1\ (V)$, momentul de frecare poate fi calculat cu relația

$$M_f = d\,b\,p\,f\,r = 2\,b\,r^2\,p\,f,$$

în care db este suprafața proiectată a lagărului și p presiunea specifică medie. În acest caz $f = g_1\ (V)$ poate fi obținut prin măsurarea momentului de frecare într-un singur punct de pe curba $p = g\,(V)$ obținîndu-se astfel o reducere importantă a volumului de lucrări experimentale [3].

Cînd un același lagăr funcționează în regimuri de temperatură diferite, momentul de frecare, deci și randamentul său mecanic, variază cu produsul pf al regimului termic respectiv.

În cadrul aceluiași regim de temperatură, randamentul mecanic este maxim în punctul cu pf minim.

Ținînd seama că la lagărele circulare cu alunecare în regim de funcționare permanent și la temperatură constantă, curba $p = g\,(V)$ prezintă o anumită alură, uneori cu un maxim, iar curba $f = g_1\ (V)$ o alură cu un minim [2] și [3], randamentul mecanic poate să treacă într-un astfel de regim, printr-o valoare maximă.

După felul cum variază însă p și f la temperaturi de funcționare diferite, randamentul mecanic va prezenta, în cadrul aceluiași regim, variații în consecință mai mari sau mai mici.

Variația în limite mari a randamentului mecanic într-un regim termic dat îngrădește la proiectare posibilitatea de alegere a parametrilor convenabili pentru un lagăr. Astfel, alegerea parametrilor p sau V, în cadrul unei caracteristici $p = g(V)$ care prezintă o curbă $\eta_m = g_2(V)$ mai înclinată este legată de variații mai mari de randament.

Posibilitatea de alegere a parametrilor lagărelor este deci mult mai largă la regimurile termice cu variații în limite reduse a randamentului mecanic. Aceste limite se pot referi la caracteristica $\eta_m = g_2(V)$ întreagă sau numai la porțiuni ale ei.

Deosebirile de alură, constatate la caracteristicile $p = g(V)$ în regimuri termice de funcționare diferite, se răsfrîng în consecință și asupra randamentului mecanic al lagărului. Panta din ce în ce mai puțin înclinată cu creșterea temperaturii de funcționare, a caracteristicilor $p=g(V)$, și în consecință și a curbelor $f = g_1(V)$, indică pentru variația randamentului mecanic limite din ce în ce mai reduse.

Dacă alura caracteristicilor $p = g(V)$ nu permite să se tragă concluzii asupra aspectului cantitativ, se poate constata în schimb că în regimurile de funcționare la temperaturi mai ridicate, aceste caracteristici fiind mai alungite, randamentul mecanic variază în consecință în limite mai mici, cel puțin pe unele porțiuni ale acestor caracteristici.

Din punctul de vedere al variației reduse a randamentului mecanic de-a lungul unei caracteristici $p = g(V)$, funcționarea lagărelor circulare cu alunecare apare deci mai avantajoasă la temperaturi mai ridicate.

Concluziile de mai sus sînt confirmate de încercările experimentale arătate, pentru $Zn\,Al_4\,Cu_1$, în figura 2.

Se observă că la o pantă mai lină a curbei $p = g(V)$, în regimul de funcționare la o temperatură mai ridicată de 72,5°C (curba $p_{72,5°C}$), îi corespunde o variație în limite mai reduse a momentului de frecare (curba $M_{f72,5°C}$), deci și a randamentului mecanic.

Regimul termic optim al aliajului $Zn\,Al_4\,Cu_1$ se poate considera că este la temperatura 72,5°C, în intervalul de viteze de $V = 3{,}5—4{,}5$ m/s, la care corespunde o variație a presiunii medii de la $p = 50— 20$ kg/cm². Momentul de frecare variază în acest interval foarte puțin, fiind : $M_f = 2{,}35 - 2{,}15$ kgcm. Valoarea aceasta este în același timp și cea mai mică în regimurile de temperatură încercate (între 44° — 72,5°C).

Condițiile experimentale în care au fost obținute aceste rezultate sînt : diametrul fusului 36 mm ; alungirea lagărului $\lambda = 0{,}7$; jocul relativ $\psi = 1{,}25^0/_{00}$, uleiul tip 305 (STAS) la presiunea de 1,5 at și temperatura din baie de 22°C. Temperatura lagărului s-a măsurat în cuzinet, iar încercările s-au făcut cu mașina descrisă în [1]. Variația debitului de ulei în lungul curbelor $p = g(V)$ este arătată în figura 2.

La alegerea regimului de funcționare al lagărului este necesar ca în final să se țină seama de felul mașinii unde se folosește. Viscozitatea uleiului la temperaturi ridicate fiind mai redusă, consecințele unor gripări, datorite unor eventuale perturbări exterioare în funcționare, pot fi în disproporție cu avantajul obținut prin creșterea randamentului mecanic. La aparatele, la care frecarea în lagăre este de importanță primordială, un spor cît de mic al randamentului mecanic poate justifica însă alegerea regimurilor de funcționare la temperaturi mai mari. Alegerea regimului termic de funcționare a lagărului mai poate fi influențată de caracteristica de îmbătrînire a uleiului cu temperatura. Avantajul economic obținut prin alegerea unui regim de funcționare cu randament mecanic mai ridicat, ar putea fi redus printr-o sporire a consumului de lubrifianți, în cazul utilizării uleiurilor cu viață scurtă la temperaturi înalte.

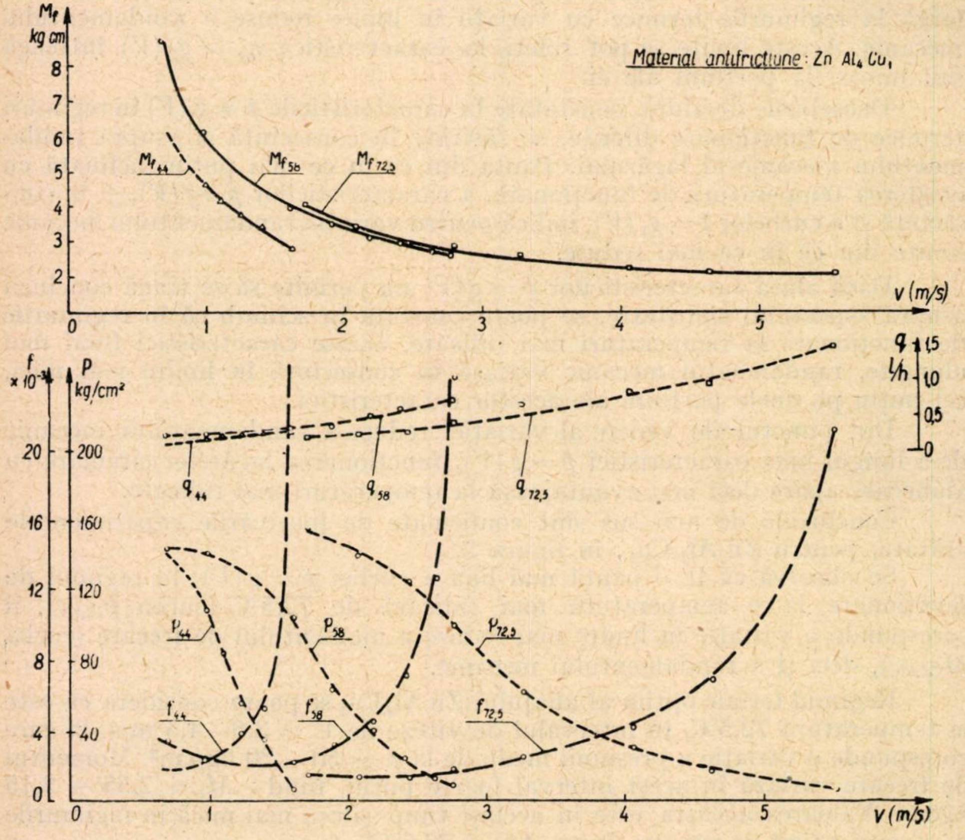


Fig. 2

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ТЕПЛОВОМ РЕЖИМЕ РАБОТЫ АНТИФРИКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА У КРУГЛЫХ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Функциональные характеристики $p = g(V)$ для режимов работы при разных температурах имеют различный вид. Исследуется оптимальная предельная температура работы, допускаемая при изготовлении подшип-

ника в том случае, когда конструктор пользуется свободой выбора теплового режима этого подшипника.

В качестве показателя для оценки оптимального теплового режима можно принять механический коэффициент полезного действия, зависящий от момента трения в подшипнике.

Вдоль характеристики $p = g(V)$ момент трения изменяется вместе с произведением pf, которое в зависимости от изменения p и f может или не может проходить через минимум, соответствующий максимуму механического к. п. д. Установлено, что для металлических антифрикционных материалов оптимальный механический к. п. д. получается для режимов работы при более высоких температурах. Однако при выборе таких режимов работы для подшипников необходимо также учесть характеристику старения масла с повышением температуры.

SUR LE MEILLEUR RÉGIME THERMIQUE DE FONCTIONNEMENT D'UN MATÉRIEL ANTIFRICTION, DANS LES PALIERS LISSES CIRCULAIRES

RÉSUMÉ

Les caractéristiques de fonctionnement $p = g(V)$, dans des régimes de travail sous différentes températures, présentent des allures variées. On étudie, dans ce travail, la température optimum de fonctionnement, qui peut être admise dans la construction d'un palier, lorsqu'on a la latitude de choisir le régime thermique de ce palier.

En tant que critère d'évaluation du meilleur régime thermique, on peut adopter le rendement mécanique, qui dépend du moment de frottement dans le palier.

Le long d'une caractéristique $p = g(V)$, le moment de frottement varie avec le produit pf qui, étant donné l'aspect de la variation de p et de f, peut passer ou ne pas passer par un minimum ; partant, le rendement mécanique peut passer ou ne pas passer par un maximum. On a constaté, pour les matériaux métalliques antifriction essayés, que le meilleur rendement mécanique est obtenu dans les régimes de fonctionnement à des températures plus élevées. Il est toutefois nécessaire, en choisissant de pareils régimes pour les paliers, de tenir également compte de la caractéristique de vieillissement de l'huile en fonction de la température.

BIBLIOGRAFIE

1. GH. VASILCA, P. FREUND, *Studii experimentale asupra unor materiale antifricţiune de înlocuire pentru lagărele de alunecare.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *3*, 773 (1956).
2. N. TIPEI, *Consideraţii asupra calculului lagărelor prin alunecare.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe tehnice şi chimice, **IV**, *3—4*, 297 (1952).
3. GH. VASILCA, *Studiul coeficientului de frecare într-un lagăr circular cu ajutorul curbelor* $p = g(V)$. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1*, 76 (1957).

CÎTEVA ASPECTE FUNDAMENTALE ALE PROCESELOR DE UZURĂ

DE

L. ROZEANU și O. PREOȚESCU

Deși uzura este atît de strîns legată de existența noastră, ca problemă pentru omul de știință ea reprezintă un capitol deficitar. Această situație se datorează dificultăților care se opun unei cercetări sistematice, dintre care cele mai importante sînt :

— marea complexitate a fenomenelor care intervin,
— lipsa unui criteriu general pentru exprimarea și evaluarea proceselor de uzură.

★

Pentru ocolirea primei dificultăți se poate considera că fenomenele care intervin în procesele de uzură, se pot încadra în trei clase fundamentale :

clasa fenomenelor fizice,
clasa fenomenelor mecanice și
clasa fenomenelor chimice.

Tipurile reprezentative de uzură pentru aceste trei clase de fenomene pot fi :

— uzura de aderență sau de contact,
— uzura de abraziune,
— uzura de coroziune.

Pentru ocolirea celei de-a doua dificultăți, în exprimarea și evaluarea procesului de uzură, se poate adopta un criteriu energetic

$$\eta_u = \frac{E_u}{E_t}, \qquad (1)$$

unde

η_u — randamentul energetic al procesului,
E_u — energia consumată în procesul de uzură respectiv pentru formarea noilor suprafețe,
E_t — energia totală primită de material care se poate exprima sub formă de căldură.

Conform definiției

$$E_u = \sigma S, \tag{2}$$

unde

σ — tensiunea superficială a suprafeței nou formate,
S — aria suprafeței respective.

În mod corespunzător

$$E_t = E_u + E_a = \sigma S + AQ, \tag{3}$$

unde

E_a — energia calorică corespunzătoare celorlalte procese,
A — echivalentul mecanic al căldurii,
Q — căldura degajată.

În aceste condiții ecuația (1) se poate scrie

$$\eta_u = \frac{\sigma S}{AQ + \sigma S} = \frac{1}{\frac{AQ}{\sigma S} + 1}. \tag{4}$$

Pentru motive de ordin practic se poate trece la forma

$$\eta_u = \frac{1}{\frac{\tilde{a}\, AQ}{\sigma \tilde{a} S} + 1} = \frac{1}{\tilde{a}\frac{A}{\sigma} \cdot \frac{Q}{V} + 1}, \tag{5}$$

unde

$\tilde{a}$ — un factor, avînd dimensiunea unei lungimi și care exprimă relația dintre volumul și suprafața particulelor de uzură

$$\tilde{a} = \frac{V}{S}.$$

Ecuația (5) conține trei termeni interesanți

$$\tilde{a}\,;\ \frac{A}{\sigma}\,;\ \frac{Q}{V}.$$

Din punct de vedere fizic $\tilde{a}$ este legat de severitatea procesului, deoarece un proces violent va da particule de uzură de dimensiuni mai mari, decît un proces blînd. La o cantitate dată de material, suprafața particulelor de uzură este cu atît mai mare cu cît dimensiunea particulelor este mai redusă. În consecință, $\tilde{a}$ va varia invers proporțional cu procesul de uzură.

Raportul $\frac{A}{\sigma}$ este constant pentru un sistem material dat, deoarece A este o constantă universală, iar σ este constant pentru un material dat.

Raportul $\frac{Q}{V}$ considerat independent, exprimă sub o formă oarecare relația dintre fenomenele termice și procesele distrugătoare, ceea ce se poate interpreta ca o exprimare a naturii intime a fenomenelor care se produc în cursul uzurii.

În lucrarea de față vom analiza cele trei tipuri fundamentale de uzură, în lumina informațiilor pe care ni le furnizează raportul $\frac{Q}{V}$.

Partea experimentală

Singura condiție pe care trebuia s-o îndeplinească aparatura experimentală adoptată, spre deosebire de cele cunoscute, era aceea ca toată energia furnizată sistemului material să se transforme în uzură sau căldură. Aceasta s-a realizat construind o instalație calorimetrică etalonată pentru toate procesele termice care ar putea erona rezultatele.

Uzura s-a măsurat prin pierderea de greutate a epruvetelor. De aci s-a dedus V.

Căldura produsă, Q, s-a măsurat prin metoda obișnuită a determinărilor calorimetrice.

Instalația calorimetrică folosită este reprezentată în schița simplificată din figura 1.

Fiecare încercare a fost repetată de mai multe ori. În tabela 1 s-au dat numai valorile medii pentru fiecare ansamblu de condiții.

Discuția rezultatelor

1. Se consideră în general că cel mai răspîndit mecanism producător de uzură este cel bazat pe sudarea și ruperea punților de sudură între asperitățile opuse, care vin în contact. Uneori, cu această ocazie se produc particule de uzură. Acest aspect a fost foarte amplu tratat de **Bowden** și colaboratorii săi [1] și nu există nici o îndoială în ceea ce privește realitatea unui astfel de mecanism.

Experiențele 1—6 inclusiv (fig. 2) arată că fenomenele termice sînt foarte puternice în comparație cu procesele distrugătoare, astfel că raportul $\frac{Q}{V}$ are o valoare relativ mare, de ordinul 10^8. Preponderența fenomenelor termice arată că mărind severitatea procesului se ajunge mai repede la limita posibilităților materialului de a disipa căldura produsă, decît la o uzură excesivă. Această concluzie se mai poate formula și sub forma că în cazul proceselor de contact pericolul mare îl prezintă nu uzura ci curgerea plastică sau topirea materialului. Sarcina face să crească cantitatea de material uzat, mai repede decît cantitatea de căldură generată ; aceasta face ca termenul $\frac{Q}{V}$ să scadă cu sarcina, în experienţele noastre pînă la

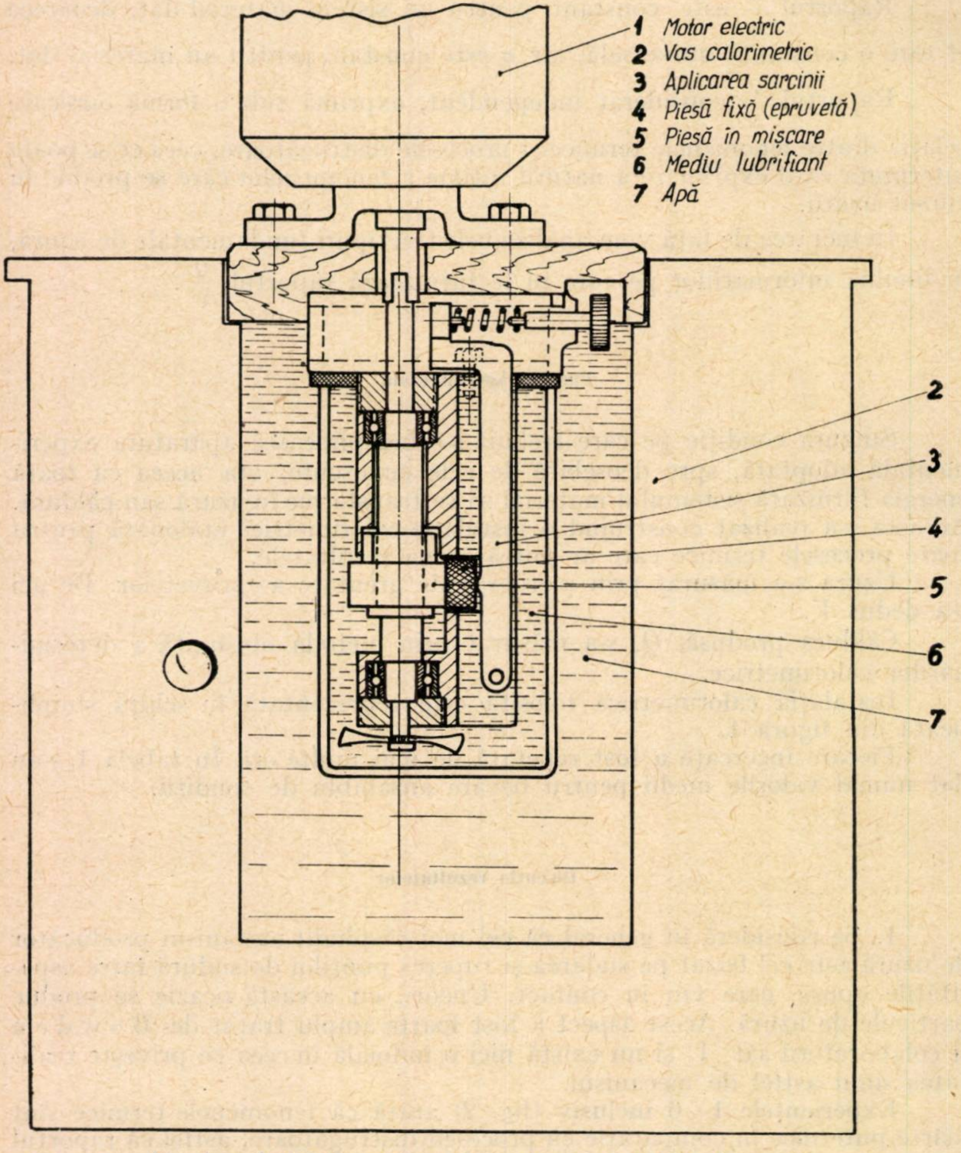

1 Motor electric
2 Vas calorimetric
3 Aplicarea sarcinii
4 Piesă fixă (epruvetă)
5 Piesă în mişcare
6 Mediu lubrifiant
7 Apă
2
3
4
5
6
7

Fig. 1. — Instalaţia pentru calorimetrarea proceselor de uzură.

Tabela 1

Nr.	Epruvete	Lubrifiant	Temp °C	Sarcina kg/cm²	ΔQ cal/min	ΔV cm³/min	$\frac{\Delta Q}{\Delta V}$	Obs.
1	sabot	Ulei mineral	20	22,5	1 400	$1{,}28 \times 10^{-5}$	$1{,}1 \times 10^{8}$	1
2	bronz +	curat (20 cSt		30,0	1 600	$1{,}80 \times 10^{-5}$	$0{,}9 \times 10^{8}$	
3	tambur	la 50°C)		37,5	2 050	$2{,}82 \times 10^{-5}$	$0{,}73 \times 10^{8}$	
4	oțel			45,0	2 600	$4{,}30 \times 10^{-5}$	$0{,}60 \times 10^{8}$	
5				52,5	3 150	$5{,}75 \times 10^{-5}$	$0{,}55 \times 10^{8}$	
6				60,0	3 500	$6{,}92 \times 10^{-5}$	$0{,}50 \times 10^{8}$	
7				60,0	3 500	$6{,}5 \times 10^{-5}$	$0{,}54 \times 10^{8}$	2
8			135	22,5	2 000	$1{,}28 \times 10^{-5}$	$1{,}56 \times 10^{8}$	
9	Oțel pe		21	9,0	218	$0{,}515 \times 10^{-5}$	$0{,}43 \times 10^{8}$	3
10	oțel			22,5	473	$2{,}35 \times 10^{-5}$	$0{,}20 \times 10^{8}$	4
11				30,0	2 540	$3{,}34 \times 10^{-5}$	$0{,}76 \times 10^{8}$	
12	sabot	Același ulei	95	16,6	1 300	$1{,}22 \times 10^{-3}$	$1{,}065 \times 10^{6}$	
13	bronz +	+0,166 %	120	33,3	2 140	$2{,}56 \times 10^{-3}$	$0{,}836 \times 10^{6}$	
14	tambur oțel	emeri	130	50,0	2 820	$4{,}36 \times 10^{-3}$	$0{,}650 \times 10^{6}$	
15			135	33,3	2 830	$6{,}44 \times 10^{-4}$	$4{,}4 \times 10^{6}$	
16			146	50,0	3 460	$6{,}80 \times 10^{-4}$	$5{,}1 \times 10^{6}$	
17		Același ulei	55	22,5	1 700	$0{,}64 \times 10^{-4}$	$2{,}66 \times 10^{7}$	
18		+0,1 %		30,0	2 320	$1{,}15 \times 10^{-4}$	$2{,}02 \times 10^{7}$	
19		H_3PO_4		37,5	2 530	$0{,}73 \times 10^{-4}$	$3{,}46 \times 10^{7}$	
20				45,0	2 780	$0{,}78 \times 10^{-4}$	$3{,}56 \times 10^{7}$	
21				52,5	2 830	$0{,}67 \times 10^{-4}$	$4{,}25 \times 10^{7}$	
22				60,0	2 910	$0{,}62 \times 10^{-4}$	$4{,}76 \times 10^{7}$	
23		Același ulei	35	22,5	1 560	$0{,}385 \times 10^{-4}$	$4{,}1 \times 10^{7}$	
24		+0,5 % adi-		30,0	1 700	$0{,}605 \times 10^{-4}$	$2{,}8 \times 10^{7}$	
25		tiv antigri-		37,5	1 850	$0{,}935 \times 10^{-4}$	$1{,}97 \times 10^{7}$	
26		pant		45,0	2 430	$1{,}97 \times 10^{-4}$	$1{,}23 \times 10^{7}$	
27				52,5	2 710	$1{,}47 \times 10^{-4}$	$1{,}84 \times 10^{7}$	
28				60,0	2 900	$0{,}64 \times 10^{-4}$	$4{,}53 \times 10^{7}$	
29		Același ulei	50	22,5	450	$0{,}128 \times 10^{-5}$	$3{,}5 \times 10^{8}$	
30		+0,2 %	60		500	$0{,}513 \times 10^{-5}$	$0{,}98 \times 10^{8}$	
31		H_3PO_4	70		2 200	$0{,}77 \times 10^{-5}$	$2{,}86 \times 10^{8}$	
32			90		2 300	$0{,}744 \times 10^{-5}$	$3{,}1 \times 10^{8}$	
33			110		2 800	$0{,}833 \times 10^{-5}$	$3{,}36 \times 10^{8}$	
34			130		2 500	$1{,}92 \times 10^{-5}$	$1{,}3 \times 10^{8}$	
35		Același ulei	37,0	22,5	280	$0{,}1 \times 10^{-7}$	$\approx 10^{10}$	
36		+0,2 %	39,0	45,0	490	$0{,}1 \times 10^{-7}$	$\approx 10^{10}$	
37			49,0	60,0	520	$0{,}1 \times 10^{-7}$	$\approx 10^{10}$	
38		+0,5 %	43,0	60,0	520	$0{,}1 \times 10^{-7}$	10^{10}	
39		+1,0 %	31,0		870	$0{,}256 \times 10^{-6}$	$3{,}4 \times 10^{9}$	
40		acid palmitic	58		660	$0{,}128 \times 10^{-6}$	$5{,}15 \times 10^{9}$	
			73		700	$1{,}15 \times 10^{-6}$	$0{,}61 \times 10^{9}$	

1) Funcționare continuă.
2) Funcționare întreruptă cu 24 opriri.
3) Gripat după 12′.
4) Gripat după 1′ 55″.

Viteza relativă ~ 170 cm/sec.

mai puţin de jumătate. Dat fiind că termenul $\frac{Q}{V}$ exprimă natura profundă a procesului, înseamnă că sarcina face să se modifice calitativ, fenomenele care intervin.

Pentru a explica aceasta va trebui să cercetăm mai îndeaproape mecanismul prin care vin în contact asperităţile de pe suprafeţe opuse. În acest scop ne servim de cîteva ipoteze şi determinări cunoscute :

— Suprafeţele lubrifiate suportă sarcinile nu numai prin vîrfurile unui număr limitat de asperităţi ci şi prin lichidul sechestrat în văile acestor asperităţi [2].

— Aria reală de contact între suprafeţe rectificate fin reprezintă aproximativ 1/10 000 din aria aparentă ; după rodaj aria creşte şi rămîne constantă circa la 1/200 [3].

— Pentru a trece de la o arie reală de contact de 1/10 000 din cea aparentă la una de 1/200, este necesar un rodaj adînc de $\approx 0{,}5\ \mu$ [2], socotind că înălţimea medie a asperităţilor este iniţial de $\approx 1{,}75\ \mu$.

Realizarea contactului între asperităţile de pe suprafeţe opuse se face în condiţiile reprezentate în figura 3.

Se vede din figură, că asperităţile avînd abaterea x faţă de înălţimea medie, se vor întîlni cu toate asperităţile a căror abatere faţă de înălţimea medie se află în intervalul $(y_M, y_N - \zeta)$:

$$n_x = \varphi(x) \int_{y_M-\zeta}^{y_M} \varphi(y)\, dy. \tag{6}$$

Considerînd că distribuţia abaterilor este normală,

$$n_x = \varphi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_M-\zeta}^{y_M} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \varphi(x) \frac{\Phi(y_M) - \Phi(y_M - \zeta)}{2} \tag{7}$$

toate asperităţile x, pînă la adîncimea de interpătrundere z, deci în intervalul $(x_M, x_M - z)$ se vor întîlni cu asperităţile y din intervalul $(y_M, y_M - \zeta)$, adică

$$n_z = \int_{x_M-z}^{x_M} \varphi(x)\, dx\, \frac{\Phi(y_M) - \Phi(y_M - \zeta)}{2}. \tag{8}$$

Deoarece y_M este dat şi constant,

$$n_z = \frac{\Phi(y_M)}{2} \int_{x_M-z}^{x_M} \varphi(x)\, dx - \frac{1}{2} \int_{x_M-z}^{x_M} \varphi(x)\, \Phi(y_M - \zeta)\, dx. \tag{9}$$

Din figură se mai vede că

$$\zeta = x + z - x_M, \tag{10}$$

astfel că

$$\Phi(y_M - \zeta) = \Phi(y_M + x_M - z - x) ; \tag{11}$$

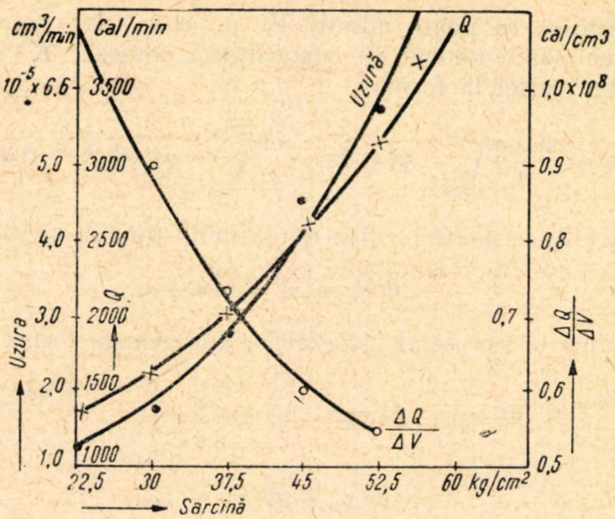


Fig. 2. — Variaţia uzurii, căldurii şi raportului $\frac{Q}{V}$ în funcţie de sarcină la uzura de contact.

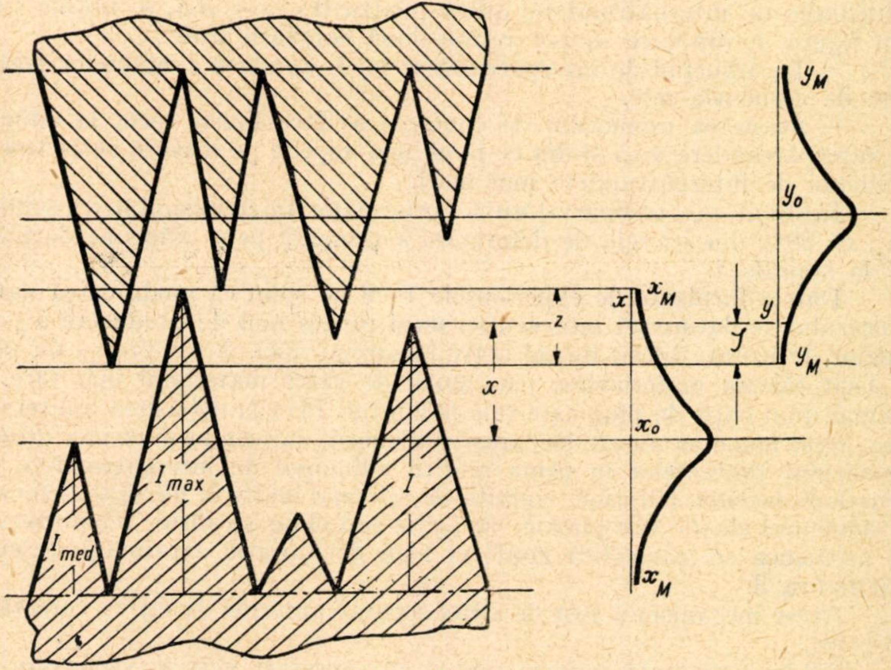

y_M
y_o
x
x_M
z
y
$\mathcal{J}$
y_M
x
x_o
I_{max}
I
I_{med}
x_M

Fig. 3. — Prezentarea condiţiilor de contact în cadrul unei distribuţii normale a înălţimii asperităţilor.

pentru simplificare se poate admite că $y_M = x_M$, iar $(y_M + x_M - z)$ din ecuația (11) se poate înlocui cu o constantă oarecare K.

Se ajunge astfel la forma

$$n_z = \frac{\Phi(x_M)}{2}\int_{x_M-z}^{x_M} \varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{x_M-z}^{x_M} \varphi(x)\Phi(k-x)\,dx. \tag{12}$$

Ecuația (12) se poate rezolva aproximînd funcția cu o dreaptă, adică

$$\Phi\,(k - x) = mx + n. \tag{13}$$

Făcînd înlocuirea și rezolvînd integralele, ajungem la forma finală

$$\begin{aligned} n_z = \frac{\Phi(x_M)}{2}[\Phi(x_M) - \Phi(x_M - z)] + \frac{m}{2\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(x_M - z)^2}{2}}\right] - \\ - \frac{n}{4}[\Phi(x_M - \Phi(x_M - z)]. \end{aligned} \tag{14}$$

Pentru cazul dat, $x_M = y_M = 1{,}75\,\mu$, și pentru $z = 0{,}5\,\mu$ se obține $n_z = 0{,}2\%$, ceea ce arată numărul infim de contacte care se produc în această situație. Dacă se calculează numărul de contacte pentru toate adîncimile de interpătrundere, adică pentru $0 < z < 3{,}5$, se obține curba din figura 4, din care se pot reține două concluzii utile :

— La adîncimi de interpătrundere mici, numărul contactelor posibile este de asemenea mic.

— Creșterea numărului de contacte se face foarte încet la adîncimi de interpătrundere mici și din ce în ce mai repede pe măsură ce se trece la adîncimi de interpătrundere mai mari.

În sfîrșit, mai trebuie reținută o informație din domeniul fizicii solidelor [4], că 98% din energia de deformare acționează pe o adîncime de $\approx 30\,\mu$ de la suprafață.

Datele furnizate de experiențele 1—6 ne spun că modificarea naturii procesului se datorează intervenției unui proces nou de producere a particulelor de uzură, diferit de cel activ la sarcini mici. Acest proces nu poate fi decît tăierea materialului mai moale de către materialul mai tare, întocmai unui cuțit de plug care taie pămîntul. Pînă la depășirea limitei elastice, acest fenomen nu are loc, creșterea uzurii, datorindu-se efectiv creșterii numărului contactelor în urma măririi adîncimii de interpătrundere provocată de sarcină. Ulterior, asperitățile cele mai înalte în loc să se deformeze în domeniul elastic sau plastic, se sgîrie sau chiar se sfîșie, fenomene care de asemenea se intensifică conform legii de variație exprimată de curba din figura 3.

Acest mecanism a fost de altfel sugerat anterior de cîțiva cercetători [5], [6].

Căldura generată variază numai cu suprafața activă (veche sau nou formată), cu condiția ca solicitarea să fie destul de puternică pentru a cuprinde întreaga adîncime de $30\,\mu$.

Din această analiză mai rezultă că la sarcini moderate (în domeniul deformărilor elastice) nu prezintă mare importanță dacă funcționarea este continuă sau intermitentă. Cu alte cuvinte, uzura mare care se constată la mecanismele cu porniri și opriri frecvente, nu este de tip fizic (aderentă). Această concluzie s-a dovedit justă, după cum arată experiența numărul 7. De asemenea rezultă că temperatura nu poate nici intensifica nici reduce uzura fizică, ci poate doar crea condiții mai favorabile pentru trecerea de la un tip de uzură la altul prin modificarea proprietăților fizice ale materialului. Experiența 8, executată la o temperatură cu aproape 120°C mai ridicată decît cele anterioare, arată că s-a produs totuși o mai intensă generare a căldurii. Rezultă de aci, că temperatura mai ridicată a determinat intrarea materialului în domeniul de deformări plastice în condiții în care la temperaturi joase, fenomenele s-ar menține în domeniul elastic. Aceasta ar conduce la concluzia că, un material cu proprietăți elastice superioare, adică un material dur, se va comporta mai bine din acest punct de vedere. Acesta a fost unul din motivele efectuării experiențelor 9,10 și 11 executate cu oțel pe oțel. S-a constatat că într-adevăr atît uzura produsă cît mai ales căldura generată în proces, se reduc apreciabil și că fenomenele rămîn de tip fizic. Spre deosebire de cazurile anterioare, suprafețele de frecare au gripat la sarcini foarte mici, deși epruvetele au fost în permanență cufundate în ulei.

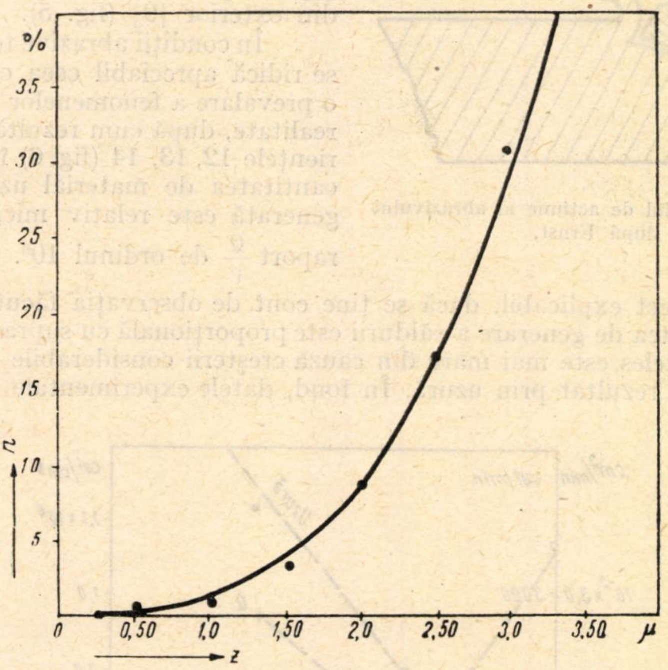


Fig. 4. — Variația numărului punctelor de contact pentru diferite adîncimi de interpătrundere.

Gripările observate aduc o preţioasă confirmare ipotezelor lui Merchant [7] bazate pe teoriile lui Hume-Rothery [8], referitoare la formarea aliajelor interstiţiale şi substituţionale.

2. Uzura mecanică este produsă prin acţiuni obişnuite de aşchiere sau tăiere (ca un cuţit pe plumb) la care participă fie asperităţile dure din masa eterogenă a materialului [5], [6], fie particule abrazive provenite din exterior [9] (fig. 5).

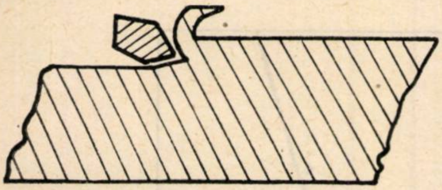


Fig. 5. — Modul de acţiune al abrazivului după Ernst.

În condiţii abrazive temperatura se ridică apreciabil ceea ce ar indica o prevalare a fenomenelor termice. În realitate, după cum rezultă din experienţele 12, 13, 14 (fig. 6) în raport cu cantitatea de material uzat, căldura generată este relativ mică, dînd un raport $\frac{Q}{V}$ de ordinul 10^6. Acest fapt devine perfect explicabil, dacă se ţine cont de observaţia făcută anterior, că intensitatea de generare a căldurii este proporţională cu suprafaţa activă, care bineînţeles este mai mare din cauza creşterii considerabile a cantităţii de material rezultat prin uzură. În fond, datele experimentale arată că în valoare absolută, intensitatea de generare a căldurii este de acelaşi ordin de mărime ca la uzura de contact, în timp ce intesitatea uzurii a crescut de aproximativ 100 ori.

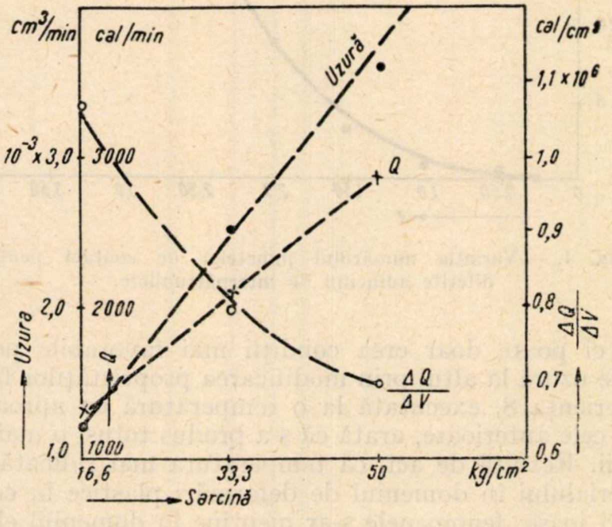


Fig. 6. — Variaţia uzurii, căldurii şi raportului $\frac{Q}{V}$ în funcţie de sarcină, la uzura mecanică.

Tratînd uzura mecanică ca un proces comun de așchiere putem deduce ușor că sarcina nu face altceva decît să mărească grosimea așchiei, deci cantitatea de material desprins prin uzură. Prin aceasta, crește mai mult volumul particulelor decît suprafața lor, așa că valoarea raportului $\frac{Q}{V}$ trebuie să scadă, ceea ce se observă în experiențele făcute.

Acțiunea particulelor abrazive are însă un caracter trecător, deoarece prin frecare colțurile sau muchiile lor tăietoare se tešesc și în general regimul la care sînt supuse determină sfărîmarea lor.

Faptul iese în evidență atunci cînd se lasă instalația să funcționeze un timp mai îndelungat și se înregistrează la momente succesive uzura rezultată și căldura generată în unitatea de timp. Cu trecerea timpului se constată că intensitatea fenomenelor termice crește, iar intensitatea uzurii scade. Raportul $\frac{Q}{V}$ crește de cîteva ori, indicînd modificarea naturii proceselor de uzură. Pe baza celor arătate, se poate deduce că peste procesul de uzură metalică se suprapune în proporție din ce în ce mai mare uzura de contact care intervine între asperitățile mai înalte, decît particulele abrazive măcinate. Este ușor de întrevăzut, că la limită se ajunge la un regim de uzură numai de contact, raportul $\frac{Q}{V}$ tinzînd către valoarea caracteristică de 10^8. Aceste observații sînt ilustrate de datele furnizate de experiențele 15 și 16.

3. Uzura chimică prezintă oarecare dificultăți de tratare datorită domeniului foarte larg pe care-l acoperă.

Ca formă specifică de uzură chimică, vom considera pe cea de intensitate obișnuită, care ar putea fi provocată de exemplu de un ulei lubrifiant foarte alterat, respectiv cu aciditate ajungînd pînă la un mg KOH/g ulei. Legile care controlează reacțiile chimice sînt bine cunoscute și privesc în special concentrația agentului agresiv, temperatura ambiantă și energia de activare, așa cum rezultă din relația clasică propusă de Arrhenius. Experiențele 17—20 (fig. 7) arată că intensitatea fenomenelor termice este de același ordin de mărime ca în cazul uzurii de contact, iar uzura este ceva mai mare. Aceasta aduce raportul $\frac{Q}{V}$ la o valoare de aproximativ 10^7, dar mai apropiată de uzura de contact decît de cea abrazivă.

Datele experimentale arată că sarcina mărește intensitatea proceselor termice oarecum liniar. În acest timp, uzura are o variație destul de neobișnuită, cu un punct de maximum la o sarcină care depinde de agentul agresiv utilizat. Ar rezulta de aci, că la momentul inițial aria reală de contact fiind foarte mică, puținele asperități care se ciocnesc se încălzesc foarte puternic și declanșează reacția. De aci mai departe, un număr crescînd de asperități se angajează în ciocniri care determină o degajare de căldură suficientă pentru promovarea reacției și dizolvarea chimică a vîrfurilor asperităților. Prezența unei cantități limitate de reactant, face ca dependența de temperatură, să nu intervină, în sensul că inițial temperatura foarte ridicată face să se consume tot reactantul într-o fracțiune din timpul disponibil reacției, pentru ca ulterior, prin încetinirea reacției care se produce la temperatură din ce în ce mai joasă, consumarea reactantului să se facă într-o parte din ce în ce mai mare din timpul disponibil. Există un moment

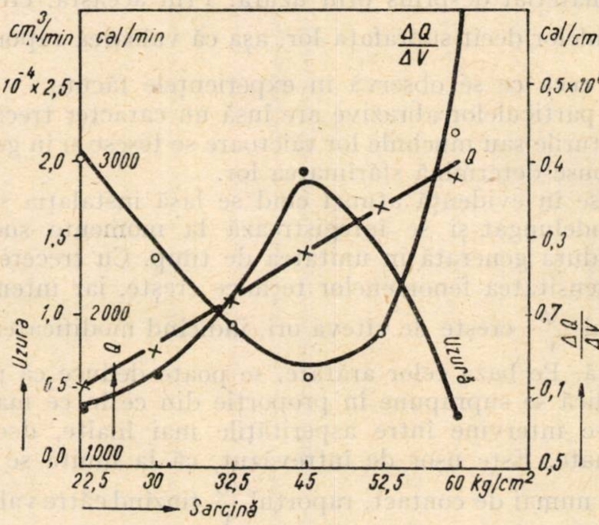


Fig. 7. — Variaţia uzurii, căldurii şi raportului $\frac{Q}{V}$ în funcţie de sarcină, la uzura chimică.

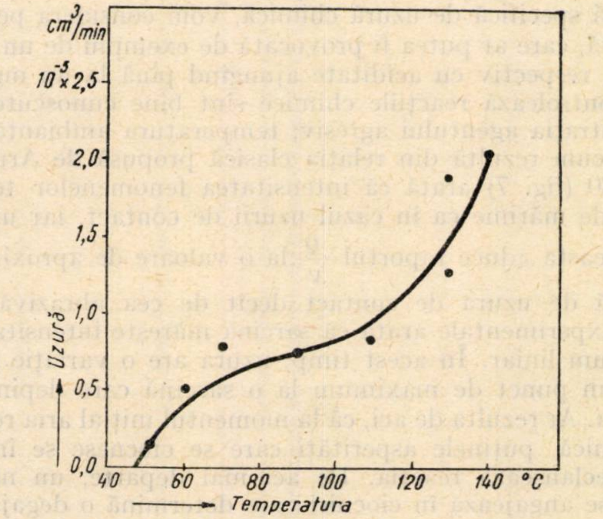


Fig. 8. — Variaţia uzurii chimice funcţie de temperatură, la sarcină constantă.

cînd, prin repartizarea sarcinilor pe o suprafaţă reală de contact mai mare, cantitatea de reactant se consumă în întregime în exact timpul disponibil.

Acesta este punctul unde intensitatea uzurii atinge valoarea maximă. După aceasta, coborînd mai mult temperatura, ceea ce inevitabil se întîmplă prin mărirea ariei reale de contact, în timpul disponibil pentru reacție se consumă o cantitate din ce în ce mai mică de agent chimic, ajungînd eventual la zero. Aceasta corespunde părții descendente a curbei care poate ajunge practic la zero.

Variația raportului $\frac{Q}{V}$ va fi comandată în mod net de variația numitorului, iar valoarea acestui raport este probabil că poate varia într-un interval considerabil.

S-a afirmat că aditivii antigripanți își datorează eficacitatea reacției chimice produse la locul amenințat. Experiențele 23—28 confirmă această ipoteză, arătînd totodată, că există condiții ușor previzibile în care această protecție poate fi intensificată.

La sarcină egală, temperatura trebuie să influențeze puternic procesul de uzură, ceea ce este dovedit de experiențele 29—34. Alura curbei de variație (fig. 8) arată o bună corespondență cu legea exponențială a lui Arrhenius.

Experiențele 35—40 prezintă un caz limită, dar cu toate acestea un caz care se încadrează sigur în clasa proceselor specifice pentru uzura chimică ; este vorba de protecția onctuoasă.

Ca agent activ s-a ales acidul palmitic, care s-a adăugat în ulei în proporție de 0,2—1%.

Datele experimentale arată că atît căldura generată cît și uzura produsă sînt foarte mici. Raportul $\frac{Q}{V}$ atinge valori considerabile ajungînd la 10^{10}.

Valorile foarte mici ale uzurii din aceste condiții nu prezintă suficiente garanții de siguranță, de aceea nu vor fi analizate din punct de vedere cantitativ. Se poate totuși arăta că, din punct de vedere calitativ, concentrația agentului activ și temperatura sistemului favorizează reacția, ameliorînd comportarea. Dincolo de o anumită temperatură, cuprinsă pentru acidul palmitic între 60 și 70°C, uzura crește de aproape 10 ori, probabil în urma desorbției peliculei onctuoase adsorbite. Dealtfel, valoarea lui $\frac{Q}{V}$ la 73°C este $0{,}61 \times 10^8$, caracteristică pentru procesul de contact, descris anterior.

4. Uzura de oboseală. Cu ocazia experiențelor descrise s-a făcut o observație care, pentru moment, nu poate fi prezentată decît sub aspectul ei calitativ. Fiecare tip de uzură produce particule de uzură care poartă oarecum amprenta procesului care le-a generat. Paralel cu aceste particule de forme și dimensiuni caracteristice, se produc în cantități variabile particule de uzură de dimensiuni foarte mici și relativ regulate, ajungînd cam la maximum 1 μ în diametru. Aceste particule par să se datoreze unui proces mai puțin cercetat, menționat în literatură sub denumirea de oboseală superficială sau dezintegrare superficială.

Explicația acestui proces pare a fi următoarea : după cum se știe din metalurgia fizică, energia de deformare superficială produce modificări de structură pe o adîncime limitată la cîțiva zeci de microni. Vizibil, aceste modificări se concretizează în ecruisarea superficială a materialului, iar din punct de vedere fizic, se concretizează în saturarea suprafeţei cu ultimile defecte care se pot produce în material, anume goluri sau crăpături microscopice. Acestea se află răspîndite în zona superficială, în toate direcţiile, la distanţe care nu depăşesc 1 μ. Lungimea lor este de aproximativ 1 μ, iar lăţimea de cîteva diametre atomice [10]. Situaţia poate fi reprezentată prin schiţa din figura 9. Rezultă de aci, că la o adîncime de 1 micron de la suprafaţă, în orice punct al acesteia, prin urmare şi la vîrful asperităţilor se va afla un astfel de defect. Este uşor de înţeles că forţa de forfecare într-un plan care cuprinde în cea mai mare parte un gol este considerabil mai mică, decît forţa de forfecare în cazul cînd planul ar traversa un mediu solid continuu. Se poate trage deci concluzia că o forţă cu o componentă tangenţială cît de mică va putea să reteze un astfel de vîrf, procesul continuînd printr-un mecanism uşor de imaginat.

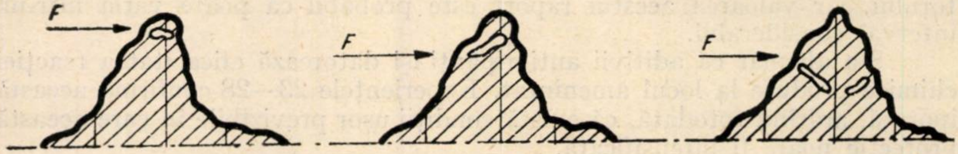


Fig. 9. — Defecte în zona superficială la un material ecruisat la maximum.

De fapt, noi am putut reproduce acest tip de uzură supunînd încercării două epruvete ale căror suprafeţe fuseseră în prealabil obosite sub o sarcină rapid pulsatoare. Figura 10 *a*, arată disproporţia dimensională între particulele de uzură abrazivă şi particulele de oboseală, iar figura 10 *b* arată o mulţime de particule de oboseală.

CONCLUZII

În lucrarea de faţă s-a căutat să se prezinte două aspecte fundamentale ale uzurii suprafeţelor lubrifiate :

— posibilitatea exprimării, diferenţierii şi evaluării proceselor de uzură printr-un criteriu ştiinţific cu caracter general, şi

— posibilitatea explicării mecanismului fizic care intervine în fiecare tip de uzură.

Criteriul adoptat este randamentul energetic al procesului de uzură η_u a cărui expresie este

$$\eta_u = \frac{1}{\tilde{a}\,\frac{A}{\sigma}\,\frac{Q}{V} + 1}$$

şi care prezintă semnificaţie fizică, deoarece cuprinde un termen care exprimă violenţa procesului de uzură ($\tilde{a}$), cuprinde un termen care exprimă natura

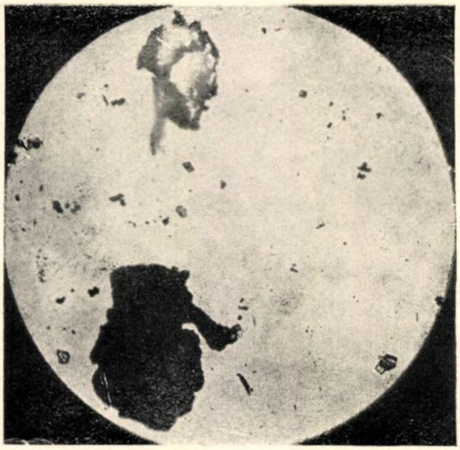


Fig. 10 *a*. — Disproporția dimensională între particulele de uzură abrazivă și particulele de oboseală.

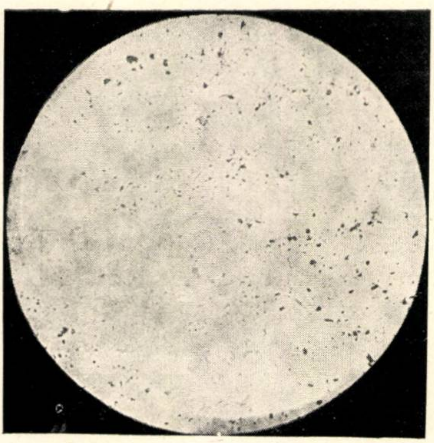


Fig. 10 *b*. — Particule de oboseală.

materialului (σ) și cuprinde un termen care exprimă natura procesului fizic care produce uzura $\left(\frac{Q}{V}\right)$.

În cuprinsul lucrării s-a cercetat numai termenul $\frac{Q}{V}$. Interpretarea cantitativă a acestui termen a condus la diferențierea proceselor uzuale de uzură după cum urmează :

Tipul uzurii	*Valoarea lui* $\frac{Q}{V}$
— de contact	10^8
— mecanică	10^6
— chimică	10^7

Pentru cazuri particulare, valorile lui $\frac{Q}{V}$ pot diferi apreciabil, dar conform unor legi relativ simple care pot fi comod folosite.

Din punct de vedere practic s-au impus cîteva concluzii deosebit de interesante. Astfel :

— mașinile cunoscute, folosite pentru a determina proprietățile de uzură ale materialelor (Timken, Falex, Zaițev, Wieland, S. A. E. etc.) se ocupă de un singur tip de uzură, uzura de contact care — după cum s-a arătat — nu este cel care ridică principalele probleme în practică. O instalație calorimetrică în care să se poată realiza toate tipurile de uzură pare mult mai rațională. De asemenea, exprimarea comportării la uzură, trebuie să fie mai complexă pentru a cuprinde toate cele trei tipuri fundamentale de uzură.

— Fiecare tip de uzură este favorizat de anumite condiții locale ; aceste condiții (temperatura, viteza lichidului, jocul radial etc.) variază de la un punct la altul al suprafețelor de frecare. Ca urmare vor exista zone unde condițiile favorizează uzura chimică, altele care favorizează uzura de contact ș.a.m.d. Aceste zone, se știe din teoria lubrificației, nu se situează pe direcțiile axelor de simetrie, adoptate de obicei ca direcții pentru măsurători. Măsurătorile făcute în prezent nu pot fi semnificative deoarece nu coincid cu cele care ar rezulta în direcțiile de uzură maximă. Aceasta implică modificarea tehnicii măsurătorilor pentru a ține cont de informațiile furnizate de teorie.

— Ca o reciprocă a observației precedente, cunoscînd direcția de uzură maximă și condițiile care au prevalat în acea direcție, se poate deduce mecanismul prin care s-a produs uzura la ansamblul respectiv.

— Se știe că proprietățile de onctuozitate nu au putut fi exprimate în buletinele de analiză deoarece a lipsit un criteriu de caracterizare. Valoarea raportului $\frac{Q}{V}$ în condiții standardizate constituie un astfel de criteriu satisfăcător.

Primită la redacție la 15 octombrie 1957.

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ СТОРОНЫ ВОПРОСА ПРОЦЕССОВ ИЗНОСА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматриваются два основных момента исследования процессов износа: возможность выражения, дифференциации и оценки процессов износа при помощи общего научно обоснованного критерия и возможность уточнения явлений, имеющих место в этих процессах.

Показано, что сущность этих явлений выражается отношением Q/V, различным для различных типов износа.

На основании полученных результатов отмечаются недостатки некоторых общепринятых условных методов и показаны некоторые возможные применения.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Установка для калориметрирования процессов износа.

Рис. 2. — Изменение износа, теплоты и отношения Q/V в зависимости от нагрузки при контактном износе.

Рис. 3. — Представление условий соприкосновения при нормальном распределении высоты неровностей.

Рис. 4. — Изменение числа точек соприкосновения для различных глубин взаимопроникновения.

Рис. 5. — Способ действия аброзива по Эрнсту.

Рис. 6. — Изменение износа, теплоты и отношния Q/V в зависимости от нагрузки при механическом износе.

Рис. 7. — Изменение износа, теплоты и отношения Q/V в зависимости от нагрузки при химическом износе.

Рис. 8. — Зависимость химического износа от температуры при постоянной нагрузке.

Рис. 9. — Дефекты в поверхностной зоне у максимально наклепанного материала.

Рис. 10 *a*. — Несоразмерность между частицами аброзивного износа и частицами усталостного износа.

Рис. 10 *b*. — Частицы усталостного износа.

SOME BASIC ASPECTS OF WEAR PROCESSES

ABSTRACT

The present paper is treating two basic aspects concerning the wear studies: the possibility of expressing, differentiating and evaluating the wear processes with the aid of a general scientific criterion and the possibility of understanding the mechanism of these processes.

The nature of the phenomena involved is expressed by the fraction $\frac{Q}{V}$ which has different values for different types of wear.

In the light of the acquired knowledge, some of the common accepted procedures are discussed and new possible applications are indicated.

TEXT OF FIGURES

Fig. 1. — The experimental unit for the calorimetric study of wear processes.

Fig. 2. — Variation of wear, heat and $\frac{Q}{V}$ against load, in contact wear.

Fig. 3. — Geometrical conditions in contact phenomena for a normal (Gauss) disrtibution of asperity heights.

Fig. 4. — Variation of the number of contact points against the depth of interpenetration.

Fig. 5. — Representation of the abrasive action (following Ernst).

Fig. 6. — Variation of wear, heat and $\frac{Q}{V}$ against load, in mechanical wear.

Fig. 7. — Variation of wear, heat and $\frac{Q}{V}$ against load, in chemical wear.

Fig. 8. — Variation of chemical wear against temperature, at a constant load.

Fig. 9. — Defects in the superficial layer of a material at the maximum level of work hardening.

Fig. 10. — Wear particles produced by a fatigue mechanism, compared with other wear particles (*a*) and selected ones (*b*).

BIBLIOGRAFIE

1. F. P. BOWDEN, D. TABOR, *The Friction and Lubrication of Solids.* Oxford University Press (1954).
2. L. ROZEANU, O. PREOTESCU, *Considerații asupra uzurii ansamblurilor de frecare în perioada de rodaj.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1* (1957).
3. F. P. BOWDEN, D. TABOR, *The Area of Contact between Sliding and between Moving Surfaces.* Proc. Roy. Soc., London., **159**, A., 391 (1939).
4. A. J. W. MOORE, *Comments on the Energy of Deformation during Sliding,* Proc. Roy. Soc. London, **212** (1954).
5. E. I. FELDSTEIN, *Despre problema mecanismului uzurii sculelor de așchiere la prelucrarea oțelurilor.* Bul. Constr. de mașini *3,* 69 (1953).
6. I. MING-FENG, *Wear and transfer of Metals.* Journ. of Appl. Phys., **23**, *9*, 1011—1019 (1952).
7. M. E. MERCHANT, *Mechanism of Static Friction.* Journ. of Appl. Phys., *11* (1950).
8. HUME-ROTHERY, *The Structure of Metals and Alloys.* The Inst. of Metals, Grosvenor Gardens, London S. W., 137 (1950).
9. C. A. GLADMAN, Citat în *Quelques perfectionnements étrangères sur le fini des surfaces.* Microthech., **IX**, *5*, 242 (1955).
10. F. SEITZ, *The Physic of Metals.* McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, 330 (1943).

TEHNICA MĂSURĂTORILOR

CANAL „FIX“ PENTRU ÎNREGISTRARE-REDARE PE SUPORT MAGNETIC A FENOMENELOR CU VARIAȚII LENTE

DE

DAN PAVELESCU și TH. PANTELIMON

În lucrarea noastră anterioară [11], a fost prezentată, ca prim studiu al acestei probleme, o metodă de înregistrare pe suport magnetic (bandă) a mărimilor mecanice cu variații ,,lente”. Cu această ocazie s-a făcut și o trecere în revistă atît a stadiului actual a înregistrărilor magnetice, a domeniilor de utilizare, cît și a avantagiilor ce decurg prin aplicarea acestei metode, prin care se urmărește înlocuirea în cele mai multe cazuri a înregistrării pe suport foto-sensibil (peliculă sau hîrtie), aceasta fiind în prezent metoda clasică curent utilizată.

Privind comparativ înregistrarea magnetică față de cea fotografică, rezultă imediat următoarele avantagii principale :

a) Eliminarea dificultăților legate de developarea filmului foto-sensibil la locul măsurătorilor, sau chiar numai prin developarea în general a filmelor experimentale de ,,lung metraj”.

b) Posibilitatea vizualizării fenomenului înregistrat, concomitent cu înregistrarea.

c) Posibilitatea de înregistrare a unui fenomen complex cu variații atît în banda infra joasă (0—0,1 Hz) cît și în banda frecvențelor joase.

e) Un cost mult mai coborît față de cel al înregistrărilor cu bandă foto, atît prin faptul că suportul magnetic se pretează la ștergeri și reutilizări repetate, cît și prin aceea că cercetătorul își poate alege comod pentru fotografiere, numai porțiunea care îl interesează.

În ceea ce privește domeniul de aplicare al acestei metode, el este destul de vast, cuprinzînd toate fenomenele de naturi diferite (mecanice, electrice etc.), ce pot fi traduse în mărimi electrice cu o variație oarecare (inclusiv cea infrajoasă).

În mod special insistăm asupra faptului că în mecanica aplicată, prin înregistrarea pe suport magnetic, pot fi simplificate mult măsurătorile ce se fac pentru determinarea şi studierea variaţiei diferitelor mărimi mecanice. Exemplificăm următoarele cercetări, la care în general fenomenele studiate variază lent cu fundamentale de la 0—20 Hz :

— Studiile asupra parametrilor cinematici şi dinamici ai mecanismelor şi organelor de maşini (0—5 Hz) ;

— Vibraţiile lente întîlnite în studiile clădirilor şi cadrelor supuse acţiunilor seismice (0—10 Hz) ;

— Vibraţiile fundamentale ce apar la podurile de cale ferată cu deschidere pînă la 120 m, sau pe corpul navelor metalice (pînă la 10 Hz) ;

— Variaţiile eforturilor în lagăre, în organele maşinilor şi vehiculelor de transport, maşinilor de foraj, pe aripile şi corpul avioanelor în zbor (0—20 Hz) ;

— Studiul aprinderii la motoarele cu explozie, variaţii de viteze în gaze (captor fiind termoanemometrul) etc.,

De asemenea în lucrarea anterioară [11] s-a prezentat şi o aparatură experimentală, la baza căreia stătea ideia posibilităţii înregistrării pe suport magnetic a unor mărimi mecanice cu variaţii lente (spectrul 0—20 Hz), prin traducerea lor prealabilă în mărimi electrice de aceeaşi frecvenţă şi apoi modularea în amplitudine a unei purtătoare etalon de 1000 Hz. La redarea de pe banda magnetică, după amplificare, demodulare, filtrare şi amplificare în curent continuu, s-a obţinut pe ecranul osciloscopului, fenomenul iniţial.

Aparatura prezentată deşi a dat satisfacţie, avea totuşi caracter experimental fiind ancombrantă (un şir de celule electronice cu intrări, ieşiri şi manipulări separate), sistemul necesitînd pentru control un oscilograf de laborator, piesă care este de asemenea ancombrantă.

Conectarea seriei de etaje conducea atît la posibilitatea introducerii influenţelor parazite, cît şi la erori de conectare sau manipulare. Oscilatorul (LC) folosit nu permitea comod varierea frecvenţei purtătoarei, iar ,,magnetofonul'' (a fost utilizat tipul R.F.T. ,,Rubin''), în afară de limitarea purtătoarei la valoarea standard de 1 kHz (ceea ce era sinonim cu plafonarea posibilităţilor de înregistrare), prin lipsa unui cap de redare separat, făcea imposibil controlul simultan al înregistrării.

Lucrarea de faţă [1]) constituie un pas înainte pentru soluţionarea problemei ce ne-am propus, marcînd totodată încheierea unei etape. Este vorba aici de a se obţine simplificarea aparaturii de înregistrare-redare, de asemenea tot în cazul unui singur canal şi a modulării în amplitudine ; s-a urmărit de asemenea atît lărgirea benzii frecvenţelor lente prin ridicarea purtătoarei, cît şi realizarea în final a unei aparaturi uşor de reprodus în serie şi manevrat.

Soluţia găsită rezultă în primul rînd din prezentarea schemei bloc a instalaţiei (fig. 1).

Se remarcă imediat că instalaţia propriu-zisă se reduce la trei corpuri principale, ce au gabarite şi greutăţi reduse :

I. Sistemul electronic propriu-zis de înregistrare-redare este prevăzut la înregistrare (*CI*) cu un lanţ simplificat de celule electronice : oscilator (*O*), modulator (*M*) și etaj de ieșire (*PA*), iar la redare (*CR*) cu amplificator audio (A_2), demodulator (*D*) și filtru (*F*).

---

[1]) Comunicată la Sesiunea generală ştiinţifică a Academiei R.P.R. în ziua de 27 septembrie 1957.

II. Amplificatorul simetric de curent continuu necesar atît pentru semnalele de joasă frecvență, cît și pentru cele de la baza de timp (*Bt*) ; sistemul este echipat cu un tub catodic (osciloscop *OS*) pentru controlul înregistrării.

III. Echipamentul cu bandă și capete magnetice (*Mg*) (denumit pentru cazul de față impropriu ,,magnetofon'').

Schema bloc a sistemului de înregistrare-redare pe un singur canal

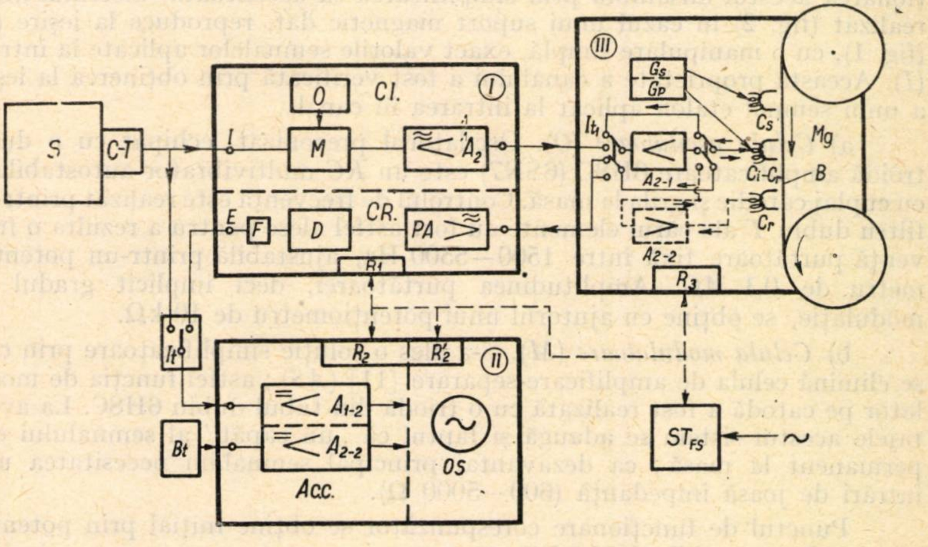


Fig. 1

Sursa de mărimi mecanice (*S*) cît și sistemul captor-traducător în mărimi electrice (*C-T*) sînt specifice domeniului în studiu. Cele trei ansamble (I, II, III), cu celule proprii de redresare (*R*), sînt alimentate din rețeaua de curent alternativ printr-un stabilizator magnetic ferosaturat (ST_{FS}). Întrerupătorul mecanic (*It*) înlesnește controlul semnalelor în diferite puncte ale circuitului electric, comutația înregistrării (It_i pe *Mg*) comandînd simultan și redarea pe (*OS*) a semnalelor înregistrate.

DESCRIEREA ANSAMBLELOR ȘI UNITĂȚILOR ANEXE

Aparatura electronică prezentată schematic mai sus, cu excepția ,,magnetofonului'' (modificat) și a stabilizatorului de rețea, a fost realizată în întregime în cadrul Institutului de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'' al Academiei R.P.R.

Ca o caracteristică generală, s-a urmărit de această dată eliminarea circuitelor cu selfuri atît la cuplaje, cît și la oscilator, pentru a se evita posibilitatea unor cuplaje parazite, a se obține un reglaj ușor etc.

I. SISTEMUL ELECTRONIC PROPRIU-ZIS DE ÎNREGISTRARE-REDARE (CANALUL ,,FIX")

În afară de simpla înglobare într-un corp comun a celulelor electronice menționate mai sus, indicate și în lucrarea precedentă [11], s-a căutat soluționarea acestui ansamblu prin simplificarea sa accentuată. Sistemul ,,fix" realizat (fig. 2) în cazul unui suport magnetic dat, reproduce la ieșire (*E*) (fig. 1), cu o manipulare simplă, exact valorile semnalelor aplicate la intrare (*I*). Această proprietate a canalului a fost verificată prin obținerea la ieșire a unui semnal etalon aplicat la intrarea în canal.

a) *Celula oscilatoare* (*O*). Oscilatorul preconizat, echipat cu o dublă troidă amplificatoare 6H8C (6SN7) este un *RC* multivibrator autostabilizat cu cuplaj catodic și grila la masă. Controlul de frecvență este realizat printr-un filtru dublu *T* ale cărui elemente au fost astfel alese pentru a rezulta o frecvență purtătoare fixă între 1500—5500 Hz, ajustabilă printr-un potențiometru de 0,1 MΩ. Amplitudinea purtătoarei, deci implicit gradul de modulație, se obține cu ajutorul unui potențiometru de 10 kΩ.

b) *Celula modulatoare* (*M*). S-a ales o soluție simplificatoare prin care se elimină celula de amplificare-separare [11] (*AS*) ; astfel funcția de modulator pe catodă a fost realizată cu o triodă din tubul dublu 6H8C. La avantajele acestui sistem se adaugă și faptul că ,,un capăt" al semnalului este permanent la masă ; ca dezavantaj principal semnalăm necesitatea unei intrări de joasă impedanță (600—5000 Ω).

Punctul de funcționare corespunzător se obține inițial prin potențiometrul *P*, ajustabil, de 10 kΩ.

c) *Celula amplificator audio* (A_2). Cea de-a doua triodă a tubului 6H8C s-a notat în amplificator audio cu ieșirea pe transformator, permițîndu-se în afară de adaptarea impedanțelor mici (150 Ω) și separarea cu un cap la masă.

Controlul amplitudinii la ieșire în vederea evitării ,,dopării" benzii, se obține prin potențiometrul de 1 MΩ.

d) *Celula preamplificatoare* (*PA*). La redare (ieșirea din ,,magnetofon"), s-a prevăzut o intrare de mare impedanță, potențiometrul P_5 de 1 MΩ, fiind al doilea organ de reglaj al ansamblului *I*. S-a ales o celulă amplificatoare pe rezistențe, echipată cu o pentodă amplificatoare de tensiune cu pantă fixă, 6ж8 (6 SJ7).

e) *Celula demodulatoare* (*D*). Pentru obținerea unei simple redresări a semnalului modula cules de pe bandă, și apoi amplificat, s-a folosit o dublă diodă 6 x 6 (6H6).

f) *Filtrul* (*F*). S-a utilizat un filtru ,,trece jos" cu elementele astfel dimensionate (F_1 sau F_2) pentru a putea opri purtătoarea (1500 sau 5500 Hz).

Schema de principiu a sistemului electronic „fix“ propriu-zis de înregistrare-redare

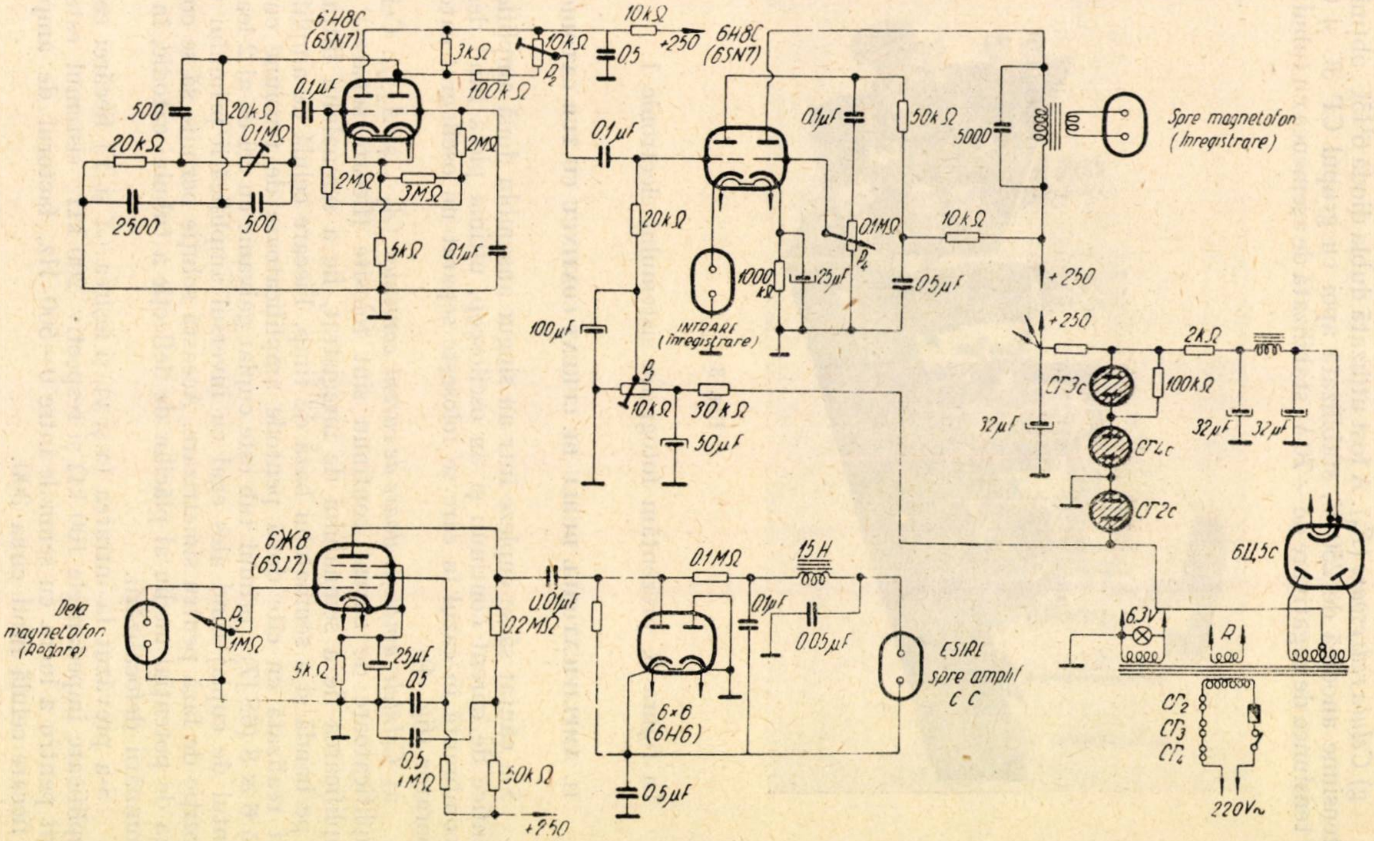

6H8C (6SN7)
6H8C (6SN7)
6Ж8 (6SJ7)
6×6 (6H6)
6Ц5c
СГ3c
СГ4c
СГ2c
СГ2
СГ3
СГ4
Spre magnetofon (Inregistrare)
INTRARE (înregistrare)
Dela magnetofon (Redare)
EȘIRE spre amplif C C
+250
+250
+250
+250
220V~
6.3V
R
R1
R2
R3
R4
15 H
10kΩ
3kΩ
100kΩ
20kΩ
0.1MΩ
2MΩ
3MΩ
5kΩ
50kΩ
30kΩ
1000 kΩ
0.2MΩ
1MΩ
2kΩ
500
2500
5000
0.1µF
0.5µF
0.05µF
0.01µF
25µF
50µF
100µF
32µF

Fig. 2

g) *Celula redresoare* (R_1). A fost utilizată dubla diodă 6Ч5C, obţinîndu-se o tensiune anodică de 250 V, stabilizată apoi cu grupul CΓ 3C şi CΓ 4C, iar tensiunea de negativare de —70 V, stabilizată de asemenea cu tubul CΓ 2C.

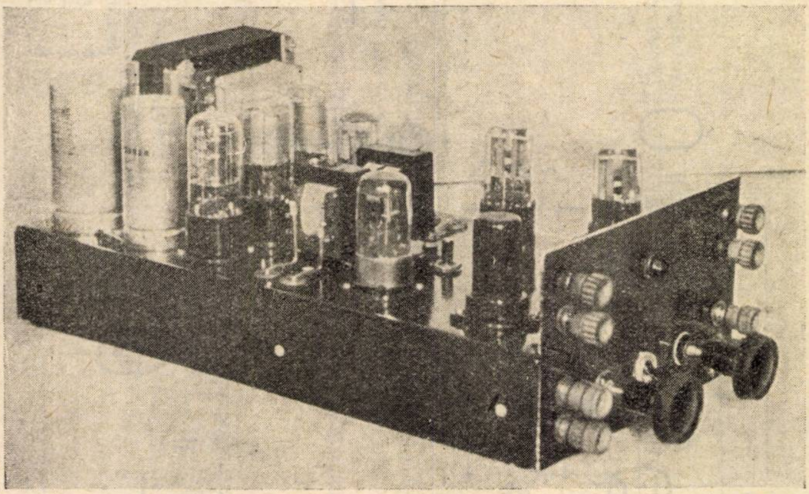


Fig. 3

În figura 3, prezentăm fotografia sistemului electronic I.

II. AMPLIFICATORUL DUBLU DE CURENT CONTINUU CU TUB CATODIC

S-a căutat să se cupleze într-un singur ansamblu două amplificatoare identice de curent continuu şi un osciloscop, ultima piesă fiind destul de ancombrantă în cazul în care se foloseşte separat un oscilograf catodic de laborator (fig. 4).

a) *Celulele amplificatoare de curent continuu* (A_{1-2} şi A_{2-2}). Cele două amplificatoare de curent continuu sînt folosite (fiecare separat) pentru amplificarea fie a semnalului de înregistrat, fie a semnalului filtrat cules de pe bandă şi a semnalului bază de timp. Fiecare celulă de amplificare a fost realizată cu cîte două pentode amplificatoare de tensiune cu pantă fixă 6 ж 8 (6SJ7) ; primul tub este cuplat galvanic cu cel de-al 2-lea, coeficientul de cuplaj fiind ales egal cu inversul amplificării primului tub, în opoziţie de fază pentru simetrizare. Această soluţie permite să se corecteze fuga de potenţial mediu al plăcilor de deflecţie a tubului catodic, în scopul diminuării defocalizării.

S-a prevăzut la intrarea (x şi y), şi ieşirea (X şi Y) fiecărei celule de amplificare impedanţele 100 kΩ şi respectiv 200 kΩ ; sistemul este construit pentru a lucra cu semnale între 0—500 Hz, factorul de amplificare pe fiecare celulă fiind circa 300.

Schema de principiu a amplificatorului simetric de CC şi osciloscopului de control înregistrare

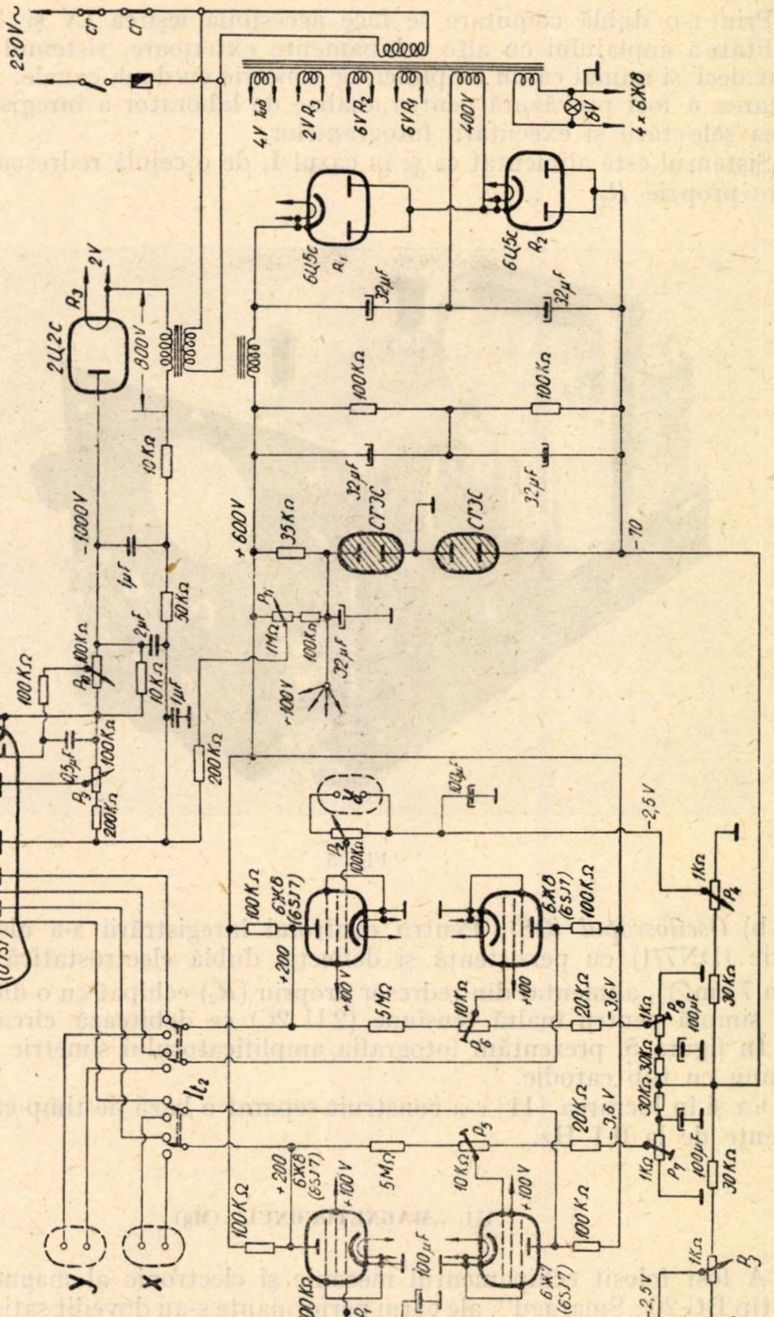

220V~
CT
CT
4V Tub
2V R3
6V R2
6V R1
400V
6V
4 x 6Ж8
6Ц5С R1
6Ц5С R2
32μF
2Ц2С
R3
2V
800V
100KΩ
10KΩ
-1000V
1μF
50KΩ
2μF
+600V
35KΩ
СГ3С
-70
P1
1MΩ
100KΩ
+100V
200KΩ
DN7/1 (07S1)
4V
0,5μF
P2
P3
200KΩ
Ir2
6Ж8 (6SJ7)
+200
+100V
5MΩ
20KΩ
-3,6V
1KΩ
P4
P5
P6
P7
P8
100μF
30KΩ
-2,5V
X
Y
I
P

Fig. 4

Printr-o dublă comutare se face accesibilă ieșirea (X și Y) și deci posibilitatea cuplajului cu alte echipamente exterioare, sistemul putînd fi utilizat deci și numai ca un amplificator simetric cu două canale. În general comutarea a fost prevăzută pentru analize de laborator a înregistrărilor în vederea selectării și executării fotogramelor.

Sistemul este alimentat ca și în cazul I, de o celulă redresoare stabilizatoare proprie R_2.

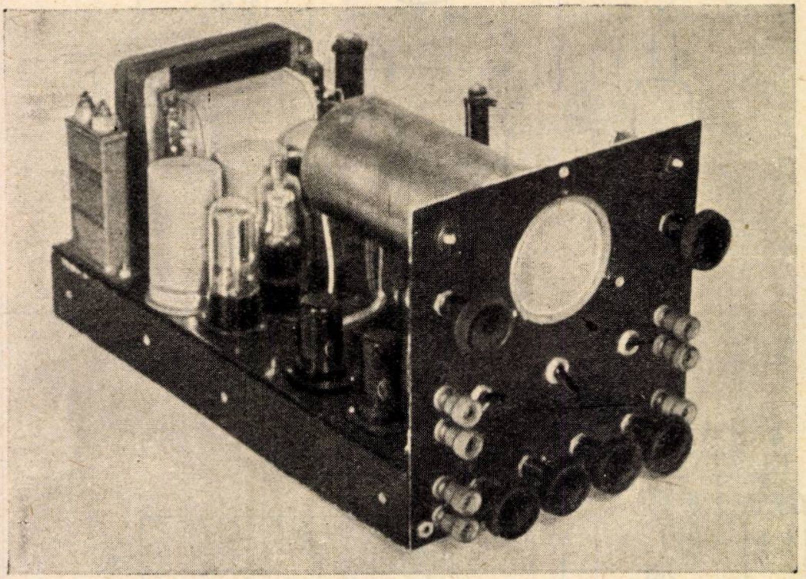


Fig. 5

b) *Osciloscopul* (*OS*). Pentru controlul înregistrării s-a ales un tub catodic (DN7/1) cu persistență și deflecție dublă electrostatică simetrică (ecran 7 cm∅), alimentat din redresor propriu (R_2') echipat cu o diodă redresoare simplă pentru înaltă tensiune (2Ц 2C) ce debitează circa 1000 V. În figura 5, prezentăm fotografia amplificatorului simetric de curent continuu cu tub catodic.

Ca și în lucrarea [11] s-a construit separat o bază de timp care să dea frecvențe de la 0,1 Hz.

III. „MAGNETOFONUL" (Mg)

A fost folosit echipamentul mecanic și electronic al magnetofonului RFT tip BG 20 „Smaragd", ale cărui performanțe s-au dovedit satisfăcătoare chiar pentru modulația de amplitudine cu care lucrează sistemul pe care-l prezentăm.

Principalele caracteristici ale acestui aparat sînt :

— viteza benzii : 19,05 cm/s (dublă pistă) ;

— gama de frecvență redată suficient de liniar : 40—12 000 Hz ;

— durata înregistrării : 2 × circa 30 minute ;

— tensiuni de intrare 2,5 —400 mV ;
0,04—2,5 V ;
1 —80 V ;

— tensiune de ieșire 1,5 V pe o impedanță de 5000 Ω ;

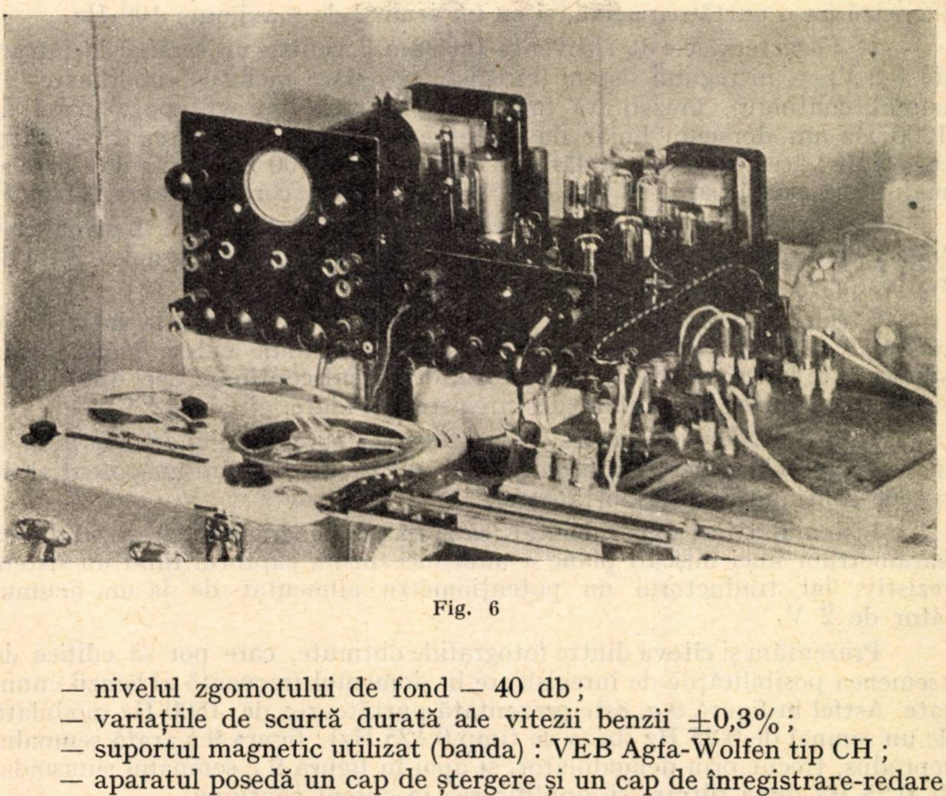


Fig. 6

— nivelul zgomotului de fond — 40 db ;

— variațiile de scurtă durată ale vitezii benzii ±0,3% ;

— suportul magnetic utilizat (banda) : VEB Agfa-Wolfen tip CH ;

— aparatul posedă un cap de ștergere și un cap de înregistrare-redare. El nu a fost construit ca aparat de măsură, trebuind să fie adaptat în acest scop. Încercările au fost făcute folosind intrarea de tensiune mare a aparatului (1—80 V).

S-a observat că în acest caz nu este necesar tot cîștigul disponibil al amplificatorului de înregistrare, format din pentoda EF86 și dubla triodă ECC81. Acest lucru face posibilă montarea unui al treilea cap magnetic pentru redarea de control, folosind ca preamplificatoare pentoda EF86, etajul de amplificare la înregistrare limitîndu-se în acest caz numai la dubla triodă ECC81 (fig. 1 — A_{2-2}).

În figura 6 prezentăm întreaga aparatură montată pentru înregistrarea unei mărimi mecanice.

OBSERVAŢII ŞI CONCLUZII

Au fost ridicate caracteristici atît a ansamblului cît și a părților sale componente. Din examinarea diagramelor se pot face următoarele observații :

a) Caracteristica de răspuns (înregistrare-redare) a ,,magnetofonului" folosit, în banda frecvențelor amintite, are o alură în general crescătoare între 600 și 10 000 Hz ; acest aspect nu devine un inconvenient prin faptul că se lucrează cu o purtătoare fixă, și cu un semnal de maximum 100 Hz.

b) Caracteristica de frecvență (măsurată pentru un semnal la intrare de 0,8 V), a întregului sistem (înregistrare-redare inclusiv amplificarea în curent continuu), prezentată în figura 7, arată în cazul purtătoarei de 1800 Hz un domeniu liniar de utilizare pentru semnalele cuprinse între 0—50 Hz ; acest domeniu se lărgește pînă la circa 100 Hz în cazul în care se majorează purtătoarea la 5,5 kHz și se modifică corespunzător filtrul *F*.

c) Curba de răspuns a întregului echipament pentru frecvența 0 (fig. 8), indică de asemenea o caracteristică liniară pentru semnalele date de traductor în domeniul —1V la +1,6 V.

Precizăm că în abscisă s-au trecut tensiunile captate la intrarea în modulator (după traductor), iar în ordonată tensiunile culese de pe bandă și măsurate la ieșirea din amplificatorul de curent continuu, deci după ce au trecut prin întreg ansamblul de înregistrare-redare.

În ordonată s-au marcat ΔU_e (creșterile potențialului U_e); avîndu-se în vedere că chiar în situația de semnal nul există la ieșire un potențial de curent continuu datorit purtătoarei.

Sistemul a fost experimentat (ca și în cazul lucrării [11]), la studierea parametrilor unei mișcări plane a unui mecanism, captorul fiind un sistem rezistiv, iar traductorul un potențiometru alimentat de la un acumulator de 2 V.

Prezentăm și cîteva dintre fotografiile obținute, care pot să edifice de asemenea posibilitățile de înregistrare în domeniul frecvență al benzii enunțate. Astfel în figura 9 *a*, este prezentată purtătoarea de 1500 Hz modulată de un semnal de 0,25 Hz (baza de timp 0,125 Hz) ; figura 9 *b* arată semnalul reprodus, trecut prin demodulator, și apoi în figura 9 *c* semnalul sinusoidal de 0,25 Hz după filtrare și amplificarea în curent continuu.

De asemenea în figura 9 *d* este reprezentată modularea unei purtătoare de 1800 Hz cu un semnal de 50 Hz (baza de timp de 12,5 Hz), iar în figura 9 *e*, imaginea obținută pe ecranul osciloscopului după redarea de pe bandă și demodulare.

Remarcăm prezența pe anvelopă a unor tremurături, pricinuite de modularea suplimentară de amplitudine, care se datoresc următoarelor cauze :

— neuniformitățile suportului magnetic ;
— variației distanței dintre bandă și capul magnetic ;
— deplasarea pistei ;
— ușoara variație de viteză a benzii etc.

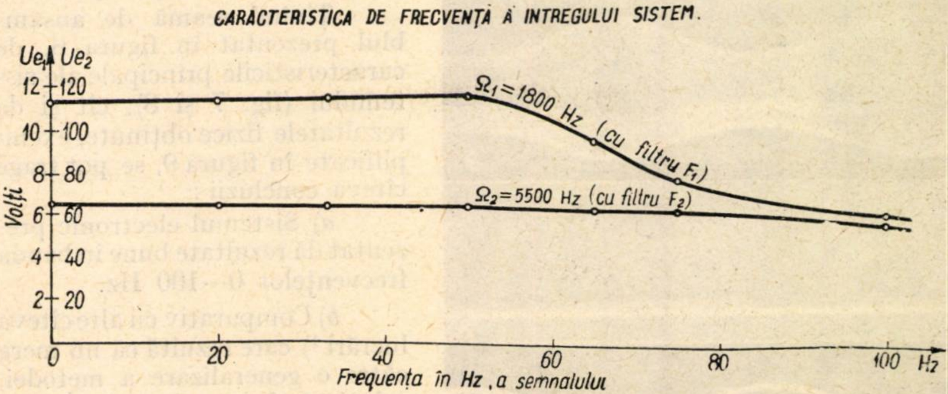

CARACTERISTICA DE FRECVENȚĂ A INTREGULUI SISTEM.
Ue1 Ue2
Volți
12 120
10 100
8 80
6 60
4 40
2 20
0
20
40
60
80
100 Hz
Frequența în Hz, a semnalului
Ω1 = 1800 Hz (cu filtru F1)
Ω2 = 5500 Hz (cu filtru F2)

Fig. 7

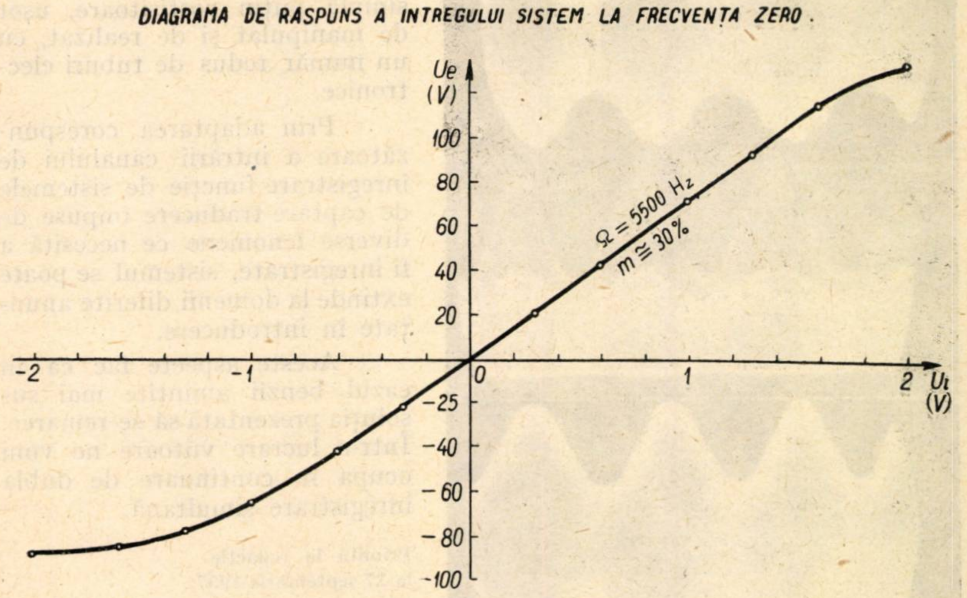


DIAGRAMA DE RASPUNS A INTREGULUI SISTEM LA FRECVENȚA ZERO.
Ue (V)
100
80
60
40
20
-25
-40
-60
-80
-100
-2
-1
0
1
2
Ui (V)
Ω = 5500 Hz
m ≅ 30%

Fig. 8

În figura 9 *f* se redă aceeași frecvență de 50 Hz peste o purtătoare de 5 000 Hz. Se vede că conturul este mai precis, anvelopa nemaifiind vizibil reprodusă „prin puncte".

Ținînd seamă de ansamblul prezentat în figura 6, de caracteristicile principale ale sistemului (fig. 7 și 8), cît și de rezultatele fizice obținute, exemplificate în figura 9, se pot trage cîteva concluzii :

a) Sistemul electronic prezentat dă rezultate bune în banda frecvențelor 0—100 Hz.

b) Comparativ cu alte cîteva lucrări [1]) care rezultă că nu merg către o generalizare a metodei, soluționînd numai anumite domenii, și preferînd modulații de frecvență, fază sau impulsuri, soluția prezentată în această lucrare (modulație de amplitudine), conduce la o aparatură simplă puțin costisitoare, ușor de manipulat și de realizat, cu un număr redus de tuburi electronice.

Prin adaptarea corespunzătoare a intrării canalului de înregistrare funcție de sistemele de captare-traducere impuse de diverse fenomene ce necesită a fi înregistrate, sistemul se poate extinde la domenii diferite anunțate în introducere.

Aceste aspecte fac ca în cazul benzii amintite mai sus soluția prezentată să se remarce. Într-o lucrare viitoare ne vom ocupa în continuare de dubla înregistrare simultană.

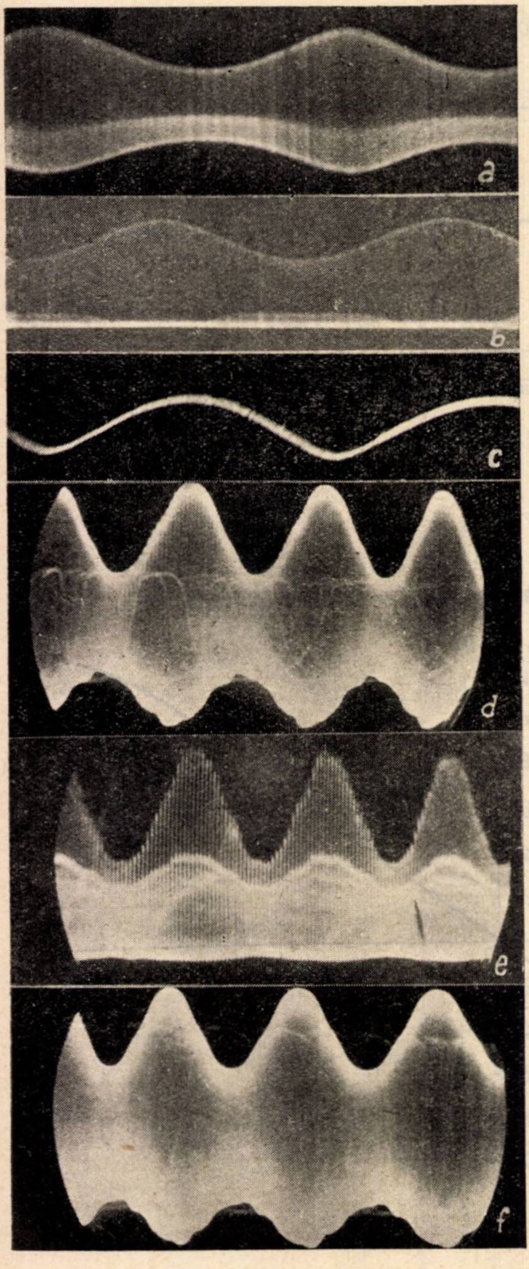


Fig. 9

Primită la redacție
la 27 septembrie 1957.

---

[1]) Este vorba de lucrările : [2], [4], [7], [9], [12], [18], [19].

ЭЛЕКТРОННЫЙ КАНАЛ ДЛЯ ЗАПИСИ И ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ НА МАГНИТНОМ НОСИТЕЛЕ ЯВЛЕНИЙ С МЕДЛЕННЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В продолжении работы [11] дается описание электронного канала записи-воспроизведения для более широкого диапазона медленных частот (0 — 100 гц). Эта установка (кроме магнитофона) состоит из двух основных частей:

1. Электронной системы для записи-воспроизведения;

2. Двойного усилителя постоянного тока, соединенного с катодным осциллографом для контроля записи.

Основой предложенной системы является амплитудная модуляция несущей волны (1500 — 5500 гц), генерируемой автостабилизированным осцилятором RC.

Получено упрощенное решение (представляющее возможность обобщения, легко осуществляемое и управляемое), причем существует предварительная связь точки работы с амплитудой и несущей частотой, а амплитуда сигнала на выходе из канала получается равной ее величине у входа.

CANAL «FIXE» POUR ENREGISTREMENT-REPRODUCTION, SUR SUPPORT MAGNÉTIQUE, DES PHÉNOMÈNES À VARIATIONS LENTES

RÉSUMÉ

Faisant suite au travail [11], les auteurs présentent un canal électronique d'enregistrement-reproduction pour une bande plus large de fréquences lentes (0 à 100 Hz), l'installation se bornant à deux pièces principales, hormis le magnétophone :

1. — le système électronique proprement dit pour l'enregistrement-reproduction ;

2. — l'amplificateur double à courant continu, couplé à un oscillographe cathodique, pour le contrôle de l'enregistrement.

A la base du présent système se trouve la modulation en amplitude d'une onde portante (1 500 à 5 500 Hz), générée par un oscillateur RC autostabilisé.

On a obtenu une solution simplifiée avec des possibilités d'extension, d'une réalisation et d'une manipulation aisées, le point de fonctionnement, l'amplitude et la fréquence de l'onde portante étant préalablement liées entre elles, alors qu'on peut obtenir l'amplitude du signal à la sortie du canal avec la même valeur qu'à son entrée.

BIBLIOGRAFIE

1. ASEEV B. P., *Bazele radiotehnicii*. Ed. energetică de Stat, Bucureşti (1952).
2. BEGUN S. J., *Magnetic Improves Geophysical Recordings*. Electronics, **28**, *1*, 152–155 (1955).
3. CARTIANU GH., *Bazele radiotehnicii*. Ed. energetică de Stat, Bucureşti (1954).
4. DONALDSON P. E. K., *A Magnetic Tape Recorder for Electrophysiology*. Electronic Engineering, 543–545 (1955).
5. GRATIAN WARREN J., *Magnetic-Tape Pickup had D. C. Response*. Electronics, **27**, *9*, 156–159 (1954).
6. HECKENAST C. ZSDANSKY K., *Magneses Hangrogzites, Muszaki Konyvkiado*. Budapesta (1955).
7. HOGAN JOHN W., *Magnetic Tape Controls Machine Tools*. Electronics, **27**, *12*, 144–147 (1954).
8. NICOLAU EDMOND, *Măsurători în radiotehnică*. Ed. energetică de Stat, Bucureşti, **I**, 70–87, 110–134 (1955).
9. — *Măsurători în radiotehnică*, Ed. tehnică, Bucureşti, **II**, 220–229, 278–297 (1955).
10. OFENGENDEN R. G., Radiotehnika, 11 (1955).
11. PAVELESCU DAN, PANTELIMON TH., *Asupra înregistrării pe banda magnetică a unor mărimi mecanice cu variaţii lente*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, 4 (1957).
12. RAYMOND F. H., *Considérations sur l'enregistrement magnétique dans le domaine des machines à calculer*. L'Onde Electrique, 35-e année, *335*, 89–96 (1955).
13. RICHTER H., *Neue Anwendungen der Magnetbandtechnik*. Elektrotechnik, 40, 353–355 (1956).
14. SACERDOTE C. B., CACIOTTI M., SACERDOTE G., *Le pleurage dans les systèmes de reproduction sonore*. L'Onde Electrique, **XXXV**, *334*, 62–70 (1955).
15. SILVESRU P., ALPER M., *Înregistrarea, magnetică şi magnetofonul*. Ed. tehnică, Bucureşti (1957).
16. TĂNĂSESCU TUDOR, *Manual de tuburi şi circuite electronice*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, **II**, 3–136., 245–370 (1957).
17. — *Manual de tuburi şi circuite electronice*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, **III**, 115–185, 314–367, 418–442 (1957).
18. THOMASSON D. W., *Recording Low Frequencies on Magnetic Tape*. Wireless World, **60**, 548–549 (1954).
19. — *Neue Gerate für die magnetische Schallspeichearng*. Elektronische Rundschau, *7*, 202–203 (1957).

REZISTENȚA MATERIALELOR–ELASTICITATE

O TEORIE A STRUCTURILOR SUBȚIRI ORTOTROPE NESIMETRICE FAȚĂ DE SUPRAFAȚA MEDIANĂ

DE

A. PETRE și L. LIBRESCU

Cea mai mare parte din structurile de rezistență, la care cerința principală este greutatea minimă, sînt construite dintr-un înveliș rigidizat ortogonal.

Există mai multe moduri de a trata o asemenea structură.

În primul rînd se poate face un calcul din aproape în aproape plecînd de la condițiile pe contur a structurii.

În această direcție o primă metodă utilizată este înlocuirea învelișului prin diagonale, ținînd astfel seama de efectul principal al acestuia. O altă metodă pleacă de la considerarea învelișului ca placă continuă pe reazime elastice (ridigizori).

Metodele de calcul generale pleacă de la considerarea întregii structuri ca înveliș ortotrop [1].

Studiul local se poate efectua eventual după ce se cunoaște starea de efort din zona respectivă.

În ceea ce privește structurile ortotrope, acestea pot prezenta ortotropie de material sau ortotropie de formă obținută constructiv.

Structura constructiv ortotropă poate fi de asemenea de două feluri, structură ortotropă simetrică și structură ortotropă nesimetrică față de suprafața mediană.

Acest ultim gen de structură, care este obiectul studiului de mai jos, a început în ultima vreme să fie utilizat din ce în ce mai mult în aviație și sub forma de ,,structură integrală'' respectiv structura ortotropă obținută direct prin formare și nu prin asamblare.

Din cauza nesimetriei de structură, forțele aplicate secțiunilor transversale ale acestuia produc tensiuni a căror moment față de linia de acțiune a forței aplicată în general nu este nul. Alegem pentru simplificare ca suprafețe de aplicare a sarcinilor suprafețelor în care dacă se aplică aceste sarcini, nu se produc rotiri ci numai deplasări.

Rezultă în acest mod patru suprafeţe distincte. Două, în care dacă se aplică forţe normale pe secţiuni transversale normale pe ridigizori nu se produce încovoiere şi două în care dacă se aplică forţe tangenţiale nu se produce răsucire.

Primele două suprafeţe coincid cu linia medie a centrelor de greutate a celor două secţiuni transversale normale pe rigidizori.

Modul de tratare utilizat, face ca să fie posibilă o extindere a rezultatelor şi pentru cazul în care rigidizorii se întretaie sub unghiuri diferite de 90°.

În continuare vom alege curbele coordonate după direcţia acestor rigidizori.

I. Ecuaţii de echilibru

Se convine a se deosebi mărimile fizice şi geometrice legate de cele patru suprafeţe afectîndu-le cu steluţe aşa cum se indică în figura 1.

Se va lua ca suprafaţă de bază, suprafaţa la care mărimile de mai susmenţionate nu sînt afectate de steluţe. La aceste suprafeţe se vor reduce în final toate eforturile ce acţionează pe celelalte suprafeţe, aşa cum se va vedea în cele ce urmează.

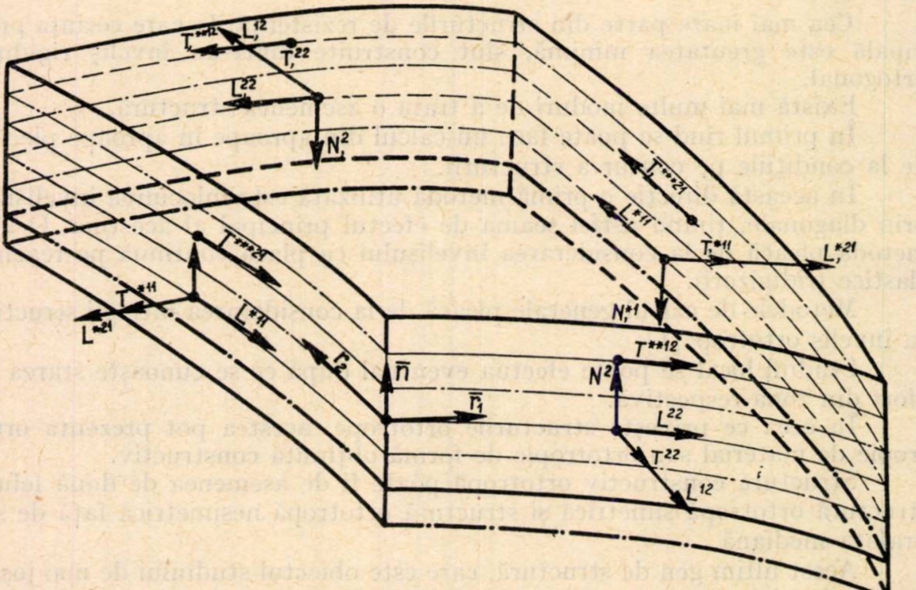


Fig. 1

Ecuaţiile celor patru suprafeţe se vor scrie, admiţînd ca suprafaţa de bază, suprafaţa neafectată de steluţe, dată de ecuaţia vectorială

$$\bar{r} = \bar{r}\,(x^{\alpha}) \qquad (\alpha = 1,\ 2). \tag{1}$$

Față de această suprafață, ecuațiile celorlalte suprafețe devin

$$\bar{r}^{*} = \bar{r} + f^{*}\,\bar{n}, \tag{2}$$

$$\bar{r}^{**} = \bar{r} + f^{**}\,\bar{n}, \tag{3}$$

$$\bar{r}^{***} = \bar{r} + f^{***}\,\bar{n}, \tag{4}$$

unde

$\bar{n}$ este versorul normalei la suprafața $\bar{r} = \bar{r}\,(x^{\alpha})$, versor dirijat în direcția coordonatei x^{3};

f^{*}, f^{**}, f^{***} sînt distanțele pe normală de la suprafața de bază considerată.

Ținînd seama de considerațiile ce au constituit obiectul primei părți a lucrării, eforturile și momentele vor acționa așa precum se vede în figura 1.

Se vor defini vectorii de efort $\overline{P}$ și de moment $\overline{K}$ astfel

$$\overline{P}_1 = -\,T^{22}\,\bar{r}_2 + N^{2}\,\bar{n}, \tag{5}$$

$$\overline{P}_1^{**} = T^{**12}\,\bar{r}_1^{**}, \tag{6}$$

$$\overline{K}_1 = L^{22}\,\bar{r}_1 - L^{12}\,\bar{r}_2, \tag{7}$$

$$\overline{P}_2^{*} = -\,T^{*11}\,\bar{r}_1^{*} + N^{*1}\,\bar{n}^{*}, \tag{8}$$

$$\overline{P}_2^{***} = -\,T^{***21}\,\bar{r}_2^{***}, \tag{9}$$

$$\overline{K}_2^{*} = -\,L^{*21}\,\bar{r}_1^{*} - L^{*11}\,\bar{r}_2^{*}. \tag{10}$$

În aceste relații, precum și în cele ce urmează, se notează prin

T^{11}, T^{22} — eforturile de întindere,
T^{21}, T^{12} — eforturile de alunecare,
N^{1}, N^{2} — eforturile transversale,
L^{22}, L^{11} — momentele încovoietoare,
L^{21}, L^{12} — momentele de torsiune.

Vectorii $\bar{r}_{\alpha} = \dfrac{\partial r}{\partial x^{\alpha}}$ sînt vectorii tangenți la curbele coordonate.

Ținînd seama în grupul de relații (6) — (10) de relațiile (2) — (4), de faptul că

$$\bar{n}_{\alpha} = \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^{\alpha}} = -\,b_{\alpha}^{\lambda}\,\bar{r}_{\lambda}\,, \tag{11}$$

$$\bar{n}^{*} = \bar{n}\left[1 - f^{*2}\left(4H^{2} + K + \frac{1}{2}\,B\right)\right] = \bar{n}\,[1 - 6f^{*2}\,H^{2}], \tag{12}$$

unde

b^{λ}_{α} sînt componentele mixte ale tensorului, ale cărei componente covariante sînt coeficienții celei de a doua forme fundamentale a suprafeței de bază ;
B este un invariant al suprafeței de bază dat de relația $B = b^{\pi\lambda} b_{\pi\lambda} = 2(2H^2 - K)$;
K — curbura gaussiană a suprafeței de bază ;
H — curbura medie a suprafeței de bază.

(Aici ca și în cele ce urmează indicii grecești pot lua valorile 1, 2, eforturile și momentele (exprimate prin vectorii $\overline{P}$ și K) se pot reduce la suprafața de bază).

În felul acesta, se obțin următorii vectori de efort și de moment $\overline{\mathfrak{T}}$ și $\overline{\mathfrak{Q}}$ care afectează suprafața de bază și care sînt static echivalenți totalității eforturilor și momentelor din învelitoare

$$\overline{\mathfrak{T}}_1 = T^{**12}(1 - f^{**} C^1_1)\,\overline{r}_1 - (T^{22} + T^{**12} f^{**} b^2_1)\, r_2 + N^2\,\overline{n}, \tag{13}$$

$$\overline{\mathfrak{Q}}_1 = L^{22}\,\overline{r}_1 - L^{12}\,\overline{r}_2 + T^{**12}(1 - f^{**} b^1_1) f^{**} c^{\lambda}_{.1}\,\overline{r}_\lambda - T^{**12} f^{**2} C^2_1 c^{\lambda}_{.2}\,\overline{r}_\lambda, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{T}}_2 = {} & [T^{*11}(1 - f^{*} b^1_1) - T^{***21} f^{***} b^1_2]\,\overline{r}_1 + [T^{***21}(1 - f^{***} b^2_2) - \\ & - T^{*11} f^{*} b^2_1]\,\overline{r}_2 + N^{*1}\,\overline{n}\,[1 - 6 f^{*2} H^2],\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{Q}}_2 = {} & - L^{*21}\,\overline{r}_1 - L^{*11}\,\overline{r}_2 + f^{*} L^{*21} b^{\lambda}_1\,\overline{r}_\lambda + f^{*} L^{*11} b^{\lambda}_2\,\overline{r}_\lambda + \\ & + T^{*11}(1 - f^{*} b^1_1) f^{*} c^{\lambda}_{.1}\,\overline{r}_\lambda - T^{*11} b^2_1 f^{*2}_{.} c^{\lambda}_{.2}\,\overline{r}_\lambda - \\ & - T^{***21} b^1_2 f^{***2} c^{\lambda}_{.1}\,\overline{r}_\lambda + T^{***21}(1 - f^{***} b^2_{.2}) f^{***} c^{\lambda}_{.2}\,\overline{r}_\lambda .\end{aligned} \tag{16}$$

În aceste relații :

$c^{\lambda}_{.\alpha}$ sînt componentele mixte ale tensorului antisimetric ale cărei componente și contravariante sînt definite astfel

$$c_{12} = - c_{21} = \sqrt{a}, \qquad c_{\alpha\alpha} = 0, \tag{17}$$

$$c^{12} = - c^{21} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \qquad c^{\alpha\alpha} = 0,$$

unde

$$a = \text{dct}\,(a_{\alpha\beta})$$

$a_{\alpha\beta}$ fiind coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței de bază, componentele tensorului metric.

Se poate scrie acum în mod simplu condițiile de echilibru ale unui element de învelitoare, care sub formă vectorială sînt date de relațiile

$$\frac{\partial \overline{\mathfrak{T}}_2}{dx^1} - \frac{\partial \overline{\mathfrak{T}}_1}{dx^2} + \overline{F} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \overline{\mathfrak{Q}}_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \overline{\mathfrak{Q}}_1}{\partial x^2} - \overline{r}_1 \Lambda \overline{\mathfrak{T}}_2 + \overline{r}_2 \Lambda \overline{\mathfrak{T}}_1 + \overline{M} = 0.$$

Expresia ecuațiilor (18) arată că ele sînt formal identice cu ecuațiile de echilibru date sub forma vectorială în teoria învelitorilor subțiri izotrope [2], [3].

În ecuațiile (18)

$$\overline{F} = F^{\alpha}\,\overline{r}_{\alpha} + F^{3}\,\overline{n}, \tag{19}$$

$$\overline{M} = M^{\alpha}\,\overline{r}_{\alpha}\,,$$

reprezintă vectorul forțelor masice și al sarcinilor exterioare, respectiv vectorul momentelor exterioare. Ca și în lucrarea [4], eforturile și momentele pot fi exprimate prin intermediul a patru funcții de efort, forțele masice și sarcinile exterioare fiind nenule.

Într-adevăr, sistemul de ecuații este identic satisfăcut punînd

$$\overline{\mathfrak{T}}_{\mu} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial x^{\mu}} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\,c_{\mu\nu}\int \overline{F}\,dx^{\nu}\,, \tag{20}$$

$$\overline{\mathcal{Q}}_{\mu} = \frac{\partial \overline{B}}{\partial x^{\mu}} - \overline{r}_{\mu\wedge}\,\overline{A} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\,c_{\mu\nu}\int \overline{M}\,dx^{\nu} - \frac{1}{4}\,c_{\mu\rho}\iint [c^{\pi}_{.\lambda}\,F^{3}\,r_{\pi}\,F^{\delta}\,c_{\lambda\delta}\,\overline{n}]\,dx^{\lambda}\,dx^{\rho}, \tag{21}$$

unde $\overline{A}$ și $\overline{B}$ sînt doi vectori arbitrari definiți astfel

$$\overline{A} = \varphi^{\pi}\,\overline{r}_{\pi} + \eta\,\overline{n}, \tag{22}$$

$$\overline{B} = \psi^{\pi}\,\overline{r}_{\pi} - \chi\overline{n}. \tag{23}$$

Introducînd expresiile lui $\overline{A}$ și $\overline{B}$ date de relațiile (22) și (23) în (20), (21) se obțin următoarele expresii pentru vectorii eforturilor și momentelor

$$\overline{\mathfrak{T}}_{1} = \left(\nabla_{1}\,\varphi^{\pi} - \eta\,b^{\pi}_{1} + \frac{1}{2}\int F^{\pi}\,dx^{2}\right)\overline{r}_{\pi} + \left(\varphi^{\pi}\,b_{\pi 1} + \nabla_{1}\,\eta + \frac{1}{2}\int F^{3}\,dx^{2}\right)\overline{n}, \tag{24}$$

$$\overline{\mathfrak{T}}_{2} = \left(\nabla_{2}\,\varphi^{\pi} - \eta b^{\pi}_{2} - \frac{1}{2}\int F^{\pi}\,dx^{1}\right)\overline{r}_{\pi} + \left(\varphi^{\pi}\,b_{\pi 2} + \nabla_{2}\,\eta - \frac{1}{2}\int F^{3}\,dx^{1}\right)\overline{n}, \tag{25}$$

$$\overline{\mathcal{Q}}_{1} = \left[\nabla_{1}\,\psi^{\pi} - \eta\,c^{\pi}_{.1} + \chi\,b^{\pi}_{1} + \frac{1}{2}\int M^{\pi}\,dx^{2} - \frac{1}{4}\sqrt{a}\iint c^{\pi}_{.\lambda}F^{3}\,dx^{\lambda}\,dx^{2}\right]\overline{r}_{\pi}\,, \tag{26}$$

$$\overline{\mathcal{Q}}_{2} = \left[\triangle_{2}\,\psi^{\pi} - \eta c^{\pi}_{.2} + \chi\,b^{\pi}_{2} - \frac{1}{2}\int M^{\pi}\,dx' + \frac{1}{4}\sqrt{a}\iint c^{\pi}_{.\lambda}F^{3}\,dx^{\lambda}\,dx'\right]\overline{r}_{\pi}\,, \tag{27}$$

unde din condiția ca $\overline{\mathcal{Q}}_{\mu}\cdot\overline{n} = 0$ rezultă că

$$\varphi^{2} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\psi^{\pi}\,b_{\pi 1} - \nabla_{1}\,\chi - \frac{1}{4}\sqrt{a}\iint F^{\delta}\,c_{\lambda\delta}\,dx^{\lambda}\,dx^{2}\right), \tag{28}$$

$$\varphi^{1} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\psi^{\pi}\,b_{\pi 2} - \nabla_{2}\,\chi + \frac{1}{4}\sqrt{a}\iint F^{\delta}\,c_{\lambda\delta}\,dx^{\lambda}\,dx^{1}\right). \tag{29}$$

Identificînd expresiile lui $\bar{\mathfrak{T}}_1$, $\bar{\mathfrak{T}}_2$, $\bar{\mathfrak{Q}}_1$, $\bar{\mathfrak{Q}}_2$ din (24)—(27), cu cele date de relațiile (13)—(16) se obține astfel exprimarea eforturilor și momentelor prin cele patru funcții de efort ψ', ψ^2, η, χ.

În relațiile de mai sus (ca și în restul lucrării) ∇_α reprezintă diferențierea covariantă în metrica suprafeței de bază.

II. Relațiile fizice efort-deformații

Presupunînd valabilă ipoteza Love-Kirchoff, neglijînd componenta normală pe înveliș a efortului unitar normal și reținînd în calcule puterile cele mai mici ale lui *h*, se pot scrie următoarele relații între eforturi și deformații

$$\left.\begin{aligned}
T^{\star 11} &= \frac{2Eh}{1-\mu^2}\, c_1\, E^{\star 11\varphi\gamma}\, p^{\star}_{\varphi\gamma},\\
T^{22} &= \frac{2Eh}{1-\mu^2}\, c_2\, E^{22\varphi\gamma}\, p_{\varphi\gamma},\\
T^{\star\star 12} &= \frac{2Eh}{1-\mu^2}\, E^{\star\star 12\varphi\gamma}\, p^{\star\star}_{\varphi\gamma},\\
T^{\star\star\star 21} &= \frac{2Eh}{1-\mu^2}\, E^{\star\star\star 21\varphi\gamma}\, p^{\star\star\star}_{\varphi\gamma}.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned}
L^{\star 11} &= c_3\, G^{\star 11\varphi\gamma}\, q^{\star}_{\varphi\gamma}\\
L^{22} &= c_4\, G^{22\varphi\gamma}\, q_{\varphi\gamma}\\
L^{12} &= c_7\, G^{12\varphi\gamma}\, q_{\varphi\gamma}\\
L^{\star 21} &= c_8\, G^{\star 21\varphi\gamma}\, q^{\star}_{\varphi\gamma}
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

unde

$$\left.\begin{aligned}
c_1 &= 1 + \frac{h_1 b_1 (1-\mu^2)}{2t_1 h}; \quad c_3 = \frac{E}{1-\mu^2}\,[I_1 + I_3(1-\mu^2)]; \quad c_5 = \frac{EI_1}{1-\mu^2}\\
c_2 &= 1 + \frac{h_2 b_2 (1-\mu^2)}{2t_2 h}; \quad c_4 = \frac{E}{1-\mu^2}\,[I_2 + I_4(1-\mu^2)]; \quad b_6 = \frac{EI_2}{1-\mu^2}
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned}
E^{\star 11\varphi\gamma} &= a^{\star 1\varphi}\, a^{\star 1\gamma} + \frac{\mu}{c_1}\, c^{\star 1\varphi}\, c^{\star 1\gamma},\\
E^{22\varphi\gamma} &= a^{2\varphi}\, a^{2\gamma} + \frac{\mu}{c_2}\, c^{2\varphi}\, c^{2\gamma},\\
E^{\star\star 12\varphi\gamma} &= a^{\star\star 1\varphi}\, a^{\star\star 2\gamma} + \mu\, c^{\star\star 1\varphi}\, c^{\star\star 2\gamma},\\
E^{\star\star\star 21\varphi\gamma} &= a^{\star\star\star 2\varphi}\, a^{\star\star\star 1\gamma} + \mu\, c^{\star\star\star 2\varphi}\, c^{\star\star\star 1\gamma},\\
G^{\star 11\varphi\gamma} &= a^{\star 1\varphi}\, a^{\star 1\gamma} + \mu\frac{c_5}{c_3} c^{\star 1\varphi}\, c^{\star 1\gamma}; \quad G^{12\varphi\gamma} = a^{1\varphi}\, a^{2\gamma} + \mu\,\frac{c_9}{c_7}\, c^{1\varphi}\, c^{2\gamma},\\
G^{22\varphi\gamma} &= a^{2\varphi}\, a^{2\gamma} + \mu\frac{c_6}{c_4}\, c^{2\varphi}\, c^{2\gamma}; \quad G^{\star 21\varphi\gamma} = a^{\star 2\varphi}\, a^{\star 1\gamma} + \mu\frac{c_{10}}{c_8}\, c^{\star 2\varphi}\, c^{\star 1\gamma};
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$2h$ este grosimea învelişului ;

b_1, b_2 — grosimea nervurilor respective din direcţiile 1 şi 2 ;
h_1, h_2 — înălţimea nervurilor ;
t_1, t_2 — distanţa între centrele de greutate ale nervurilor în direcţiile respective (fig. 2) ;
I_1, I_2 — momentul de inerţie al învelişului pe unitate de lungime de înveliş, faţă de linia centrelor de greutate al ansamblului, înveliş-ridigizori ;
I_3, I_4 — momentul de inerţie al ridigizorilor respectivi din direcţia 1 şi 2 faţă de linia centrelor de greutate al ansamblului pe unitatea de lungime de înveliş ;
c_7, c_8 — rigiditatea la răsucire a ansamblului în cele două direcţii pe unitate de lungime de înveliş ;
c_9, c_{10} — rigiditatea la răsucire a învelişului în cele două direcţii.

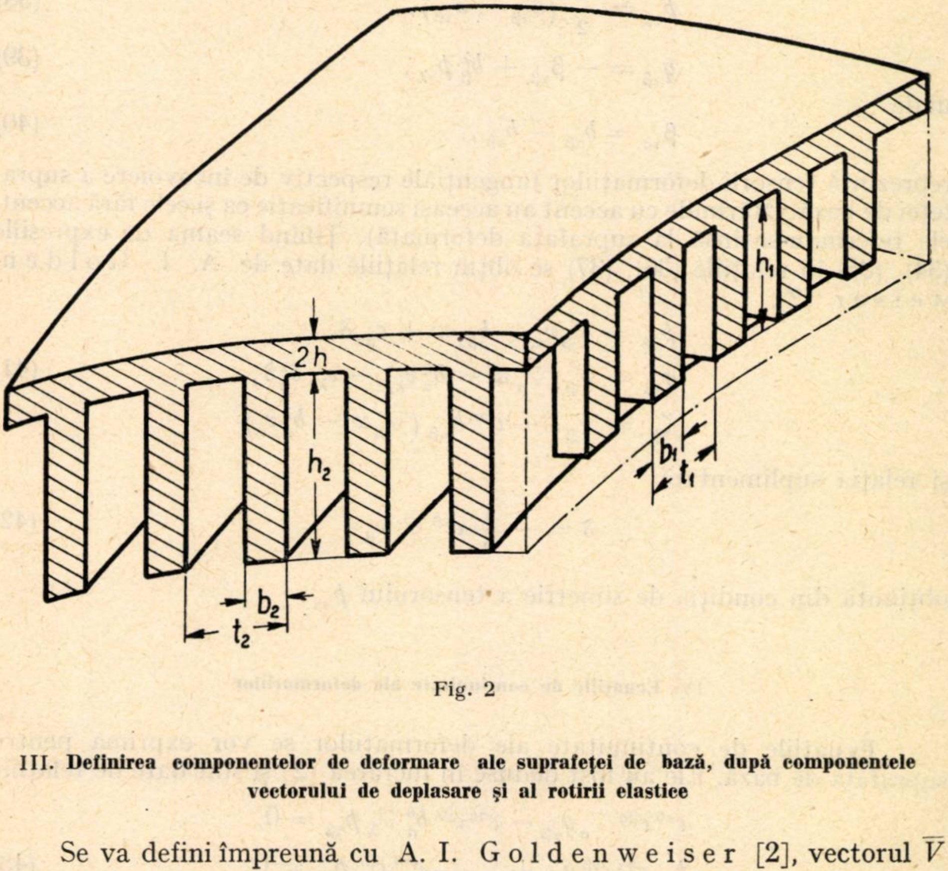


Fig. 2

III. Definirea componentelor de deformare ale suprafeţei de bază, după componentele vectorului de deplasare şi al rotirii elastice

Se va defini împreună cu A. I. Goldenweiser [2], vectorul $\overline{V}$ al deplasărilor elastice şi vectorul $\overline{\Omega}$ al rotirii elastice. Aceşti vectori vor fi ataşaţi suprafeţei considerată de noi de bază.

În exprimarea prin componentele lor, vectorii $\overline{V}$ și $\overline{\Omega}$ sînt definiți astfel

$$\overline{V} = v^{\lambda} \bar{r}_{\lambda} - w\bar{n}, \tag{34}$$

$$\overline{\Omega} = c^{\alpha\beta} \gamma_{\beta} \bar{r}_{\alpha} + \delta\bar{n}. \tag{35}$$

Derivatele lui $\overline{V}$ și $\overline{\Omega}$ se pot pune sub forma

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial x^{\varphi}} = \overline{V}_{\varphi} = (p^{\pi}_{\varphi} - c^{\cdot\pi}_{\varphi} \delta)\bar{r}_{\pi} - \gamma_{\varphi}\bar{n}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial x^{\varphi}} = \overline{\Omega}_{\varphi} = c^{\alpha\beta} q_{\beta.\varphi}\, r_{\varkappa} + \zeta_{\varphi}\bar{n}. \tag{37}$$

În aceste relații tensorii $p_{\alpha\beta}$ și $q_{\alpha\beta}$ definiți de

$$p_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(a'_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}), \tag{38}$$

$$q_{\alpha\beta} = -\,\beta_{\alpha\beta} + b^{\lambda}_{\beta}\, p_{\alpha\lambda}, \tag{39}$$

unde

$$\beta_{\alpha\beta} = b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}, \tag{40}$$

reprezintă tensorii deformațiilor tangențiale respectiv de încovoiere a suprafeței de bază. (Mărimile cu accent au aceeași semnificație ca și cele fără accent, ele referindu-se însă la suprafața deformată). Ținînd seama de expresiile (34), (35) în relațiile (36), (37) se obțin relațiile date de A. I. Goldenweiser [2],

$$\begin{aligned} p_{\alpha\beta} &= \nabla_{\beta} v_{\alpha} + b_{\beta\varkappa}\, w + c_{\beta\varkappa}\,\delta, \\ q_{\varkappa\beta} &= \nabla_{\beta}(\nabla_{\alpha} w - b^{\lambda}_{\alpha} v_{\lambda}) - c_{\lambda\varkappa}\, b^{\lambda}_{\beta}\,\delta, \\ \zeta_{\beta} &= \nabla_{\beta}\delta + c^{\omega\pi} b_{\omega\beta}\,(\nabla_{\pi} w - b^{\lambda}_{\pi} v_{\lambda}) \end{aligned} \tag{41}$$

și relația suplimentară

$$\delta = -\,\frac{1}{2}\, c^{\alpha\beta}\, \nabla_{\alpha} v_{\beta} \tag{42}$$

obținută din condiția de simetrie a tensorului $p_{\alpha\beta}$.

IV. Ecuațiile de continuitate ale deformațiilor

Ecuațiile de continuitate ale deformațiilor se vor exprima pentru suprafața de bază. Ele au fost deduse în lucrarea [2] și sînt date de relațiile

$$\begin{aligned} & c^{\varkappa\theta} c^{\beta\sigma} \nabla_{\sigma} q_{\alpha\beta} - c^{\sigma\varkappa} c^{\beta\lambda} b^{\theta}_{\sigma} \nabla_{\lambda} p_{\alpha\beta} = 0, \\ & b_{\alpha\beta}\, c^{\theta\varkappa} c^{\nu\beta} q_{\theta\nu} + \nabla_{\sigma} \nabla_{\lambda} c^{\sigma\alpha} c^{\beta\lambda} p_{\alpha\beta} = 0, \\ & -\, c^{\varkappa\beta} c^{\theta\alpha} c^{\nu\beta} q_{\theta\nu} + c^{\sigma}_{\alpha} c^{\varkappa\omega} c^{\pi\beta} b_{\sigma\beta}\, p_{\omega\pi} = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

V. Rezolvarea problemei teoriei structurilor subțiri ortotrope în funcții de eforturi

Această metodă constă în faptul că drept necunoscute fundamentale se iau cele patru funcții de efort ψ^1, ψ^2, η, $\varkappa$ deduse în paragraful I, pentru determinarea cărora se alcătuiește un sistem de patru ecuații [4].

Acest sistem de ecuații se realizează făcînd ca eforturile T^{11}, T^{22}, T^{12}, T^{21} și momentele L^{11}, L^{22}, L^{21}, L^{12} exprimate prin funcțiile de efort (este evident din paragraful I că acestea satisfac identic ecuațiile de echilibru (18)) să verifice și ecuațiile de continuitate în eforturi.

De aceea se vor folosi în acest scop.

a) Ecuațiile de continuitate ale deformațiilor, relația (43)

b) Relațiile deformații-eforturi

c) Relațiile ce exprimă eforturile și momentele prin cele patru funcții de efort.

Pentru a reuși să se exprime primul grup de ecuații în eforturi, este necesar ca în grupul de relații (30), (31) să se exprime componentele deformațiilor tangențiale și de încovoiere, care afectează suprafețele de ecuații $\bar{r}^* = \bar{r}^*(x^\alpha)$, $\bar{r}^{**} = \bar{r}^{**}(x^\alpha)$, $\bar{r}^{***} = \bar{r}^{***}(x^\alpha)$ prin componentele deformațiilor ce afectează suprafața $\bar{r} = \bar{r}(x^\alpha)$.

În acest scop se utilizează relațiile (35), (36), (37) din care se deduc relațiile

$$p_{\alpha\beta} = \overline{V}_\alpha \bar{r}_\beta + c_{\alpha\beta} \bar{n} \overline{\Omega}, \tag{44}$$

$$q_{\alpha\beta} = c^{\lambda}_{.\alpha} \bar{r}_\lambda . \overline{\Omega}_\beta , \tag{45}$$

$$\bar{n} \overline{\Omega} = \delta. \tag{46}$$

Pentru o suprafață oarecare, de exemplu pentru suprafața $\bar{r}^* = \bar{r}^*(x^\alpha)$ vectorul de deplasare corespunzător $\overline{V}^*$ se poate exprima funcție de vectorul de deplasare $\overline{V}$ al suprafeței $\bar{r} = \bar{r}(x^\alpha)$ (suprafața de bază).

Într-adevăr, vectorul de deplasare $\overline{V}^*$ se definește prin variația vectorilor de poziție pentru stadiul deformat și nedeformat, adică :

$$\overline{V}^* = \overline{V} + f^* \overline{m}, \tag{47}$$

unde

$$\overline{m} = \bar{n}' - n = n \Lambda \overline{\Omega} \tag{48}$$

și deci

$$\frac{\partial \bar{V}^*}{\partial x^*} = \overline{V}^*_\lambda = \overline{V}_\lambda + f^* \overline{m}_\lambda . \tag{49}$$

Pe suprafața $\bar{r}^* = \bar{r}(x^\alpha)$, relația (44) se poate scrie astfel :

$$\overline{V}^*_\alpha \bar{r}^*_\beta = p^*_{\alpha\beta} - c^*_{\alpha\beta} \delta^* . \tag{50}$$

Explicitînd membrul stîng al relației (50) se obține că

$$\begin{aligned} p^*_{\alpha\beta} = c^*_{\alpha\beta} \delta^* + p_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} \delta - f^* (b^\lambda_\alpha c_{\beta\lambda} \delta - b^\lambda_\beta c_{\alpha\lambda} \delta + b^\lambda_\beta p_{\alpha\lambda} - q_{\beta\alpha}) - \\ - f^{*2} b^\omega_\beta (q_{\omega\alpha} - b^\lambda_\alpha c_{\omega\lambda} \delta) . \end{aligned} \tag{51}$$

Şi deoarece tensorul deformaţiilor tangenţiale este un tensor simetric, din această condiţie şi ţinînd seama că

$$c^{\star\alpha\beta} = c^{\alpha\beta}\left[1 + 2f^\star H - \frac{f^{\star 2}}{2}(B + 4K)\right], \tag{52}$$

se obţine

$$\delta^\star = \delta\left[1 + 2f^\star H - \frac{f^{\star 2}}{2}(B + 4K)\right] + 2f^\star(1 + 2f^\star H)(-2H\delta + c^{\alpha\beta} b^\lambda_\beta p_{\alpha\lambda}) + \\ + \frac{1}{2} f^{\star 2}(c^{\lambda\omega} b^\pi_\omega q_{\pi\lambda} + 2K\delta). \tag{53}$$

Relaţiile (51), (53) permit exprimarea componentelor tensorului deformaţiilor tangenţiale $p^\star_{\alpha\beta}$, a unei suprafeţe $\bar r^\star = \bar r^\star(x^\alpha)$, prin deformaţiile suprafeţei $\bar r = \bar r(x^\alpha)$.

În ceea ce priveşte exprimarea componentelor tensorului deformaţiei de încovoiere a suprafeţei $r^\star = \bar r^\star(x^\alpha)$, prin deformaţiile suprafeţei de bază, se face apel la relaţia a doua din grupul de relaţii (41), scrisă pentru suprafaţa $\bar r^\star = \bar r^\star(x^\alpha)$

$$q^\star_{\alpha\beta} = \nabla^\star_\beta(\nabla^\star_\beta w^\star - b^{\star\lambda}_\alpha v^\star_\lambda) - c^\star_{\lambda\alpha} b^{\star\lambda}_\beta \delta^\star. \tag{54}$$

Ţinînd seama în această relaţie de expresiile

$$c^\star_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}\left[1 - 2f^\star H + \frac{f^{\star 2}}{2}(B + 4K)\right], \tag{55}$$

$$b^\star_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}\left[1 - f^{\star 2}\left(K + 4H^2 + \frac{1}{2}B\right)\right] - f^\star b_{\alpha\lambda} b^\lambda_\beta, \tag{56}$$

de relaţiile (53), (60), (61) şi exprimînd simbolii lui Christoffel $\Gamma^{\star\alpha}_{\lambda\beta}$ ai suprafeţei $\bar r^\star = \bar r^\star(x^\alpha)$ prin cei aferenţi suprafeţei de bază se poate obţine (lucrînd pe componente) exprimarea componentelor lui $q^\star_{\alpha\beta}$ prin deformaţiile suprafeţei de bază.

VI. Rezolvarea problemei teoriei structurilor subţiri ortotrope în deplasări

Metoda constă în faptul că, drept necunoscute fundamentale se iau componentele v^λ, w ale vectorului deplasării elastice ce afectează suprafaţa de bază. Pentru a scrie acest sistem, este necesar să se folosească :

a') ecuaţiile de echilibru (18),

b') relaţiile fizice eforturi-deformaţii,

c') relaţiile (14), (42) ce leagă componentele deformaţiei cu componentele deplasării elastice.

Pentru a putea exprima însă relaţiile (30), (31) deformaţiile suprafeţelor $\bar r^\star = \bar r^\star(x^\alpha)$, $\bar r^{\star\star} = \bar r^{\star\star}(x^\alpha)$, $\bar r^{\star\star\star} = \bar r^{\star\star\star}(x^\alpha)$ prin deplasările suprafeţei $r = \bar r(x^\alpha)$, se folosesc relaţiile (41), (42).

Pentru suprafața $\bar{r}^\star = c$ de exemplu, avem:

$$\begin{aligned} p^\star_{\alpha\beta} &= \nabla^\star_\beta v^\star_\alpha + b^\star_{\beta\alpha} w^\star + c^\star_{\beta\alpha} \delta^\star \\ q^\star_{\alpha\beta} &= \nabla^\star_\beta (\nabla^\star_\alpha w^\star - b^{\star\lambda}_\alpha v^\star_\lambda) - c^\star_{\lambda\alpha} b^{\star\lambda}_\beta \delta^\star \\ \gamma^\star_\alpha &= \nabla^\star_\alpha w^\star - b^{\star\lambda}_\alpha v^\star_\lambda . \end{aligned} \tag{57}$$

Rămîne acum a exprima componentele vectorului $\overline{V}^\star$ al deplasării prin componentele vectorului $\overline{V}$ aferent suprafeței $\bar{r} = \bar{r}\,(x^\alpha)$.

De aceea se va relua relația (47)

$$\overline{V}^\star = \overline{V} + f^\star \overline{m}, \tag{58}$$

unde

$$\overline{m} = \bar{n} \Lambda \overline{\Omega} = - c^{\alpha\beta} \gamma_\beta c^\omega_\alpha \bar{r}_\omega$$

și deci

$$\overline{V}^\star = \overline{V} - f^\star c^{\alpha\beta} c^\omega_{.\alpha} \gamma_\beta \bar{r}_\omega , \tag{59}$$

relații care în altă transcriere devin

$$v^{\star\alpha} \bar{r}^\star_\alpha - w^\star \bar{n}^\star = v^\star \bar{r}_\alpha - w \bar{n} - f^\star c^{\alpha\beta} c^\omega_{.\alpha} \gamma_\beta \bar{r}_\omega . \tag{60}$$

După cîteva transformări simple se obține

$$\begin{aligned} v^\star \bar{r}_\alpha - f^\star c^{\alpha\beta} c^\omega_{.\alpha} \gamma_\beta \bar{r}_\omega - w \bar{n} &= v^{\star\alpha} \bar{r}_\alpha - f^\star v^{\star\alpha} b^\lambda_\alpha \bar{r}_\lambda - \\ &- w^\star \bar{n} \left(1 - f^{\star 2}\left(k + 4H^2 + \frac{1}{2} B\right)\right). \end{aligned} \tag{61}$$

Identificînd coeficienții acelorași direcții se obțin relațiile

$$\begin{aligned} w &= w^\star \left[1 - f^{\star 2} \left(k + 4H^2 + \frac{1}{2} B\right)\right] \\ v^{\star\alpha} - f^\star v^{\star\lambda} b^\alpha_\lambda &= v^\alpha - f^\star c^{\omega\pi} c^\alpha_{.\omega} (\nabla_\pi w - b^\lambda_\pi v_\lambda) \end{aligned} \tag{62}$$

sau

$$\begin{aligned} v^\star_\alpha - f^\star v^{\star\lambda} b_{\lambda\alpha} &= v_\alpha + f^\star [\nabla_\alpha w - b^\omega_\alpha v_\omega - 2b_{\lambda\alpha} v^\lambda] - \\ &- f^{\star 2} [2\, b^\beta_\alpha (\nabla_\beta w - b^\omega_\beta v_\omega) + b_{\lambda\omega} b^\omega_\alpha v^\lambda] . \end{aligned} \tag{63}$$

$$w = w^\star \left[1 - f^{\star 2} \left(k + 4H^2 + \frac{1}{2} B\right)\right] = w^\star \,[1 - 6f^{\star 2} H^2] .$$

Relațiile (62), (63) exprimă componentele vectorului deplasării elastice $\overline{V}^\star$ prin componentele vectorului $\overline{V}$.

În felul acesta ținînd seama în grupul de relații *b'*) de relațiile (57) și de considerațiile de mai sus, se obțin relațiile efort-deplasări, deplasările fiind ale suprafeţei de bază. Aceste eforturi astfel exprimate, înlocuite în ecuaţiile (18) dau cele trei ecuaţii necesare pentru determinarea mărimilor v^*, w.

Este demn de semnalat că prin metoda de rezolvare în funcţii de eforturi, sînt utilizate toate ecuaţiile (de echilibru, continuitate şi ecuaţiile fizice) în timp ce prin ultima formulare (în deplasări) nu este satisfăcută aşa-numita ecuaţie a şasea de echilibru (ecuaţia nediferenţială).

Rezultă în consecinţă, în cazul structurilor ortotrope subţiri, nesimetrice faţă de suprafaţa mediană, posibilitatea soluţionării problemei, fie prin rezolvarea sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale în cele patru funcţii de efort, fie a sistemului în cele trei componente a vectorului deplasare, structura ecuaţiilor respective ce se obţin prin procedeul expus în lucrare, fiind aceeaşi ca a ecuaţiilor obţinute în lucrările [4], [5], pentru învelitori subţiri izotrope.

Primită la redacţie la 26 aprilie 1957.

ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОРТОТРОПНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Дается теория тонких ортотропных конструкций, полученных несимметричным образованием по отношению к срединной поверхности.

Показано, что для этих конструкций существуют четыре различных поверхности, две, в которых при действии сил, нормальных к сечениям, перпендикулярным относительно элемента жесткости, не происходит изгиба, и две, в которых при действии касательных сил не происходит кручения.

Задача рассматривается в общем случае, при котором элементы жесткости пересекаются под произвольными, отличными от 90°, углами.

Принято условно производить весь расчет с приведением всех усилий и моментов к единной основной поверхности (поверхность без звездочек). Определяются векторы усилия и момента $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, действующие на основную поверхность и являющиеся статически эквивалентами суммы усилий и моментов в конструкции (формулы 13 — 16).

На основании уравнений равновесия в векторной форме (18), векторы усилий и моментов выражаются через четыре потенциала (формулы 24 — 27). Полученные соотношения позволяют выразить действительные усилия в конструкции через эти потенциалы.

В II даются физические соотношения усилие-деформация, полученные на основе допущения справедливости гипотезы Лява-Кирхгофа. Усилия и моменты (формулы 30 — 32) выражаются в зависимости от деформации поврхностей, к которым они приложены.

Выражая при помощи соотношений 51—53 и 54—56, составляющие тензоров деформации остальных поверхностей через составляющие тензоров деформации основной поверхности, в V и VI авторы указывают возможность решения задачи тонких ортотропных конструкций, несимметричных относительно срединной поверхности, посредством решения системы уравнений с частными производными с четырьмя функциями усилий или системы уравнений с тремя составляющими вектора перемещения основной поверхности.

UNE THÉORIE DES STRUCTURES MINCES ORTHOTROPES, ASYMÉTRIQUES PAR RAPPORT À LA SURFACE MÉDIANE

RÉSUMÉ

Dans cette étude, les auteurs exposent une théorie des structures minces, orthotropes par construction, structure obtenue par formation (structure intégrale) asymétrique, par rapport à la surface médiane.

Ils montrent l'existence, dans le cas de ces structures, de quatre surfaces distinctes : deux surfaces, dans lesquelles, en appliquant des forces normales aux sections normales du raidisseur, il n'y a pas de fléchissement, et deux autres surfaces, dans lesquelles, en appliquant des forces tangentielles, il n'y a pas de torsion.

Les auteurs abordent le problème du cas général, où les raidisseurs s'entrecoupent, sous des angles quelconques, différents de 90°.

On est convenu d'effectuer tout le calcul en réduisant les efforts et les moments à une seule surface de base (surface non affectée d'astérisques). On définit les vecteurs effort et moment, $\overline{P}$ et $\overline{Q}$, qui affectent la surface de base et qui sont statiquement équivalents à l'ensemble des efforts et des moments de l'enveloppe (relations 13 à 16).

En vertu des équations d'équilibre sous forme vectorielle (18), on exprime les vecteurs effort et moment par quatre potentiels (relations 24 à 27), relations qui donnent la possibilité d'exprimer les efforts réels de la structure, par ces mêmes potentiels.

En II, les auteurs donnent les relations physiques effort-déformation, déduites en admettant comme valable l'hypothèse Love-Kirchoff. Les efforts et les moments (relations 30 à 32) sont exprimés en fonction des déformations de la surface à laquelle ils sont appliqués.

Exprimant par les relations (51 à 53) et (54 à 56) les composantes des tenseurs de déformation des autres surfaces, par les composantes des tenseurs de déformation de la surface de base, on indique en V et VI, la possibilité de résoudre le problème des structures orthotropes minces, asymétriques par rapport à la surface médiane, en résolvant un système d'équations aux dérivées partielles, dans quatre fonctions d'effort, ou bien en résolvant un système d'équations dans les trois composantes du vecteur déplacement de la surface de base.

BIBLIOGRAFIE

1. DJI-DJÜAN DSCHOU, *Die Druckfestigkeit versteifter zylindrischer Schalen.* Luftfahrforschung, **II** (1953).
2. A. L. GOLDENWEISER, *Kakestvennoe issledovannie napriojenovo sostoiania tonkoi oholocki.* Prikl. Matem. Meh. **XI**, *6* (1945).
3. A. I. LURIE, *Obșaia teoria uprughich tonkich ohalocek.* Prikl. Matem. Mech., **IV** b, 2 (1940).
4. L. LIBRESCU, *O nouă formulare a problemei generale a învelitorilor subțiri elastice.* Studii și cercet. de mecanică aplicată, **VIII**, *2* (1057).
5. A. L. GOLDENWEISER, *Teoria uprughih tonkih obolocek.* Moscova, (1953).

TRATAMENTE MECANICE ŞI PRELUCRAREA MEDIILOR DEFORMABILE CONTINUE

ASUPRA UNUI CRITERIU PENTRU DETERMINAREA ZONEI DE PRESIUNE SPECIFICĂ MAXIMĂ LA LAMINAREA METALELOR

DE

I. MITRICĂ

În lucrarea de faţă se studiază situarea zonei de presiune specifică maximă în focarul de laminare pentru cazul laminorului duo, a cărui cajă de lucru constă din doi cilindri orizontali, aşezaţi unul deasupra celuilalt, axele cilindrilor fiind situate în acelaşi plan vertical. Cei doi cilindri de lucru au acelaşi diametru şi sînt acţionaţi concomitent de motor, laminarea metalului făcîndu-se fără întindere anterioară şi posterioară.

La laminarea longitudinală a metalului cald sau rece, forma secţiunii iniţiale a materialului este modificată prin deformare plastică.

Consideraţiile ce se vor face se axează pe teoria recentă a repartizării presiunii specifice, pe suprafaţa de contact [1], [7], care stabileşte ecuaţiile diferenţiale ale presiunii specifice deduse în ipoteza curgerii plan paralele în zona de deformare, care au la bază cea de-a patra ipoteză a stării de tensiune limită :

$$\frac{dp_x}{dx} - \frac{k}{y}\frac{dy}{dx} \pm \frac{t_x}{y} = 0, \tag{1}$$

unde

p_x — presiunea specifică exercitată de cilindri asupra metalului laminat ;

t_x — forţa specifică de frecare dintre metalul laminat şi suprafaţa cilindrilor ;

$k = 1{,}15\ k_f$, unde k_f — limita de curgere sau rezistenţa deformării plastice la întinderea simplă ;

x, y — coordonatele arcului de prindere (fig. 1).

Pentru zona de întîrziere, în ecuaţia (1) se va lua semnul $+$, iar pentru zona de avans, semnul $-$, în faţa ultimului termen din membrul stîng.

Formulele existente în literatură, pentru determinarea funcții ce reprezintă alura presiunii specifice, sînt doar soluții particulare ale ecuațiilor (1), deoarece relația dintre p_x și t_x nu este determinată.

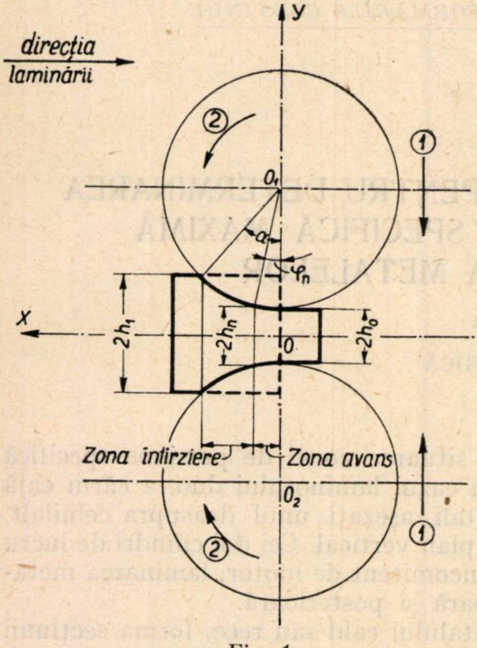


Fig. 1

Este util, pentru cele ce urmează, să se remarce că ecuațiile (1) consideră o refulare a materialului în focarul de laminare, în două sensuri opuse, definind în acest fel zonele de avans și întîrziere, despărțite prin linia de presiune specifică maximă (neutră). Literatura de specialitate [1], [3], cercetează în acest mod problema, iar formulele de calcul pentru determinarea presiunii specifice, după natura ipotezelor, dau valori pe care experiența le verifică, evident, cu diferite aproximații.

Ca și în cazul ecuațiilor (1) deduse din condițiile de echilibru ale unui element infinitezimal, se consideră că la un moment oarecare dat, materialul refulează de o parte și de alta a secțiunii neutre sub efectul presiunii ce o exercită cilindrii asupra laminatului.

Asimilăm inițial efectul real al laminării, cu efectul de comprimare al barei de secțiune dreptunghiulară între cei doi cilindri ce nu se rotesc, dar care se pot apropia în mod simetric unul de celălalt în sensul 1 (fig. 1), după ce se așază bara cu planul de capăt, pe planul vertical, ce trece prin axele longitudinale ale celor doi cilindri.

Și în acest caz particular de presare, deplasarea particulelor de material se va face în direcția în care întîlnește rezistența cea mai mică. Analog cu presarea aceluiași material între două plăci paralele (pe care le putem asimila cu doi cilindri de rază infinită), admitem că materialul, dislocat din zona de deformare în secțiunea considerată, se repartizează la cele două capete ale barei, după o axă de simetrie ce trece prin centrul de greutate al secțiunii, admițînd că în timpul deformării plastice, volumul rămîne constant, ipoteză acceptată de practica curentă.

După presarea materialului la dimensiunea de ieșire $2h_0$, presupunem că cilindrii se vor învîrti în sensul 2, aducînd în focar în mod continuu material, așa cum se produce dealtfel fenomenul real.

Se folosesc notațiile :

R — raza cilindrului (mm) ;
$2h_1$ — înălțimea deschiderii la intrarea între cilindri (mm) ;

$2h_0$ — înălţimea deschiderii la ieşirea dintre cilindri (mm) ;
Δh — reducerea liniară (mm) ;
ε — reducerea relativă ;
l — proiecţia orizontală a arcului de contact pe axa ox (mm) ;
B_1 — lăţimea barei înainte de laminare (mm) ;
v_1 — viteza periferică a cilindrului (mm/s) ;
μ — coeficientul de frecare ;
φ_n — unghiul de presiune specifică maximă (neutru) ;
α — unghiul de prindere.

Deoarece se admite că materialul dislocat din zona de deformare se repartizează la cele două capete ale barei după o axă de simetrie ce trece prin centrul de greutate al secţiunii considerate (fig. 1), se adoptă unghiul de prindere α ca variabilă independentă pentru cazurile posibile de laminare.

Dacă se notează cu $\varphi_{n,g}$, unghiul sub care se înscrie centrul de greutate al secţiunii $A_1C_1B_1A_2A_1$ (fig. 2) şi se foloseşte formula consacrată pentru calculul centrului de greutate pentru sectorul de cerc $A_1B_1A_2A_1$ şi triunghiul dreptunghic $A_1C_1B_1A_1$, se obţine în final următoarea expresie :

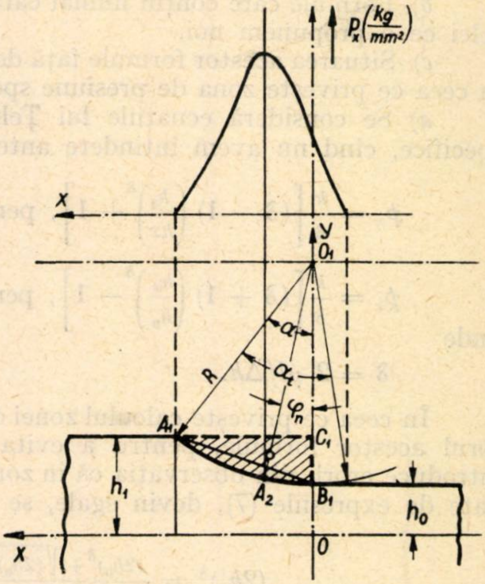


Fig. 2

$$\sin \varphi_{n,g} = \frac{8}{3}\,\frac{3 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\alpha - \sin 2\alpha}\,\sin^4\frac{\alpha}{2}\,. \tag{2}$$

Se adoptă în calcule următoarele formule din teoria clasică a laminării :

$$\cos \alpha = 1 - \frac{h_1 - h_0}{R}\,, \tag{3}$$

$$\Delta h = 2\,(h_1 - h_0), \tag{4}$$

$$\varepsilon\% = \frac{h_1 - h_0}{h_1}\cdot 100, \tag{5}$$

$$l = R \sin \alpha. \tag{6}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Trebuie remarcat că din expresia (2) se determină unghiul de presiune specifică maximă $\varphi_{n,g}$, ce rezultă din ipoteza formulată mai sus, că materialul refulează de o parte şi de alta a zonei neutre şi că în această formulă sînt incluse doar caracteristicile geometrice ale laminării : R, h_1 şi h_0.

Vom compara rezultatele de calcul ce se obțin cu formula (2) cu rezultatele date de alte formule. Pentru sistematizarea și pentru ordonarea concluziilor, comparația se va face față de :

a) Formule care conțin, pe lîngă elementele geometrice și coeficientul de frecare.

b) Formule care conțin numai caracteristicile geometrice, de structura celei ce o propunem noi.

c) Situarea acestor formule față de rezultatele ce se obțin experimental în ceea ce privește zona de presiune specifică maximă.

a) Se consideră ecuațiile lui Țelicov pentru determinarea presiunii specifice, cînd nu avem întindere anterioară și posterioară :

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \frac{k}{\delta}\left[(\delta-1)\left(\frac{h_1}{hx}\right)^{\delta}+1\right], \text{ pentru zona de întîrziere,} \\ p_x &= \frac{k}{\delta}\left[(\delta+1)\left(\frac{h_x}{h_0}\right)^{\delta}-1\right], \text{ pentru zona de avans,} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

unde

$$\delta = 2\ \mu l/\Delta h. \tag{8}$$

În ceea ce privește calculul zonei de presiune specifică maximă cu ajutorul acestor formule, pentru a evita calculul grafo-analitic obișnuit ce introduce erori, din observația că în zona neutră valorile presiunii specifice date de expresiile (7), devin egale, se obține :

$$(2h_n)^{\delta} = \frac{(2h_0)^{\delta}+\sqrt{(2h_0)^{2\delta}+(\delta-1)(4h_0h_1)^{\delta}}}{\delta+1}, \tag{9}$$

obținînd valoarea lui h_n, putem calcula mărimea unghiului neutru

$$\cos\varphi_{n,T} = 1 - \frac{h_n - h_0}{R}, \tag{10}$$

unde $2h_n$ — înălțimea deschiderii în dreptul secțiunii neutre.

Precizăm că ecuațiile lui Țelicov sînt deduse pe baza ecuațiilor (1) pentru care, în soluția generală se înlocuiește arcul de cerc prin coardă, iar în privința legăturii dintre p_x și t_x se admite alunecare cu frecare uscată [1].

O soluție mult mai apropiată de rezultatele experimentale în ceea ce privește valoarea unghiului neutru se dă în lucrarea [2], unde se consideră arcul de prindere ca arc de cerc. Se calculează prin metoda grafo-analitică valoarea unghiului neutru cînd nu se ține seamă de ecruisarea materialului ($\varphi_{n,\psi=1}$) și cînd se ține seamă de ecruisare ($\varphi_{n,\psi=2}$), ψ fiind coeficientul de ecruisare al materialului laminat.

O formulă pentru determinarea unghiului neutru, analoagă cu cea a lui Țelikov este și cea dată de Pavlov, care are următoarea expresie :

$$\varphi_{n,P} = \frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2\beta}\right), \tag{11}$$

unde β este unghiul de frecare a cărui tangentă este egală cu coeficientul de frecare între metal și cilindri. Această formulă a fost dedusă din condiția repartizării uniforme a presiunilor specifice pe arcul de contact, ceea ce nu corespunde realității și nu este în concordanță cu teoria modernă a laminării. Dă însă rezultate acceptabile pentru cazul laminării fără tracțiune și cînd nu se ține seama de ecruisarea materialului.

Se calculează, pentru comparația valorilor unghiului neutru date de formula (2), cu valorile date de formulele (7), (11), în cele trei condiții de variație a parametrilor $2h_1$, $2h_0$ și l, funcție de reducerea relativă ce caracterizează variația focarului de deformare. Coeficientului de frecare îi vom da valori de la 0,1 la 1, mărimea la care nu se ajunge dealtfel în fenomenul de laminare.

$$2h_1 = \text{constant.}$$

În figura 3 se studiază cazul de laminare

$$2R = 600 \text{ mm}, \; 2h_1 = 36 \text{ mm}, \; \mu = 0{,}6$$

pentru : $2h_0 = 12$ mm, ($\varepsilon = 66{,}6\%$) ; $2h_0 = 18$ mm, ($\varepsilon = 50\%$) ; $2h_0 = 24$ mm, ($\varepsilon = 24\%$).

În această diagramă se dau și valorile $\varphi_{n.\,\psi=1}$, $\varphi_{n.\,\psi=2}$, $2h_0 = \text{constant.}$

În figura 4 se calculează unghiul neutru pentru :

$2R = 200$ mm, $2h_0 = 1$ mm, $\mu = 0{,}2$, la următoarele patru cazuri : $2h_1 = 1{,}11$ mm, ($\varepsilon = 10\%$) ; $2h_1 = 1{,}33$ mm, ($\varepsilon = 20\%$) ; $2h_1 = 1{,}482$ mm, ($\varepsilon = 30\%$) ; $2h_1 = 2{,}00$ mm, ($\varepsilon = 50\%$).

$$l = \text{constant} \; (\Delta h = \text{constant}).$$

De asemenea în figura 5 se studiază cazul de laminare :

$2R = 200$ mm, $l = 9{,}99$ mm, $\mu = 0{,}1$, pentru $2h_1 = 10$ mm, $2h_0 = 9$ mm ($\varepsilon = 10\%$) ; $2h_1 = 5$ mm, $2h_0 = 4$ mm, ($\varepsilon = 25\%$) ; $2h_1 = 2$ mm, $2h_0 = 1$ mm, ($\varepsilon = 50\%$).

Pentru a avea o privire completă asupra tuturor posibilităților de laminare, se redă în diagrama din figura 6, evoluția unghiurilor neutre la varierea diametrului cilindrilor de laminare pentru trei exemple [4] :

$2h_1 = 2{,}86$ mm, $2h_0 = 2{,}00$ mm, ($\varepsilon = 30\%$), pentru :

$2R = 200$ mm, $2\,R = 400$ mm, $2R = 700$ mm.

În această diagramă s-au trasat curbele Țelikov și Pavlov pentru diferiți coeficienți de frecare.

b) Se va calcula valoarea unghiului neutru după două metode pentru studiul repartiției presiunilor de laminare pe baza analogiei hidrodinamice a laminării, ce studiază mișcarea permanentă a unui material vîscos ce este laminat.

Se consideră cazul cînd arcul de prindere este considerat drept coardă [5] și cazul cînd arcul de prindere este considerat un arc de cerc [6].

Aceste metode de calcul a presiunii specifice de laminare permit determinarea zonei neutre pentru cazul de laminare ce se studiază, oferind de asemenea posibilitatea de a evita calculul grafo-analitic al unghiului neutru.

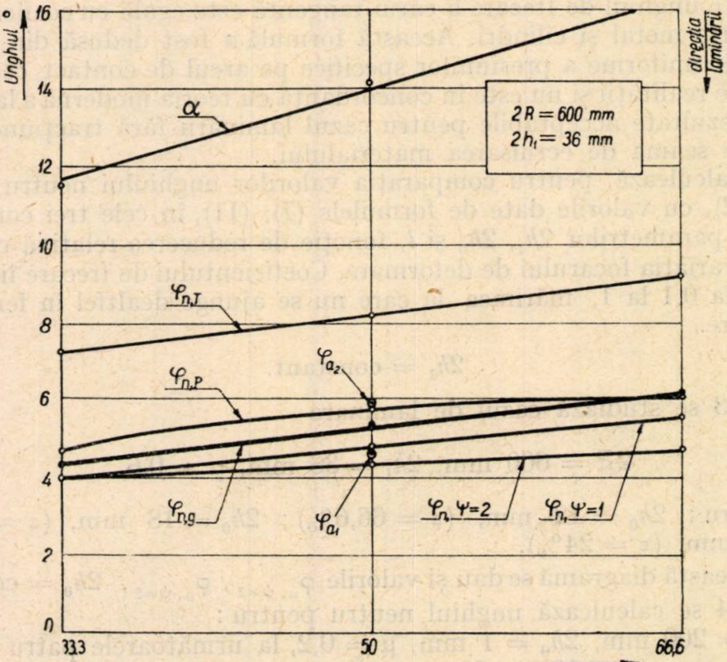

Unghiul °
16
14
12
10
8
6
4
2
0
α
2R = 600 mm
2h₁ = 36 mm
direcţia laminării
φ_{nT}
φ_{nP}
φ_{a_2}
φ_{ng}
φ_{a_1}
φ_n ψ=2
φ_n ψ=1
33,3
50
66,6
ε%

Fig. 3

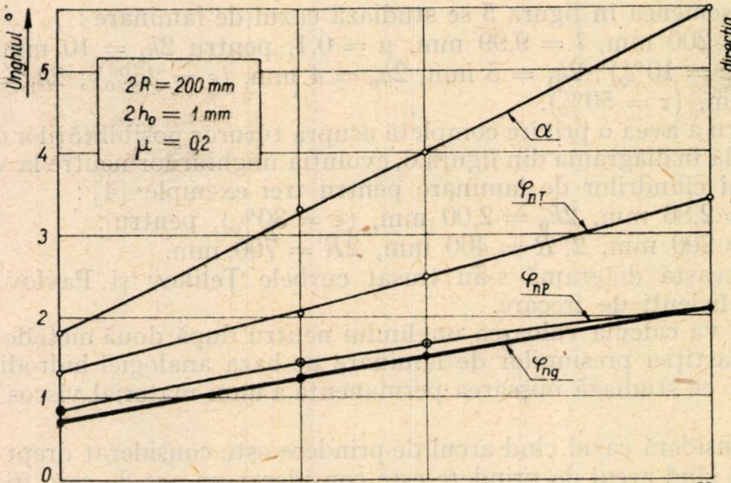

Unghiul °
5
4
3
2
1
0
2R = 200 mm
2h₀ = 1 mm
μ = 0,2
α
φ_{nT}
φ_{nP}
φ_{ng}
direcţia laminării
10
24,8
32,5
50
ε%

Fig. 4

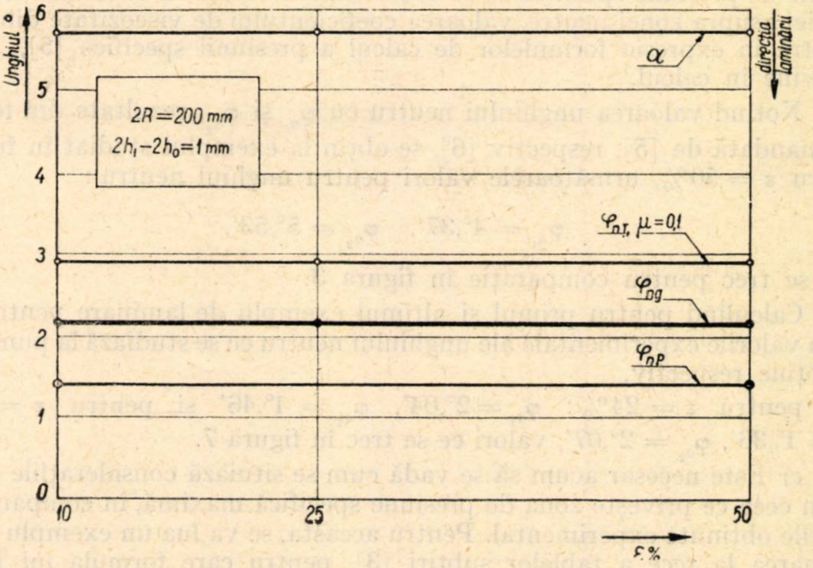

Unghiul °
6
5
4
3
2
1
0
10
25
50
ε %
direcţia laminării
α
2R = 200 mm
2h₁−2h₀ = 1 mm
φnT, μ=0,1
φng
φnP

Fig. 5

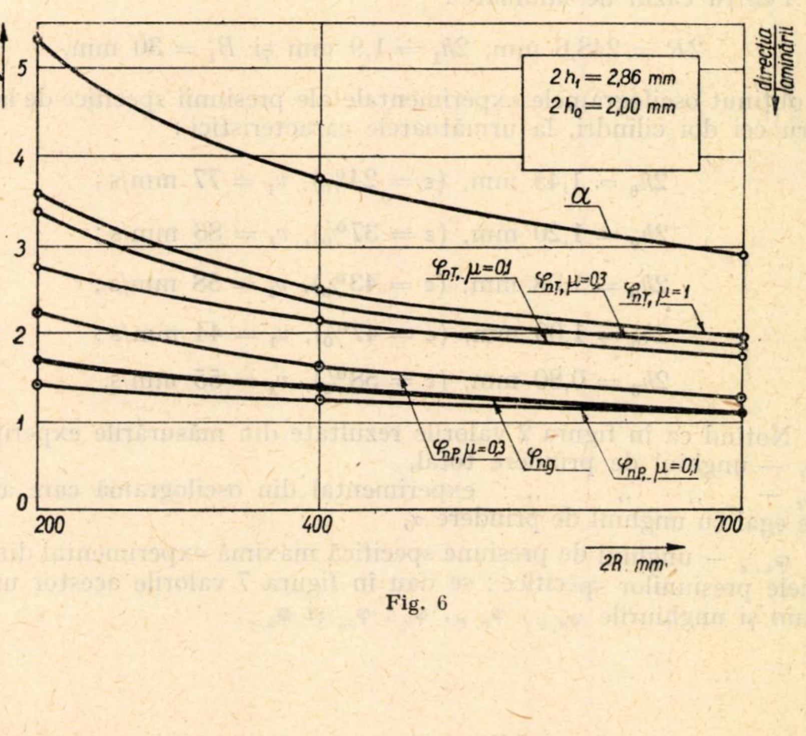

Unghiul °
5
4
3
2
1
0
200
400
700
2R mm
direcţia laminării
2h₁ = 2,86 mm
2h₀ = 2,00 mm
α
φnT, μ=0,1
φnT, μ=0,3
φnT, μ=1
φnP, μ=0,3
φng
φnP, μ=0,1

Fig. 6

Metoda analogiei hidrodinamice reproduce cu o bună aproximaţie curbele de presiune specifică ce se obţin experimental. În consideraţiile ce se fac aici asupra zonei neutre, valoarea coeficientului de viscozitate dinamică, ce intră în expresia formulelor de calcul a presiunii specifice [5], [6], nu intervine în calcul.

Notînd valoarea unghiului neutru cu φ_{a_1} şi φ_{a_2}, rezultate din formula recomandată de [5], respectiv [6], se obţin la exemplul studiat în figura 3 pentru $\varepsilon = 50\%$, următoarele valori pentru unghiul neutru :

$$\varphi_{a_1} = 4°,37', \quad \varphi_{a_2} = 5°,53',$$

care se trec pentru comparaţie în figura 3.

Calculînd pentru primul şi ultimul exemplu de laminare pentru care avem valorile experimentale ale unghiului neutru ce se studiază la punctul c), se obţine respectiv,

pentru $\varepsilon = 24\%$: $\varphi_{a_1} = 2°,04'$, $\varphi_{a_2} = 1°,46'$ şi pentru $\varepsilon = 58\%$: $\varphi_{a_1} = 1°,36'$, $\varphi_{a_2} = 2°,07'$, valori ce se trec în figura 7.

c) Este necesar acum să se vadă cum se situiază consideraţiile de mai sus în ceea ce priveşte zona de presiune specifică maximă, în comparaţie cu valorile obţinute experimental. Pentru aceasta, se va lua un exemplu pentru laminarea la rece a tablelor subţiri [3], pentru care formula lui Ţelikov este recomandată ca reflectînd corect legile reale ale rezistenţei la deformare şi care din acest punct de vedere, pentru acest caz, dă rezultate mai mici, faţă de valorile experimentale.

Pentru cazul de laminare :

$$2R = 248,6 \text{ mm}, \quad 2h_1 = 1,9 \text{ mm şi } B_1 = 30 \text{ mm},$$

s-au obţinut oscilogramele experimentale ale presiunii specifice de laminare pentru cei doi cilindri, la următoarele caracteristici :

$$2h_0 = 1,45 \text{ mm}, \ (\varepsilon = 24\%), \ v_1 = 77 \text{ mm/s};$$

$$2h_0 = 1,20 \text{ mm}, \ (\varepsilon = 37\%), \ v_1 = 86 \text{ mm/s};$$

$$2h_0 = 1,08 \text{ mm}, \ (\varepsilon = 43\%), \ v_1 = 58 \text{ mm/s};$$

$$2h_0 = 1,00 \text{ mm}, \ (\varepsilon = 47\%), \ v_1 = 44 \text{ mm/s};$$

$$2h_0 = 0,80 \text{ mm}, \ (\varepsilon = 58\%), \ v_1 = 55 \text{ mm/s}.$$

Notînd ca în figura 2 valorile rezultate din măsurările experimentale cu α_t — unghiul de prindere total,

α_e — ,, ,, ,, experimental din oscilogramă care ar trebui să fie egal cu unghiul de prindere α,

$\varphi_{n,e}$ — unghiul de presiune specifică maximă experimental din oscilogramele presiunilor specifice ; se dau în figura 7 valorile acestor unghiuri, precum şi unghiurile $\varphi_{n,T}$, $\varphi_{n,P}$, φ_{a_1}, φ_{a_2} şi $\varphi_{n,g}$.

Din aceste exemple de calcul și din exemplele experimentale se pot desprinde unele concluzii cu caracter de generalitate asupra valorilor unghiului de presiune specifică maximă, în cazul enunțat.

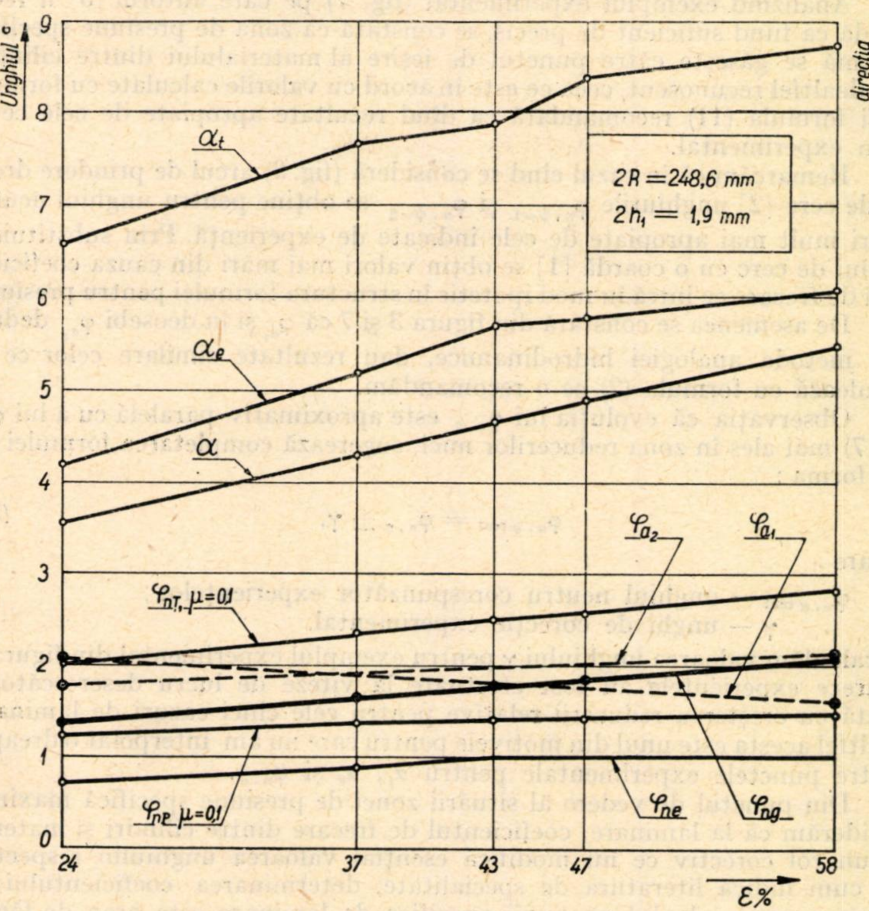


Fig. 7

Astfel, valorile α, $\varphi_{n,T}$, $\varphi_{n,g}$, funcție de reducerea relativă în coordonate drepte prezintă un aspect liniar. Foarte apropiată de linia dreaptă este și arcul de parabolă al ecuației pentru determinarea zonei neutre dată de Pavlov (fig. 3, 4 și 5).

Deoarece exemplele studiate cuprind toate cazurile posibile de laminare, se trage concluzia că $\varphi_{n,g}$*) este totdeauna mai mic ca $\varphi_{n,T}$ la oricare valoare practică a coeficientului de frecare, $\varphi_{n.p}$ este apropiat de $\varphi_{n.g}$ mai mare sau mai mic, după valoarea parametrilor $2h_1$, $2h_0$, l și a coeficientului de frecare (fig. 6).

---

*) Pentru formula (2), Blass [4] indică formula $\varphi_n = \frac{3}{8}\alpha$, pe care o folosește în mod incorect pentru a indica locul punctului de aplicație al forței de laminare rezultantă.

Analizînd exemplul experimental (fig. 7) pe care autorul [3] îl recomandă ca fiind suficient de precis, se constată că zona de presiune specifică maximă se găsește către punctul de ieșire al materialului dintre cilindri, fapt dealtfel recunoscut, ceea ce este în acord cu valorile calculate cu formula (2) și formula (11) recomandată ca dînd rezultate apropiate de cele ce se obțin experimental.

Remarcăm că în cazul cînd se consideră (fig. 3) arcul de prindere drept arc de cerc [2] unghiurile $\varphi_{n.\psi=1}$ și $\varphi_{n.\psi=2}$ se obține pentru unghiul neutru valori mult mai apropiate de cele indicate de experiență. Prin substituirea arcului de cerc cu o coardă [1] se obțin valori mai mari din cauza coeficientului de frecare ce intră în mod ipotetic în structura formulei pentru presiune.

De asemenea se constată din figura 3 și 7 că φ_{a_1} și în deosebi φ_{a_2} deduse prin metoda analogiei hidrodinamice, dau rezultate similare celor ce se calculează cu formula (2) ce o recomandăm.

Observația că evoluția lui $\varphi_{n.g}$ este aproximativ paralelă cu a lui $\varphi_{n.e}$ (fig. 7) mai ales în zona reducerilor mici, sugerează completarea formulei (2) sub forma :

$$\varphi_{n.g\,\mathrm{real}} = \varphi_{n.g} \pm \gamma, \tag{12}$$

în care

$\varphi_{n.g\,\mathrm{real}}$ — unghiul neutru corespunzător experiențelor ;

γ — unghi de corecție experimental.

Nu calculăm valoarea unghiului γ pentru exemplul experimental din figura 7, deoarece experiențele au fost efectuate la viteze de lucru descrescătoare o dată cu creșterea reducerii relative pentru cele cinci cazuri de laminare. De altfel acesta este unul din motivele pentru care nu am interpolat o dreaptă printre punctele experimentale pentru α_l, α_e și $\varphi_{n.e}$.

Din punctul de vedere al situării zonei de presiune specifică maximă, considerăm că la laminare, coeficientul de frecare dintre cilindri și material are un rol corectiv ce nu modifică esențial valoarea unghiului respectiv. Așa cum indică literatura de specialitate, determinarea coeficientului de frecare pentru calculul presiunii specifice de laminare este greu de făcut, el fiind o funcție complicată, ce depinde de numeroși parametri.

Plecînd de la considerația că efectul de laminare este determinat în primă aproximație de caracteristicile geometrice și că materialul refulează în stare plastică, se poate determina zona de presiune specifică maximă, pentru cazul de laminare specificat.

Formula (2) are o expresie simplă și dă rezultate pe care experiența le verifică mulțumitor.

★

Conducîndu-ne după considerentul verificat de experiență că zona de presiune specifică maximă este situată spre ieșirea laminatului dintre cilindri, ne propunem să determinăm coeficientul de frecare ce intră în calculul ecuației lui Țelikov, în așa fel ca zona de presiune specifică maximă să indice o valoare ce se calculează cu formula (2) pentru unghiul neutru determinat prin considerentele expuse.

Din condiția ca în zona neutră valorile indicate de cele două expresii ale presiunii, de întîrziere și avans să fie egale, se obține

$$(\delta - 1)\left(\frac{h_1}{h_n}\right)^{\delta} + 1 = (\delta + 1)\left(\frac{h_n}{h_0}\right)^{\delta} - 1. \tag{13}$$

Înălțimea secțiunii în zona neutră se calculează cu relația :

$$h_n = R\,(1 - \cos \varphi_{n,g}) + h_0, \tag{14}$$

unde $\varphi_{n,g}$ se calculează cu formula (2). Dacă notăm rapoartele cunoscute :

$$\frac{h_1}{h_n} = a\,,\ \frac{h_n}{h_0} = b \tag{15}$$

și reținînd pentru o bună convergență primii trei termeni din dezvoltarea în serie pentru a^{δ} și b^{δ}, în care se notează :

$$\ln a = u,\ \ln b = v$$

se obține ecuația în δ_g

$$\delta_g^2\,(u^2 - v^2) + \delta_g[2\,(u - v) - (u^2 + v^2)] - 2\,(u + v) = 0\,, \tag{16}$$

cu soluția ce ne interesează :

$$\delta_g = \frac{1}{2\,(u^2 - v^2)}\Big[(u^2 + v^2) - 2\,(u - v) + \\ + \sqrt{[2\,(u - v) - (u^2 + v^2)]^2 + 8\,(u^2 - v^2)\,(u + v)}\,\Big]. \tag{17}$$

Coeficientul δ_g face ca cele două curbe date de ecuațiile lui Țelikov pentru presiunea specifică maximă să se întretaie la valoarea $\varphi_{n,g}$.

În aceste condiții, conform relației (8), se poate scrie :

$$\mu = \frac{\delta_g}{l}\,(h_1 - h_0). \tag{18}$$

Avem deci posibilitatea să calculăm valoarea coeficientului de frecare ce situează judicios cele două ramuri ale presiunii specifice, cînd se consideră că arcul de prindere este o coardă. Pentru exemplul din figura 3 ($\varepsilon = 50\%$), rezultă o valoare mai mică pentru coeficientul de frecare, anume $\mu = 0{,}178$, ceea ce duce la micșorarea valorilor curente pentru presiunea specifică. Această observație este generală și de aci se desprinde concluzia că valoarea coeficientului de frecare, cînd se consideră arcul de prindere drept coardă, distorsionează unghiul neutru către valori mai mari decît cele obținute experimental, pe măsură ce i se atribuie acestui coeficient valori crescătoare.

Considerînd arcul de prindere arc de cerc [2] se micşorează unghiul neutru şi se măreşte valoarea presiunii specifice medii, evident, în detrimentul simplităţii de calcul.

Studiind plasarea zonei de presiune specifică maximă în ipoteza admisă în această lucrare, se obţine o formulă simplă din care rezultă pentru unghiul neutru o valoare suficient de apropiată de rezultatele experimentale.

Prin aceasta se pot efectua studii asupra curbelor teoretice de repartiţie a presiunii specifice în vederea punerii lor în acord cu oscilogramele ridicate experimental.

Avînd expresia unghiului neutru, se poate face studiul ,,avansului'' materialului în timpul procesului laminării.

Relaţia ce dă mărimea unghiului neutru permite a face consideraţii asupra coeficientului de frecare ce intervine în relaţiile teoretice ale funcţiilor de presiune specifică, deduse pe baza ecuaţiilor (1).

Primită la redacţie la 17 august 1957.

К ВОПРОСУ О КРИТЕРИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗОНЫ МАКСИМАЛЬНОГО УДЕЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ ПРОКАТКЕ МЕТАЛЛОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе исследуется зона максимального удельного давления при продольной прокатке металлов на стане с двумя цилиндрами, приводимыми в движение мотором в предположении, что прокатка имеет место без растяжения.

В предположении пластического вытеснения металла в обе стороны от нейтральной зоны определяется формула (2). Численные результаты, полученные при помощи этой формулы, сопоставляются с другими формулами и с экспериментальными данными.

Определяется коэффициент трения в уравнениях Целикова, дающих обоснованное положение зоны максимального удельного давления.

UN CRITÈRE POUR DÉTERMINER LA ZONE DE PRESSION SPÉCIFIQUE MAXIMUM AU LAMINAGE DES MÉTAUX

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur étudie la zone de pression spécifique maximum au laminage longitudinal des métaux, au laminoir duo, les deux cylindres étant actionnés par le moteur, pour le cas où l'on lamine sans étirage.

En vertu de l'hypothèse suivant laquelle le matériel est refoulé plastiquement d'un côté et de l'autre de la zone neutre, on détermine la formule (2).

On compare les résultats numériques, donnés par cette formule, avec d'autres formules de la littérature et avec les résultats expérimentaux.

On détermine le coefficient de frottement des équations de Tzelicov, qui situe judicieusement la zone de pression spécifique maximum.

BIBLIOGRAFIE

1. I. A. ŢELIKOV, *Instalaţii de laminare*. Ed. tehnică, Bucureşti (1952).
2. M. POPOV, I. MITRICĂ, E. DECIU, *Studiul presiunilor specifice pe suprafaţa de contact în procesul de laminare*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *2* (1956).
3. A. A. COROLEV, *Novie issledovaniia deformaţii metalla pri prokatke*. Maşghiz, Moscova (1953).
4. M. I. CIJIKOV, *Laminarea*. Ed. tehnică, Bucureşti (1955).
5. M. S. TARG, *Osnovnie zadacii teorii lamînar nîh tecenii*. Gostehizdat, Moscova (1951).
6. M. POPOV, E. DECIU, I. MITRICĂ, *Consideraţii asupra unei analogii hidrodinamice a laminării*, Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3* (1957).
7. P. W. WHITTON, *Computation of Roll Force and Torque in Cold-Rolling by Modern Theory*. Journal of Applied Mechanics, **23**, *3* (1956).

ASUPRA PRECIZIEI DE MĂSURARE A MOMENTULUI DE FRECARE LA LAGĂRELE CIRCULARE, CU AJUTORUL SISTEMELOR MECANICE TIP PARALELOGRAM

DE

GH. VASILCA şi AL. NICA

Unul din parametrii funcţionali importanţi ai materialelor antifricţiune folosite în construcţia lagărelor cu alunecare este şi coeficientul de frecare. Metoda de determinare a acestui coeficient din momentul de frecare, obţinut prin măsurare directă, prezintă şi unele inconveniente ; aceasta mai ales cînd se studiază variaţia coeficientului de frecare, care implică măsurători ale momentului în diferite regimuri de funcţionare ale lagărului şi cînd încercările se fac cu instalaţii care pun cuzinetul experimental în condiţii constructive apropiate de acelea ale lagărelor practice.

Pentru uşurarea unor asemenea lucrări experimentale, în cazul studiului variaţiei coeficientului de frecare de-a lungul caracteristicii $p=g(v)$ în regimul de funcţionare a lagărului la temperatură constantă, a fost elaborată o metodă [1] care permite efectuarea studiului măsurînd momentul de frecare într-un singur punct al curbei $p = g(v)$.

Inconvenientele la măsurarea directă a momentului de frecare la sistemele mecanice cu paralelogram şi la instalaţiile de tipul menţionat, apar mai ales sub formă de împrăştieri a rezultatelor, împrăştieri care apar şi la măsurători efectuate cu alte sisteme [2]. Se constată de asemenea că la sistemele paralelogram parametrii care pot influenţa precizia măsurătorilor diferă de la un regim de lucru la altul. Cunoaşterea condiţiilor de lucru ale sistemului în care precizia de măsurare a momentului de frecare este mai satisfăcătoare, este deci de mare importanţă îndeosebi cînd se studiază variaţia coeficientului de frecare cu ajutorul metodei de măsurare a momentului într-un singur punct al curbei $p = g(v)$.

În cazul de faţă, la o maşină de încercat lagăre circulare cu ∅ 36 mm şi cu posibilităţi de încărcare pînă la o sarcină totală de 1000 kg s-a folosit pentru măsurarea momentului de frecare un dispozitiv tip paralelogram, *ABCD*, montat într-un ansamblu, cum se arată schematic în figura 1.

Faţă de alte sisteme folosite pentru astfel de scopuri a fost ales paralelogramul din cauza sarcinilor relativ mari la care lucrează. Evident că pentru articulaţiile *A*, *B*, *C*, *D* şi *E* ale sistemului nu pot fi luate în considerare decît lagărele cuțit (fig. 2). Cu toate acestea s-a putut constata că măsurătorile momentului de frecare au fost afectate de erori datorită atît paralelogramului însuși, cît și deformărilor paralelogramului produse prin sistemul de încărcare (*EFGHK*) al lagărului.

Momentul de frecare fiind mic, erorile depășesc în unele cazuri valoarea momentului de măsurat și neputînd fi determinate exact, lipsesc aceste măsurători de precizia necesară. Efectele negative ale paralelogramului asupra preciziei de măsurare se pot datora în principal geometriei sistemului, echilibrării, precum și frecărilor din lagărele cuțit. Primele două efecte se traduc deobicei prin introducerea în sistem a unui moment suplimentar, denumit fals, care mărește sau scade aparent momentul de frecare de măsurat din lagărul experimental. Frecările din lagărele cuțit influențează de asemenea sensibilitatea sistemului.

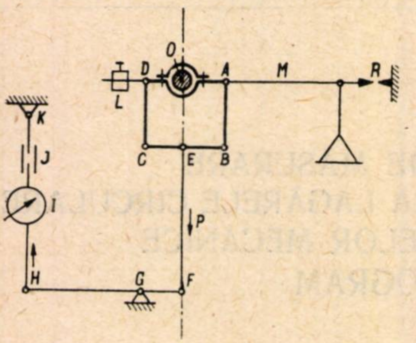


Fig. 1

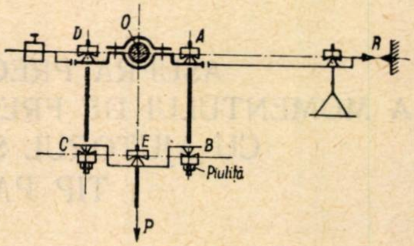


Fig. 2

Momentul fals, precum și alte efecte datorite geometriei sistemului apar cînd paralelogramul nu este o figură geometrică perfectă, adică atunci cînd $AB \neq CD$ și $AD \neq BC$, iar punctele O și E nu sînt exact la mijlocul laturilor AD respectiv BC. De asemenea, dacă articulațiile din A, O și D, respectiv din B, E și C nu sînt coliniare. Componentele din A și D ale sarcinii totale de încărcare P pot deveni în asemenea cazuri neegale ca mărime sau neparalele ca direcție și dau, prin proiecțiile lor normale pe AD, un moment rezultant fals în jurul punctului de rotație O, care poate fi de același sens sau de sens contrar cu momentul de frecare de măsurat.

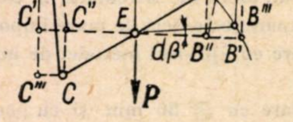


Fig. 3

1. Diferitele abateri de la geometria perfectă a paralelogramului dau unele efecte, care se vor arăta în cele ce urmează și cantitativ pentru dimensiunile nominale ale paralelogramului : $OE = h = 114$ mm și $AD = 2l = 130$ mm.

Aceste abateri sînt evident mici avînd ordinul de mărime a cîtorva zecimi de milimetru și se datoresc impreciziei de prelucrare a pieselor.

1.1. Cazul AB $\neq$ CD. Celelalte dimensiuni ale paralelogramului se presupun corespunzînd figurii perfecte geometric.

Ipoteza $AB \neq CD$ poate fi redusă totdeauna la cazul $AB = h \mp \frac{\varepsilon}{2}$ şi $CD=h \pm \frac{\varepsilon}{2}$, ε fiind diferenţa între lungimile AB şi CD. Cazul se poate prezenta ca în figura 3 şi se vede că deoarece $\widehat{AB'B''} = \widehat{DC'C''}$, rezultă :

$$\alpha > \delta \tag{1}$$

adică $\alpha \neq \delta$ şi deci neparalelismul barelor AB şi CD.

Putîndu-se scrie cu suficientă exactitate :

$$\overline{B'\,B'''}^2 = (l\,d\beta)^2 = h^2 + \left(h - \frac{d\varepsilon}{2}\right)^2 - 2\,h\left(h - \frac{d\varepsilon}{2}\right)\cos d\alpha$$

şi considerînd $\cos d\alpha \cong 1$, rezultă :

$$l\,d\beta = \frac{d\varepsilon}{2},$$

de unde

$$\beta = \frac{1}{2l}\,\varepsilon + C.$$

Pentru $\varepsilon = 0$ rezultă $\beta = 0$ şi deci $C = 0$, expresia unghiului β care corespunde diferenţelor $\frac{\varepsilon}{2}$ mici fiind :

$$\beta = \frac{1}{2l}\,\varepsilon. \tag{2}$$

Relaţiile între β şi α, respectiv β şi δ se obţin din :

$$l - l\cos\beta = \left(h - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\alpha$$

de unde

$$\sin\alpha = \frac{1-\cos\beta}{\frac{1}{l}\left(h - \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \cos\beta\,\frac{\frac{1}{\cos\beta} - 1}{\frac{h}{l} - \frac{\varepsilon}{2\,l}} \tag{3}$$

şi :

$$\left(h + \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\delta = h + l\sin\beta$$

$$\cos\delta = \frac{h + l\sin\beta}{h + \frac{\varepsilon}{2}}. \tag{4}$$

Forţele normale P_{AN} şi P_{DN} care acţionează în A şi D sînt

$$P_{AN} = \frac{P}{2}\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}, \tag{5}$$

$$P_{DN} = \frac{P}{2}\cdot\frac{\cos\beta\cdot\cos\delta}{\cos(\beta+\delta)}, \tag{6}$$

iar diferenţa lor, care dă momentul fals, este

$$P_{AN} - P_{DN} = \frac{P}{2}\left[\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)} - \frac{\cos\beta \cdot \cos\delta}{\cos(\beta+\delta)}\right]. \qquad (7)$$

Pentru $\varepsilon = 0{,}2$ mm, $l = 65$ mm şi $h = 114$ mm, rezultă

$$\beta = \frac{1}{650} \cdot \frac{180}{\pi} = 0{,}08819 = 0°5'17'',\ 48.$$

La această mărime a unghiului şi chiar pînă la $\beta = 10'$ rezultă $\cos\beta = 1{,}00\,000$ şi cum din (1) şi (3) reiese că atît α cît şi δ sînt mai mici decît β, diferenţa (7) este practic nulă.

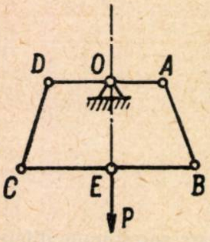


Fig. 4

Dispozitivul paralelogram considerat, nu dă deci momente false în cazul preciziei de execuţie cu $\varepsilon = 0{,}2$ mm. Barele *AB* şi *CD* fiind prevăzute la capetele din *B* şi *C* cu filet şi piuliţe, lungimea acestora poate fi de altfel reglată cu uşurinţă la o diferenţă $\varepsilon < 0{,}2$ mm.

1.2. Cazul AD ≠ BC. Celelalte condiţii geometrice fiind îndeplinite, se vede că figura devine un trapez isoscel (fig. 4), cu laturile *AB* şi *CD* situate simetric faţă de *OE*. Componentele lui *P* în *A* şi *D* avînd aceeaşi mărime, direcţie şi sens, ele nu dau momente false.

1.3. Cazul OA ≠ OD respectiv EB ≠ EC. În stare încărcată, punctul *E* trebuind să se aşeze pe direcţia *OF*, paralelogramul cu *OA* ≠ *OD* ia poziţia şi forma arătată în figura 5, în care *O''* este mijlocul laturii *AD*. Se vede că deoarece *BC* rămîne paralelă cu *AD*, componentele sarcinii *P* în *A* şi *D* sînt egale iar momentul fals este

$$M_0 = \varepsilon P = f(P,\ \varepsilon). \qquad (8)$$

Pentru $\varepsilon = 0{,}1$ mm şi $P = 1000$ kg, momentul fals are valoarea

$$M_0 = 0{,}01 \times 1000 = 10 \text{ kgcm}.$$

În regim de funcţionare hidrodinamic, coeficientul de frecare într-un lagăr circular metalic este aproximativ $f = 5 \times 10^{-3}$. La sarcina de 1000 kg, momentul de frecare corespunzător este

$$M_f = f \cdot P \cdot r = 5 \times 10^{-3} \times 1000 \times 1{,}8 = 9 \text{ kgcm}.$$

Chiar şi la o toleranţă de execuţie a dispozitivului de $\varepsilon = 0{,}1$ mm, momentul fals este în cazul de faţă de acelaşi ordin de mărime cu momentul de frecare de măsurat.

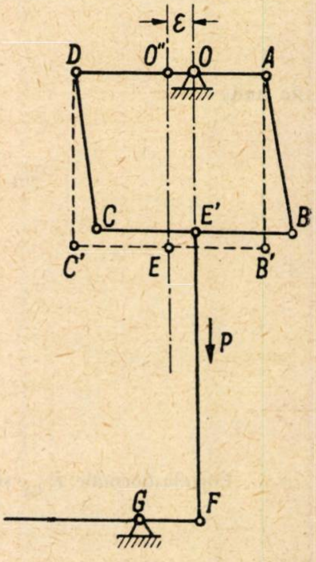


Fig. 5

1.4. Cazul de necoliniaritate a articulaţiilor din A, O şi D. Dacă măsurarea momentului de frecare se face cu dispozitivul în poziţia corectă, adică $\alpha = \frac{\widehat{AOD}}{2}$, necoliniaritatea articulaţiilor din *A*, *O* şi *D* nu conduce la introducerea unor momente false.

Dacă măsurarea se face într-o poziţie *R* (fig. 6) puţin deviată cu $\Delta\alpha$, se introduce momentul fals M_0, a cărui expresie este neglijînd influenţa lui $\Delta\beta$

$$M_0 = \frac{1}{2} Pl\,[\sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin(\alpha - \Delta\alpha)] + G.\,g =$$

$$= P.\,l.\,\sin\Delta\alpha \cdot \cos\alpha + G.\,g = f(P,\ \varepsilon,\ \Delta\alpha) \qquad (9)$$

în care *Gg* este momentul dat de greutatea proprie a barei *AOD*.

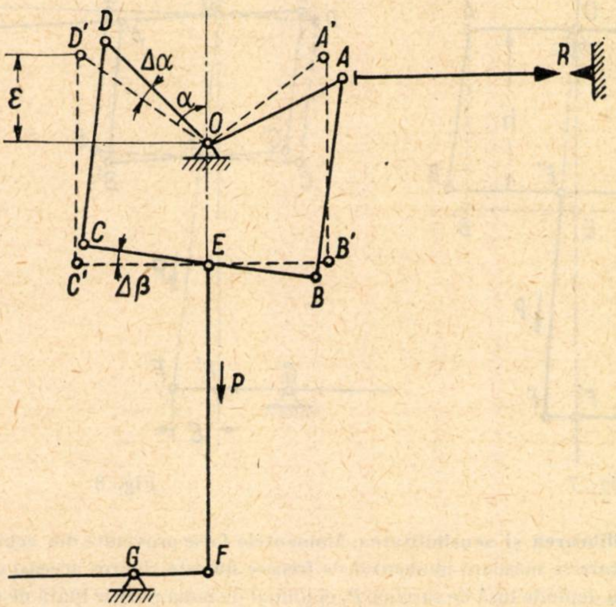


Fig. 6

La o necoliniaritate $\varepsilon = 0{,}2$ mm, rezultă :

$$\cos\alpha = \frac{\varepsilon}{l} = \frac{0{,}2}{65} = 0{,}00308.$$

Pentru $P = 1000$ kg şi făcînd abstracţie de *Gg*, momentul fals are următoarele valori

$$\Delta\alpha = 1^\circ \rightarrow M_0 = 0{,}549 \text{ kgcm},$$

$$\Delta\alpha = 30' \rightarrow M_0 = 0{,}275 \text{ kgcm}.$$

Valoarea momentului fals nu este mare, însă important este că depinde de sarcină.

1.5. Cazul cînd F nu se află pe verticala ce trece prin O. Prin aplicarea sarcinei *P*, punctul *E'* se aşază pe linia *OF*. Din cauza legăturii elastice (arcul dinamometrului) în *I* (fig. 1), sistemul nu are o poziţie de echilibru stabilă în această stare deformată ca paralelogram. El tinde să ia forma de dreptunghi rotindu-se în jurul punctului *O* (fig. 7 şi fig. 8). Prin aceasta braţul de balanţă se depărtează de reperul *R* care este poziţia de măsurare a momentului de frecare. Dacă rotirea în jurul lui O nu este împiedecată, la încărcare sistemul se aşază mai întîi în poziţia $ABCD$ (fig. 8), apoi prin apăsare, de exemplu în A, poate fi adus în poziţia $A' B' C' D'$, care este o stare de echilibru, deoarece rotirea s-a făcut în jurul axelor din O şi E.

Laturile $A'B'$ şi $C'D'$ rămînînd paralele, componentele în A şi D ale sarcinei P nu dau momente false, care să fie funcţie de această sarcină.

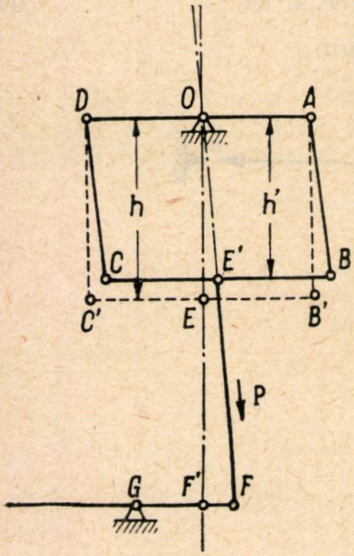


Fig. 7

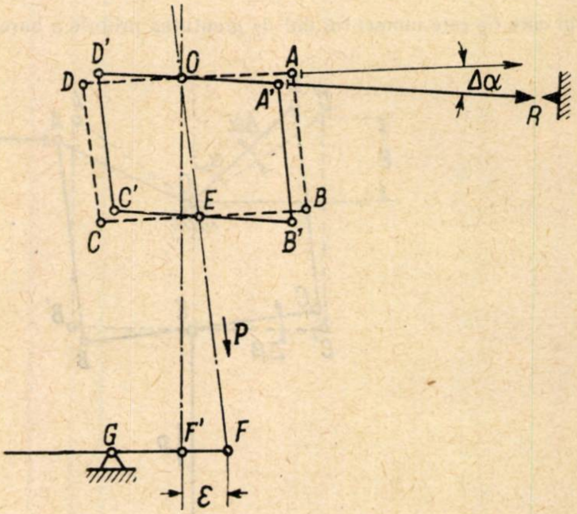


Fig. 8

1.6. Echilibrarea şi sensibilitatea. Momentele false provenite din echilibrare se produc, dacă poziţia în care se măsoară momentul de frecare nu este riguros aceeaşi ca şi la echilibrare. Momentul M_0 nu depinde însă de sarcina P, ci numai de noua poziţie luată de centrul de greutate al sistemului faţă de axa de rotire din O. La proiectarea aparatului se poate ţine seama de aceasta, astfel ca la deviaţii $\Delta\alpha$ mici, de exemplu sub 1°, momentul fals introdus din această cauză să fie neglijabil.

Condiţiile de echilibrare trebuie să permită însă realizarea unei bune sensibilităţi. În general aceste condiţii pot fi realizate. În cazul sistemului de faţă, cu o greutate proprie de cca. 14 kg, sensibilitatea obţinută a fost de mai puţin 0,320 kgcm. Pentru echilibrare s-au folosit două bare cilindrice X (fig. 9), care susţin şi pe care se poate rostogoli axul O, solidar cu dispozitivul. Toate cele trei axe au ⌀ 36 mm şi sînt din oţel cementat, călit şi rectificat la suprafaţă.

Realizarea unor asemenea condiţii nu a fost posibilă cu sistemul înlănţuit conform fig. 1, ci numai cu el atîrnînd liber, deci cu articulaţia F desfăcută.

2. Etalonarea. S-a arătat că momentele false depind de sarcină; de asemenea şi momentul datorit frecării din lagărele cuţit ale sistemului.

Etalonarea dispozitivului în sarcină şi în funcţiune, ar fi cea mai corectă. La maşina de lagăre menţionată, etalonarea în funcţiune nu se poate face deoarece intervine momentul de frecare M_f din lagărul experimental, care nu este cunoscut. Momentul total care se măsoară are în acest caz expresia :

$$M_t = M_0 \pm M_f . \tag{10}$$

Prin măsurători efectuate în aceleaşi condiţii, însă cu sensul de rotire inversat ar părea că M_f poate fi eliminat. Încercările au arătat însă, că la un lagăr cu alunecare rodat în aceleași condiţiuni în ambele sensuri de rotire, momentul de frecare M_f nu este acelaşi. Această concluzie a rezultat din faptul că în aceleași condiţiuni de funcţionare în regim permanent, într-un sens de rotaţie temperatura se stabilizează la o valoare mai ridicată decît la rotirea în sens contrar.

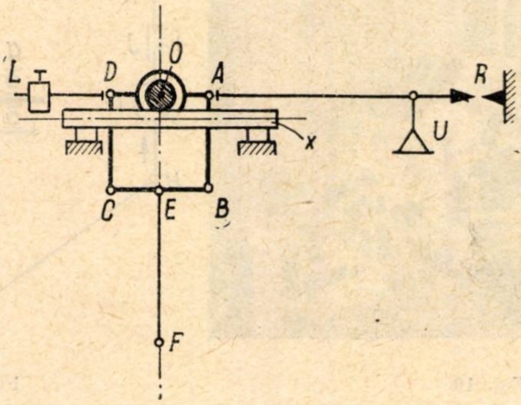


Fig. 9

Astfel la un cuzinet din Zn Al_4 Cu_1, cu ⌀ 36 mm, $\frac{l}{d} = 0{,}7$, jocul relativ $\psi = 1{,}25\,^0/_{00}$, presiunea uleiului la intrare $p_u = 1{,}5$ at, la o turaţie de 870 rot/min și la o sarcină totală $P = 1000$ kg, temperatura cuzinetului s-a stabilizat după un regim de rodaj de 12 ore, la 51°C. Păstrînd toate condiţiile de experimentare, dar inversînd sensul de rotaţie, după 12 ore de rodaj, temperatura cuzinetului s-a stabilit la 54°C, rămînînd la această valoare și după încă 33 ore de funcţionare.

Măsurarea momentului de frecare în ambele cazuri, pentru verificare, nu ar fi dat rezultate strict comparabile deoarece la $t_c = 54$°C corespunde și o viscozitate mai scăzută a uleiului.

La etalonarea în sarcină, dar în stare de nefuncţionare a maşinii, intervin momente false suplimentare. Cel mai important se datoreşte rulmenţilor din lagărele paliere „a" ale maşinii (fig.10). În timpul măsurătorii momentului de frecare cu ajutorul sistemului paralelogram, justeţea acestei măsurători se verifică, balansînd uşor braţul M (fig. 1) în jurul reperului R.

Această balansare este îngăduită de rulmenţii din lagărele paliere, precum şi de articulaţiile cuţit ale paralelogramului. Făcînd abstracţie de momentul de frecare dat de lagărele cuţit, momentul global măsurat este într-un asemenea caz :

$$M_t = M_0 + M_r \tag{11}$$

în care M_r este momentul dat de cei doi rulmenţi ai lagărelor paliere. Valoarea momentului M_r s-a căutat să se măsoare în mod separat cu ajutorul unui sistem de patru rulmenţi de aceeaşi construcţie. Gruparea lor s-a făcut aşa cum se vede în figura 11, pentru ca fiecare să fie încărcaţ în mod egal, adică cu sarcina $\frac{P}{4}$. Valorile momentului M_r pentru doi rulmenţi conici tip *DKF*5 seria 22 308 obţinute au fost la $P = 100$ kg şi 1000 kg, $M_r = 0{,}97$ kgcm respectiv 4,95 kgcm. Aceste valori sînt medii rezultate din măsurători în trei poziţii decalate cu 120° ; la $P = 1\ 000$ kg diferenţa maximă între ele a fost de 35 %. Trebuie reţinut că M_r nu este momentul de rostogolire obişnuit din mişcarea permanentă, ci momentul la plecarea din repaus.

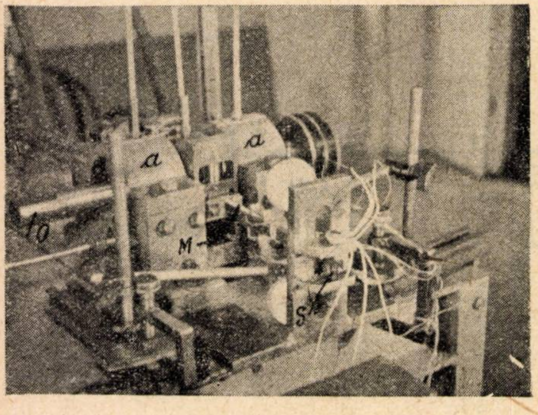


Fig. 10

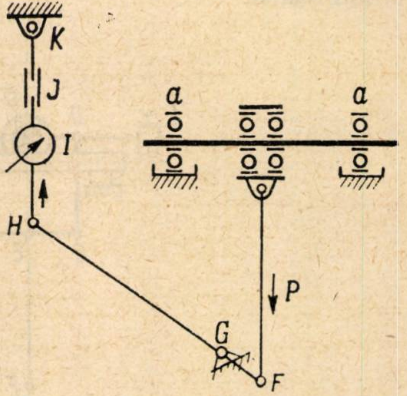


Fig. 11

Momentul fals suplimentar dat de rulmenţi este deci de asemenea important, ca şi împrăştierile pe care le dă la măsurarea lui. Pentru a ocoli pe M_r s-a căutat să se determine M_0 direct, măsurînd deformaţiile elastice pe care le provoacă acest moment în bara M (fig. 1 şi fig. 10). În acest scop capătul liber (dinspre R) a barei M a fost imobilizat, punctiform, într-o poziţie dată, cu ajutorul şuruburilor S. În limitele deformaţiei elastice a barei M sub acţiunea M_0, mişcarea de rostogolire în rulmenţii din „*a*" poate fi considerată, deşi nu riguros exact, ca fiind nulă.

Pentru măsurarea tensiunilor s-au folosit atît tensometre rezistive N, cît şi inductive Q (fig. 12). Ca punte şi amplificator s-a utilizat un aparat Lange tip 419, iar citirile s-au făcut cu microvoltmetrul T (fig. 13).

Valoarea momentului M_0, deşi mare în comparaţie cu M_f, s-a dovedit a fi totuşi prea mică pentru aparatura de măsură folosită. La etajul de amplificare maximă a aparatului Lange, galvanometrul indica, la scara de 3 mA, o deviaţie de aproape 1,5 diviziuni pentru o treaptă de variaţie a lui P de 100 kg. Mărimea acestor indicaţii putea prezenta interes pentru măsurarea lui M_0. La această scară maximă de amplificare a aparatului Lange, acul galvanometrului nu mai prezenta însă stabilitate în timp. Din această cauză etalonarea aparatului şi în consecinţă valorile măsurate ale lui M_0 puteau fi afectate de erori necunoscute.

3. Concluzii. La sistemele paralelogram, de tipul descris şi utilizate într-un complex de felul celui arătat în fig. 1, momentele false, care nu pot fi complet evitate, sînt relativ mari, iar determinarea variaţiei lor în funcţie de sarcină este afectată de erori de asemenea importante.

Măsurători mai exacte ale momentului de frecare M_f, la care unica eroare să fie sensibilitatea sistemului, pot fi efectuate cu dispozitivul echilibrat în sarcină. Aceasta implică echilibrarea aparatului pentru fiecare sarcină la care urmează să se măsoare momentul de frecare al lagărului experimental, sau măsurarea momentului totdeauna la aceeaşi sarcină. În cazul complexului din fig. 1, sistemul nu poate fi echilibrat pe loc, ci numai pe un dispozitiv aparte, de genul acelui arătat în figura 9. Realizarea sarcinii dorite se obţine prin aplicare de greutăţi la capătul *F* al barei *EF*. Cînd se măsoară momentul cu sistemul aşezat în complex, se desface articulaţia din *F* şi se pune o greutate egală cu aceea de echilibrare.

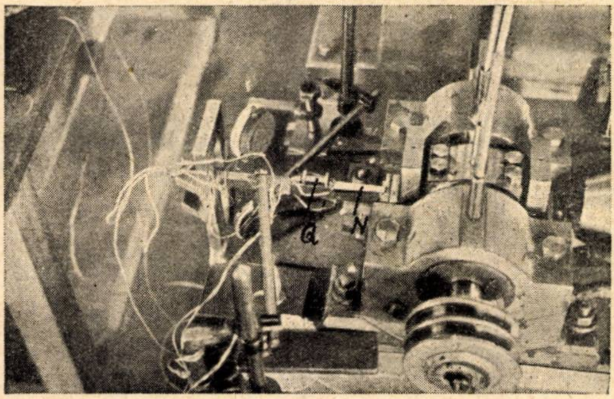


Fig. 12

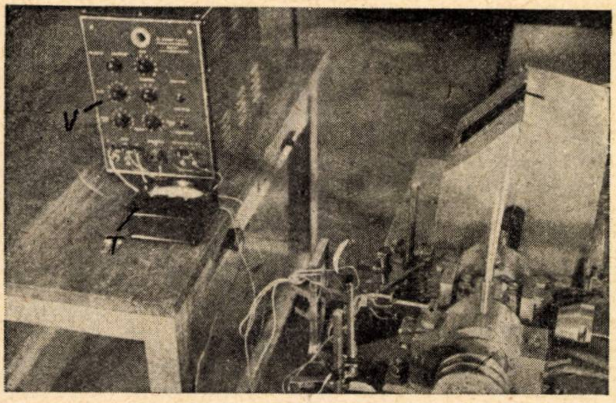


Fig. 13

Echilibrarea se face cu ajutorul contragreutăţii deplasabile *L*, pentru poziţia orizontală a axei *AOD* (fig. 9). Orizontalitatea se stabileşte cu nivela cu bulă de aer.

Drept sensibilitate a sistemului este considerată valoarea momentului pentru care, la sistemul echilibrat în prealabil, prin aplicare de greutăţi pe talerul *U*, bara *M* iese din poziţia de repaus de la orizontală. Acest moment include toate momentele false, momentul de frecare din lagărele cuţit, precum şi momentul de rostogolire a axului *O* pe axele *X* (fig. 9).

Acest din urmă moment, care nu mai apare la sistemul montat în complex, poate fi considerat însă neglijabil. În cazul sistemului şi a maşinei de lagăre descrise, a fost adoptată echilibrarea la sarcina $P = 100$ kg.

Sensibilitatea măsurată a sistemului este la această sarcină de ± 0,320 kgcm, iar la $P=0$, de ± 0,064 kgcm.

Primită la redacţie la 25 octombrie 1957.

BIBLIOGRAFIE

1. GH. VASILCA, *Studiul coeficientului de frecare într-un lagăr circular cu ajutorul curbelor* $p = g(v)$. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1* (1957).
2. N. TIPEI, *Încercări experimentale pe lagăre cu alunecare*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VI**, *1—2* (1955).

DEFORMAŢIILE PĂMÎNTURILOR ARGILOASE (INTRODUCERE ÎN PROBLEMĂ)

DE

R. J. BALLY

A. UNITATEA PROBLEMEI DEFORMAŢIILOR PĂMÎNTURILOR ARGILOASE

În momentul de faţă, în geotehnică, mai multe aspecte ale unuia şi aceluiaşi fenomen, al deformării pămînturilor argiloase, formează obiectul unor probleme diferite, tratate independent unele de altele (cităm de exemplu, problema consolidării pămînturilor argiloase, problema gelivităţii, a argilelor puternic contractile, umflarea tălpii gropilor de fundaţie, presiunea rocilor argiloase pe susţinerile lucrărilor subterane în urma umflării rocii etc.). Drept criterii pentru diferenţierea diferitelor aspecte ale fenomenului de deformare a argilelor în cadrul studiilor menţionate, se consideră cauzele şi condiţiile în care se produce deformarea.

Se pune întrebarea în ce măsură existenţa acestor studii paralele este justificată prin deosebiri de fond între procesul de deformare într-unul sau altul din cauzele menţionate; în ce măsură diferenţierea respectivă nu este determinată de complexitatea fenomenului, de dificultăţile legate de atacarea problemei deformaţiei pămînturilor argiloase ca o problemă unitară, de ansamblu. Dacă în realitate pe lîngă deosebirile care separă diferitele aspecte ale problemei, există anumite elemente comune, este de examinat posibilitatea elaborării unei teorii unice, de sinteză, cuprinzînd fiecare din aspectele citate, drept cazuri particulare.

Vom încerca să dăm un răspuns la această întrebare examinînd, pe scurt, cîteva dintre problemele de deformare a pămînturilor argiloase citate mai înainte.

a. Problema argilelor cu contracţii mari

Cazuri frecvente de degradare a construcţiilor fundate pe argile cu contracţii mari se semnalează atît în R.P.R. cît şi în numeroase alte ţări [1].

În perioadele de uscăciune pămînturile respective se contractă puternic şi se crapă; în perioadele cu umiditate ridicată, apa pătrunde prin crăpături, pămîntul o absoarbe în cantitate mare şi se umflă puternic. Deformaţiile de volum care însoţesc aceste variaţii de umiditate au ca urmare degradarea construcţiilor.

Deformarea argilelor cu contracții mari este legată de schimbul de apă dintre pămînt și atmosfera înconjurătoare. Procesul de deformare nu se reduce însă la un proces de suprafață, limitat exclusiv la contactul dintre pămînt si mediul înconjurător. El se dezvoltă în masa pămîntului, fiind însoțit de migrația apei dinspre interiorul masei de pămînt spre suprafața exterioară și invers. De remarcat că variațiile de volum ale argilelor cu contracții mari nu se constată numai atunci cînd pierderea apei se face prin evaporare ; degradările sînt mai intense cînd în zonele cu argile contractile se găsesc arbori ; rădăcinile arborilor absorb apa din pămînt și intensifică în acest fel procesul de migrație a apei și de contracție a pămîntului.

Vom reține din cele expuse mai sus anumite aspecte ale procesului de deformare al argilelor puternic contractile :

— deformările acestor pămînturi sînt provocate de variațiile de umiditate ale pămîntului ;

— variațiile de umiditate se datoresc schimbului de apă dintre pămînt și mediul exterior ;

— procesul de variație al umidității pămîntului este însoțit de migrația apei prin pămînt.

b. Umflarea pămînturilor prin îngheț

Umflarea prin îngheț a pămîntului nu se datorește măririi volumului pămîntului propriu-zis, ci formării în pămînt a unor lentile de ghiață. Apa necesară formării acestor lentile provine însă din pămînt. Ea migrează dinspre stratele situate la adîncime spre zona înghețată, datorită presiunii osmotice dezvoltate în urma creșterii concentrației de ioni în zona unde moleculele de apă sînt fixate în cristalele de ghiață [3].

Din dezvoltarea procesului de umflare prin îngheț vom reține două aspecte care ne interesează în prezenta expunere :

— procesul de umflare prin îngheț este însoțit de migrarea peliculară a apei prin pămînt ;

— în procesul de umflare prin îngheț, pămîntul se comportă ca un sistem închis ; umflarea se produce fără schimb de substanță cu mediul exterior.

c. Procesul de consolidare al pămînturilor argiloase

Procesul de consolidare, de dezvoltare lentă, în timp, a deformațiilor pămînturilor argiloase, este caracteristic pentru această categorie de pămînturi. Pînă nu de mult, pentru explicarea și interpretarea în calcul a acestui proces, pămîntul era privit ca un mediu alcătuit din particule inerte prin care apa circulă datorită gradientelor de presiune provocate de aplicarea unei sarcini mecanice asupra pămîntului ; se presupune că circulația apei avea loc conform legii lui Darcy.

Studii mai recente au scos în evidență faptul că acest mod de a interpreta procesul de consolidare este prea schematic și nu lămurește toate aspectele lui. Se constată că, în pămînturile argiloase, deplasarea apei nu începe decît după ce gradientul hidraulic a depășit o anumită valoare minimă (gradientul inițial $= i_0$), ceea ce face ca legea de deplasare a apei prin pămînt să fie diferită de legea lui Darcy și să capete forma $v = k(i - i_0)$.

Datorită gradientului inițial, există zone de pămînt în care consolidarea încetează, înainte ca gradientul hidraulic provocat de aplicarea sarcinii să fie anulat [7].

Cercetările lui B. F. Reltov [6] au pus în evidență faptul că gradientul inițial este condiționat de doi factori : un factor electrocinetic și un factor de structură.

Factorul electrocinetic apare numai în sistemele cu pori fini. În acest caz gradientul inițial caracterizează influența nemijlocită a forțelor de suprafață asupra curgerii lichidului în stratele subțiri marginale și atinge valori mari care se exprimă în numere de ordinul zecilor, sutelor și chiar mai mari.

Factorul de structură se manifestă deobicei în sisteme disperse cu particule relativ mari, în porii cărora se formează structuri din particule coloidale hidratate; în interiorul acestor structuri este reţinută mecanic apa liberă (gravitaţională). Gradientul iniţial în aceste sisteme caracterizează rezistenţa structurilor şi are deobicei, valori reduse.

Din expunerea de mai sus reţinem :

— procesul de consolidare caracterizează deformarea, reducerea de volum a pămînturilor argiloase sub acţiunea încărcărilor mecanice;

— în procesul de consolidare pămîntul se comportă ca un sistem deschis, deformaţia producîndu-se prin eliminarea spre exterior a unei părţi din apa din pămînt.

Unul din factorii care condiţonează procesul de consolidare îl constituie prezenţa apei peliculare. Condiţiile necesare începerii migraţiei apei peliculare pot constitui o frînă în dezvoltarea procesului de consolidare.

d. Deformaţiile pămînturilor argiloase în lucrările subterane

Problema deformaţiilor rocilor argiloase în lucrările subterane este mult dezbătută în numeroase lucrări de specialitate (de exemplu [8], [9]). Totuşi, în momentul de faţă nu există încă o teorie unitară asupra modului cum se produce şi cum poate fi interpretat în calcul fenomenul respectiv. Din unele lucrări publicate rezultă că aceste deformaţii pot fi clasificate în modul următor:

1) Deformaţii datorită schimbării stării de eforturi produse în urma executării excavaţiei. Aceste deformaţii sînt echivalente cu cele ale unui mediu continuu, sub acţiunea unei stări de eforturi similare cu starea de eforturi din pămînt.

2) Deformaţii datorite umflării rocii. Umflarea se poate produce în mai multe feluri:

— Prin mărirea umidităţii ca urmare a absorbţiei apei din mediul înconjurător.

— Prin mărirea umidităţii ca urmare a migraţiei apei dinspre interiorul masivului spre pereţii excavaţiei. Migraţia este provocată de schimbarea stării de tensiune din interiorul apei din pămînt datorită executării săpăturilor. Ea are ca urmare creşterea umidităţii în zona pereţilor excavaţiei şi scăderea ei în zonele învecinate.

— Prin dezvoltarea de gaze şi vapori de apă în interiorul pămîntului ca urmare a schimbării de tensiune în apa din pămînt.

Din cele de mai sus reţinem :

— deformaţiile rocilor argiloase în lucrările subterane sînt deformaţii complexe, formate din deformaţii caracteristice mediilor continue şi din deformaţii caracteristice mediilor disperse;

— umflarea rocilor argiloase nu se datoreşte exclusiv unei creşteri de umiditate, ci se poate datora prezenţei fazei gazoase şi interacţiunii ei cu faza lichidă din pămînt;

— deformaţiile menţionate pot fi, în parte, urmarea migrării apei din pămînt;

— în procesul de dezvoltare al acestor deformaţii, pămîntul se comportă fie ca un sistem deschis (în cazul cînd umflarea se datoreşte absorbţiei apei din mediul exterior), fie ca un sistem închis (în cazul creşterii umidităţii ca urmare a migraţiei apei sau a dezvoltării fazei gazoase).

e. Umflarea tălpii gropilor de fundaţie

Necesitatea urmăririi umflării tălpii gropilor de fundaţie a apărut în legătură cu executarea marilor construcţii (mai ales cele hidrotehnice), care cer săpături adînci şi de mare suprafaţă. Observaţiile pe teren au stabilit că, în urma executării excavaţiilor, se constată ridicări ale tălpii de fundaţie care pot ajunge la mai mulţi centimetri sau chiar la zeci de centimetri. M. N. Ghersevanov citează cazul săpăturii de fundaţie pentru o clădire cu 17 etaje, la care talpa fundaţiei s-a ridicat cu 1,27 m [2].

Ca şi în cazul umflării rocilor în lucrările subterane, deformaţiile constatate sînt legate fie de umflarea propriu-zisă a pămîntului, fie de deformarea profilului săpăturii ca urmare a schimbării stării de tensiuni produse de înlăturarea sarcinii geologice.

Tot ca în cazul precedent umflarea pămîntului nu este neapărat legată de creşterea umidităţii. De exemplu, se citează cazul tălpii de fundaţie la o construcţie hidrotehnică care s-a umflat în urma executării excavaţiei. Ulterior, groapa de fundaţie a fost inundată ; deformaţia constatată iniţial s-a redus pentru ca să se dezvolte din nou după evacuarea apei

Avînd în vedere asemănarea modului de deformare al pămîntului în cazul lucrărilor subterane şi în cel al excavaţiilor de suprafaţă, aspectele subliniate în paragraful precedent rămîn valabile şi pentru acest din urmă caz menţionat.

★

Vom încerca să enunţăm cîteva concluzii care decurg din expunerea precedentă, completîndu-le cu unele considerente comparative, între deformaţiile pămînturilor argiloase şi edformaţiile unor materiale compacte, de rezistenţă, întîlnite în construcţii, ca : metalul, lemnul piatra, betonul.

În momentul de faţă, studiile de geotehnică, se concentrează asupra analizei procesului fizic de deformare a pămînturilor argiloase. Complexitatea acestui proces face ca stabilirea unor coeficienţi caracteristici de calcul să fie încă foarte dificilă.

Chiar acei coeficienţi utilizaţi în mod curent pentru transpunerea în calcul a proceselor de deformaţie nu sînt suficient de siguri sau de reprezentativi (coeficienţii de compresibilitate, cei pentru rezistenţa la tăiere). De aceea, interpretarea matematică a acestor procese, exceptînd cazul teoriei consolidării pentru pămînturile în care scurgerea apei prin pămînt se face conform legii lui Darcy, este încă într-o fază primitivă.

Complexitatea procesului de deformare al pămînturilor argiloase, dificultatea interpretării lui în calcul, se datoresc mai multor factori :

— Caracterul de mediu dispers trifazic al pămîntului. În raport cu celelalte materiale de rezistenţă din construcţii, pămînturile reprezintă materiale puternic deformabile.

Deformaţiile lor se datoresc într-o oarecare măsură deformării fiecăreia dintre fazele componente : a substanţei minerale care alcătuieşte particulele, a apei şi mai ales a gazelor din pămînt. Incomparabil mai mare este însă deformarea rezultată din deplasarea particulelor minerale, din aşezarea lor într-o poziţie mai îndesată. Totuşi, nici această deformaţie, mai ales în ceea ce priveşte procesul de umflare, nu explică decît parţial marea deformabilitate a pămînturilor argiloase ; în raport cu deformabilitatea pămînturilor necoezive, pămînturile argiloase prezintă deformaţii mult mai mari şi mai ales, prezintă deformaţii de umflare şi contracţie, foarte slab manifestate la pămînturile necoezive. Factorul care determină această diferenţă îl constituie interacţiunea dintre cele trei faze componente ale pămînturilor argiloase, absorbţia apei de către particulele coloidale din pămînt, procesul de dizolvare şi separare a gazelor din apă.

— Între deformaţiile pămînturilor argiloase şi cele ale celorlalte materiale de rezistenţă întîlnite în construcţii nu există numai o deosebire cantitativă, de mărime. Deformaţiile pămînturilor argiloase duc la o variaţie sensibilă, calitativă, a caracteristicilor de rezistenţă a pămînturilor : consolidarea şi contracţia transformă pămîntul argilos într-un material rezistent, cu coeficienţi mecanici foarte favorabili ; umflarea poate duce la o slăbire sensibilă a pămîntului. De aceea, în timp ce la celelalte materiale, coeficienţii mecanici caracteristici rămîn constanţi în timpul procesului de deformare, la pămînturile argiloase ei variază o dată cu deformarea pămîntului.

— Exceptînd pămînturile, celelalte materiale de rezistență din construcții apar în elemente de construcție, de dimensiuni finite și care pot fi, deobicei, considerate drept elemente mono- sau biaxiale.

Pămînturile trebuie interpretate în calcul aproape întotodeauna ca elemente cu dimensiuni semiinfinite sau infinite, studiul lor constituind o problemă spațială sau, cel mult, o problemă plană.

— În procesul de deformare al pămînturilor argiloase se deosebesc două categorii. :

1° Deformarea produsă de procesele care au loc în interiorul masivului de pămînt (pămîntul se comportă ca un mediu închis).

2° Deformarea produsă de interacțiunea între pămînt și mediul exterior (procesul de absorbție sau de evaporare a apei ; de schimb cu exteriorul al fazei gazoase) (pămîntul se comportă ca un mediu deschis).

În prima categorie de deformații sînt cuprinse :

a) deformațiile fiecărei faze componente a pămîntului ;

b) deformațiile rezultate din interacțiunea fazelor componente (dizolvarea sau separarea din apă a gazelor, trecerea apei din stare liberă în stare absorbită, deci cu reducere de volum și invers, pătrunderea apei în interiorul nucleului micdiilor argiloase).

În categoria a doua sînt incluse deformațiile care presupun reducerea sau mărirea conținutului de apă sau aer în pămînt. În mod curent, această a doua categorie predomină în deformațiile pămîntului.

Pentru interpretarea în calcul a stării de eforturi și deformații a masivelor de pămînt se recurge la metodele de calcul ale mediilor compacte (metoda mediilor liniar deformabile bazată pe teoria lui Boussinesq, se integrează în teoria elasticității ; metoda stării de echilibru limită pornește de la criteriul de rupere Mohr-Rankine, care se deosebește de criteriul de rupere al mediilor compacte numai prin faptul că rezistența limită de lunecare nu este constantă, ci depinde și de mărimea efortului normal pe secțiune).

Comparînd procesul fizic de deformare al mediilor compacte și al pămînturilor, rezultă însă o deosebire netă. Deformațiile prin schimb de substanță cu mediul exterior, de o deosebită importanță la pămînturi, nu apar deloc la mediile compacte. De asemenea, nu apar deformațiile caracteristice interacțiunii dintre fazele componente.

Deoarece analogia între comportarea pămînturilor și a mediilor compacte are un caracter formal, metodele de calcul deduse pentru mediile compacte sînt valabile pentru cele disperse numai în măsura în care coeficienții mecanici caracteristici ai celor două medii sînt similari ca formă (de exemplu în măsura în care relația efort-deformație pentru pămînt poate fi caracterizată prin doi coeficienți constanți echivalenți cu modulul de elasticitate și coeficientul lui Poisson).

O mare dificultate o constituie însă faptul că valoarea coeficienților mecanici caracteristici ai pămîntului depinde foarte mult de condițiile în care se face determinarea lor. De exemplu, valoarea coeficientului de compresibilitate a pămîntului și, implicit valoarea modulului de deformație liniară va fi cu totul alta în cazul în care determinarea se face în edometru, în sistem închis, decît dacă se permitea evacuarea apei și a aerului din proba de pămînt.

Să presupunem că, pentru calculul stării de eforturi și deformații într-un masiv de pămînt, în care se sapă o galerie, se determină coeficienții mecanici caracteristici prin încercare în edometru în sistem închis ; rezultatul determinării arată că este posibil să se considere coeficientul de compresibilitate constant, în anumite limite de variații a eforturilor. Considerînd coeficientul de presiune laterală de asemenea constant, rezultă un modul de deformație liniară şi un coeficient al lui Poisson constanţi. Deci se poate aplica teoria mediilor liniar deformabile. Rezultatele calculului pot fi totuşi net deosebite de situaţia reală, deoarece cel puţin două aspecte importante ale deformaţiei masivului nu sînt prinse în calcul : deformaţiile în zona de excavare a galeriei, unde are loc un schimb de substanţe (de ex. apă şi aer) între pămînt şi mediul exterior, şi deformaţiile rezultate din degajarea sau dizolvarea fazei gazoase din cea lichidă în interiorul masivului, la o distanţă insuficient de mare de excavaţie pentru ca acest schimb, provocat de schimbarea stării de tensiuni, să aibă loc ca într-un sistem închis.

Complexitatea procesului de deformare a pămînturilor argiloase face ca, cel puţin în momentul de faţă, să nu se întrevadă posibilitatea unei metode de calcul care să cuprindă toate aspectele lui caracteristice. Singurele metode de calcul accesibile rămîn totuşi metodele deduse pentru mediile compacte.

Pentru a înlătura impasul în care se ajunge din această cauză, se poate recurge la următoarea metodă de calcul :

— determinarea caracteristicilor mecanice ale pămîntului în sistem închis, în care caz deformaţiile pămîntului se apropie cel mai mult de deformaţiile mediilor compacte şi calculul stării de eforturi şi de deformaţii a masivului de pămînt în conformitate cu o teorie de calcul dedusă pentru mediile compacte ;

— determinarea caracteristicilor mecanice ale pămîntului în sistem deschis şi calculul după o metodă simplificată a deformaţiilor şi eforturilor suplimentare care apar în zona de contact între masiv şi mediul exterior.

Starea finală de eforturi şi deformaţii se determină prin sumarea rezultatelor obţinute pe cele două căi.

În exemplul galeriei excavate într-un masiv de pămînt, prima parte a calculului pe baza teoriei mediilor liniar deformabile, cu coeficienţii deduşi pentru pămînt în sistem închis, se aplică întregului masiv ; se deduc eforturile şi deformaţiile în jurul galeriei, apoi se adaugă eforturile şi deformaţiile rezultate în zona din jurul galeriei, în urma procesului de umflare a rocei.

B. PROPUNERI PENTRU UN STUDIU ASUPRA PĂMÎNTURILOR ARGILOASE CAPABILE DE DEFORMAŢII MARI

Studiul asupra pămînturilor argiloase capabile de deformaţii mari ar urma să cuprindă patru mari subdiviziuni :

1) Studiul procesului de deformare al pămînturilor argiloase.

2) Studiul proprietăţilor şi coeficienţilor caracteristici ai argilelor capabile de deformaţii mari.

3) Interpretarea în calcul a procesului de deformare a argilelor.

4) Studiul metodelor de combatere a efectelor deformaţiilor mari din pămînturile argiloase.

În studiul procesului de deformare a pămînturilor argiloase, o primă subtemă o constituie mecanismul procesului de deformare a argilelor. În această direcţie există o bogată literatură care analizează aspecte multiple şi variate ale problemei. De aceea, în momentul de faţă se pune deocamdată problema unui studiu amplu de sinteză al materialelor existente.

Un alt aspect al procesului de deformare al pămînturilor argiloase este foarte puţin studiat şi anume, dezvoltarea procesului de deformare spre interiorul masivului de pămînt.

Atît considerente teoretice cît şi date experimentale confirmă faptul că procesul de deformare al pămînturilor argiloase se extinde spre interiorul masivului de pămînt pe o rază limitată şi desfăşurarea lui necesită o anumită perioadă de timp.

De exemplu, cu ocazia executării unei galerii subterane, la 25 m sub nivelul terenului după excavarea galeriei și montarea armăturilor, pereții au început să se umfle; umiditatea pămîntului a crescut de la 56 % la 130 %, provocînd o slăbire accentuată a pămîntului; în același timp, la 4 m distanță de la perete spre interiorul masivului, umiditatea pămîntului a scăzut de la 56 % la 46 %, ceea ce constituie o dovadă evidentă a migrației umidității dinspre interiorul masivului spre pereții galeriei (citat de Ghersevanov după o comunicare la Congresul Internațional de geotehnică și fundații din 1936).

Un alt exemplu: în anumite cazuri se adoptă ca metodă de combatere a efectului deformațiilor mari în lucrările subterane, reprofilarea periodică a galeriilor. În literatură se citează exemple de aplicare a acestei metode, cînd pentru realizarea ei a fost necesară mobilizarea de echipe permanente de minieri pentru că procesul nu se amortizează în timp; o dată îndepărtat, stratul deformat de la suprafață, procesul se dezvoltă mai departe spre interiorul masivului și se produce o nouă deformare.

În consecință, apare necesitatea unui studiu asupra modului cum procesul de deformare avansează spre interiorul masivului de pămînt și asupra razei de acțiune a acestui proces. În directă și imediată legătură cu această problemă este influența pe care deformația posibilă a masivului o are asupra dezvoltării procesului de deformare în adîncime. Atît raza de acțiune a procesului de deformare cît și presiunea pe care pămîntul o va exercita asupra elementelor de sprijinire depind de mărimea deformației și de condițiile în care ea se poate produce. De exemplu, altele vor fi repartițiile de eforturi în jurul profilului unei galerii subterane dacă se montează imediat după excavare o îmbrăcăminte rigidă, care are contact perfect cu pămîntul, alta va fi distribuția dacă se lasă liber peretele de pămînt; de asemenea, în alte condiții se va produce deformarea dacă din modul cum se execută lucrarea este sau nu posibilă creșterea umidității pămîntului în imediata apropiere a pereților galeriei.

În studiile curente de laborator, atît procesul de umflare cît și cel de contracție al pămîntului se studiază pe probe în care procesul respectiv cuprinde întreaga probă; deci, se urmărește comportarea caracteristică a materialului, fără însă să se obțină indicații asupra ritmului de dezvoltare al procesului spre interiorul masei de pămînt. Din același motiv, determinarea umflării probelor se face lăsînd umflarea liberă, iar a presiunii de umflare, împiedecînd complet umflarea.

Pentru a răspunde problemelor ridicate mai înainte cu privire la dinamica procesului de deformare a pămînturilor argiloase, a ritmului de dezvoltare spre interiorul masivului de pămînt, a influenței condițiilor de care se produce deformarea și a mărimii deformației posibile, colectivul geotehnic de la I.M.A. a propus aparatul a cărei schiță de principiu este redată în figura 1. Condițiile tehnice caracteristice care stau la baza acestui aparat sînt următoarele:

— Posibilitatea utilizării de probe de diferite înălțimi, între 1—10 cm;

— Posibilitatea urmăririi procesului de umflare în mediu complet închis, numai în contact cu aerul, sau în contact cu apa, condițiile respective fiind asigurate fie numai la una din fețele probei (inferioară sau superioară) sau la amîndouă;

— Posibilitatea asigurării unor deformații maxime controlate (impuse);

— Posibilitatea obținerii de presiuni relativ mari (pînă la 10 kg/cm^2, respectiv încărcare 500 kg, dat fiind că secțiunea probei a fost luată de 50 cm^2), cu un sistem comod de încărcare;

— Măsurarea presiunilor de umflare cu un sistem dinamometric care să necesite deformații de înregistrare neglijabile în raport cu deformațiile admise pentru proba de pămînt.

Pentru îndeplinirea condițiilor enunțate mai sus, s-a recurs la următoarele soluții de principiu:

— Caseta aparatului va permite introducerea de inele de diferite înălțimi;

— Pistonul este format din două lamele manevrabile din exterior (datorită unor tije concentrice, și care permit întreruperea sau restabilirea contactului dintre proba de pămînt și mediul exterior);

— Un dispozitiv cu un șurub micrometric care reglează distanța dintre pistonul și tija sistemului dinamometric ;

— Presiunea se exercită printr-un sistem hidraulic care permite obținerea unei presiuni de 1 kg/cm², prin aplicarea unei încărcări de aproximativ 1 kg pe talerul sistemului de încărcare. Pentru a asigura redresarea sistemului de încărcare în urma deplasărilor produse de deformațiile probei (sistemul hidraulic face ca deplasările pistonului sistemului de încărcare să fie amplificate în raport cu cele ale pistonului probei) s-au prevăzut doi cilindri de încărcare care pot fi introduși succesiv în circuit ;

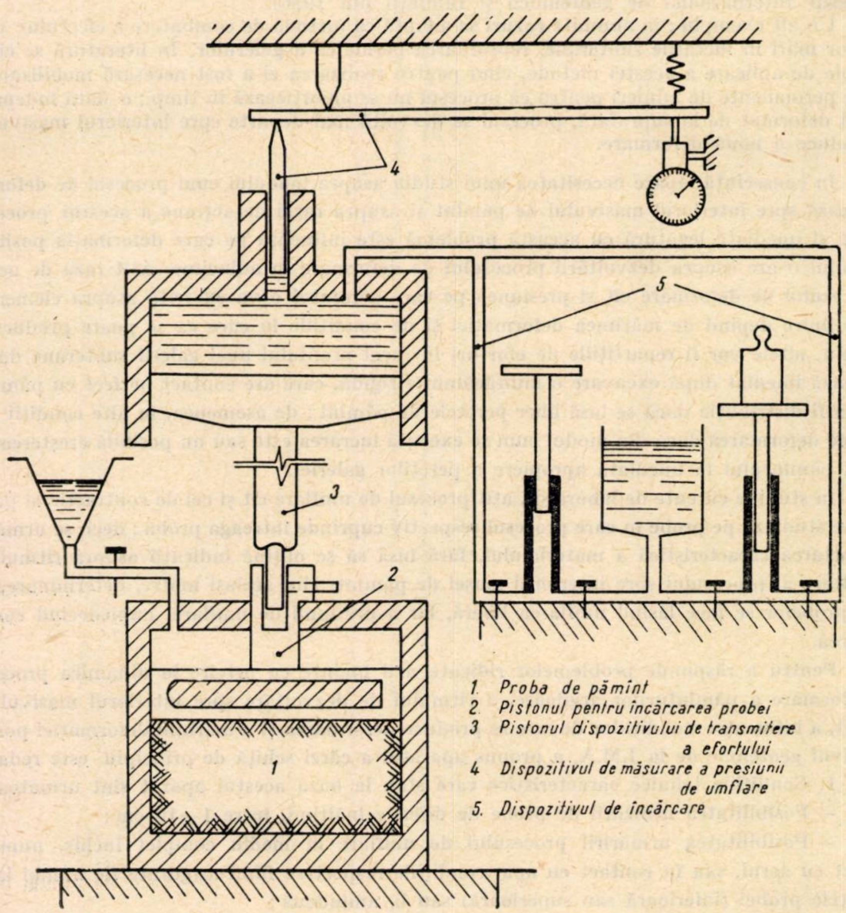

4
5
3
2
1
1. Proba de pămînt
2. Pistonul pentru încărcarea probei
3. Pistonul dispozitivului de transmitere a efortului
4. Dispozitivul de măsurare a presiunii de umflare
5. Dispozitivul de încărcare

Fig. 1

— Sistemul dinamometric pentru măsurarea presiunii de umflare este compus dintr-un corp de pompă cu același diametru ca și inelul probei de pămînt și care transmite presiunea unui corp de pompă de diametru redus, iar acesta, prin intermediul unei pîrghii, o transmite unui resort tarat. În acest fel, între deplasările pe care trebuie să le efectueze pistonul probei pentru a pune sub tensiune sistemul de înregistrare dinamometric și deplasările arcului înregistrator există două trepte de amplificare care permit reducerea la minimum a deplasărilor necesare ale pistonului probei. Efortul pe care trebuie să-l înregistreze arcul înregistrator este redus în raport cu efortul exercitat de pistonul probei în trei etape : cilindrul mare al sistemului dinamometric transmite presiunea pistonului probei şi nu efortul total de umflare ; efortul respectiv este apoi redus prin trecerea de la corpul de pompă de diametru mare la cel de diametru mic şi apoi cu ajutorul pîrghiei.

Aparatul prototip este în curs de execuţie la colectivul de geotehnică I.M.A.

Coeficienţii mecanici caracteristici, necesari interpretării în calcul a procesului de deformaţie, depind de ipoteza de bază a sistemului de calcul adoptat. În momentul de faţă pentru acest calcul se adoptă următoarele ipoteze fundamentale :

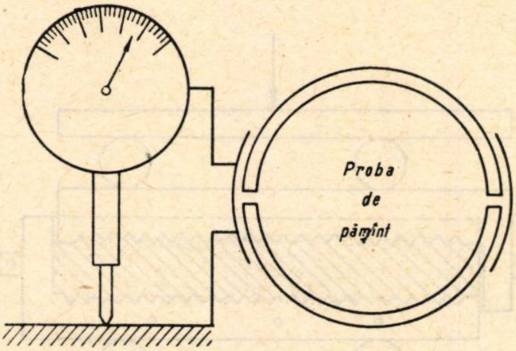


Fig. 2

— Ipoteza comportării pămîntului ca un mediu liniar deformabil (aplicarea la pămînt a legii lui Hooke generalizate). Pentru aplicarea acestei ipoteze este necesară cunoaşterea a doi coeficienţi : modulul de deformabilitate liniară (echivalent modulului de elasticitate) şi coeficientul de deformare lateral (coeficientul lui Poisson sau echivalentul lui, coeficientul de presiune laterală). Pentru determinarea simultană a ambilor coeficienţi se propune utilizarea unei casete de edometru de o construcţie mai deosebită (fig. 2). Ceea ce caracterizează această casetă este faptul că inelul cu proba este secţionat pe o generatoare sau pe două generatoare diametral opuse. Inelul este solidarizat în dreptul tăieturilor printr-o placă dintr-un material cu modulul de elasticitate de ordinul a 500 000 pînă la 1 000 000 kg/cm², dimensiunile secţiunii transversale ale plăcii sînt astfel alese încît să sufere deformaţii (alungiri) măsurabile cu microcomparatoare care dau 1/1000 mm, atunci cînd inelul este supus la tensiuni din cauza tendinţei de deformare a probei de pămînt sub acţiunea încărcării verticale. În felul acesta se pot determina eforturile principale şi deformaţiile specifice pe trei direcţii.

— Ipoteza stării de eforturi limită (condiţia de rupere $\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi + c$ îndeplinită în toate punctele masivului). Pentru această ipoteză este necesară determinarea celor doi coeficienţi caracteristici ai rezistenţei la tăiere. Problema aceasta este cunoscută dat fiind că ea este pusă în discuţii pentru toate tipurile de pămînt, astfel încît nu vom mai insista asupra ei.

— Ipoteza curgerii lente a pămîntului sub acţiunea încărcării, interpretată cu ajutorul asimilării pămîntului cu un mediu vîscozo-plastic. Pentru astfel de medii se admite ca lege de bază relaţia

$$\tau = (\eta - \eta_0) \frac{dv}{dy}$$

în care:

τ = efortul de lunecare aplicat masei de pămînt,

η = coeficientul de vîscozitate,

η_0 = constantă,

$\frac{dv}{dy}$ = gradientul vitezei de lunecare în interiorul masei de pămînt.

Pentru determinarea coeficienţilor caracteristici necesari aplicării acestei ipoteze este dat în lucru de către colectivul geotehnic al I.M.A. un aparat prevăzute cu o casetă (fig. 3) şi cu un dispozitiv acţionat printr-un motor capabil să imprime probei de pămînt viteze de deformaţii, de diferite intensităţi între 1/100 mm/min şi 1 mm/min.

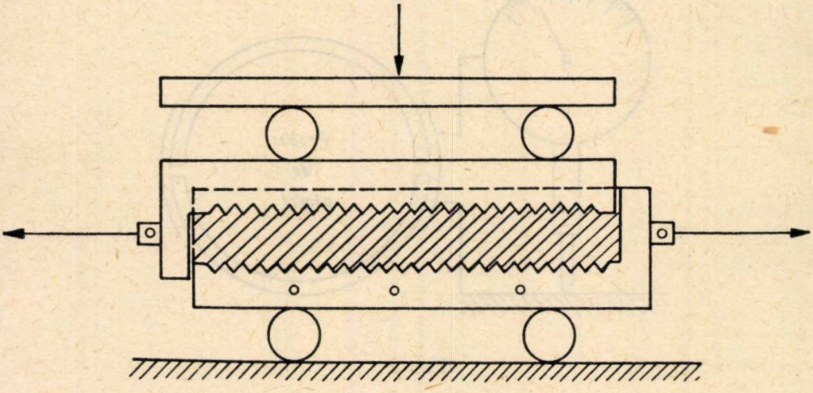


Fig. 3

În ceea ce priveşte studiul metodelor de combatere a efectelor provocate de deformaţiile mari ale pămînturilor argiloase se întrevăd de pe acum mai multe căi de principiu de urmat:

— Metode privind tehnologia de execuţie a lucrărilor în pămînturile argiloase capabile de deformaţii mari (viteza de execuţie a excavaţiilor şi lucrărilor ulterioare de construcţie, protecţia împotriva apelor de suprafaţă şi a celor subterane etc.).

— Metode privind elementele constructive menite să preia eforturile şi deformaţiile pămînturilor argiloase.

— Metode privind izolarea unor zone din pămînt de mediul înconjurător în vederea împiedicării unor deformaţii mari ale pămîntului.

— Metode de îmbunătăţire a pămînturilor. În momentul de faţă se întrevede posibilitatea aplicării metodelor electrice şi termice (îngheţ şi ardere) pentru transformarea pămînturilor argiloase.

Una din principalele condiţii care se impun unui studiu asupra argilelor capabile de deformaţii mari este dezvoltarea lui în funcţie de problemele de acest fel care se ridică în ţara noastră. Aceasta presupune pe de o parte detectarea şi caracterizarea pămînturilor argiloase capabile de deformaţii mari şi care sînt caracteristice pentru teritoriul ţării noastre, iar pe de altă parte punerea în evidenţă a acelor probleme dificile întîlnite în lucrările de construcţii miniere, hidrotehnice, din ţara noastră legate de deformarea pămînturilor argiloase.

Primită la redacţie la 6 septembrie 1957.

BIBLIOGRAFIE

1. ANTONESCU I., *Asupra problemei umflării argilelor*. Referat intern I.M.A., (1956).
2. GHERSEVANOV M. N., POLŞIN D. E., *Teoreticeskie osnovi mehaniki gruntov*. Stroiizdat, Moscova (1948).
3. GOLDSTEIN M. N., *Deformaţii zemlianovo polotna i osnovanii soorujenii pri promerzanii i ottaivanii*. Transjeldorizdat, Moscova, (1948).
4. PROFIRI N., STĂNCULESCU I., *Cercetări asupra pămînturilor argiloase de pe platoul getic*. Lucrările Sesiunii ştiinţifice a Academiei R.P.R., iunie 1950, **I**, **II**,849—868 ; Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea a III-a, **III**, 2—4, 319—344 (1951).
5. PROFIRI N., STĂNCULESCU I., ANTONESCU I., *Măsuri constructive pentru prevenirea degradărilor construcţiilor fundate pe pămînturi argiloase cu contracţii mari*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti (1954).
6. RELTOV B. F., *Vlianie fiziko-himiceskih factorov na vodopronitaemost i deformiruemost sviaznih gruntov*. Tezele Consfătuirii Unionale de Mecanica Pămînturilor, Gorki (1953).
7. ROZA S. A., *Osadki ghidrotehniceskih soorujenii na glinah s maloi vlajnostiu*. Ghidrotehniceskoe Stroitelstvo, 9 (1950).
8. SEIHET M. N., *Davlenie puciaşcih porod na krepi podzemnih virobotok*. Ugletehizdat, Moscova (1955).
9. SÎROVATKO M. V., *O pucenii glinistih porod v ugolnih şahtah*. Ugletehizdat, Moscova (1953).

SVEN T. A. ÖDMAN, *Studies of boundary value problems* (Studii asupra problemelor la limită), Svenska Forskningsinstitutet för Cement och Betong vid Kungl, Tekniska Högskolan i Stockholm, Stockholm, 1955, 376 pag.

Acest volum este alcătuit din patru comunicări publicate de autor în Buletinul Institutului de cercetări asupra cimentului și betonului de pe lîngă Institutul regal de tehnologie din Stockholm, nr. 30, precum și din dările de seamă nr. 20, 24 și 25 ale aceluiași institut.

Prima comunicare are un caracter mai general și se ocupă de cîteva metode energetice aplicate la probleme la limită liniare, arătînd legătura care există între principiul potențialului de erori minim, principiul minimului energiei potențiale, principiul deplasărilor virtuale (al lui d'Alembert) și principiul forțelor virtuale (al lui Castigliano). Autorul arată astfel că principiul deplasărilor virtuale și cel al forțelor virtuale sînt aplicabile la toate sistemele pentru care este valabilă teorema lui Betti (adică principiul suprapunerii efectelor și teorema lui Clapeyron) și că poziția de echilibru a unui asemenea sistem corespunde cu minimul energiei potențiale sau cu minimul potențialului erorilor.

În a doua comunicare, autorul se ocupă de modul în care se pot aplica metodele de minim pentru a rezolva problemele la limită semiomogene.Autorul are ca scop găsirea vibrațiilor proprii. ale plăcilor plane subțiri rectangulare. După ce prezintă diferite metode de minimum, metoda Ritz, metoda celor mai mici patrate sau metoda celor mai mici produse a lui Ritz-Galerkin, autorul se ocupă de unele studii ale sale, din 1948, asupra integrării ecuațiilor cu derivate parțiale. Astfel, dezvoltă o metodă ortogonală — cum o denumește — pentru a determina primele aproximații ale soluțiilor problemelor la limită liniare și aplică apoi această metodă la plăci rectangulare încastrate, acționate de sarcini normale pe planul lor median.

A treia comunicare cuprinde studiul funcțiilor caracteristice ale plăcilor dreptunghiulare pentru cîteva cazuri mai importante de rezemare. Unele rezultate sînt cunoscute, alte rezultate sînt noi și sînt datorite autorului ; în unele cazuri s-a folosit metoda ortogonală de calcul. Lucrarea este îmbogățită cu tabele de calcul și cu diagrame pentru cele 36 de funcții caracteristice și frecvențe unghiulare, pentru plăci simplu rezemate pe două laturi opuse și libere sau încastrate pe celelalte două și pentru plăci încastrate pe toate cele patru laturi.

Ultima comunicare se ocupă de problema plăcilor oblice. Se dau cîteva rezultate în coordonate oblice, modul de a pune problema, precum și indicații asupra posibilităților de rezolvare.

Lucrările cuprinse în acest volum ne dau, într-o expunere deosebit de clară, rezultate interesante, atît din punct de vedere teoretic, cît și din punct de vedere practic, autorul ducînd calculele pînă la posibilitatea de aplicare numerică a lor.

Observăm că metodele de calcul folosite, modul de prezentare a rezultatelor, posibilitățile de aplicare care se întrevăd sînt asemănătoare cu cele corespunzătoare dintr-o lucrare a noastră *) despre grinzi pereți (tot plăci plane, acționate însă de sarcini cuprinse în planul lor). Ținem să menționăm acest lucru, deoarece considerăm interesant faptul că unele idei se regăsesc în probleme diferite, la cercetători independenți unul de celălalt.

Volumul lui Sven T. A. Ödman este interesant atît pentru matematicieni, pentru problemele de fizică-matematică pe care le pune, cît și pentru cercetătorii din domeniul mecanicii corpului solid, pentru problemele practice prezentate. Studiul său poate duce la clarificarea multor idei în domeniul rezolvării problemelor la limită liniare.

P. P. Teodorescu

M. GIQUEAUX, *Mécanique des fluides théorique* (Mecanica fluidelor teoretică). Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris & Liège, 1957, 413 pag. 134 fig.

De curînd a apărut a doua ediție a lucrării lui M. Giqueaux *Mecanica Fluidelor teoretică*, revăzută și adăugită, cu colaborarea lui M. Oudart. Scrisă în prima ediție cu scopul de a servi drept curs pentru învățămîntul superior, cea de-a doua ediție păstrează în linii generale același caracter.

Lucrarea începe cu un capitol introductiv privind cinematica fluidelor în care se definesc unele noțiuni de bază : viteză, debit, potențial de viteze, linii de curent, mișcare permanentă, mișcare turbulentă, vîrtej, deformațiile unui element de fluid în mișcare, accelerațiile, teoremele lui Stockes și Kelvin, determinarea cîmpului de viteze cînd se cunoaște cîmpul de vîrtejuri, scrierea principalelor mărimi cinematice în diferite sisteme de coordonate. De asemenea, în același capitol se studiază proprietățile mișcărilor turbulente, insistîndu-se în special asupra turbulenței izotrope.

Capitolul următor (cap. 1) este consacrat problemelor generale de dinamică a fluidelor perfecte și vîscoase. Astfel, se definește noțiunea de presiune într-un fluid perfect și de tensiune într-un fluid vîscos și se scriu ecuațiile generale de mișcare pentru diferite cazuri (fluide perfecte, vîscoase, compresibile, ecuațiile lui Reynolds pentru mișcări turbulente) și în diferite sisteme de coordonate. Totodată se prezintă și diferitele ecuații suplimentare, caracteristice și de stare pentru fluide compresibile, barotrope etc. De asemenea se prezintă pe scurt principalele condiții la limită care se utilizează în diferite probleme. În continuare se prezintă pe scurt unele probleme de hidrostatică, iar apoi în cadul aceluiași paragraf se prezintă teorema impulsului a lui Euler. În următoarele paragrafe se prezintă unele probleme generale privind mișcările irotaționale (incompresibile și compresibile), mișcarea unui fluid perfect barotrop cînd există un potențial de forțe (deducîndu-se condiția de existență a unui potențial de accelerații și pentru un fluid vîscos incompresibil), ecuațiile lui Bernoulli și Saint-Venant (cu aplicații la calculul caracteristicilor sufleriilor aerodinamice, la calculul caracteristicilor aerodinamice în punctul de stagnare de pe un corp), ecuația presiunii în cazul mișcărilor rotaționale, mișcarea plană (introducîndu-se noțiunea de funcție de curent în cazul general al fluidelor compresibile), metoda lui Prasil de construire a liniilor echipotențiale și de curent în cazul mișcărilor plane, potențialul complex și viteza complexă pentru mișcările plane incompresibile. Probleme asemănătoare sînt prezentate pe scurt și în cazul mișcărilor axial simetrice incompresibile și compresibile. Un pa-

---

*) P. P. Teodorescu, *Asupra calculului grinzilor pereți cu o singură deschidere*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1*, 115 (1957) ; *2*, 451 (1957).

ragraf special este consacrat în continuare unor probleme privind termodinamica fluidelor (travaliul forțelor interioare de contact, energia internă, ecuația energiei, funcția de disipație pentru un fluid incompresibil laminar și turbulent, entalpia, entropia) și apoi similitudinea între două mișcări.

Capitolul următor (cap. 2) este consacrat unor probleme de dinamica fluidelor vîscoase și în special problemei stratului limită. Astfel, după unele considerații generale (condiții de contact cu un perete imobil), se studiază cîteva cazuri simple de mișcări ale fluidelor vîscoase (mișcări foarte lente, problema lui Stocke, analogia Helle-Shaw, mișcări slabe turbionare, mișcări laminare în tuburi cilindrice și între două plăci). Într-un paragraf special se studiază mișcarea plană în stratul limită laminar pentru un fluid incompresibil : ecuațiile de mișcare, definirea punctului de desprindere, soluția dată de Blasius pentru stratul limită al unei plăci plane, definirea diferitelor grosimi utilizate în studiul stratului limită, relația integrală a lui Karman aplicată pentru calculul grosimii stratului limită, metoda lui Polhausen pentru mișcări permanente, metoda analogiei cu mișcarea în lungul unui diedru pentru studiul stratului limită cu gradient de presiune, probleme termice. În paragraful următor se prezintă unele probleme termice pentru fluide incompresibile, iar paragraful care urmează este consacrat studiului stratului limită laminar compresibil și cuprinde pe lîngă unele considerații generale, studiul stratului limită pe o placă plană și pe scurt, unele metode aproximative de studiu. Unele probleme privind stratul laminar de revoluție fac obiectul unui alt paragraf, în care, după ecuațiile generale se prezintă mișcarea conică și analogia lui Mangler cu mișcările plane. În paragraful următor se studiază stratul limită turbulent incompresibil, prezentîndu-se teoria lui Karman. Apoi, într-un alt paragraf, se face pe scurt o trecere în revistă a mai multor metode semiempirice pentru calculul mișcării în straturi limită, în diferite cazuri.

În capitolul ce urmează (cap. 3), se prezintă mișcarea plană a unui fluid perfect incompresibil. Se prezintă mai întîi cîteva noțiuni privind transformările conforme, apoi potențialul complex al mișcării în jurul unui cerc. În paragraful următor se deduc formulele lui Blasius, se prezintă teorema Kutta-Jukovski, mișcarea în jurul unei plăci plane, se definesc coeficienții aerodinamici ai profilelor și calculul lor, cu aplicații la placa plană, focarul și curba metacentrică a profilelor. În continuare, se prezintă un paragraf destinat profilelor aerodinamice teoretice : profile Jukovski, Girault, Karman-Trefftz, profile Girault generalizate, profile von Mises, profile eliptice. Următorul paragraf este destinat studiului mișcării în jurul profilelor empirice ; metoda lui Munck de determinare a funcției de transformare în cazul profilelor subțiri, metode mai generale ca metoda lui Trefftz, Karman și Müller, metoda lui Theodorsen, metoda turbionară a lui Birnbaum.

Capitolul 4 este consacrat studiului mișcărilor plane cu singularități izolate : mișcarea datorită unui vîrtej, infinit sau limitat pe două suprafețe paralele, mișcarea în prezența mai multor vîrtejuri izolate, șirul de vîrtejuri Bénard-Karman, dubletul, mișcarea în prezența unei surse, unui șir de surse, unei surse continue, mișcarea în jurul carenelor plane. Un paragraf special este consacrat reprezentării la infinit a unei aripi de anvergură infinită. Apoi se studiază mișcarea în jurul carenelor de revoluție. În sfîrșit, se studiază mișcarea unui fluid compresibil în prezența unei surse în mișcare plană și axial-simetrică.

Capitolul 5 este destinat prezentării teoriei aripii de anvergură finită a lui Prandtl. După unele generalități privind vîrtejurile libere și legate, se prezintă ipotezele lui Prandtl și ecuația circulației. Apoi se calculează portanța și momentul aerodinamic rezultant în funcție de circulație, considerîndu-se circulația dezvoltată în Serie Fourier. După o sumară trecere în revistă a diferitelor metode de calcul a coeficienților circulației (Glauert, Lotz, Multhopp, Carafoli, Perès și Malavard) se prezintă studiul aripii eliptice și studiul aripii dreptunghiulare după metoda lui Glauert, iar apoi se calculează viteza indusă în avalul aripii datorită vîrtejurlor libere și vîrtejului legat de pe aripă. Capitolul se încheie cu reprezentarea mișcării plane ce rezultă, la infinit aval.

În capitolul următor (cap. 6) se prezintă teoria turbionară a elicei : ecuațiile de mișcare, aplicarea teoremei impulsului, teorema lui Jucovski, calculul reacțiunilor aerodinamice, elice cu număr infinit de pale, elicea cu circulație constantă, elicea optimă, influența numărului finit de pale.

Capitolul 7 cuprinde mișcarea plană incompresibilă cu suprafețe de discontinuitate : metoda Levi-Civita și Villat, aplicată la scurgerea în jurul unei plăci plane normale pe curent și la studiul jetului plan. Acest capitol a fost redactat în cea mai mare parte de către M. Oudart.

Capitolul 8 se ocupă de dinamica fluidelor perfecte compresibile și începe cu un paragraf destinat studiului suprafețelor de undă, apoi se prezintă mișcarea relativă dintre un solid ș un fluid, relevîndu-se deosebirile ce există între mișcarea subsonică și supersonică. În continuare, se prezintă variația mărimilor care definesc mișcarea la traversarea unei unde de șoc plane, frontale și oblice. În paragraful următor se prezintă scurgerea unidimensională în tuburi. Apoi se prezintă mișcarea plană supersonică, studiată cu ajutorul metodei caracteristicilor, mișcarea plană subsonică prin metoda lui Ceaplîghin și Karman-Tsien, detenta Prandtl-Meyer, studiul mișcării supersonice în jurul unui profil gros, studiul mișcărilor compresibile prin metoda perturbațiilor mici (metoda Prandtl-Glauert, metoda Ackeret), iar apoi diferite metode aproximative : metoda lui Poggi și metoda dezvoltării în serie după puterile numărului Mach. Un paragraf special este destinat mișcărilor conice, unde însă nu se prezintă decît unele probleme generale : demonstrarea faptului că o mișcare conică este irotațională, ecuația de continuitate în mișcarea conică, mișcarea în jurul unui con solid printr-o metodă de aproximații succesive, racordarea unei mișcări uniforme la o mișcare conică.

Ultimul capitol al cărții (cap. 9) este destinat studiului interacțiunilor, influența pereților circulari solizi și fluizi, a pereților plani, în cazul unui vîrtej, influența solului asupra mișcării unui fluid etc.

Lucrarea se încheie cu o listă bibliografică, cuprinzînd principalele lucrări consultate, și o interesantă listă cuprinzînd note biografice privind principalii savanți citați, exceptînd pe cei din viață.

După cum se poate constata din cele de mai sus, lucrarea prezintă principalele probleme ale mecanicii fluidelor punînd accentul pe problemele de aerodinamică. Expunerea este deosebit de clară și logică, remarcîndu-se în special problemele clasice : ecuațiile generale, studiul mișcărilor plane ale fluidelor incompresibile, studiul profilelor și aripilor, studiul interacțiunilor aerodinamice, studiul stratului limită. Alte probleme sînt mai puțin dezvoltate : mișcări nepermanente, mișcarea fluidelor vîscoase, mișcarea turbulentă cu aplicații în hidraulică, mișcările tridimensionale compresibile.

După cum remarcă și autorul în prefață, lucrarea are un caracter pur teoretic, aceasta manifestîndu-se în special prin faptul că se insistă puțin în cuprinsul lucrării asupra fenomenelor fizice, lucru ce îngreuiază într-o oarecare măsură studiul ei pentru acei care vor să se familiarizeze cu problemele mecanicii fluidelor și aerodinamicii, cu atît mai mult cu cît organizarea materialului este mai puțin obișnuită, unele probleme mai dificile, ca de exemplu studiul mișcărilor fluidelor vîscoase, fiind prezentate înaintea altora, clasice, mai ușor de abordat.

În general, lucrarea *Mecanica fluidelor teoretică* de M. Giqueaux este interesantă și utilă pentru acei care se ocupă cu probleme privind mecanica fluidelor, iar apariția unei noi ediții ale acestei lucrări este bine venită.

V. N. Constantinescu

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POȘTALE
PRIN FACTORII POȘTALI ȘI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ȘI INSTITUȚII

10

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE
PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

F 2557 VIII

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

2
ANUL IX
1958

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ȘI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

2

ANUL IX

1958

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACTIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. PROFIRI;
A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
C. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti;
N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti;
M. ARCAN, conferenţiar la Institutul de construcţii, Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE PATRU ORI PE AN

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ « TRAIAN VUIA »

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul IX, nr. 2 1958

SUMAR

STUDII ŞI CERCETĂRI

AEROMECANICĂ

Pag

E. CARAFOLI şi M. IONESCU, Teoria generală a aripii triunghiulare cu distribuţie de presiuni dată (problema indirectă) 267
LUCIAN DUMITRESCU, Asupra regimului optim de funcţionare al rachetelor 285
AL. MARINESCU, Vibraţiile forţate ale rotoarelor de elicopter cu pale Cantilever 297

HIDRODINAMICĂ

L. P. SMIRNOV şi M. A. PAVLIHINA, Urma turbionară în cazul scurgerii în jurul cilindrilor în vibraţie 307
V. A. ARHANGHELSKI, Filtrarea şi scurgerea prin conducte a fluidelor în mai multe faze 319

DINAMICA ŞI CINEMATICA SOLIDELOR

M. M. NIŢĂ, Studiu asupra mişcării sateliţilor artificiali în mediul rezistent. . 337

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

N. TIPEI şi AL. NICA, Presiunile şi caracteristicile globale în lubrificaţia suprafeţelor cilindrice cu mişcare de rostogolire şi de alunecare 359
V. N. CONSTANTINESCU, Consideraţii asupra lubrificaţiei cu gaze în regim turbulent 369
GH. VASILCA şi AL. NICA, Cercetări asupra caracteristicilor de funcţionare a lagărelor construite din materiale diferite 377

ELASTICITATE – REZISTENŢA MATERIALELOR

PETRE P. TEODORESCU, Asupra problemei plane a elasticităţii în coordonate oblice 391
CRISTIAN STĂNESCU, O problemă de tip mixt din încovoierea plăcilor elastice. 411
V. MANEA, Torsiunea arborelui cu caneluri radiale exterioare 423

VIBRAŢII

H. S. SCHÄFFER, Un procedeu nou în determinarea frecvenţelor proprii ale cadrelor multiple cu noduri fixe 435

Pag.

TRATAMENTE MECANICE ŞI PRELUCRAREA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

V. MARCU, N. ZELINGHER şi P. FREUND, Protecţia contra coroziunii prin straturi de metal pulverizat 457

NOTE STIINŢIFICE ŞI TEHNICE

GH. BUZDUGAN, Grinzi pe reazeme elastice de lungime dată 471

T. HACKER, şi M. PALOŞ, Unele probleme asupra zborului în spirală la planoare 481

RECENZII 489

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ERATĂ

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:
271		Fig. 3	Fig. 4
		Fig. 4	Fig. 3
277	(39.a)	$\ldots \int_{x_0}^{x_2} \frac{x_{n-q}}{\ldots} \ldots$	$\ldots \int_{x_0}^{x_2} \frac{x^{n-q}}{\ldots} \ldots$
320	(4) și (6)	$\ldots = -2\pi km \ldots$	$\ldots = -2\pi hm \ldots$
321	(11)	$\ldots = \int_{P_0} \frac{F_1(P)(\gamma_1 - S)}{\mu_1},$	$\ldots = \int_{P_0} \frac{F_1(P)(\gamma_1 - S)}{\mu_1} dP,$
325	28	$q_1 = \ldots$	$\widetilde{q_1} = \ldots$
326	15	iar cu M și N ...	iar cu $\overline{M}$ și $\overline{N}$ ...
360	(6)	$\ldots = \frac{A\delta \mu_1 r_1}{\ldots} \ldots$	$\ldots = \frac{A_{\delta} \mu_1 r_1}{\ldots} \ldots$
361	(8)	$\ldots = \frac{A\delta \mu_1 r_1}{\ldots} \ldots$	$\ldots = \frac{A_{\delta} \mu_1 r_1}{\ldots} \ldots$
394	(8)	$\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi} = \ldots$	$\tau_{\xi\eta} - \tau_{\eta\xi} = \ldots$
427	(19″b)	$\tau_{\theta 1} - = G \ldots$	$\tau_{\theta 1} = -G \ldots$
437	(7)	$= \frac{\ldots}{3(l + 2EI\varepsilon_{AB})},$	$= \frac{\ldots}{3(l + 2EI\varepsilon_{BA})},$
440	6 de jos	neîncastrate	neîncărcate

C. 806

REVISTA STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, plasticitate, vibrații și șocuri, stabilitate, analogii elec-
rice și hidraulice).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviație, mecanica fluidelor, ventilație, aerodinamica
motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacție, construcții de avioane, utilizarea energiei eoliene).

— Construcții de mașini (rezistența materialelor, cinematica și dinamica mecanismelor,
recare, ungere, uzură, metode moderne de calcul ale diferitelor mașini, automatizare, studiul
suprafețelor, tratamente mecanice și prelucrarea mediilor solide continue).

— Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utili-
area ultrasunetului și a izotopilor radioactivi în tehnică).

— Statica și dinamica construcțiilor (metode pentru calculul static și dinamic al construc-
iilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de exe-
utarea lucrărilor de construcții).

— Hidromecanică (hidraulică, construcții hidrotehnice, irigație, turbine hidraulice și pompe,
menajări hidraulice).

Revista urmărește stimularea activității științifice precum și difuzarea lucrărilor valoroase,
primind în acest scop spre publicare articole de la toți specialiștii din țară și de la colaboratorii din
străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă și clară, evitîndu-se introduceri lungi refe-
ritoare la părțile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar și citeț cu cerneală. Figurile și graficele se vor desena în tuș pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar și în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrșitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariție, iar pentru reviste se va indica și numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză și germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleași norme sînt valabile și pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, București, str. C. Mille, nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE « TRAIAN VUIA »

ÉTUDES ET RECHERCHES
DE
MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome IX, nº 2 1958

SOMMAIRE

ÉTUDES ET RECHERCHES

AÉROMÉCANIQUE

Page

E. CARAFOLI et M. IONESCU, Théorie générale de l'aile triangulaire à distribution de pression donnée (problème indirect) 267

LUCIAN DUMITRESCU, Optimum Thrust Programming of a Space Rocket 285

AL. MARINESCU, Les vibrations forcées des rotors d'hélicoptères à pales Cantilever 297

HYDRODYNAMIQUE

L. P. SMIRNOV et M. A. PAVLIKHINA, La trace tourbillonnaire lors de l'écoulement autour des cylindres en état de vibration 307

V. A. ARKHANGHELSKI, Filtrage et écoulement des fluides à travers des conduites en plusieurs phases 319

DYNAMIQUE ET CINÉMATIQUE DES SOLIDES

M. M. NIŢĂ, Étude sur le mouvement des satellites artificiels dans un milieu résistant 337

LUBRIFICATION – FROTTEMENT – USURE

N. TIPEI et AL. NICA, Les pressions et les caractéristiques globales dans la lubrification des surfaces cylindriques à mouvement de roulement et de glissement 359

V. N. CONSTANTINESCU, Considérations sur la lubrification aux gaz en régime turbulent 369

GH. VASILCA et AL. NICA, Recherches sur les caractéristiques de fonctionnement des paliers confectionnés en matériaux divers 377

ÉLASTICITE – RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

PETRE P. TEODORESCU, Sur le problème plan de l'élasticité en coordonées obliques 391

CRISTIAN STĂNESCU, Un problème du type mixte sur la flexion des plaques élastiques 411

V. MANEA, Torsion de l'arbre à cannelures radiales extérieures 423

VIBRATIONS

H. S. SCHÄFFER, Un nouveau procédé pour la détermination des fréquences propres des cadres multiples à nœuds fixes 435

Page

TRAITEMENTS MÉCANIQUES ET USINAGE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

V. MARCU, N. ZELINGHER et P. FREUND, La protection contre la corrosion assurée par des couches de métal pulvérisé 457

NOTES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

GH. BUZDUGAN, Poutres sur appuis élastiques de longueur donnée 471

T. HACKER et M. PALOŞ, Certains problèmes du vol en spirale des planeurs 481

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 489

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

La revue de l'Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la R. P. R.

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

comprend des études de mécanique appliquée, notamment :

— *Mécanique générale (élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques).*

— *Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction, construction des avions, utilisation de l'énergie éolienne).*

— *Constructions mécaniques (résistance des matériaux, cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des différentes machines, automatisation, étude des surfaces, traitements mécaniques et travail des milieux solides continus).*

— *Technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radio-actifs en technique).*

— *Statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction).*

— *Hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques).*

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant, autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés dactilographiés en trois exemplaires ; les formules seront écrites à l'encre et d'une manière lisible.

Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliographiques seront mentionnées spécialement à la fin de l'article. Elles doivent être aussi complètes que possible, comprenant, par exemple pour les périodiques, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers seront rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 15, rue Constantin Mille.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ“

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том IX, № 2 **1958**

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ И ИССЛЕДОВАНИЯ

АЭРОМЕХАНИКА Стр.

Е. КАРАФОЛИ и М. ИОНЕСКУ, Общая теория треугольного крыла с заданным распределением давления (косвенная задача) 267
ЛУЧИАН ДУМИТРЕСКУ, Об оптимальном режиме работы ракет . . . 285
А. МАРИНЕСКУ, Вынужденные колебания несущих винтов вертолета с лопастями типа Кантилевера 297

ГИДРОДИНАМИКА

Л. П. СМИРНОВ, И М. А. ПАБЛИХНИА Вихревой след при обтекании колеблющихся цилиндров 307
В. А. АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Фильтрация и течение в трубах неоднофазных жидкостей 319

ДИНАМИКА И КИНЕМАТИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

М. М. НИЦЭ, Изучение движения искусственных спутников в сопротивляющейся среде 337

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

Н. ТИПЕЙ и А. НИКА, Давления и общие характеристики смазки цилиндрических поверхностей при качении и скольжении 459
В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, О газовой смазке при турбулентном режиме 369
Г. ВАСИЛКА и А. НИКА, Исследование рабочих характеристик подшипников из различных материалов 377

УПРУГОСТЬ — СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ПЕТРЕ П. ТЕОДОРЕСКУ, О плоской задаче упругости в косоугольных координатах 391
КРИСТИЯН СТЭНЕСКУ, Одна задача смешанного типа по изгибанию упругих пластинок 411
В. МАНЯ, Кручение вала с наружными радиальными канавками . . . 423

ВИБРАЦИИ

Х. С. ШЕФФЕР, Новый способ определения собственных частот многобалочных рам с неподвижными узлами 435

Стр.

МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА И РАЗРАБОТКА СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

В. МАРКУ, Н. ЗЕЛИНГЕР и П. ФРЕЙНД, Противокоррозионная защита слоями распыленного металла 451

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Г. БУЗДУГАН, Балки, лежащие на упругих основаниях заданной длины 471

Т. ХАКЕР и Н. ПЦЛАОШ, Некоторые вопросы полета у планеров . . . 481

РЕЦЕНЗИИ 489

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Журнал Института прикладной механики Академии РНР

,,ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"

содержит нижеследующие разделы прикладной механики:

— Общую механику (упругость, пластичность, вибрации и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).

— Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, реактивные двигатели, самолетостроение, использование энергии ветра).

— Машиностроение (сопротивление материалов, кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механическая обработка сплошных твердых сред).

— Технику измерений (электронные приборы для измерения механических еличин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

— Статику и динамику сооружений (методы статического и динамического расчета соружений, исследование неоднородных материалов, геотехника, устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).

— Гидромеханику (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

Журнал преяназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ, и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных и зарубежных сотрудников.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным данным проблемы.

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, нанечатанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированиая литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указывать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском и, если возможно, на русском и французском языках. Резюме должно в среднем составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных авторов, редактированным на русском, английском, французском или немецком языке.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле № 15, район Г. Георгиу-Деж.

TEORIA GENERALĂ A ARIPII TRIUNGHIULARE CU DISTRIBUȚIE DE PRESIUNI DATĂ (PROBLEMA INDIRECTĂ)

DE

E. CARAFOLI și M. IONESCU

I. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

Într-o serie de lucrări anterioare [1], [2], [3], [4] am determinat, printr-o metodă unitară, coeficientul de presiune pe o aripă triunghiulară avînd pe porțiuni o distribuție de pantă (sau incidență) definită de un polinom omogen de un ordin oarecare. Această problemă va fi denumită *problema directă.*

În cele ce urmează, vom determina panta (sau incidența) unei aripi triunghiulare pe care, de data aceasta, se dă distribuția coeficientului de presiune sub forma unui polinom omogen de ordin oarecare. În aceasta constă *problema indirectă.* Vom arăta mai jos că ea se poate rezolva prin reducerea ei, în toate cazurile posibile, la o soluție din *problema directă* și vom scrie astfel fără nici un calcul deosebit soluția, folosind rezultatele obținute în lucrarea citată anterior [4].

Incidența sau panta într-un punct al aripii este definită de raportul dintre viteza verticală w în același punct și viteza de la infinit U_∞, fie $\frac{w}{U_\infty}$. Vom avea astfel, notînd cu $Z(x_1, x_2)$ cota unui punct al suprafeții, după normala la aripă,

$$\alpha = \frac{\partial Z}{\partial x_1} = \frac{w}{U_\infty}. \tag{1}$$

Integrînd în funcție de x_1, vom găsi Z, dacă cunoaștem w.

Ne propunem deci să determinăm viteza verticală w în jurul unei aripi triunghiulare OA_1A_2, avînd, pe porțiuni, o distribuție de presiuni dată. Din formula coeficientului de presiune,

$$C_p = -\frac{2u}{U_\infty}, \tag{2}$$

se vede că aceasta, poate fi definită de viteza axială u, care va fi reprezentată, prin ipoteză, de o sumă de polinoame omogene de ordine $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, în x_1 și x_2, de forma

$$u = \sum_{m=0}^{n-1} u_m\,(x_1, x_2), \tag{3}$$

unde

$$u_m = \sum_{q=0}^{m} u_{m-q,\,q}\, x_1^{m-q}\, x_2^{q}\,. \tag{4}$$

Să luăm $m = n-1$ și să presupunem, fără a restrînge generalitatea problemei, că pe aripă există numai două regiuni cu regimuri diferite de viteză axială separate de muchia OC : suprafața OA_2C, pe care viteza este dată de expresia

$$u^{(2)}_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} u^{(2)}_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^{q}\,, \tag{5}$$

și suprafața OCA_1, cu viteză

$$u^{(1)}_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} u^{(1)}_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^{q}\,. \tag{6}$$

Pentru continuarea calculului vom indica mai jos, în prealabil, cîteva notații utilizate curent sau care lămuresc unele operații folosite în această lucrare.

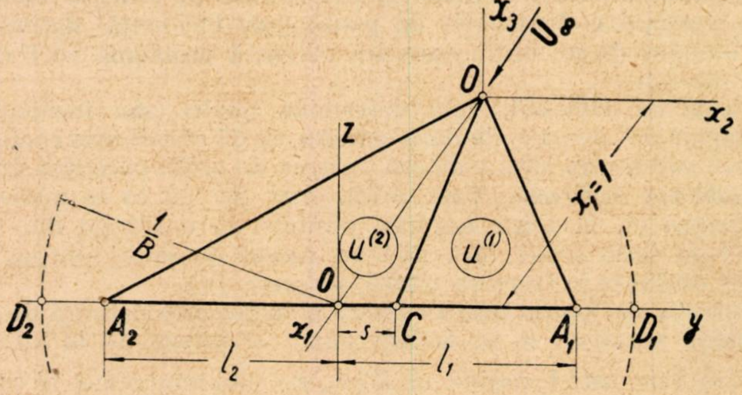


Fig. 1

Astfel, raportîndu-se la figura 1, vom pune

$$y = \frac{x_2}{x_1}\,, \quad z = \frac{x_3}{x_1}\,, \tag{7}$$

coordonatele planului fizic,

$$\xi = \eta + i\,\zeta \tag{8}$$

planul lui Busemann dedus din planul fizic prin intermediul relaţiilor

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2},\ \theta = \theta,\ (r^2 = y^2 + z^2,\ \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2)\,; \tag{9}$$

apoi planul auxiliar

$$x = y + iz \tag{10}$$

sau planul de studiu, utilizat în calculele noastre dedus din planul Busemann prin transformarea conformă

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2}\,. \tag{11}$$

Vom pune mai departe,

$$\Phi\,(x_1,\ x_2,\ x_3) \tag{12}$$

potenţialul vitezelor de perturbaţie (funcţie omogenă de ordin n)

$$\Phi_{p,\,q,\,r} = \frac{\partial^{p+q+r}\,\Phi}{\partial x_1^p\ \partial x_2^q\ \partial x_3^r}\,, \tag{13}$$

derivate de ordinul $p + q + r$ ale funcţiei Φ,

$$u = \Phi_{1,0,0},\quad v = \Phi_{0,1,0}\,,\quad w = \Phi_{0,0,1}\,, \tag{14}$$

vitezele de perturbaţie, funcţii omogene de ordinul $(n-1)$,

$$F_{n-q-r,q,r} = \Phi_{n-q-r,q,r} + i\,\Phi'_{n-q-r,q,r} \tag{15}$$

funcţie analitică reprezentînd un potenţial fictiv,

$$(n-1)\,!\ u = x_1^{n-1}\,Re\sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q\,x^q\,F_{n-q,\,q,\,0} \tag{16 a}$$

$$(n-1)\,!\ w = x_1^{n-1}\,Re\sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q\,x^q\,F_{n-q-1,\,q,\,1} \tag{16 b}$$

formulele lui Euler pentru funcţia omogenă u, respectiv w, în punctele de pe aripă ($x = y$, $z = 0$).

Vom pune mai departe

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = Re\,U_{n-1}\,,\quad \frac{w}{x_1^{n-1}} = Re\,W_{n-1}\,, \tag{17 a}$$

$$dF_{1,\,n-1,\,0} = \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\,dx,\quad dF_{0,\,n-1,\,1} = \frac{d^n W_{n-1}}{dx^n}\,dx. \tag{17 b}$$

II. REDUCEREA PROBLEMEI INDIRECTE LA CONDIŢIILE UNEI PROBLEME DIRECTE ECHIVALENTE

Din formula lui Euler (16, b) rezultă că, pentru determinarea lui w, este necesar să cunoaștem funcțiile $F_{n-q-1,q,1}$ (15). Pentru aceasta vom arăta în primul rînd că, din punctul de vedere al condițiilor la limită, această *problemă indirectă*, în care căutăm funcțiile $F_{n-q-1,q,1}$, corespunde în mod identic cu o *problemă directă*, în care căutăm funcțiile $F_{n-q,q,0}$ (15).

Vom juxtapune mai jos în planul $x = y + i\mathfrak{z}$, tipurile de problemă indirectă și problema directă echivalentă.

A. *Problemele indirecte*

1) Aripa subțire cu borduri de atac subsonice sau supersonice (fig. 2*a*).

2) Aripa groasă cu un bord de atac subsonic și altul supersonic (fig. 3*a*).

3) Aripa groasă cu ambele borduri de atac subsonice (fig. 4*a*).

B. *Problemele directe echivalente*

1) Aripa groasă cu borduri de atac subsonice sau supersonice (fig. 2*b*)

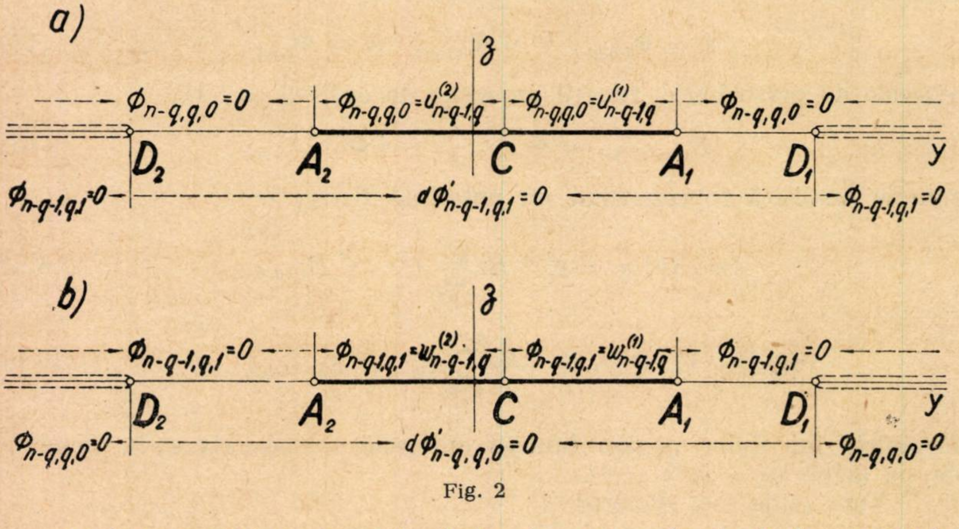

a)
$\mathfrak{z}$
$\Phi_{n-q,q,0}=0$
$-\Phi_{n-q,q,0}=u^{(2)}_{n-q-1,q}$
$-\Phi_{n-q,q,0}=u^{(1)}_{n-q-1,q}$
$-\Phi_{n-q,q,0}=0$
D_2
A_2
C
A_1
D_1
y
$\Phi_{n-q-1,q,1}=0$
$d\Phi'_{n-q-1,q,1}=0$
$-\Phi_{n-q-1,q,1}=0$
b)
$\mathfrak{z}$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=0$
$-\Phi_{n-q-1,q,1}=w^{(2)}_{n-q-1,q}$
$-\Phi_{n-q-1,q,1}=w^{(1)}_{n-q-1,q}$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=0$
D_2
A_2
C
A_1
D_1
y
$\Phi_{n-q,q,0}=0$
$d\Phi'_{n-q,q,0}=0$
$-\Phi_{n-q,q,0}=0$

Fig. 2

2) Aripa subțire cu un bord de atac subsonic și altul supersonic (fig. 3*b*).

3) Aripa subțire cu borduri de atac subsonice (fig. 4*b*).

Identitatea condițiilor la limită satisfăcute de $F_{n-q-1,q,1}$, respectiv $F_{n-q,q,0}$ și $F_{n-q,q,0}$ respectiv $F_{n-q-1,q,1}$, în problemele juxtapuse, este evidentă.

Pe de altă parte, într-o lucrare anterioară [4], am arătat că toate problemele directe se pot rezolva uşor în planul lui Busemann ξ (8), (9) sau în planul transformat x (11) dacă aşezăm în punctul C, reprezentînd muchia, şi în punctele A_1 şi A_2 reprezentînd bordurile de atac, un

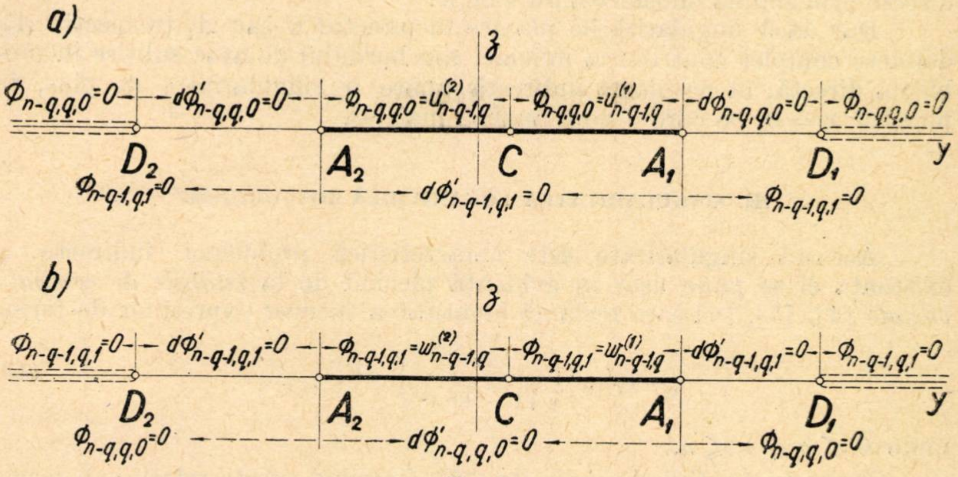

a)
z
$\Phi_{n-q,q,0}=0$
$d\Phi'_{n-q,q,0}=0$
$\Phi_{n-q,q,0}=u^{(2)}_{n-q-1,q}$
$\Phi_{n-q,q,0}=u^{(1)}_{n-q-1,q}$
$d\Phi'_{n-q,q,0}=0$
$\Phi_{n-q,q,0}=0$
D_2
A_2
C
A_1
D_1
y
$\Phi_{n-q-1,q,1}=0$
$d\Phi'_{n-q-1,q,1}=0$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=0$
b)
z
$\Phi_{n-q-1,q,1}=0$
$d\Phi'_{n-q-1,q,1}=0$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=w^{(2)}_{n-q-1,q}$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=w^{(1)}_{n-q-1,q}$
$d\Phi'_{n-q-1,q,1}=0$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=0$
D_2
A_2
C
A_1
D_1
y
$\Phi_{n-q,q,0}=0$
$d\Phi'_{n-q,q,0}=0$
$\Phi_{n-q,q,0}=0$

Fig. 3

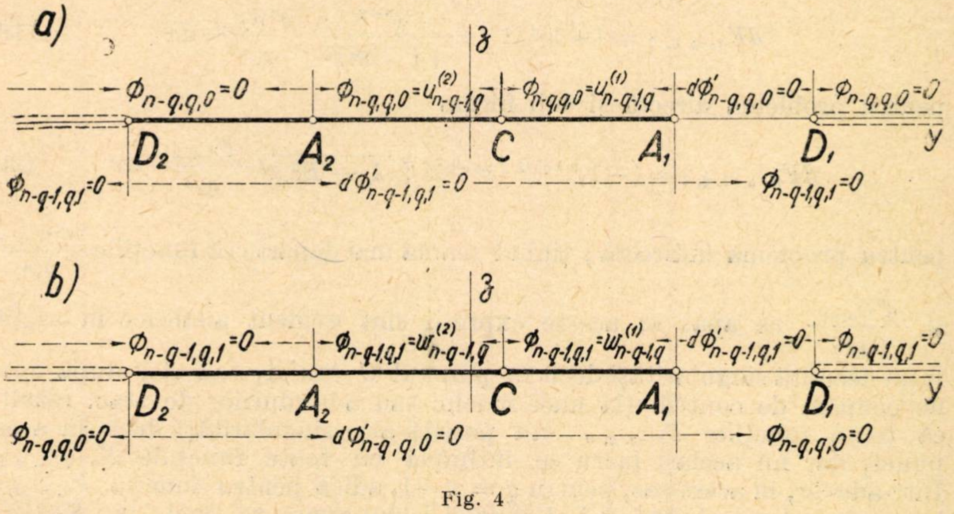

a)
z
$\Phi_{n-q,q,0}=0$
$\Phi_{n-q,q,0}=u^{(2)}_{n-q-1,q}$
$\Phi_{n-q,q,0}=u^{(1)}_{n-q-1,q}$
$d\Phi'_{n-q,q,0}=0$
$\Phi_{n-q,q,0}=0$
D_2
A_2
C
A_1
D_1
y
$\Phi_{n-q-1,q,1}=0$
$d\Phi'_{n-q-1,q,1}=0$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=0$
b)
z
$\Phi_{n-q-1,q,1}=0$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=w^{(2)}_{n-q-1,q}$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=w^{(1)}_{n-q-1,q}$
$d\Phi'_{n-q-1,q,1}=0$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=0$
D_2
A_2
C
A_1
D_1
y
$\Phi_{n-q,q,0}=0$
$d\Phi'_{n-q,q,0}=0$
$\Phi_{n-q,q,0}=0$

Fig. 4

şir de singularităţi, care reduc problema la o problemă elementară de hidrodinamică.

Rezultă de aici că problema indirectă va fi tratată în acelaşi mod, vom începe adică prin a stabili contribuţia unei muchii şi a unui bord de atac de pe o aripă groasă, cu borduri de atac subsonice, echivalentă după cum am văzut cu aceea de la aripa subţire din problema directă. Cum pe de altă parte singularităţile ce trebuie plasate în punctul C, respectiv, în punctele A_1 sau în A_2, pentru a construi funcţiile $F_{n-q-1,\,q,\,1}$, în problema indirectă (fig. 4, *a*) sau funcţiile $F_{n-q,\,q,\,0}$ în problema directă (fig. 4, *b*), sînt evident aceleaşi, rezultă că, *în ceea ce priveşte aceste singularităţi*, soluţia problemei indirecte se obţine din soluţia problemei directe prin simpla înlocuire a lui u cu w.

Dar dacă singularităţile plasate în punctul C sau A_1 (respectiv A_2) definesc complet contribuţia muchiei sau bordului de atac subţire în problema directă, în problema indirectă apare o singularitate în plus, în punctul $x = 0$, pe care o vom analiza mai jos.

III. SINGULARITATEA LOGARITMICĂ DIN ORIGINE

Această singularitate este caracteristică problemei indirecte şi existenţa ei se pune uşor în evidenţă plecînd de la *relaţiile de compatibilitate* [4], [5], [6] care reclamă identitatea tuturor expresiilor de forma

$$(-1)^q\, x^q \left(\frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\right)^r dF_{n-q-r,\,q,\,r} \tag{18}$$

unde $0 \leqslant q + r \leqslant n$.

Într-adevăr, ţinînd seama de (17) şi scriind aceste relaţii sub forma

$$dF_{n-q,\,q,\,0} = (-1)^{n-q-1}\, i \frac{x^{n-q}}{\sqrt{1-B^2x^2}} \cdot \frac{d^n W_{n-1}}{dx^n}\, dx \tag{19}$$

pentru problema directă şi sub forma

$$dF_{n-q-1,\,q,\,1} = (-1)^{n-q-2}\, i x^{n-q-2} \sqrt{1-B^2x^2}\, \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx \tag{20}$$

pentru problema indirectă ; ţinînd seama mai departe că funcţiile $\frac{d^n W_{n-1}}{dx^n}$ şi $\frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}$ ce apar în aceste expresii sînt evident analitice în origine şi nu necesită singularităţi decît în punctul C sau A_1 sau A_2, după cum ne ocupăm de contribuţia unei muchii sau a bordurilor de atac, rezultă că toate funcţiile $F_{n-q,\,q,\,0}$ nu posedă alte singularităţi decît în acest punct, dar nu acelaşi lucru se întîmplă cu toate funcţiile $F_{n-q-1,\,q,\,1}$. Într-adevăr, în acest caz, pentru $q = n-1$, adică pentru funcţia $F_{0,\,n-1,\,1}$, la numitorul membrului doi al expresiei (20) apare x ; deci, în $F_{0,\,n-1,\,1}$ apare singularitatea ln x, care, prin aplicarea restului condiţiilor la limită, devine în planul x, argch $\sqrt{\frac{l_1(x+l_2)}{(l_1+l_2)x}}$. Rezultă de aici că, pentru a obţine soluţia completă a problemei indirecte, trebuie să schimbăm u cu w în soluţia problemei directe şi să adăugăm, pentru singularităţile din origine, numai un singur termen, acela datorit funcţiei $F_{0,n-1,1}$, singura diferită de zero, deoarece conţine singularitatea logaritmică ln x. Indicînd mai departe cu un supra indice (0) expresiile referitoare la singularitatea din origine, rezultă din formula lui Euler (16 b),

$$\frac{(n-1)!\,w_0}{x_1^{n-1}} = Re\left[F^{(0)}_{n-1,\,0,\,1} + C^1_{n-1}\,x\,F_{n-2,\,1,\,1} + \ldots + x^{n-1}\,F^{(0)}_{0,\,n-1,\,1}\right] =$$

$$= Re\ A^{(0)}\,x^{n-1}\,\text{argch}\sqrt{\frac{l_1(x+l_2)}{(l_1+l_2)\,x}}. \tag{21}$$

Cu acest termen putem completa soluția lui w.

IV. FORMULELE CARE NE DAU PE w

Ținînd seama acum de rezultatele obținute pentru u în lucrarea noastră anterioară [4] vom putea deduce soluția pentru w, în cazul aripii groase cu borduri de atac subsonice :

$$\frac{w}{x_1^{n-1}} = w_{n-1} = Re\left[\sum_{q=0}^{n-1} C_q\,x^q\,\text{argch}\sqrt{\frac{(l_1-s)\,(x+l_2)}{(l_1+l_2)\,(x-s)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} D_q\,x^q\sqrt{(l_2+x)\,(l_1-x)} + A^{(0)}\,x^{n-1}\,\text{argch}\sqrt{\frac{l_1(x+l_2)}{(l_1+l_2)\,x}}\right], \tag{22}$$

pentru contribuția muchiei OC,

$$\frac{w}{x_1^{n-1}} = w_{n-1} = Re\left[\sum_{q=0}^{n-1} A_q\,x^q\sqrt{\frac{l_2+x}{l_1-x}} + A^{(0)}\,x^{n-1}\,\text{argch}\sqrt{\frac{l_1(x+l_2)}{(l_1+l_2)\,x}}\right], \tag{23}$$

pentru contribuția bordului OA_1, respectiv

$$\frac{w}{x_1^{n-1}} = w_{n-1} = Re\left[\sum_{q=0}^{n-1} A_q\,x^q\sqrt{\frac{l_1-x}{l_2+x}} + A^{(0)}\,x^{n-1}\,\text{argch}\sqrt{\frac{l_1(x+l_2)}{(l_1+l_2)\,x}}\right], \tag{24}$$

pentru contribuția bordului OA_2 și, în sfîrșit,

$$\frac{w}{x_1^{n-1}} = w_{n-1} = Re\left[\frac{\sum_{q=0}^{n} A_q\,x^q}{\sqrt{(l_1-x)\,(l_2+x)}} + A^{(0)}\,x^{n-1}\,\text{argch}\sqrt{\frac{l_1(x+l_2)}{(l_1+l_2)\,x}}\right] \tag{25}$$

pentru contribuția ambelor borduri, OA_1 și OA_2 ale aripii.

Un raționament analog cu cel folosit în lucrările anterioare, ne conduce la concluzia că formula (22) este valabilă atît pentru cazul cînd unul sau ambele borduri de atac devin supersonice cît și pentru cazul cînd, în una din aceste situații, muchia OC devine supersonică. Este suficient pentru aceasta să înlocuim l_1 (sau l_2) cu $1/B$, dacă bordul OA_1 (sau OA_2) devine supersonic, $l_1 = l_2 = 1/B$, dacă ambele borduri devin supersonice și argch = arccos, dacă muchia OC devine supersonică.

Tot aşa, formulele (23) şi (24) sînt valabile şi pentru cazul cînd bordul de atac ne luat în consideraţie, OA_2, respectiv OA_1, devine supersonic. În acest caz nu avem decît să înlocuim l_2, respectiv l_1, cu $1/B$.

V. CAZUL CÎND MUCHIA SEPARĂ DOUĂ REGIMURI DEFINITE PRIN POLINOAME OMOGENE DE ORDINE DIFERITE

Aşa cum s-a arătat în cazul problemei directe [4], în cazul unei muchii ce separă două regiuni cu regimuri de viteză definite de două polinoame omogene de grade diferite, soluţia problemei se obţine presupunînd că pe o fîşie elementară în vecinătatea muchiei considerate, viteza este zero. Din punct de vedere al calculului, sîntem în acest caz în prezenţa a două muchii ce separă variaţii de la un polinom omogen la zero şi invers. În acest caz soluţia se obţine prin simplă însumare a contribuţiilor acestor două noi muchii.

Astfel, dacă presupunem că viteza axială variază de la valoarea

$$u^{(2)} = \sum_{q=0}^{m-1} u^{(2)}_{m-q-1} \, x_1^{m-q-1} x_2^q \,, \tag{26}$$

la stînga muchiei OC, la valoarea

$$u^{(1)} = \sum_{q=0}^{n-1} u^{(1)}{}_{n-q-1,\,q} \, x_1^{n-q-1} x_2^q \,, \tag{27}$$

la dreapta ei, expresia vitezei verticale w se obţine din aceeaşi formulă (22), odată cu $n = m$ şi apoi cu $n = n$,

$$\begin{aligned} w = Re\Bigg[&\left(x_1^{m-1} \sum_{q=0}^{m-1} C_q^{(m)} x^q + x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} C_q^{(n)} x^q \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1-s)(x+l_2)}{(l_1+l_2)(x-s)}} + \\ &+ \left(x_1^{m-1} \sum_{q=0}^{m-2} D_q^{(m)} x^q + x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-2} D_q^{(n)} x^q \right) \sqrt{(l_2+x)(l_1-x)} + \\ &+ \left(x_1^{m-1} A_m^{(0)} x^{m-1} + x_1^{n-1} A_n^{(0)} x^{n-1} \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{l_1(x+l_2)}{(l_1+l_2)x}} \Bigg] \cdot \end{aligned} \tag{28}$$

VI. EXEMPLE DE APLICAŢII

Pentru a fixa ideile, vom determina mai jos viteza verticală w în jurul unei aripi triunghiulare groase sau subţiri. În afara efectului bordurilor de atac, în vederea unor aplicaţii interesante, vom considera în plus efectul unei muchii OC, cu discontinuitate de presiune.

Să presupunem că viteza axială de perturbaţie este dată de expresiile

$$u^{(2)} = \sum_{q=0}^{m-1} u^{(2)}_{m-q-1,\,q} \, x_1^{m-q-1} x_2^q \,, \tag{29}$$

pe suprafaţa OA_2C şi

$$u^{(1)} = \sum_{q=0}^{n-1} u^{(1)}_{n-q-1,\,q} \, x_1^{n-q-1} x_2^q \,, \tag{30}$$

pe suprafaţa OCA_1.

Prin aplicarea adecvată a formulelor generale stabilite mai sus, obținem după cîteva calcule elementare, rezultatele următoare :

a) Pentru *aripa groasă cu borduri de atac subsonice* se aplică formulele (23) și (24) pentru bordurile de atac și formula (22) pentru muchia OC; vom avea deci

$$\begin{aligned} w = Re\Bigg[& x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(1)} x^q \sqrt{\frac{l_2+x}{l_1-x}} + x_1^{m-1}\sum_{q=0}^{m-1} A_q^{(2)} x^q \sqrt{\frac{l_1-x}{l_2+x}} + \\ & + \left(x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} C_q^{(1)} x^q + x_1^{m-1}\sum_{q=0}^{m-1} C_q^{(2)} x^q \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1-s)(l_2+x)}{(l_1+l_2)(x-s)}} + \\ & + \left(x_1^{n-1} A_1^{(0)} x^{n-1} + x_1^{m-1} A_2^{(0)} x^{m-1} \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{l_1(x+l_2)}{(l_1+l_2)\,x}} \Bigg], \end{aligned} \tag{31}$$

unde termenii algebrici datoriți muchiei OC au fost înglobați în termenii datoriți bordurilor de atac.

b) Pentru *aripa groasă cu un bord de atac supersonic*, (OA_2 spre exemplu) se aplică formula (23) cu $l_2 = 1/B$ pentru bordul OA_1, formula (22) cu $l_2 = 1/B$ și $s = -l_2$ pentru bordul OA_2 și formula (22) cu $l_2 = 1/B$ pentru muchia OC; în consecință, vom scrie

$$\begin{aligned} w = Re\Bigg[& x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(1)} x^q \sqrt{\frac{1+Bx}{l_1-x}} + x_1^{m-1}\sum_{q=0}^{m-1} A_q^{(2)} x^q \arccos \sqrt{\frac{(l_1+l_2)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x+l_2)}} + \\ & + \left(x_1^{n-1} A_1^{(0)} x^{n-1} + x_1^{m-1} A_2^{(0)} x^{m-1} \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{l_1(1+Bx)}{(1+Bl_1)x}} + \\ & + \left(x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} C_q^{(1)} x^q + x_1^{m-1}\sum_{q=0}^{m-1} C_q^{(2)} x^q \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1-s)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x-s)}} \Bigg]. \end{aligned} \tag{32}$$

c) Pentru *aripa subțire* se aplică formula (22) în care am substituit $l_1 = l_2 = 1/B$ odată cu $s = l_1$ și odată cu $s = -l_2$ pentru bordurile de atac și tot formula (22) cu $l_1 = l_2 = 1/B$, pentru muchia OC; vom scrie deci

$$\begin{aligned} u = Re\Bigg[& x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(1)} x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-Bl_1)(1+Bx)}{2B\,(x-l_1)}} + \\ & + x_1^{m-1}\sum_{q=0}^{m-1} A_q^{(2)} x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bx)}{2B(x+l_2)}} + \\ & + \left(x_1^{n-1} A_1^{(0)} x^{n-1} + x_1^{m-1} A_2^{(0)} x^{m-1} \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}} + \\ & + \left(x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} C_q^{(1)} x^q + x_1^{m-1}\sum_{q=0}^{m-1} C_q^{(2)} x^q \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-Bs)(1+Bx)}{2B\,(x-s)}} + \\ & + \left(x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-2} D_q^{(1)} x^q + x_1^{m-1}\sum_{q=0}^{m-2} D_q^{(2)} x^q \right) \sqrt{1-B^2x^2} \Bigg]. \end{aligned} \tag{33}$$

Dacă cele două polinoame $u^{(2)}$ şi $u^{(1)}$ au acelaşi grad, $m-1=n-1$, expresiile de mai sus devin respectiv

$$\frac{w}{x_1^{n-1}}=Re\left[\frac{\sum\limits_{q=0}^{n}A_q\,x^q}{\sqrt{(l_1-x)(l_2+x)}}+\sum_{q=0}^{n-1}C_q\,x^q\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(l_1-s)(l_2+x)}{(l_1+l_2)(x-s)}}+\right.$$
$$\left.+A^{(0)}x^{n-1}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{l_1(x+l_2)}{(l_1+l_2)\,x}}\right], \tag{34}$$

pentru aripa groasă cu bordurile de atac subsonice,

$$\frac{w}{x_1^{n-1}}=Re\left[\sum_{q=0}^{n-1}A_q^{(1)}\,x^q\sqrt{\frac{1+Bx}{l_1-x}}+\sum_{q=0}^{n-1}A_q^{(2)}\,x^q\arccos\sqrt{\frac{(l_1+l_2)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x+l_2)}}+\right.$$
$$+\sum_{q=0}^{n-1}C_q\,x^q\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(l_1-s)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x-s)}}+$$
$$\left.+A^{(0)}\,x^{n-1}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{l_1(1+Bx)}{(1+Bl_1)\,x}}\right], \tag{35}$$

pentru aripa groasă cu un bord de atac supersonic şi

$$\frac{w}{x_1^{n-1}}=Re\left[\sum_{q=0}^{n-1}A_q^{(1)}\,x^q\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1-Bl_1)(1+Bx)}{2B(x-l_1)}}+\right.$$
$$+\sum_{q=0}^{n-1}A_q^{(2)}\,x^q\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bx)}{2B(x+l_2)}}+$$
$$+\sum_{q=0}^{n-1}C_q\,x^q\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1-Bs)(1+Bx)}{2B(x-s)}}+A^{(0)}\,x^{n-1}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}}+$$
$$\left.+\sum_{q=0}^{n-2}D_q\,x^q\sqrt{1-B^2x^2}\right], \tag{36}$$

pentru aripa subţire cu bordurile de atac subsonice.

VII. DETERMINAREA CONSTANTELOR

Am arătat mai sus cum se determină soluţia generală a problemei indirecte.

Să arătăm acum tehnica determinării constantelor ce apar în această soluţie şi să presupunem, în primă instanţă, că sîntem în cazul unei aripi ce posedă o singură muchie OC ($s\neq 0$ şi $s\neq 1/B$), la dreapta şi la stînga căreia viteza axială este dată respectiv de (5) şi (6).

Soluţiile sînt furnizate de expresiile (34), (35) şi (36) şi se vede uşor că numărul de constante ce apar în aceste expresii este respectiv $2n+2$ pentru aripa groasă cu borduri de atac subsonice, $3n+1$ pentru aripa groasă cu un bord de atac supersonic şi $4n$ $(n > 1)$ pentru aripa subţire (în acest ultim caz, pentru $n = 1$, numărul de constante este egal cu 3).

Pentru a construi sistemul de ecuaţii satisfăcute de aceste constante, vom pleca de la una din relaţiile de compatibilitate (18), pe care o vom scrie sub forma

$$(-1)^q x^q\, dF_{n-q,q,0} = (-1)^{n-1} x^{n-1} \frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\, dF_{0,n-1,1}, \tag{37}$$

sau încă,

$$\Phi_{n-q,q,0} = Re\,(-1)^{n-q-1}\, i \int \frac{x^{n-q}}{\sqrt{1-B^2x^2}} \cdot \frac{d^n W_{n-1}}{dx^n}\, dx, \tag{38}$$

unde W_{n-1} este funcţia analitică de variabilă complexă x, a cărei parte reală pe aripă este $w_{n-1} = \dfrac{w}{x_1^{n-1}}$.

Impunînd acum acestei derivate să ia la stînga şi la dreapta muchiei considerate valorile cerute de expresiile (5) şi (6) deducem imediat

$$\Phi^{(2)}_{n--q,q,0} = \frac{(n-1)!\,u^{(2)}_{n-q-1,q}}{C^q_{n-1}} = Re\,(-1)^{n-q-1}\, i \int_{x_0}^{x_2} \frac{x_{n-q}}{\sqrt{1-B^2x^2}} \frac{d^n W_{n-1}}{dx^n}\, dx, \tag{39 a}$$

$$\Phi^{(1)}_{n-q,q,0} = \frac{(n-1)!\,u^{(1)}_{n-q-1,q}}{C^q_{n-1}} = Re\,(-1)^{n-q-1}\, i \int_{x_0}^{x_1} \frac{x^{n-q}}{\sqrt{1-B^2x^2}} \frac{d^n W_{n-1}}{dx^n}\, dx, \tag{39 b}$$

unde x_0 este un punct de viteză axială nulă, x_2 şi x_1 puncte pe aripă la stînga, respectiv la dreapta muchiei OC.

Vom mai cere acestor derivate să nu varieze la trecerea liniilor MACH ieşite din origine. Această restricţie ne furnizează ecuaţiile

$$\left(\frac{d^n\, W_{n-1}}{dx^p}\right)_{x=-1/B} = 0, \tag{40 a}$$

$$(p = 1,2,\ldots,n)$$

$$\left(\frac{d^p\, W_{n-1}}{dx^p}\right)_{x=+1/B} = 0. \tag{40 b}$$

Am obţinut astfel un sistem de $4n$ ecuaţii (39 a), (39 b), (40 a), (40 b) ce trebuie satisfăcute de constantele din expresia lui w.

a. Cum în *cazul aripii subţiri* avem $4n$ constante, şi cum sistemul de ecuaţii obţinut este în acest caz un sistem normal, rezultă o soluţie unică; deci problema indirectă în acest caz este în mod unic determinată.

b. În *cazul aripii groase cu un bord de atac subsonic*, vom observa că ecuaţiile (40 b) sau (40 a), după cum bordul supersonic al aripii este în stînga sau în dreapta muchiei, sînt satisfăcute în mod identic. Avem în acest caz un sistem de $3n$ ecuații cu $(3\,n + 1)$ constante, deci problema inversă prezintă o simplă nedeterminare.

c. În sfîrșit, pentru *aripa groasă cu borduri de atac subsonice*, toate cele $2\,n$ ecuații (40 a) și (40 b) sînt satisfăcute în mod identic. Rămîn deci numai cele $2\,n$ ecuații (39 a) și (39 b) pentru cele $(2\,n + 2)$ constante.

Problema prezintă deci în acest caz o dublă nedeterminare.

Să mai remarcăm că, pentru fiecare muchie (sau bord de atac în cazul aripii subțiri) cei n coeficienți C_q ce definesc variația funcțiilor $\Phi_{n-q,\,q,\,0}$ la dreapta și la stînga muchiei (sau a bordului), sînt legați prin n ecuații de forma (38); în acest caz, integrala din membrul al doilea se poate efectua calculînd un semireziduu în punctul $x = s$ (respectiv $x = l_1$ sau $x = -\,l_2$). Dezvoltînd în jurul acestor puncte din expresia lui W_{n-1} vom reține numai termenii

$$W = -\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n-1} C_q\, x^q \ln (x - s)\,, \tag{41}$$

deoarece toți ceilalți termeni din această expresie sînt funcții analitice în punctul $x = s$.

VIII. APLICAȚII LA MIȘCĂRI CONICE DE ORDINUL UNU ȘI DOI

Vom da mai jos, sub titlu de aplicație concretă, calculul vitezei verticale w pentru aripile triunghiulare cu distribuție de presiune uniformă $(n = 1)$ sau lineară $(n = 2)$

1) Aripa subțire

a) *Distribuție uniformă* $(u = u_0)$. *Mișcare conică propriu-zisă.* Făcînd $n = 1$ și observînd că în lipsa unei muchii, $C_q = 0$ în expresia (36), obținem

$$w = Re\left[A^{(1)} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 - Bl_1)(1 + Bx)}{2B(x - l_1)}} + A^{(2)} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)\,(1 + Bx)}{2B\,(x + l_2)}} + \right.$$

$$\left. + A^{(0)} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + Bx}{2Bx}}\right]. \tag{42}$$

Coeficienții $A^{(1)}$ și $A^{(2)}$ rezultă imediat prin aplicarea relației (38) odată în jurul bordului OA, $(x = l_1)$ și odată în jurul bordului OA_2 $(x = l_2)$ și calculînd apoi semireziduurile respective. Pentru aceasta, vom folosi pentru W o expresie redusă

$$W^{(1)} = -\frac{A^{(1)}}{2} \ln (x - l_1)\,, \quad W^{(2)} = -\frac{A^{(2)}}{2} \ln (x + l_2)\,; \tag{43}$$

obținem astfel

$$A^{(1)} = \frac{2u_0}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}}{l_1}\,, \quad A^{(2)} = \frac{2u_0}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}}{l_2}\,. \tag{44}$$

Pentru determinarea constantei $A^{(0)}$ vom impune numai una din condiţiile (40 a sau b), cea rămasă fiind satisfăcută automat; obţinem uşor relaţia

$$A^{(1)}\sqrt{\frac{1+Bl_1}{1-Bl_1}}+A^{(2)}\sqrt{\frac{1-Bl_2}{1+Bl_2}}+A^{(0)}=0 \tag{45}$$

de unde deducem

$$A^{(0)}=-\frac{2u_0}{\pi}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right). \tag{46}$$

Înlocuind valorile găsite în expresia lui w, găsim

$$w=\frac{2u_0}{\pi}Re\left[\frac{\sqrt{1-B^2l_1^2}}{l_1}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1-Bl_1)(1+Bx)}{2B(x-l_1)}}+\right. \tag{47}$$

$$\left.+\frac{\sqrt{1-B^2l_2^2}}{l_2}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bx)}{2B(x+l_2)}}-\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}}\right].$$

Dacă unul din bordurile de atac, OA_1 spre exemplu, este culcat în lungul axei Ox, făcînd în expresia de mai sus $l_1 \to 0$, obţinem

$$w=\frac{2u_0}{\pi}Re\left[\frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{2x}+\frac{\sqrt{1-B^2l_2^2}}{l_2}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bx)}{2B(x+l_2)}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{l_2}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}}\right],$$

rezultat găsit pe o cale cu totul diferită şi de alţi autori [7].

b) *Distribuţie liniară. Mişcare conică de ordinul doi.* Vom pune

$$u=u_{10}\,x_1+u_{01}\,x_2; \tag{48}$$

vom avea deci $n=2$. Pe de altă parte, întrucît nu avem nici o muchie suplimentară pe aripă, în expresia (36) vom face $C_q=0$ de unde rezultă în cele din urmă,

$$w=Re\left[\left(A_0^{(1)}+A_1^{(1)}x\right)\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1-Bl_1)(1+Bx)}{2B(x-l_1)}}+\right.$$

$$+\left(A_0^{(2)}+A_1^{(2)}x\right)\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bx)}{2B(x+l_2)}}+A^{(0)}x\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}}+$$

$$\left.+D_0\sqrt{1-B^2x^2}\right]. \tag{49}$$

Ca şi în cazul precedent, constantele aferente bordurilor de atac, în speţă $A_0^{(1)}$, $A_1^{(1)}$ şi $A_0^{(2)}$, $A_1^{(2)}$ se determină din relaţiile (38) pentru $q=0$

și $q = 1$, calculînd semireziduurile respective și considerînd pentru w expresiile reduse

$$W^{(1)} = -\frac{1}{2}\left(A_0^{(1)} + A_1^{(1)}x\right)\ln(x - l_1),\quad W^{(2)} = -\frac{1}{2}\left(A_0^{(2)} + A_1^{(2)}x\right)\ln(x + l_2), \tag{50}$$

valabile în jurul bordurilor de atac, A_1 și A_2.

Obținem astfel:

$$A_0^{(1)} = -2\,\frac{B^2 l_1 u_{10} + u_{01}}{\pi\sqrt{1 - B^2 l_1^2}},\quad A_1^{(1)} = 2\,\frac{u_{10} + (2 - B^2 l_1^2)\, l_1 u_{01}}{\pi\sqrt{1 - B^2 l_1^2}\; l_1^2}, \tag{51 a}$$

$$A_0^{(2)} = -2\,\frac{B^2 l_2 u_{10} - u_{01}}{\pi\sqrt{1 - B^2 l_2^2}},\quad A_1^{(2)} = 2\,\frac{-u_{10} + (2 - B^2 l_2^2)\, l_2 u_{01}}{\pi\sqrt{1 - B^2 l_2^2}\; l_2^2}. \tag{51 b}$$

Pentru celelalte două constante, $A^{(0)}$ și D_0, vom folosi numai un grup de relații (40 a sau b), observația făcută în cazul precedent fiind valabilă și aici.

Rezolvînd sistemul obținut, găsim

$$A^{(0)} = \frac{2}{\pi}\,\frac{(l_1 + l_2)\,[(l_1 - l_2)u_{10} - 2 l_1 l_2 u_{01}]}{l_1^2 l_2^2} \tag{52 a}$$

$$D_0 = -\frac{1}{\pi}\,\frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2}\,u_{10} \tag{52 b}$$

În ambele cazuri, așa cum am arătat la început, soluțiile obținute sînt valabile și pentru cazul în care unul sau ambele borduri de atac devin supersonice. Este suficient pentru aceasta să punem $\sqrt{1 - B^2 l^2} = i\sqrt{B^2 l^2 - 1}$ și argch $= i$ arccos.

2) Aripa groasă cu un bord de atac supersonic

a) *Distribuție uniformă* ($u = u_0$). *Mișcare conică.* Pentru a determina constantele în acest caz, vom presupune inițial că aripa posedă o muchie în interiorul conului MACH și că distribuția este cea din figura 5. Viteza verticală este dată în acest caz de expresia

$$w = Re\left[A^{(1)}\sqrt{\frac{1 + Bx}{l_1 - x}} + A^{(2)}\,\mathrm{argch}\sqrt{\frac{(l_1 + s)(1 + Bx)}{(1 + Bl_1)(x + s)}} + \right.$$
$$\left. + A^{(0)}\,\mathrm{argch}\sqrt{\frac{l_1(1 + Bx)}{(1 + Bl_1)x}}\right]. \tag{53}$$

Constanta $A^{(2)}$ rezultă imediat calculînd semireziduul integrandului din expresia (38) în punctul $x = -s$. Se găsește

$$A^{(2)} = \frac{2u_0}{\pi}\,\frac{\sqrt{1 - B^2 s^2}}{s}. \tag{54}$$

Relaţia (40 b) este satisfăcută în mod identic, iar relaţia (40 a) ne furnizează

$$A^{(1)} + A^{(2)}\sqrt{\frac{l_1 + s}{1 - Bs}} + A^{(0)}\sqrt{l_1} = 0 \qquad (55)$$

cum toate condiţiile sînt îndeplinite, sistemul (54), (55) este nedeterminat, deoarece posedăm numai o singură relaţie între constantele $A^{(1)}$ şi $A^{(0)}$. Vom face aici o observaţie interesantă şi anume că nu putem anula pe $A^{(0)}$.

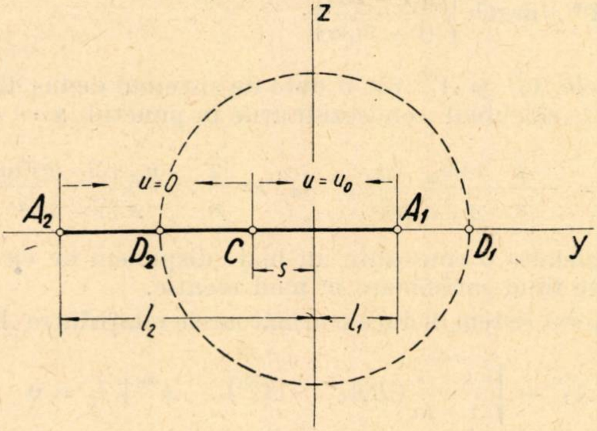


Fig. 5

Într-adevăr, dacă am lua în relaţia (55) $A^{(0)} = 0$, ar rezulta $A^{(1)} = -A^{(2)}\sqrt{\frac{l_1 + s}{1 - Bs}}$. Înlocuind $A^{(1)}$ şi $A^{(2)}$ în relaţia (53) în care am pus $A^{(0)} = 0$ şi făcînd $s \to 0$, obţinem $w = \infty$, ceea ce contrazice ipotezele de bază ale problemei şi învederează afirmaţia făcută.

În schimb putem lua $A^{(1)} = 0$; adică putem găsi o soluţie a acestei probleme indirecte fără singularitate în bordul de atac subsonic. Astfel, făcînd $A^{(1)} = 0$ în expresia (53), obţinem :

$$w = \frac{2u_0}{\pi} i \cdot \frac{\sqrt{1 - B^2 s^2}}{s}\Big[\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(l_1+s)(1 + Bx)}{(1 + Bl_1)(x + s)}} - \frac{1}{\sqrt{l_1}}\sqrt{\frac{l_1 + s}{1 - Bs}}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{l_1(1 + Bx)}{(1 + Bl_1)x}}. \qquad (56)$$

Revenind acum la problema pusă, pentru a găsi soluţia în cazul bordului supersonic vom face în expresia lui w (53) $s = l_2 > 1/B$ şi ţinînd seama de relaţiile evidente $\sqrt{1 - B^2 l_2^2} = i\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}$, $\operatorname{argch} = i \arccos$ vom obţine

$$w = Re\Big[A^{(1)}\sqrt{\frac{1 + Bx}{l_1 - x}} - \frac{2u_0}{\pi}\frac{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}{l_2}\arccos\sqrt{\frac{(l_1 + l_2)(1 + Bx)}{(1 + Bl_1)(x + l_2)}} +$$

$$+ A^{(0)}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{l_1(1 + Bx)}{(1 + Bl_1)x}}\Big]. \qquad (57)$$

b) *Distribuție liniară. Mișcarea conică de ordinul doi.* În cazul distribuției liniare de felul indicat mai sus (48), presupunînd ca și în cazul precedent că aripa posedă o muchie OC $(y = -s)$ în interiorul conului MACH, expresia vitezei verticale w este

$$w = x_1\, Re\left[\left(A_0^{(1)} + A_1^{(1)}x\right)\sqrt{\frac{1+Bx}{l_1-x}} + \left(A_0^{(2)} + A_1^{(2)}x\right)\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(l_1+s)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x+s)}} + \right.$$

$$\left. + A^{(0)}x\operatorname{argch}\sqrt{\frac{l_1(1+Bx)}{(1+Bl_1)x}}\right]. \tag{58}$$

Constantele $A_0^{(2)}$ și $A_1^{(2)}$ vor fi date de sistemul dedus din (38) pentru $q = 0$ și $q = 1$ calculînd semireziduurile în punctul $x = -s$. Obținem

$$A_0^{(2)} = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{B^2su_{10} - u_{01}}{\sqrt{1-B^2s^2}}, \quad A_1^{(2)} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-u_{10}+(2-B^2s^2)su_{01}}{s^2\sqrt{1-B^2s^2}}. \tag{59}$$

Pentru celelalte 3 constante nu mai dispunem de cît de 2 ecuații, (40 b), celelalte fiind satisfăcute în mod identic.

Scoțînd acest sistem deducem următoarele relații între $A_0^{(1)}$, $A_1^{(1)}$ și $A^{(0}$

$$\begin{gathered} BA_0^{(1)} - A_1^{(1)} + \sqrt{\frac{l_1+s}{1-Bs}}\left(BA_0^{(2)} - A_1^{(2)}\right) - A^{(0)}\sqrt{l_1} = 0 \\ \frac{(3+2Bl_1)A_0^{(1)} + A_1^{(1)}l_1}{1+Bl_1} + \sqrt{\frac{l_1+s}{1-Bs}}\,\frac{(3-2Bs)A_0^{(2)} - A_1^{(2)}s}{1-Bs} = 0. \end{gathered} \tag{60}$$

Se poate demonstra de asemenea că nu putem anula pe $A^{(0)}$ în schimb ne putem aranja astfel încît să nu mai avem singularitate în punctul $x = l_1$. Pentru asta vom lua $A_0^{(1)} + A_1^{(1)}l_1 = 0$.

Primită la redacție la 7 februarie 1958.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА С ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДАВЛЕНИЯ (КОСВЕННАЯ ЗАДАЧА)

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящем исследовании дается общее решение косвенной задачи однородных обтеканий высшего порядка треугольного крыла в сверхзвуковом потоке.

С этой целью авторы указывают прежде всего на идентичность граничных условий, которым удовлетворяют функции $F_{n-q-1,\,q,\,1}$, соответственно $F_{n-q,\,q,\,0}$, в косвенной задаче и функции $F_{n-q,\,q,\,0}$, соответственно $F_{n-q-1,\,q,\,1}$, в прямой задаче (рис. 2, 3, 4).

Анализируя далее соотношения совместимости (18), доказывают, что в косвенной задаче появляется дополнительный член (21), являющийся следствием особенности в начале.

Приходят к заключению, что общее решение косвенной задачи получается из общего решения прямой задачи путем простой подстановки w вместо u и добавления члена (21).

Использовав таким образом общие результаты, полученные в прямой задаче [4], устанавливают вертикальную скорость w, полученную благодаря ребру (22) или передней дозвуковой кромке крыла симметричной толщины (23), и указывают, что эти выражения являются общими и допускают путем простого суммирования построение общего решения задачи. Затем дается способ определения постоянных, появляющихся в общем выражении w, и, в заключение, даются конкретные применения при $n = 1$ (коническое движение) и при $n = 2$ (линейное распределение давления).

THÉORIE GÉNÉRALE DE L'AILE TRIANGULAIRE À DISTRIBUTION DE PRESSION DONNÉE (PROBLÈME INDIRECT)

RÉSUMÉ

Dans la présente étude, on donne la solution générale du problème indirect des écoulements homogènes d'ordre supérieur, autour de l'aile triangulaire en régime supersonique.

Dans ce but, les auteurs déduisent tout d'abord l'identité des conditions aux limites, satisfaites par les fonctions $F_{n-q-1,\, q,\, 1}$ (respectivement $F_{n-q,\, q,\, 0}$) du problème indirect, et les fonctions $F_{n-q,\, q,\, 1}$ (respectivement $F_{n-q-1,\, q,\, 1}$) du problème direct (fig. 2, 3, 4).

En analysant ensuite les relations de compatibilité (18), on démontre que, dans le problème indirect, on doit considérer un terme en plus (21), dû à une singularité au point $x = 0$.

On en conclut que la solution générale du problème indirect se déduit de la solution générale du problème direct, par le simple remplacement de u par w et par l'addition du terme (21).

Ainsi, en utilisant les résultats généraux obtenus dans le problème direct [4], on établit la vitesse verticale w, due à une arête (22) ou à un bord d'attaque subsonique d'une aile à épaisseur symétrique (23), et l'on montre que ces expressions sont générales et permettent la construction de la solution générale du problème. On donne ensuite la technique de la détermination des constantes qui apparaissent dans l'expression générale de w.

A la fin de l'article, on donne des applications concrètes pour $n = 1$ (mouvement conique) et pour $n = 2$ (distribution linéaire de pression).

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluţiilor din mişcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale.* Comunicările Acad. R. P. R., **II**, *9—10* (1952).
2. — *Extinderea analogiei hidrodinamice din mişcările conice la aripile groase şi cu incidenţă variabilă.* Comunicările Acad. R. P. R., **III**, *3—4* (1953).
3. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Trainée d'ailes triangulaires doublement coniques à pente variable, en écoulement supersonique.* Revue de Mécanique Appliquée, **I,** *1* (1956).
4. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Scurgeri conice de ordin superior în jurul aripilor triunghiulare subţiri sau de grosime simetrică (O teorie generală unitară).* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII,** *3* (1957).
5. P. GERMAIN, *La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul de certaines ailes Delta en régime supersonique.* La Recherche Aéronautique, *7* (1949).
6. N. LANCE, The Delt Wing in a Non-Uniform Supersonic Stream. The Aeronautical Quarterly, **V**, partea I-a (1954).
7. M. A. HEASLET, H. LOMAX, *Supersonic and Transsonic Small Perturbation Theory.* (General Theory of High-Speed Aerodynamics). W. R. Sears Editor, Princeton, **193,** 340 (1954).

ASUPRA REGIMULUI OPTIM DE FUNCȚIONARE A RACHETELOR

DE

LUCIAN DUMITRESCU

1. INTRODUCERE

Performanțele rachetelor de explorare a spațiului extraterestru depind de cantitatea de combustibil aflată în rachetă, de condițiile inițiale — viteză și altitudine în momentul aprinderii motorului — , de calitatea combustibilului, precum și de regimul de funcționare al motorului rachetă.

În lucrarea de față se analizează în mod simplificat unele probleme privind regimul optim de funcționare al motorului, precum și alegerea momentului celui mai favorabil de punere în funcționare a acestuia, în scopul realizării rachetelor care să iasă din cîmpul de atracție terestru.

2. PUNEREA PROBLEMEI

Pentru ca o rachetă să poată scăpa de sub influența atracției pămîntești, este necesar să fie lansată de pe un satelit artificial, sau să constituie ultimul etaj al unei rachete în trepte. Se vede deci, că, în ambele cazuri se poate neglija efectul rezistenței aerului, atunci cînd se studiază mișcarea unei astfel de rachete, ceea ce vom face și noi în cele ce urmează.

Vom mai presupune că în tot timpul combustiei, forța de tracțiune este orientată astfel încît să acționeze pe aceeași direcție cu forța gravitațională, deci radial.

Vom considera apoi, că viteza de evacuare a gazelor arse, W, este o mărime constantă, dată; ea este de altfel reprezentativă pentru stadiul de dezvoltare al tehnicii motoarelor-rachetă la un moment dat și are astăzi valori cuprinse între 2500 și 3000 m/s.

În sfîrșit, vom introduce ipoteza că regimul de funcționare al motorului, definit prin debitul de masă care iese cu viteza W din camera de combustie, este constant. Această presupunere se justifică dacă se are în vedere că realizarea unui regim variabil de combustie într-o cameră dimensionată pentru un anumit regim optim, este o problemă foarte dificilă, şi care duce la scăderea randamentului termodinamic al arderii.

Amintim că H. S. Tsien *) a analizat o problemă similară cu cea tratată în acest articol, dar făcînd altă ipoteză, şi anume că nu tracţiunea, ci acceleraţia produsă de motorul rachetei este constantă ; aceasta implică utilizarea unui motor la care tracţiunea este variabilă în timp, ceea ce este mai depărtat de realitatea practică.

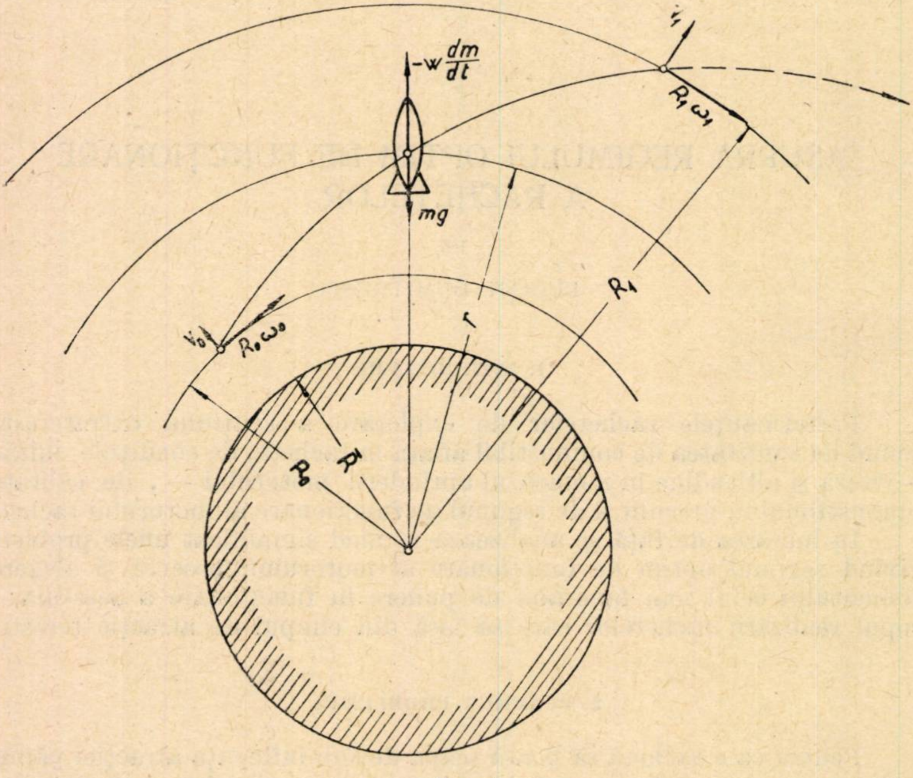


Fig. 1

În figura 1 sînt reprezentaţi parametrii geometrici ai mişcării rachetei ; s-au introdus următoarele notaţii :

$\overline{R}$ — raza pămîntului ($6,37 \times 10^6$ m) ;
$\overline{g}$ — acceleraţia gravităţii la sol (9,806 m/s^2) ;
R_0 — determină poziţia rachetei la începutul combustiei ($t = 0$) ;
g_0 — acceleraţia gravităţii la distanţa R_0 ;
R_1 — determină poziţia rachetei la sfîrşitul combustiei ($t = t_1$) ;

---

*) H. S. Tsien, *The take-off of a space ship from the orbit of an artificial satellite*. Journal of the American Rocket Society, **23**, *4*, 1953, p. 233—236.

g_1 — acceleraţia gravităţii la distanţa R_1;
r — raza vectoare într-un moment oarecare, t;
g — acceleraţia gravităţii la momentul t;
v_r, v_θ — vitezele radială şi tangenţială;
$\omega = v_\theta / r$ — viteza unghiulară;
$v_0 = v_{r_0}$ — viteza radială la $t = 0$;
$\omega_0 = \frac{v_{\theta_0}}{R_0}$ — viteza unghiulară a rachetei la $t = 0$;
$v_1 = v_{r_1}$ — viteza radială la $t = t_1$;
m_0 — masa rachetei încărcate;
m_1 — masa rachetei după consumarea combustibilului ($t = t_1$);
$\alpha = -\frac{1}{m_0}\frac{dm}{dt}$ — debitul unitar de masă al rachetei (presupus constant);
$z = r - R_0$ — distanţa parcursă de rachetă de la începutul arderii pînă într-un moment oarecare.

Variaţia atracţiei gravităţii cu distanţa va fi luată în considerare în mod aproximativ, presupunînd că raportul z/R_0 este suficient de mic pentru a putea neglija patratele sale faţă de unitate.

3. ECUAŢIILE DE MIŞCARE

Cu ajutorul notaţiilor introduse mai sus, ecuaţiile de mişcare pentru o rachetă în cazul ipotezelor admise sînt următoarele

$$m\left(\frac{dv_r}{dt} - r\,\omega^2\right) = F, \tag{1}$$

$$m\left(2\,\omega\frac{dr}{dt} + r\frac{d\omega}{dt}\right) = 0, \tag{2}$$

unde forţa F, presupusă a avea direcţia razei r, are valoarea

$$F = -\,mg - W\frac{dm}{dt}\cdot \tag{3}$$

Din (2) rezultă uşor

$$r^2\,\omega = \sqrt{p} = R_0^2\,\omega_0 = \text{const.} \tag{4}$$

Avem însă

$$g = g_0\frac{R_0^2}{r^2} = \frac{g_0}{(1 + z/R_0)^2} \cong g_0\left(1 - \frac{2z}{R_0}\right) \tag{5}$$

şi analog

$$r\,\omega^2 = \frac{p}{r^3} = \frac{p}{R_0^3\,(1 + z/R_0)^3} \cong \frac{p}{R_0^3}\left(1 - \frac{3z}{R_0}\right), \tag{6}$$

astfel încît ecuaţia (1) devine

$$\frac{dv_r}{dt} + \frac{W}{m}\frac{dm}{dt} + g_0\left(1 - \frac{2z}{R_0}\right) - \frac{p}{R_0^3}\left(1 - \frac{3z}{R_0}\right) = 0. \tag{7}$$

Se introduc apoi următoarele mărimi adimensionale

$$\beta = \frac{v_r}{W}, \gamma = \frac{g}{W}, \rho = \frac{r}{W}, \zeta = \frac{z}{W}, \pi = \frac{p}{W^4}. \tag{8}$$

Semnificația mărimilor β_0, β_1, γ_0, γ_1, ρ_0, ρ_1, ζ_1 este evidentă.

Pe de altă parte, conform ipotezelor noastre avem

$$m = m_0 \, (1 - \alpha t) \tag{8a}$$

și astfel (7) se scrie

$$\frac{d\beta}{dt} - \frac{\alpha}{1 - \alpha t} + \left(\gamma_0 - \frac{\pi}{\rho_0^3}\right) - \frac{\zeta}{\rho_0}\left(2\,\gamma_0 - \frac{3\pi}{\rho_0^3}\right) = 0. \tag{9}$$

Rezolvarea acestei ecuații a fost făcută prin aproximații succesive, ținînd seama de faptul că $\frac{\zeta}{\rho_0}$ este mic, astfel : în prima aproximație s-a neglijat acest raport, și s-a calculat valoarea vitezei, β'

$$\beta' = \beta_0 - \ln\,(1 - \alpha\, t) - \left(\gamma_0 - \frac{\pi}{\rho_0^3}\right) t. \tag{10}$$

S-a obținut apoi prima aproximație pentru spațiu, ζ'

$$\zeta' = \int_0^t \beta'\, dt = \frac{1}{\alpha} + \beta_0 t + \frac{1}{\alpha}(1 - \alpha t)\, [\ln(\, 1 - \alpha t) - 1] - \left(\gamma_0 - \frac{\pi}{\rho_0^3}\right)\frac{t^2}{2}. \tag{11}$$

Introducînd această expresie în (9), se obține prin integrare, a doua aproximație pentru β , β''

$$\beta'' = \beta' + \frac{(2\gamma_0 - 3\pi/\rho_0^3)}{\rho_0}\left\{\frac{t}{\alpha} + \beta_0\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2\alpha^2}\,(1 - \alpha t)^2 - \frac{1}{4\alpha^2}(1 - \alpha t)^2\,[2\ln\,(1 - \alpha t) - 1] - \frac{3}{4\alpha^2} - \left(\gamma_0 - \frac{\pi}{\rho_0^3}\right)\frac{t^3}{3}\right\}. \tag{12}$$

Se constată că practic nu este necesar să se continue procedeul, și că $\beta \cong \beta''$, $\zeta \cong \zeta'$.

Să notăm cu μ raportul de mase al rachetei

$$\mu = \frac{m_1}{m_0} \tag{13}$$

Acest raport este și el determinat de dezvoltarea tehnicii rachetelor, avînd azi valori între 0,1 ... 0,2. Timpul total de combustie t_1 va fi dat de relația

$$t_1 = \frac{1 - \mu}{\alpha}. \tag{14}$$

Înlocuind $t = t_1$ în expresiile (10), (11) şi (12) se obţine viteza rachetei $v_1 = \beta_1 \cdot W$, la sfîrşitul combustiei, precum şi spaţiul $z_1 = \zeta_1 \cdot W$, parcurs în timpul funcţionării motorului. Introducînd parametrul x, legat de durata arderii prin formula

$$x = \frac{1}{\alpha} = \frac{t_1}{1-\mu} \tag{15}$$

mărimile β_1 şi ζ_1 se scriu astfel

$$\beta_1 = A - \left(\gamma_0 - \frac{\pi}{\rho_0^3}\right) Bx + \frac{2\gamma_0 - 3\pi/\rho_0^3}{\rho_0} Cx^2 - \frac{(\gamma_0 - \pi/\rho_0^3)(2\gamma_0 - 3\pi/\rho_0^3)}{\rho_0} Dx^3, \tag{16}$$

$$\zeta_1 = E\,x - (\gamma_0 - \pi/\rho_0^3)\,Fx^2, \tag{17}$$

unde

$$\left.\begin{aligned}
A &= \beta_0 - \ln\mu,\\
B &= 1 - \mu,\\
C &= 1 - \mu + \frac{\beta_0}{2}(1-\mu)^2 - \frac{3}{4}(1-\mu^2) - \frac{\mu^2}{2}\ln\mu,\\
D &= \frac{1}{3}(1-\mu)^3,\\
E &= 1 + \beta_0(1-\mu) - \mu(1-\ln\mu),\\
F &= (1-\mu)^2.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Formulele (16) şi (17) rezolvă problema.

4. CRITERIUL PENTRU DETERMINAREA REGIMULUI OPTIM DE FUNCŢIONARE AL RACHETEI

După terminarea combustiei, racheta se comportă ca un corp ceresc cu masa constantă, avînd o mişcare care ascultă de legile lui Kepler. Se ştie că genul traiectoriei descrise de un astfel de corp, în prezenţa atracţiei pămîntului, este determinat de inegalitatea

$$v_1^2 + R_1^2\ \omega_1^2 \gtreqless \frac{2\bar{g}\,\bar{R}^2}{R_1}. \tag{19}$$

Semnul $>$ corespunde unei hiperbole, semnul $=$ unei parabole, iar semnul $<$ unei elipse. În consecinţă, pentru ca racheta să iasă de sub influenţa atracţiei terestre, este necesar să subziste relaţia

$$h = \frac{\rho_0 + \zeta_1}{2\gamma_0\,\rho_0^2}\left(\beta_1^2 + \frac{\pi}{(\rho_0 + \zeta_1)^2}\right) \geqslant 1. \tag{20}$$

Mărimea h reprezintă astfel un *indice de performanţă* al rachetei. Cu cît acest indice este mai mare, racheta va atinge o înălţime finală, în zbor liber, mai mare (pentru $h < 1$) sau va părăsi cîmpul terestru cu o viteză mai mare (pentru $h > 1$). În consecință, problema noastră se pune astfel : cunoscînd raportul de mase μ al rachetei, viteza de ejecție a gazelor arse W și înălțimea de intrare în funcție a rachetei R_0 , să se determine regimul de funcționare al rachetei (definit de mărimea α sau x (15)), astfel încît să rezulte un indice de performanță h maxim. Relațiile obținute mai sus vor fi aplicate la două cazuri care pot apărea în practică.

5. CAZUL DECOLĂRII DE PE UN SATELIT

În acest caz, viteza unghiulară inițială a rachetei este astfel încît să avem relația

$$\frac{\pi}{\rho_0^3} = \gamma_0 . \tag{21}$$

Formulele (16) și (17) devin atunci

$$\beta_1 = A - \frac{\gamma_0}{\rho_0} C\, x^2 \tag{22}$$

$$\zeta_1 = E\, x \tag{23}$$

cu $\beta_0 = 0$.

Funcția $C(\mu)$ are valori cuprinse între 0 (pentru $\mu = 1$) și 0,16 (pentru $\mu = 0{,}1$), iar raportul γ_0/ρ_0 este de ordinul 10^{-6}... 10^{-8}. Se vede deci că, pentru timpi de funcționare ai motorului rachetei, care să fie compatibili cu ipotezele noastre ($x \approx 5 \times 10^2$), se poate lua β_1 independent de x . În aceste condiții mărimea h , care figurează în membrul stîng al inegalității (20), depinde de regimul de funcționare al rachetei numai , prin intermediul lui ζ_1. Se poate arăta ușor că h are un *minim* pentru valoarea

$$\zeta_{1m} = \rho_0 \left(\frac{\sqrt{\gamma_0 \rho_0}}{\beta_1} - 1 \right) \cdot \tag{24}$$

Din (23) se vede că spațiul ζ_1 este proporțional cu durata arderii ; în consecință, este avantajos să se folosească rachete care să se consume fie mai repede, fie mai încet decît rezultă din relația (24). Atunci cînd se caută să se obțină valori ale lui h în apropiere de unitate sau mai mari decît 1 (de exemplu pentru zboruri spre lună, ori zboruri în sistemul solar), ζ_{1m} are o valoare foarte mică, sau chiar negativă (pentru $\beta_1 > \sqrt{\gamma_0 \rho_0}$). În asemenea cazuri este categoric mai avantajos ca epuizarea combustibilului să aibă loc cît mai lent, pentru mărirea energiei totale finale a rachetei. Acest lucru este de altfel convenabil și din punct de vedere constructiv, deoarece o cameră de combustie de dimensiuni reduse este mai ușor de realizat.

Concluzia trasă își are însă limitele de valabilitate, deduse din înseși ipotezele simplificatoare care au fost introduse la începutul acestui studiu ;

atunci cînd ζ_1/ρ_0 depăşeşte ordinul de mărime 0,1 ... 0,2 (ceea ce corespunde unui debit unitar de masă $\alpha \cong 2 \times 10^{-3}$, care asigură o acceleraţie iniţială a rachetei de circa 0,5 ... 0,6 g), liniarizarea ecuaţiei (1) nu mai poate fi făcută. Eroarea introdusă de liniarizare în acest caz, măreşte valoarea ce se obţine pentru h, faţă de cea reală, astfel încît, de la o anumită limită, creşterea lui ζ_1 nu mai duce la o creştere corespunzătoare a performanţei rachetei (definită de valoarea lui h). Există deci un regim optim de funcţionare pentru acest caz, care poate fi determinat precis numai printr-o rezolvare exactă a ecuaţiei (1); studiul făcut în cele de mai sus arată însă în mod simplu tendinţa fenomenelor şi domeniul în care trebuie căutată soluţia problemei.

Atunci cînd se doreşte să se realizeze o rachetă care să parcurgă o distanţă nu mai mare decît cîteva raze terestre (corespunzînd la $h \approx 0{,}5 \ldots 0{,}8$) minimul expresiei (20) duce la valori ζ_{1m} destul de mari faţă de ipotezele admise mai sus; este deci convenabil în asemenea cazuri, să se folosească timpi de combustie *scurţi*. Totuşi, alura curbei $h(x)$ este destul de plată astfel încît în aceste situaţii se poate accepta o oarecare scădere a performanţei rachetei, prin alegerea unui timp de funcţionare care să ducă la acceleraţii suportabile, mai ales că cu o astfel de rachetă consumul total de combustibil este şi el mai scăzut.

6. CAZUL FOLOSIRII UNEI RACHETE ÎN TREPTE

În această parte, vom analiza cazul cînd racheta considerată constituie ultimul etaj al unui tren de rachete. În legătură cu aceasta, se pun două probleme: găsirea regimului optim de combustie, şi determinarea momentului celui mai favorabil pentru începerea arderii.

După terminarea combustibilului, penultimul etaj al trenului de rachete va avea o viteză v_a şi se va afla la o distanţă R_a de centrul pămîntului (fig. 2).

În continuare, dacă nu se pune în funcţiune motorul ultimului etaj, acesta, împreună cu racheta goală, are o mişcare descrisă de legile lui Kepler, deoarece masa rămîne constantă, şi poate atinge înălţimea R_b, unde viteza se anulează. Neglijînd viteza unghiulară imprimată trenului de rachete de rotaţia pămîntului, şi presupunînd că traectoria este radială, avem relaţia

$$v_a^2 = 2\bar{g}\,\bar{R}^2\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b}\right). \qquad (25)$$

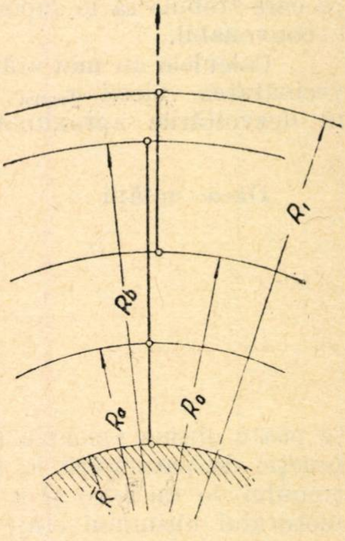


Fig. 2

Dacă la o înălţime R_0 ($R_a \leqslant R_0 \leqslant R_b$), intră în funcţiune ultimul etaj al trenului de rachete, viteza din acel moment, v_0, va fi tocmai cea care trebuie introdusă în ecuațiile (16), (17), (18) (prin intermediul lui $\beta_0 = v_0/W$), și are valoarea

$$v_0^2 = v_a^2 - 2\,\bar{g}\,\bar{R}^2\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_0}\right). \qquad (26)$$

Presupunînd acum cunoscute valorile R_a și v_a, și alegînd înălțimea de intrare în funcțiune R_0, avem toate elementele pentru determinarea vitezei β și a spațiului ζ ca funcție de x (prin relațiile (16), (17) și (18)), precum și a parametrului caracteristic h (20) (mărimea π va fi luată, evident, nulă în acest caz). Se obține

$$\beta_1 = A - \gamma_0 B x + \frac{2\gamma_0}{\rho_0} C x^2 - \frac{2\gamma_0^2}{\rho_0} D x^3, \qquad (27)$$

$$\zeta_1 = Ex - \gamma_0 F x^2, \qquad (28)$$

$$h(x) = \frac{\beta_1^2(\rho_0 + \zeta_1)}{2\gamma_0^2\,\rho_0}. \qquad (29)$$

Cu ajutorul formulelor (27), (28) și (29), prin reprezentare grafică sau încercări, se poate determina pentru un caz particular oarecare, valoarea lui x corespunzînd celui mai mare h, căpătînd astfel rezolvarea problemei. S-au considerat cîteva exemple numerice, care au arătat că x_{optim} are valori între $10^2 \ldots 10^3$, atunci cînd viteza inițială β_0 și altitudinea inițială ρ_0 se află în limite plauzibile. Se vede astfel că accelerațiile pe care trebuie să le suporte racheta sînt de ordinul 0,5 ... 5 $\bar{g}$, ceea ce e convenabil.

Calculele au mai arătat, pe de altă parte, că variația lui h cu x în vecinătatea valorii x_{optim} este destul de lentă, pentru a se putea lua, în dezvoltările aproximative de mai jos

$$h(x_{\text{opt}}) \cong h(0).$$

Dacă notăm

$$h_a = \frac{\beta_a^2\,\rho_a}{2\,\gamma_a\,\rho_a^2}, \qquad (30)$$

$$\varphi_a = \sqrt{2\,\gamma_a\,\rho_a}, \qquad (31)$$

$$y = \frac{\rho_0}{\rho_a}, \qquad (32)$$

se poate obține valoarea lui h (care determină performanța rachetei) ca funcție de parametrii h_a și φ_a (caracteristici pentru etajul precedent al trenului de rachete) și y (care definește momentul intrării în funcție a motorului ultimului etaj):

$$h = \frac{1}{y}\left[\sqrt{h_a + y - 1} + \frac{\ln\frac{1}{\mu}}{\varphi_a}\right]^2. \qquad (33)$$

De aci rezultă imediat înălţimea optimă de punere în funcţie, $\rho_{0\,\mathrm{opt}} = y_{\mathrm{opt}} \cdot \rho_a$

$$y_{\mathrm{opt}} = (1 - h_a)\left[1 + (1 - h_a)\frac{\varphi_a^2}{\ln^2 \frac{1}{\mu}}\right]. \tag{34}$$

Este însă, evident, necesar ca $\rho_a \leqslant \rho_0 \leqslant \rho_b$; aceasta corespunde unor valori pentru y_{opt} care să satisfacă condiţiile $1 \geqslant y_{\mathrm{opt}} \geqslant 1 - h_a$, ceea ce devine după cîteva calcule

$$\frac{\varphi_a^2}{\ln^2 \frac{1}{\mu}} \leqslant \frac{h_a}{(1 - h_a)^2}. \tag{35}$$

Valoarea indicelui de performanţă al ultimului etaj al rachetei, pentru $y = y_{\mathrm{opt}}$, devine în aceste ipoteze

$$h_{\mathrm{opt}} = 1 + \frac{\ln^2 \frac{1}{\mu}}{\varphi_a^2 (1 - h_a)}. \tag{36}$$

Se observă că $h_{\mathrm{opt}} > 1$, deci relaţiile (34) şi (36) îşi au domeniul de aplicaţie la rachetele destinate a ieşi din cîmpul de atracţie terestră, pe o traiectorie hiperbolică, care să permită atingerea altei planete din sistemul solar. Atunci, cînd inegalitatea (35) nu este respectată (la rapoarte de massă $\frac{1}{\mu}$ mari sau valori h_a reduse) y_{opt} corespunde unei valori $\rho_0 < \rho_a$, ceea ce nu are sens; în asemenea cazuri, este cel mai avantajos să se înceapă combustia etajului următor imediat după terminarea combustiei etajului precedent al trenului de rachete ($y = 1$). Rezultă

$$h = \left[\sqrt{h_a} + \frac{\ln \frac{1}{\mu}}{\varphi_a}\right]^2. \tag{37}$$

Depinzînd de valorile parametrilor h_a, φ_a şi μ se pot obţine indici de performanţă h pentru ultimul etaj al trenului de rachete, mai mici sau puţin mai mari decît unitatea.

Pentru a avea $h \geqslant 1$ (racheta care iese de sub atracţia pămîntului), trebuie să subziste relaţia

$$h_a \geqslant \left(1 - \frac{\ln \frac{1}{\mu}}{\varphi_a}\right)^2. \tag{38}$$

Formula (37) este aplicabilă şi la treptele intermediare ale trenului de rachete. Pentru oricare din acestea, afară eventual de ultima $h < 1$; astfel consideraţiile de mai sus permit să se tragă următoarele concluzii:

Momentul cel mai avantajos pentru începerea combustiei unei rachete care face parte dintr-un tren, este imediat după terminarea combustiei la treapta precedentă ; indicele de performanță al treptei respective se găsește din relația (37). Excepție poate face ultima treaptă, dacă se dorește ca aceasta să iasă de sub influența atracției pămîntului, și dacă este îndeplinită condiția (35). Pentru acest caz, momentul optim de aprindere este determinat de (34), iar indicele de performanță de formula (36). Dacă nu se verifică relația (35) este convenabil să se ia și pentru ultimul etaj al trenului de rachete $y = 1$, iar indicele de performanță se găsește cu formula (37) ; racheta va căpăta un indice de performanță h mai mic decît cel care rezultă în cazul precedent (desigur, cu un consum total de combustibil mai mic).

7. CONCLUZII

În cele de mai sus s-a analizat în mod aproximativ comportarea unei rachete, în următoarele ipoteze :

— mărimea forței de tracțiune a motorului este constantă (ceea ce este și cazul practic) ;

— direcția acestei forțe este *radială* — opunîndu-se forței de atracție a pămîntului ;

— distanța parcursă în timpul combustiei este destul de redusă pentru a se putea lineariza variația accelerației gravității cu înălțimea în acest interval (5), (6).

S-a presupus apoi, într-un prim caz, că racheta decolează de pe un satelit artificial al pămîntului.

S-a găsit astfel că există o valoare a tracțiunii pentru care performanța rachetei (definită de indicele h (20)) este *minimă*, și că este avantajos să se folosească regimuri de funcționare care să producă tracțiuni fie mai *mari*, fie mai *mici* decît această valoare. Observîndu-se apoi că aproximațiile introduse în calcul sînt de natură a mări valorile ce se capătă pentru h , atunci cînd se iese din domeniul lor de valabilitate, s-a dedus că există un regim optim de tracțiune pentru asemenea rachete, corespunzînd unui spațiu parcurs în timpul combustiei, mai mare decît cel care rezultă din (24). Valoarea exactă a acestei tracțiuni optime poate fi determinată printr-o rezolvare exactă a ecuațiilor problemei.

Al doilea caz tratat se referă la o rachetă care constituie ultimul etaj al unui tren de rachete, lansat pe verticală. Presupunînd cunoscute viteza și înălțimea penultimei trepte în momentul terminării combustiei acesteia, și considerînd că la un moment oarecare ulterior începe combustia pentru ultimul etaj, s-a determinat indicele de performanță h al acestei rachete, ca funcție de regimul de tracțiune (29).

S-a arătat că există un regim *optim* de tracțiune, care se poate găsi pe cale grafică, și care se încadrează în limitele admisibile practic. În continuare, s-a determinat momentul cel mai favorabil de începere a combustiei rachetei, după încetarea funcționării motorului etajului precedent. S-a arătat că, pentru toate etajele unui tren de rachete, cel mai convenabil este ca arderea să înceapă imediat ce se termină la etajul precedent ;

excepție face ultimul etaj al trenului de rachete, atunci cînd se dorește ca acesta să capete o traectorie hiperbolică cu un indice h sensibil mai mare decît unitatea, pentru care momentul cel mai favorabil de aprindere este determinat de (34).

Primită la redacție la 7 februarie 1958.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РЕЖИМЕ РАБОТЫ РАКЕТ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе рассматривается движение запущенной для разведки межпланетного пространства ракеты, при следующих допущениях: пренебрегается сопротивлением воздушного трения, принимается, что тяговая сила направлена радикально по отношению к земле и является постоянной во все время сгорания топлива (что ближе к действительности, чем гипотеза постоянного ускорения [1]). Предполагается также, что пройденное за время сгорания топлива расстояние является достаточно малым, чтобы позволить линеаризацию изменения ускорения силы тяжести в уравнениях движения (1), (2).

Это решается методом последовательных приближений и, получая скорость (16) и пространство (17) при окончании сгорания топлива, после чего ракета получает движение по закону Кеплера. Оптимальным режимом работы двигателя (при заданном соотношении масс μ и известной скорости истечения продуктов горения W) является тот режим, для которого показатель режима полета h (20) является максимальным.

В первом случае предполагется, что ракета запущена с искусственного спутника, и найдено, что существует тяговый режим, для которого высота подъема ракеты является минимальной (24), и что выгоднее использовать большую или меньшую, чем эта величина, тяговую силу. Точную величину оптимальной силы тяги можно найти путем точного решения уравнений задачи. Второй рассматриваемый случай относится к ракете, являющейся последней ступенью составной ракеты, запущенной по вертикали; и здесь найден оптимальный тяговый режим, который можно установить графически, при помощи соотношений (27), (28), (29).

Затем указывается, что наиболее благоприятным моментом для начала горения топлива одной ступени составной ракеты является момент окончания сгорания топлива предыдущей ступени: исключение может составить последняя ступень, когда $h > 1$ и когда наиболее благоприятный момент для начала горения топлива дан (34).

OPTIMUM THRUST PROGRAMMING OF A SPACE ROCKET

SUMMARY

This paper discusses the motion of a space rocket, under the following assumptions : the air friction is negligible, the thrust acts radially, relative to the earth, and has constant magnitude during the combustion (which is more likely than the constant acceleration hypothesis [1]). It is also supposed that the space travelled during the powered flight is small enough to allow for the linearisation of the gravity variation terms in the equations of motion (1), (2).

These equations are then solved by an iteration process, which finally yields the speed (16) and the space (17) travelled until the end of the combustion, thereafter the motion of the rocket obeying Kepler's laws. The optimum value of the thrust, for given mass ratio μ and jet velocity W, is that for which the performance figure h (20) is maximum.

In the first case, in which it was supposed that the rocket takes off from an artificial satellite, a minimum performance thrust régime was found (24); one should use therefore either higher or lower thrusts than that particular value. The exact optimum thrust magnitude may be deduced from a more detailed treatment of equations (1), (2).

The second dealt with case refers to a vertically launched multi-stage rocket. For this stage too, computations showed the existence of an optimum thrust magnitude, which may be obtained graphically by the aid of (27), (28) and (29).

The most favourable moment for the ignition of any stage engine was found to follow immediately after the burn-out of the preceding one; for the last stage however, when $h > 1$, the most favourable moment of ignition is given by (34).

VIBRAȚIILE FORȚATE ALE ROTOARELOR DE ELICOPTER CU PALE CANTILEVER

DE

AL. MARINESCU

Problema vibrațiilor rotoarelor de elicopter este esențială în proiectarea acestora, fapt pentru care ea a fost și este mai ales în prezent în atenția cercetătorilor.

Studiul vibrațiilor rotoarelor cu pale Cantilever, frecvent utilizate azi, a intrat ceva mai tîrziu în atenția cercetării, deoarece utilizarea lor a fost multă vreme lăsată în părăsire.

Acest lucru pare să explice literatura destul de restrînsă cu privire la vibrațiile lor.

În lucrarea [2] care sintetizează și generalizează tot ce s-a publicat în acest sens, se poate găsi un studiu complet referitor la vibrațiile în plan orizontal a acestor rotoare.

De aceea, în lucrarea de față ne propunem a cerceta în continuare vibrațiile forțate ale palelor acestor rotoare, în plan vertical.

Se presupune că cele două pale de obicei ale rotorului au profunzime constantă și nu sînt torsionate.

De asemenea se consideră butucul rigid și foarte apropiat de lagărul de susținere, încît nu face mișcări sensibile laterale sau axiale. Butucul fiind de dimensiuni foarte mici comparativ cu lungimea palelor se admite că originea sistemului la care referim pala deformată este în centrul de rotație.

Vibrațiile forțate apar datorită forțelor aerodinamice care în zbor la punct fix pot fi considerate ca avînd repartiția triunghiulară de-a lungul palei, iar în zbor spre înainte acestei repartiții i se suprapune o alta tot triunghiulară cu variație sinusoidală (fig. 1).

Această repartiție deși nu-i reală conduce la aceeași poziție a rezultantei forțelor aerodinamice de pe pală ca și cea reală, fapt pentru care poate fi utilizată în calculele de rezistență și vibrații.

În tratarea problemei ce ne-am propus-o vom folosi metoda coordonatelor generalizate.

Punem flexiunea palei într-un punct x al său sub forma

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty} \zeta_n(t)\, y_n(x), \tag{1}$$

unde ζ_n este coordonata generalizată în cel de-al n-lea mod de vibrație, iar y_n este o funcție ce descrie a n-a formă modală.

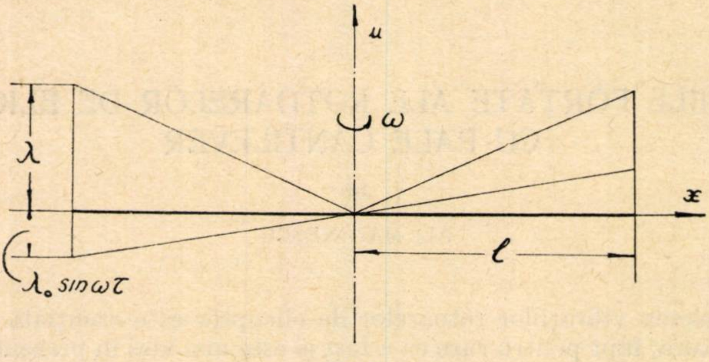


Fig. 1

Ținînd seama de expresia (1) și notînd cu m masa palei pe unitate de lungime energia cinetică a palei se scrie

$$T = \frac{m}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{m}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty} \dot{\zeta}_n^2 \int_0^l y^2{}_n(x)\, dx, \tag{2}$$

l fiind lungimea palei măsurată din axul de rotație.

Energia potențială a palei va conține energia de flexiune și cea datorită forțelor centrifuge.

Notînd cu EI rigiditatea la flexiune, cu ω viteza unghiulară a rotorului și cu

$$\int_0^x \left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} - 1\right) dx \sim \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \tag{3}$$

scurtarea palei datorită flexiunii într-o secțiune x vom obține expresia energiei potențiale

$$V = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{\omega^2}{2}\int_0^l x\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right] dm. \tag{4}$$

Pala fiind presupusă cu profunzime constantă

$$dm = \frac{S\varepsilon}{g}\, dx,$$

unde S este aria secţiunii în pală, ε greutatea unităţii de volum, iar g acceleraţia gravitaţiei.

Într-unul din modurile normale de vibraţie funcţia $y_n(x)$ poate fi luată sub forma generală [1]

$$y_n(x) = A_{n1}\left(\cos\frac{\alpha_n}{l}x + \mathrm{ch}\frac{\alpha_n}{l}x\right) + A_{n2}\left(\cos\frac{\alpha_n}{l}x - \mathrm{ch}\frac{\alpha_n}{l}x\right) +$$

$$+ A_{n3}\left(\sin\frac{\alpha_n}{l}x + \mathrm{sh}\frac{\alpha_n}{l}x\right) + A_{n4}\left(\sin\frac{\alpha_n}{l}x - \mathrm{sh}\frac{\alpha_n}{l}x\right). \tag{5}$$

Deoarece în cazul palei Cantilever avem următoarele condiţii la extremităţi

$$\begin{aligned} & y_n(x) = 0, \qquad \left[\frac{dy_n}{dx}\right]_{x=0} = 0, \\ & x = 0 \\ & \left[\frac{d^2y_n}{dx^2}\right]_{x=l} = 0, \qquad \left[\frac{d^3y_n}{dx^3}\right]_{x=l} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

datorită primelor două condiţii (6) funcţia $y_n(x)$ va fi reţinută sub forma

$$y_n(x) = A_{n2}\left(\cos\frac{\alpha_n}{l}x - \mathrm{ch}\frac{\alpha_n}{l}x\right) + A_{n4}\left(\sin\frac{\alpha_n}{l}x - \mathrm{sh}\frac{\alpha_n}{l}x\right). \tag{7}$$

Ultimele două condiţii (6) conduc la ecuaţia frecvenţelor ale cărei prime rădăcini succesive sînt

$$\alpha_1 = 1{,}875\,;\ \alpha_2 = 4{,}694\,;\ \alpha_3 = 7{,}855\,;\ \alpha_4 = 10{,}996\,;$$

$$\alpha_5 = 14{,}137\,;\ \alpha_6 = 17{,}279.$$

În privinţa constantelor A_{n2}, A_{n4} raportul lor poate fi determinat pentru fiecare mod de vibraţie din relaţiile

$$\frac{A_{n2}}{\cos\alpha_n + \mathrm{ch}\,\alpha_n} = \frac{A_{n4}}{\mathrm{Sin}\,\alpha_n - \mathrm{sh}\,\alpha_n} = \mu_n. \tag{8}$$

Ţinînd seama de (7) expresiile (2) şi (4) ale energiei cinetice şi potenţiale devin însemnînd cu M masa totală a palei

$$T = \frac{M}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\dot{\zeta}_n^2\,\Phi_n, \tag{9}$$

$$V = \frac{EIl}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\zeta_n^2\left(\frac{\alpha_n^4}{l^4}\right)\Lambda_n + \frac{\omega^2 M}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\zeta_n^2\,\varphi_n\,. \tag{10}$$

În relaţiile (9) şi (10) am însemnat

$$\Phi_n = A_{n2}^2\left[1+\frac{1}{4\alpha_n}\sin 2\,\alpha_n-\frac{1}{\alpha_n}(\operatorname{sh}\alpha_n\cos\alpha_n+\operatorname{ch}\alpha_n\sin\alpha_n)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\alpha_n}\operatorname{sh}\,\alpha_n\right]+A_{n2}A_{n4}\left[\frac{1}{2\alpha_n}\operatorname{ch}2\,\alpha_n-\frac{1}{2\alpha_n}\cos 2\,\alpha_n-\frac{2}{\alpha_n}\operatorname{sh}\alpha_n\sin\alpha_n\right]+$$

$$+A_{n4}^2\left[\frac{1}{\alpha_n}\operatorname{sh}\alpha_n\cos\alpha_n-\frac{1}{\alpha_n}\operatorname{ch}\alpha_n\sin\alpha_n+\frac{1}{4\alpha_n}\operatorname{sh}\alpha_n-\frac{1}{4\alpha_n}\sin 2\,\alpha_n\right], \tag{11}$$

$$\Lambda_n = A_{n2}^2\left[1+\frac{1}{4\alpha_n}\sin 2\,\alpha_n+\frac{1}{\alpha_n}\operatorname{sh}\alpha_n\cos\alpha_n+\frac{1}{\alpha_n}\operatorname{ch}\alpha_n\sin\alpha_n+\frac{1}{4\alpha_n}\operatorname{sh}\,\alpha_n\right]+$$

$$+A_{n2}A_{n4}\left[\frac{2}{\alpha_n}\sin\alpha_n\operatorname{sh}\,\alpha_n-\frac{1}{2\alpha_n}\cos 2\,\alpha_n+\frac{1}{2\alpha_n}\operatorname{ch}2\,\alpha_n\right]+$$

$$+A_{n4}^2\left[\frac{1}{4\alpha_n}\operatorname{sh}\,\alpha_n-\frac{1}{4\alpha_n}\sin 2\alpha_n+\frac{1}{\alpha_n}\operatorname{ch}\,\alpha_n\sin\alpha_n-\frac{1}{\alpha_n}\operatorname{sh}\,\alpha_n\cos\alpha_n\right], \tag{12}$$

$$\varphi_n = A_{n2}^2\left[\frac{1}{4}\left(\operatorname{ch}\,\alpha_n-\frac{1}{4\alpha_n}\operatorname{sh}\,\alpha_n\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2\alpha_n}\sin 2\,\alpha_n-\cos 2\,\alpha_n\right)-\right.$$

$$\left.-\operatorname{ch}\,\alpha_n\cos\alpha_n+\frac{1}{2\alpha_n}(\operatorname{sh}\,\alpha_n\cos\alpha_n+\operatorname{ch}\,\alpha_n\sin\alpha_n)\right]+$$

$$+A_{n2}\,A_{n4}\left[\frac{1}{4}\sin 2\,\alpha_n+\frac{1}{8\alpha_n}\cos 2\alpha_n+\frac{1}{\alpha_n}\sin\alpha_n\operatorname{sh}\,\alpha_n-\operatorname{ch}\,\alpha_n\sin\sigma_n-\right.$$

$$\left.\operatorname{sh}\,\alpha_n\cos\alpha_n+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2\,\alpha_n-\frac{1}{8\alpha_n}\operatorname{ch}2\,\alpha_n\right]+A_{n4}^2\left[\frac{\alpha_n^3}{3}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2\alpha_n}\sin 2\alpha_n-\right.\right.$$

$$\left.\cos 2\alpha_n\right)-\operatorname{sh}\,\alpha_n\sin\alpha_n+\frac{1}{2\alpha_n}(\operatorname{ch}\,\alpha_n\sin\alpha_n-\operatorname{sh}\,\alpha_n\cos\alpha_n)+$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\operatorname{ch}\,\alpha_n-\frac{1}{\alpha_n}\operatorname{sh}\,\alpha_n\right)\right]\cdot \tag{13}$$

Ecuaţiile lui Lagrange se scriu acum pentru fiecare coordonată generalizată

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\zeta}_n}\right)-\frac{\partial T}{\partial\zeta_n}+\frac{\partial V}{\partial\zeta_n}=F_n\,, \tag{14}$$

F_n fiind forţa generalizată pentru coordonata ζ_n.

Spre a da sub forma definitivă ecuaţiile de mişcare ce rezultă din (14) să găsim mai întîi expresia forţei generalizate.

Pentru aceasta dăm creşterea $\Delta\zeta_n$ coordonatei ζ_n şi flexiunea corespunzătoare a palei va fi

$$\Delta u = \Delta\,\zeta_n\left[A_{n2}\left(\cos\frac{\alpha_n}{l}\,x-\operatorname{ch}\frac{\alpha_n}{l}\,x\right)+A_{n4}\left(\sin\frac{\alpha_n}{l}\,x-\operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{l}\,x\right)\right]\cdot \tag{15}$$

Într-o secțiune la distanța x de axul de rotație forța elementară a repartiției invariabile cu timpul și a celei variabile vor produce travaliul elementar

$$
\begin{aligned}
dL = {} & \frac{\lambda}{l}\, x\, \Delta\, \zeta_n \left[A_{n2} \left(\cos \frac{\alpha_n}{l} x - \operatorname{ch} \frac{\alpha_n}{l} x\right) + A_{n4} \left(\sin \frac{\alpha_n}{l} x - \operatorname{sh} \frac{\alpha_n}{l} x\right) dx + \right. \\
& + \frac{\lambda_0}{l}\, x\, \Delta\, \zeta_n \sin \omega \tau \left[A_{n2} \left(\cos \frac{\alpha_n}{l}\, x - \operatorname{ch} \frac{\alpha_n}{l} x\right) + \right. \\
& \left. + A_{n4} \left(\sin \frac{\alpha_n}{l} x - \operatorname{sh} \frac{\alpha_n}{l} x\right)\right] dx ,
\end{aligned} \tag{16}
$$

unde λ și λ_0 sînt încărcările aerodinamice constantă și pulsatorie respectiv la capătul palei.

Rezultă din (16) forța generalizată

$$
\begin{aligned}
F_n = {} & \left(\frac{\lambda}{l} + \frac{\lambda_0}{l} \sin \omega \tau\right)\left[A_{n2} \int_0^l x \left(\cos \frac{\alpha_n}{l} x - \operatorname{ch} \frac{\alpha_n}{l} x\right) dx + \right. \\
& \left. + A_{n4} \int_0^l x \left(\sin \frac{\alpha_n}{l} x - \operatorname{sh} \frac{\alpha_n}{l} x\right) dx \right] ,
\end{aligned} \tag{17}
$$

care după efectuarea calculelor se scrie

$$
F_n = l\, (\lambda + \lambda_0 \sin \omega \tau)\, \eta_n , \tag{18}
$$

unde

$$
\begin{aligned}
\eta_n = {} & A_{n2} \left[\frac{1}{\alpha_n} (\sin \alpha_n - \operatorname{sh} \alpha_n) - \frac{1}{\alpha_n^2} (\cos \alpha_n - \operatorname{ch} \alpha_n) - \frac{2}{\alpha_n^2}\right] + \\
& + A_{n4} \left[\frac{1}{\alpha_n} (\cos \alpha_n - \operatorname{ch} \alpha_n) + \frac{1}{\alpha_n^2} (\sin \alpha_n + \operatorname{sh} \alpha_n)\right] \cdot
\end{aligned} \tag{19}
$$

În relația (18) încărcările aerodinamice λ și λ_0 la capătul palei sînt date de relațiile

$$
\lambda = \frac{G}{l} , \tag{20}
$$

$$
\lambda_0 = \frac{3}{2} \frac{M_a}{l^2} , \tag{21}
$$

unde G este greutatea elicopterului, iar M_a momentul forțelor aerodinamice în jurul axei x' ce trece prin butuc (fig. 2) datorit deplasării către înainte a elicopterului.

Se știe [3] că datorită flexibilității lor palele unor astfel de rotoare au o comportare aerodinamică intermediară între palele rotorului pur rigid și palele rotorului articulat.

În schema care se utilizează pentru determinarea caracteristicilor de bătae a palelor Cantilever, se consideră că la încastrare pala este prinsă cu o articulaţie şi un resort (fig. 3).

Punînd unghiul de bătaie β sub forma

$$\beta = \alpha_0 - \alpha_1 \cos \Psi - b_1 \sin \Psi \,, \tag{22}$$

momentul datorit mişcării de bătaie este [3]

$$M_a = M_\beta = \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{l} a\, \beta\, \omega^2 r \sin \Psi \, dr \, d\Psi \tag{23}$$

şi care după calcule devine $M_a = \left| \frac{z}{4}\, a . b_1\, m .\, \omega^2 \,(l^2 - a^2) \right| .$ (24)

Cînd gradul de rigiditate $\frac{\omega_0}{\omega} > 10$, atunci momentul M_a va fi dat de relaţia

$$M_a = \left[C_T \frac{\rho}{2} U^2 \, \pi \, l^3 \frac{V}{U} \right] , \tag{25}$$

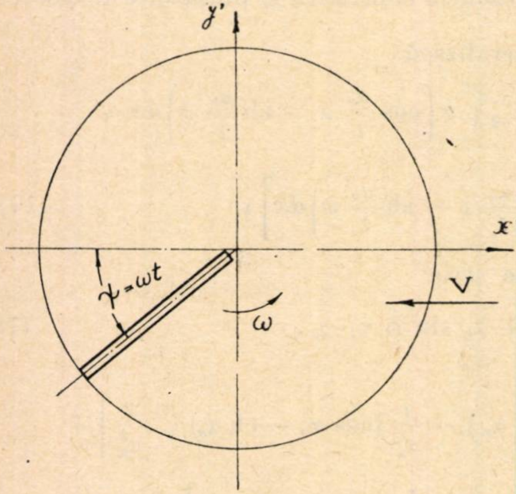


Fig. 2

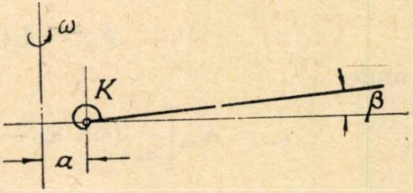


Fig. 3

unde

$$C_T = \sigma\, C_a' \int_0^B x^2 \, [\theta - \bar{\lambda}'] \, dx \sim \frac{C}{\frac{\rho}{2} \pi l^2 U^2} \,,$$

$$b_1 = \frac{1}{q} \left\{ - m_1 \left(\frac{2}{3}\, \theta\, B^3 + \frac{\bar{\lambda}}{2} B^2 \right) + \frac{1}{12} B^7 \, n \left(\frac{\bar{\lambda}}{3} B^3 + \theta \frac{B^4}{4} \right) \right\} \frac{V}{U} \,\cdot \tag{26}$$

În relaţiile de mai sus am însemnat cu

$Z = 2$ numărul de pale;
a — distanţa secţiunii de încastrare faţă de axul rotorului;
U — viteza periferică a palei;
V — viteza de înaintare a elicopterului;
ρ — densitatea aerului;

r — distanţa unui element de pală faţă de axul de rotaţie;

x — distanţa adimensională a unei secţiuni curente a palei faţă de axul de rotaţie;

Ψ — unghiul azimutal al palei;

C_a' — panta curbei de portanţă a profilului palei;

σ — soliditatea rotorului;

θ — calajul palei;

$\overline{\lambda}'$, $\overline{\lambda}$ — grade de permeabilitate ale rotorului respectiv la punct fix şi în sbor spre înainte

$B = 0{,}98$;

$$n = \frac{\gamma}{2\left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)};$$

$$m_1 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cdot \frac{2}{\gamma};$$

$$q = m_1^2 + \frac{B^8}{16};$$

γ — constanta lui Lock;

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I_p};$$

K — constanta de rigiditate a resortului;

I_p — momentul de inerţie al palei.

Avînd şi expresia forţelor generalizate ecuaţiile (14) ale lui Lagrange ne conduc la următoarele ecuaţii de mişcare pentru fiecare coordonată

$$\ddot{\zeta}_n + \mu^2 \zeta_n = \nu (\lambda + \lambda_0 \sin \omega \tau), \qquad (27)$$

unde

$$\mu^2 = \frac{E\,I\,l}{M} \left(\frac{\alpha_n}{l}\right)^4 \frac{\Lambda_n}{\Phi_n} + \omega^2 \frac{\varphi_n}{\Phi_n}, \qquad (28)$$

$$\nu = \frac{l}{M} \frac{\eta_n}{\Phi_n}. \qquad (29)$$

Soluţia ecuaţiei (27) este de forma

$$\zeta_n = C_{1n} \cos \mu t + C_{2n} \sin \mu t + \frac{2\lambda\nu}{M\mu} \int_0^t \sin \mu (t - \tau)\, d\tau +$$
$$+ \frac{2\lambda_0 \nu}{M\mu} \int_0^t \sin \mu (t - \tau) \sin \omega \tau \, d\tau \qquad (30)$$

sau după ce efectuăm integralele

$$\zeta_n = C_{1n} \cos \mu t + C_{2n} \sin \mu t + \frac{2\lambda\nu}{M\mu} (1 - \cos \mu t) +$$
$$+ \frac{2\lambda_0\nu}{M\mu} \left(\frac{\mu}{\mu^2 - \omega^2} \sin \omega t - \frac{\omega}{\mu^2 - \omega^2} \sin \mu t\right). \qquad (31)$$

Cu aceasta ţinînd seama de (1) şi (7) ajungem la expresia generală a vibraţiilor palei

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty} (C_{1n} \cos \mu t + C_{2n} \sin \mu t)\, y_n\,(x) + \frac{2\lambda \nu}{M\mu} \sum_{n=1}^{n=\infty} (1 - \cos \mu t)\, y_n\,(x) +$$

$$+ \frac{2\lambda_0 \nu}{M\mu} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mu}{\mu^2 - \omega^2} \sin \omega t - \frac{\omega}{\mu^2 - \omega^2} \sin \mu t \right) y_n(x) \,. \tag{32}$$

Deosebit de important pentru practică este fenomenul de rezonanţă. Acesta are loc cînd

$$u \to \infty$$

cu alte cuvinte cînd $\mu^2 - \omega^2 \to 0$. Din condiţia ca $\mu^2 - \omega^2 = 0$ se obţine

$$\omega^2 = \frac{E\,I\,l}{M} \left(\frac{\alpha_n}{l} \right)^4 \frac{\Lambda_n}{\Phi_n - \varphi_n} \,, \tag{33}$$

care poate fi interpretată ca o turaţie critică.

În aplicaţiile practice funcţiile Λ_n, Φ_n , φ_n se calculează numai pentru primul mod de vibraţie , celelalte moduri fiind de mai mică importanţă.

Pentru un rotor obişnuit avînd lungimea palei $l = 5{,}3$ m s-a obţinut pe baza formulei (33) în primul mod de vibraţie cu $M = 0{,}0182235$ şi $EI = 174{,}9.\ 10^6$ o viteză critică $\omega = 9{,}3$ rad/s. Ea este sensibil mai mică decît cea a palei articulate cu aceleaşi caracteristici pentru care s-a găsit o viteză unghiulară critică de 12 rad/s. Formula (33) este deosebit de importantă pentru practică spre a verifica dacă vreuna din turaţiile de lucru este apropiată de cea de rezonanţă.

Lăsînd de o parte aspectul vibraţiilor propriu-zise, funcţiile (32) prezintă interes şi pentru calculul caracteristicilor de bătaie ale palei Cantilever dînd posibilitatea unor determinări mai riguroase ale acestora.

Primită la redacţie la 29 aprilie 1957.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕСУЩИХ ВИНТОВ ВЕРТОЛЕТА С ЛОПАСТЯМИ ТИПА КАНТИЛЕВЕРА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе рассматриваются вынужденные колебания лопастей типа Кантилевера в вертикальной плоскости, используемых в несущих винтах вертолета.

Выводятся уравнения движения лопасти на основании лагранжевых уравнений, для которых вычисляются решения.

На основании этих решений даются условия, при которых появляется резонанс.

LES VIBRATIONS FORCÉES DES ROTORS D'HÉLICOPTÈRES À PALES CANTILEVER

RÉSUMÉ

On étudie dans le présent ouvrage les vibrations forcées, dans le plan vertical, des pales Cantilever utilisées pour les rotors des hélicoptères.

On déduit les équations de mouvement de la pale, en vertu des équations de Lagrange, et on en calcule les solutions.

Sur la base de ces solutions, on indique les conditions dans lesquelles apparaît la résonance.

BIBLIOGRAFIE

1. S. TIMOSHENKO, *Théorie des vibrations.* Paris et Liège (1947).
2. F. LEONE PETER, *Mechanical Stability of a Two Bladed Cantilever Helicopter Rotor.* J. A. S. iulie (1956).
3. AL. MARINESCU, *Aerodinamica rotorului cu pale rigide de elicopter.* Revista transporturilor, *12* (1955).

URMA TURBIONARĂ ÎN CAZUL SCURGERII ÎN JURUL CILINDRILOR ÎN VIBRAȚIE

DE

L. P. SMIRNOV şi M. A. PAVLIHINA *)

Observațiile arată că orice sistem elastic, plasat într-un curent de lichid sau gaz, începe să vibreze în raport cu poziția sa de echilibru. Pentru anumite valori ale vitezei curentului incident, aceste vibrații devin deosebit de intense. Pentru alte valori ale vitezei, vibrațiile se amortizează și devin aproape inobservabile.

Cauza acestor vibrații o constituie pulsațiile, care apar periodic, ale presiunii fluidului pe suprafața corpului în jurul căruia se face scurgerea. Aceste pulsații sînt legate de formarea vîrtejurilor în spatele bordului de fugă, adică în urma corpului.

Evidența corectă a tuturor acestor fenomene are o mare importanță , deoarece de ele depind nu numai vibrațiile liniilor aeriene pentru transmiterea energiei electrice, ci și vibrațiile diferitelor construcții elastice, supuse acțiunii unui curent de apă sau aer.

Aceste fenomene pot fi observate cel mai bine în cazul scurgerii unui fluid în jurul cilindrilor circulari, plasați într-un curent care atacă perpendicular generatoarele cilindrului . În spatele bordului de fugă al cilindrului apare o cale de vîrtejuri dublă dispusă în zig-zag, iar scurgerea în jurul cilindrului are un caracter esențialmente nepermanent, distribuția vitezelor și presiunilor fiind asimetrică în raport cu planul diametral al cilindrului, paralel cu viteza curentului. Datorită acestei asimetrii, cilindrul, în cazul fixării sale elastice începe să vibreze în direcția perpendiculară pe viteza curentului. Vibrațiile cele mai intense apar în cazul cînd frecvența de desprindere a vîrtejurilor este apropiată de una din frecvențele proprii ale sistemului elastic. Formarea scurgerii asimetrice nepermanente este legată de instabilitatea scurgerii simetrice în jurul cilindrului.

Frecvența de desprindere a vîrtejurilor depinde de viteza curentului incident. Dacă cilindrul în jurul căruia se face scurgerea este fixat rigid și imobil, atunci din observații rezultă că în limite suficient de largi ale

---

*) Institutul de mecanică al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S.

numerelor Reynolds (aproximativ între 10^3 și 3.10^5), numărul adimensional al lui Struhal, egal cu produsul dintre frecvența vibrațiilor și diametrul cilindrului, împărțit la viteza curentului, este aproape constant. De aceea, pentru un cilindru imobil, de un diametru dat, frecvența de desprindere a vîrtejurilor, între limitele menționate ale numerelor Reynolds, va fi proporțională cu viteza curentului

$$n_1 = k\frac{v}{D}, \tag{1}$$

unde n_1 este frecvența de desprindere a vîrtejurilor, v viteza curentului și D diametrul cilindrului.

Numărul Struhal, în intervalul de numere Reynolds menționat mai sus, poate fi considerat constant. În conformitate cu observațiile, putem considera că în cazul scurgerii normale în jurul cilindrului fix

$$k = 0{,}18. \tag{2}$$

Însă, dependența (1) poate fi considerată valabilă numai în cazul cînd cilindrul este fixat rigid și imobil în raport cu sistemul de referință față de care curentul de fluid se mișcă cu viteza v. Cînd cilindrul, fiind fixat elastic, începe să execute vibrații într-un plan perpendicular pe direcția curentului, procesul de formare a vîrtejurilor, în apropierea pereților cilindrului, se schimbă radical. Vibrațiile cilindrului modifică frecvența normală de desprindere a vîrtejurilor care corespunde scurgerii în jurul cilindrului imobil pentru același diametru și aceeași viteză a curentului. Mecanismul formării și desprinderii vîrtejurilor, în cazul cilindrului în vibrație, diferă, de asemenea radical, de cazul scurgerii în jurul cilindrului imobil.

Caracterul autovibrațiilor cilindrului, fixat elastic, și plasat în curentul de fluid care-l atacă, depinde de regimul scurgerii. Pentru unele valori ale vitezei curentului, cilindrul execută vibrații staționare cu anumită amplitudine și frecvență, care se permanentizează de la sine în procesul dezvoltării autovibrațiilor. Pentru alte valori ale vitezei, factorii care condiționează amortizarea vibrațiilor sînt predominanți, în comparație cu factorii care excită vibrațiile, de aceea amplitudinile vibrațiilor sînt mult micșorate. Intervalele de variație a vitezei, cărora le corespund vibrații de acest tip, practic pot fi considerate zone de repaus. În sfîrșit, există și regimuri de scurgere pentru care vor apărea vibrații nestaționare ale cilindrului, de tipul bătăilor.

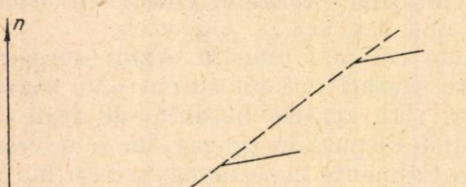


Fig. 1.— Dependența frecvenței de desprindere a vîrtejurilor de viteza curentului incident.

Toate aceste regimuri pot fi observate suficient de bine în cazul unui cilindru fixat elastic, care execută vibrații transversale în curentul incident (în direcția perpendiculară pe curent). Pe diagramă (fig. 1) sînt trasate „trepte" succesive de dependenţă a frecvenţelor vibraţiilor de viteza curentului incident*). Linia dreaptă, care trece prin originea sistemului de referinţă, dă dependenţa (valabilă într-un domeniu suficient de larg de variaţie a numerelor Reynolds) frecvenţelor de formare a vîrtejurilor de viteza curentului, în cazul scurgerii în jurul cilindrului imobil.

Din diagramă se vede că în cazul variaţiei continue a vitezei curentului există intervale de variaţie în care se observă vibraţii intense ale barei. Aceste intervale alternează cu altele, în care vibraţiile devin practic neînsemnate. Frecvenţele şi amplitudinile vibraţiilor, în intervalele în care aceste vibraţii se observă, variază puţin în funcţie de viteză în fiecare interval separat. Originea fiecărei zone de vibraţie (la creşterea continuă a vitezei curentului) se găseşte în apropierea acelei mărimi a vitezei pentru care frecvenţa vîrtejurilor care se desprind de cilindrul imobil coincide cu una din frecvenţele proprii ale vibraţiilor transversale ale barei. În felul acesta, pentru explicarea cauzelor apariţiei vibraţiilor intense ale barei pot servi fenomenele asemănătoare fenomenului de rezonanţă. Totuşi, la creşterea mai departe a vitezei curentului (în comparaţie cu vitezele minime pentru care apar vibraţii în fiecare zonă), frecvenţele înregistrate ale vibraţiilor barei diferă suficient de mult de frecvenţele de desprindere a vîrtejurilor (de cilindrul imobil, care are acelaşi diametru ca şi bara în vibraţie) pentru aceleaşi viteze. Nu se observă nici obişnuitul vîrf al amplitudinilor, care are loc în cazul rezonanţei. Tocmai în aceasta constă trăsătura cea mai caracteristică a vibraţiilor cercetate, care arată că fenomenele de formare a vîrtejurilor la vibraţiile cilindrului sînt esenţial diferite de acelea care se observă în cazul scurgerii în jurul cilindrului imobil. În urma cilindrului în vibraţie ne putem aştepta la apariţia vîrtejurilor care diferă şi ca intensitate şi ca frecvenţă de vîrtejurile care apar în curentul ce se scurge în jurul cilindrului fix.

În felul acesta, studierea structurii curentului şi a caracterului urmei turbionare din spatele cilindrului în vibraţie prezintă un interes deosebit, deoarece ea permite să se stabilească ipoteze corecte asupra mecanismului apariţiei autovibraţiilor diferitelor construcţii elastice, care sînt supuse acţiunii curentului incident.

Totuşi studierea directă a structurii curentului în cazul autovibraţiilor întîmpină anumite dificultăţi şi, inevitabil, nu poate fi completă. Structura urmei turbionare devine suficient de clară numai în cazul autovibraţiilor permanente, cu anumite valori ale amplitudinii şi frecvenţei. Aceasta din urmă coincide în acest caz cu frecvenţa vîrtejurilor care se desprind. Un alt tablou, de asemenea clar, se va observa la viteza curentului care corespunde zonei de repaus. Frecvenţa de desprindere a vîrtejurilor se va obţine, desigur, egală cu frecvenţa naturală de desprindere de cilindrul fix. Totuşi, pentru toate valorile intermediare ale vitezei, nu vom avea o scurgere destul de ordonată, deoarece înseşi vibraţiile cilindrului nu vor fi permanente. Aceste vibraţii, după cum s-a mai menţionat, vor avea caracterul unor bătăi.

---

*) Observaţiile despre care este vorba în acest aliniat au fost făcute de D. S. Vilker şi L. P. Smirnov în laboratorul de hidrodinamică al Universităţii de Stat din Moscova.

De aceea, pentru a avea întotdeauna de-a face cu o cinematică perfect determinată a mişcării corpului solid în jurul căruia se face scurgerea, şi pentru a avea imagini cît mai clare atît asupra caracterului interdependenţei dintre frecvenţa vibraţiilor cilindrului şi frecvenţa de desprindere a vîrtejurilor, cît şi asupra mecanismului de formare şi desprindere a vîrtejurilor pentru diferite frecvenţe ale vibraţiilor cilindrului, este bine să se facă experienţe cu un cilindru care execută vibraţii transversale forţate în curentul incident. Aceste vibraţii trebuie create cu un anumit mecanism cu funcţionare rigidă, de care trebuie legat cilindrul. Pe această cale vom obţine un tablou cinematic mai clar al vibraţiilor corpului solid, în comparaţie cu cazul unui corp fixat elastic, cînd interacţiunea lui cu curentul duce la apariţia autovibraţiilor.

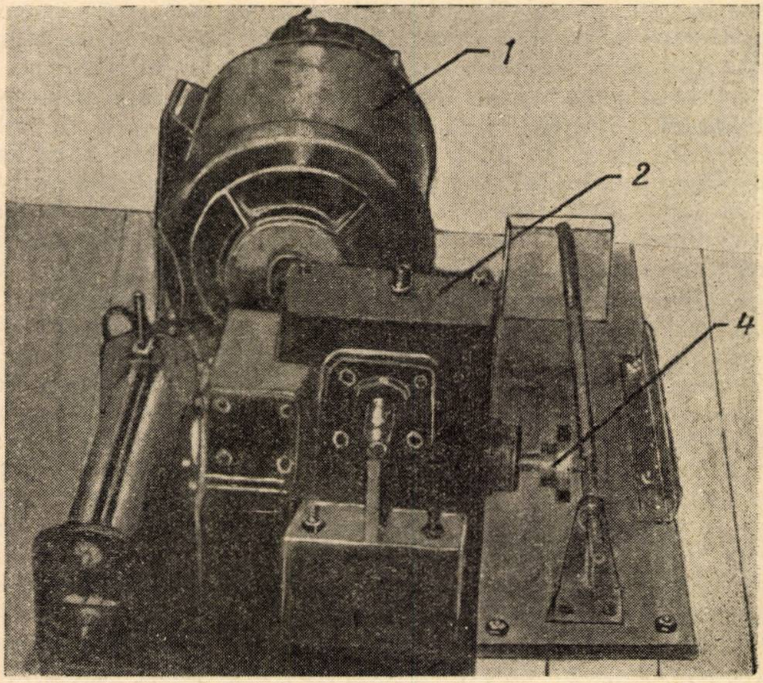


Fig. 2. — Instalaţia care produce vibraţii forţate de dute-vino ale cilindrului : *1*, electromotor ; *2*, reductor ; *3*, reostat cu ajutorul căruia se variază frecvenţa vibraţiilor cilindrului ; *4*, culisă care permite să se varieze amplitudinea vibraţiilor cilindrului.

Avînd în vedere consideraţiile de mai sus, am făcut un studiu experimental asupra structurii curentului în spatele unui cilindru circular, care execută vibraţii forţate de du-te-vino în direcţia perpendiculară pe axa canalului hidrodinamic.

Vibraţiile erau asigurate prin acţiunea unui mecanism cu culisă, care era cuplat rigid cu capătul superior al cilindrului şi era pus în mişcare cu ajutorul unui motor.

În figurile 2, 3 și 4 este arătată instalația laboratorului de hidrodinamică al Universității de Stat din Moscova, folosită pentru producerea vibrațiilor.

Experiențele au fost făcute pentru doi cilindri cu diametre diferite: $D = 41$ mm și $D = 66{,}5$ mm. Frecvența vibrațiilor putea fi variată continuu, între anumite limite, cu ajutorul unui reostat. Amplitudinea vibrațiilor s-a ales egală cu $a = 15$ mm, iar viteza variabilă a mișcării transversale avea valoarea $U_{\max} = 2 - 10$ cm.

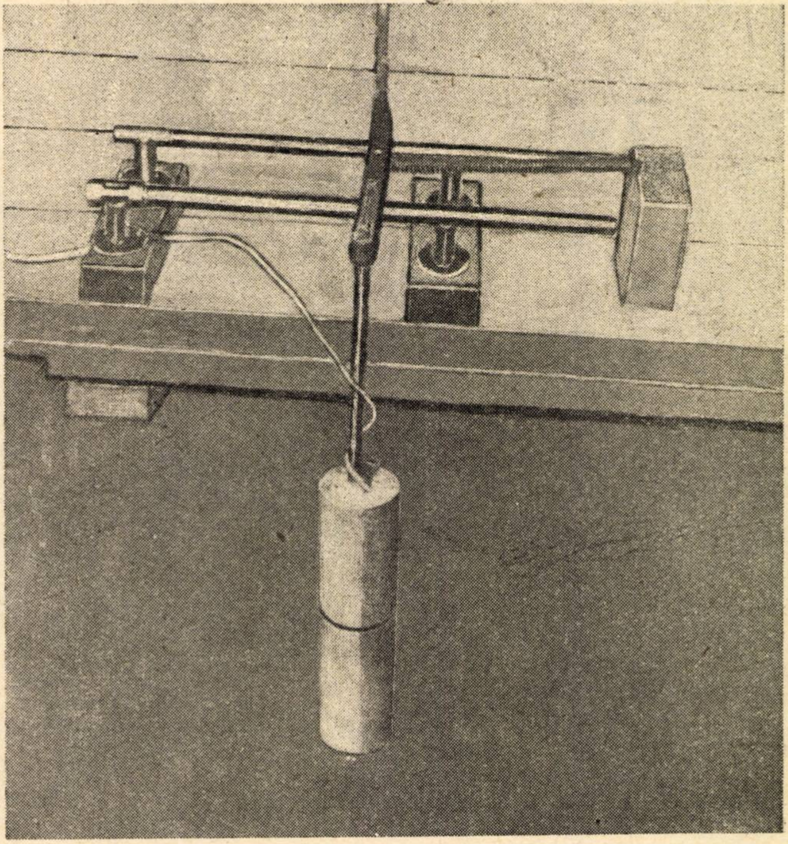


Fig. 3. — Fixarea rigidă a cilindrului la două bare paralele, care erau puse în mișcare cu ajutorul instalației din figura 2.

Viteza de scurgere a apei în canal avea în experiențele noastre valorile $v = 12$ cm/s și $v = 16$ cm/s.

Trebuie să menționăm că în toate experiențele efectuate, viteza cilindrului în vibrație era mai mică decît viteza curentului incident. Raportul maxim admisibil dintre viteza cilindrului și viteza curentului era egal cu 0,83 (fig. 5). Dispozitivul folosit permitea să se obțină și viteze mai mari ale cilindrului, prin mărirea frecvenței vibrațiilor lui, totuși aceasta producea, datorită influenței pereților canalului, perturbații exagerate ale curentului.

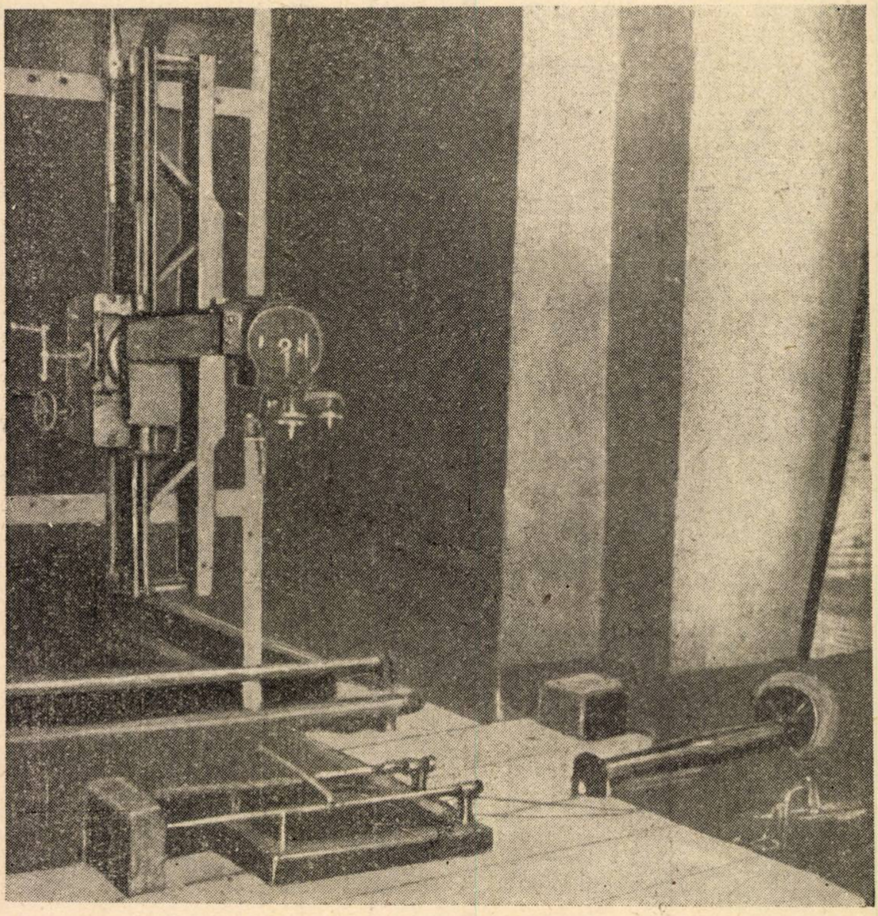


Fig. 4. — Dispozitivul pentru cinematografiere.

Metoda de vizualizare a scurgerii, folosită în experiențe (electroliza apei), propusă de D. S. Vilker, șeful laboratorului de hidrodinamică al Universității de Stat din Moscova, a permis să se obțină fotografii succesive clare ale scurgerii.

Menționăm că mijloacele obișnuite de vizualizare a scurgerii, de exemplu pudra, pulberea de aluminiu și alte substanțe, au permis să se obțină un tablou clar al scurgerii în jurul cilindrului și date asupra structurii scurgerii numai pe suprafața liberă a lichidului. Metoda folosită, de vizualizare cu ajutorul electrolizei apei, a permis să se studieze scurgerea

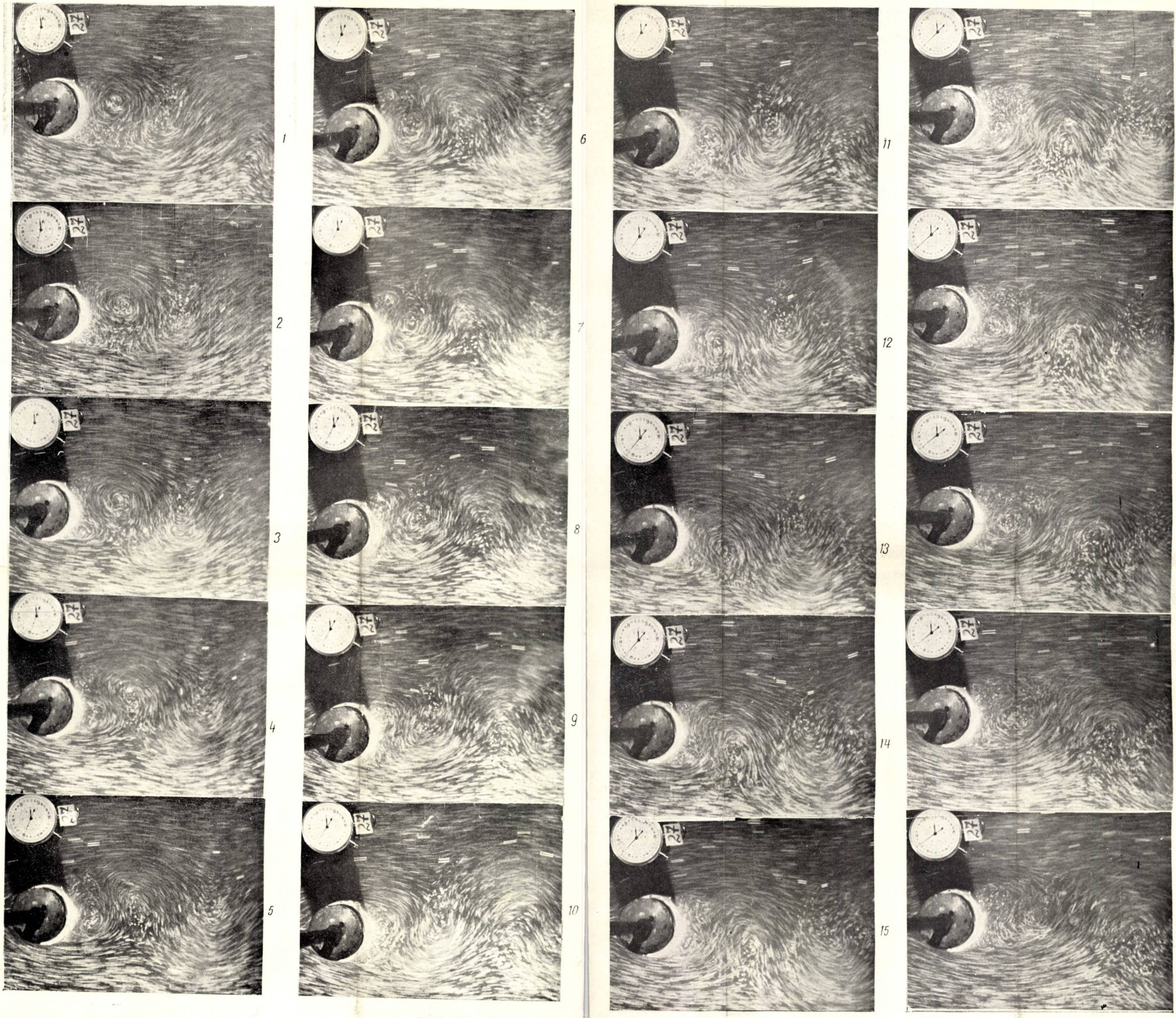

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

Fig. 5. — Fotografiile succesive ale domeniului din vecinătatea cilindrului în vibrație.

în jurul cilindrului la o anumită adîncime sub suprafața liberă. Această metodă constă în următoarele. Făcînd să circule un curent continuu între electrozi (un electrod era format dintr-o placă de plumb, așezată pe fundul canalului, iar celălalt dintr-o sîrmă de cupru cu capătul despicat, așezată în apă la o adîncime de 50—80 mm de la suprafața liberă), se obține o cantitate mare de bule gazoase mărunte de hidrogen și oxigen, care se deplasează o dată cu curentul și vizualizează scurgerea în apropierea cilindrului. La adîncimea de 50—80 mm de la suprafața liberă, stratul de lichid trebuie luminat cu un reflector cu arc voltaic. Aceasta a permis să se observe și să se cinematografieze spectrele scurgerii.

În urma prelucrării unui număr mare de material fotografic, s-a putut stabili pentru fiecare regim al scurgerii, frecvența vîrtejurilor care se desprind.

Scopul experiențelor, în conformitate cu cele expuse mai sus, era lămurirea dependenței frecvenței de desprindere a vîrtejurilor de frecvența vibrațiilor cilindrului (sau dependența între numerele Struhal respective), precum și compararea particularităților mecanismului de formare a vîrtejurilor în cazurile scurgerii în jurul cilindrului fix și cilindrului în vibrație.

În acest caz, pentru compararea caracterului scurgerii în jurul cilindrilor în cazul vibrațiilor forțate, cu scurgerea în jurul cilindrilor ficși, experiențele au fost repetate cu scurgerea în jurul cilindrilor ficși.

După cum s-a mai spus, experiențele cu cilindri fixați elastic și cilindri în vibrație sub acțiunea curentului arată că vibrațiile staționare ale cilindrului se pot produce într-un anumit domeniu de variație a vitezei curentului. În acest caz, frecvența de vibrație a cilindrului se apropie de frecvența lui proprie iar intervalul de variație a vitezei curentului conține acea valoare pentru care frecvența vîrtejurilor, care se desprind de cilindrul fix, coincide cu frecvența proprie a cilindrului. Acest fenomen arată că vibrațiile cilindrului pot modifica frecvența proprie de desprindere a vîrtejurilor, care s-ar observa pentru o anumită viteză a curentului, dacă cilindrul ar fi fost fix. În anumite condiții se produce un fel de însumare a frecvenței vîrtejurilor care se desprind de cilindru cu frecvența vibrațiilor cilindrului. Pentru descrierea corectă a autovibrațiilor cilindrului, este foarte important să cunoaștem acel domeniu de variație a vitezelor curentului în care se poate produce această „captare" a frecvenței vîrtejurilor de către cilindrul în vibrație, datorită cărui fapt în diagrama dependenței frecvenței vîrtejurilor de viteză, se obține o treaptă aproape „orizontală" (fig. 1) a cărei întindere are o mare valoare. Experiențele cu privire la vibrațiile forțate ale cilindrului, create artificial cu ajutorul mecanismului descris mai sus, trebuiau să dea și unele rezultate care să permită precizarea lățimii zonelor în care se poate produce vibrația staționară intensă a cilindrilor, pentru fixarea lor elastică.

Materialul fotografic, obținut în urma experiențelor, permite să se stabilească suficient de obiectiv frecvența vîrtejurilor care se formează. Menționăm cu această ocazie că aici este vorba despre frecvența de desprindere a vîrtejurilor mari formate în spatele cilindrului. Deși în procesul vibrației cilindrului, în anumite momente, se pot forma și alte formații turbionare, mai mici, ulterior ele se reunesc însă cu vîrtejul principal format, sau se disipează rapid, fără a pătrunde în zona căii de vîrtejuri.

În figura 5 sînt reprezentate fotografiile succesive, după o perioadă de vibrație, ale scurgerii în spatele cilindrului cu diametrul $D = 66{,}5$ mm care execută vibrații transversale forțate cu frecvența $n_2 = 0{,}5$ Hz și cu amplitudinea $a = 15$ mm, într-un curent care are viteza $v = 16$ cm/s.

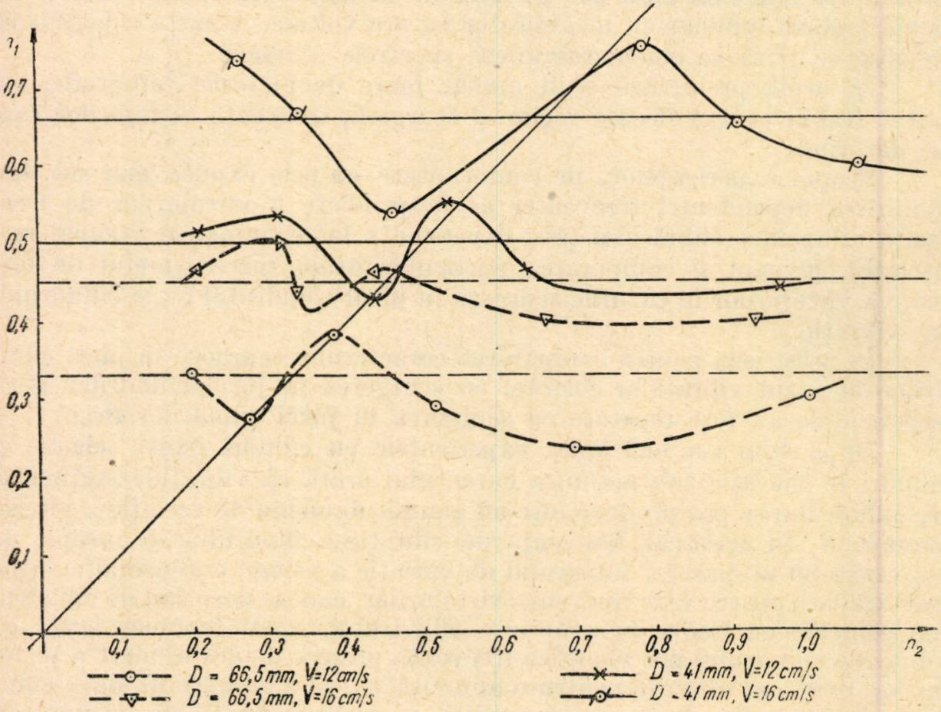


Fig. 6. – Dependența frecvenței vîrtejurilor desprinse de frecvența de vibrație a cilindrului.

Se observă ușor formațiile turbionare principale care se nasc în spatele cilindrului.

În figura 6 sînt reprezentate curbele pentru dependența frecvențelor vîrtejurilor desprinse de cilindru de frecvențele de vibrație ale cilindrului, pentru următoarele valori alese ale curentului incident și ale diametrului cilindrului :

1) $v = 12$ cm/s ; $D = 41$ mm ;
2) $v = 16$ cm/s ; $D = 41$ mm ;
3) $v = 12$ cm/s ; $D = 66{,}5$ mm ;
4) $v = 16$ cm/s ; $D = 66{,}5$ mm.

Amplitudinea vibrațiilor, în toate aceste cazuri, era menținută egală cu 15 mm (anvergura vibrațiilor era egală cu 30 mm).

Diagramele din figura 6 arată că, curbele construite au particularități caracteristice care se repetă periodic. Dacă pe această diagramă se duce bisectoarea unghiului format de axele de coordonate, ale cărei puncte corespund egalității dintre frecvențele vîrtejurilor și frecvențele de vibrație ale cilindrului, atunci din diagramă se vede că fiecare din curbele construite are o porțiune care se apropie de un anumit segment al acestei bisectoare. Porțiunile menționate corespund domeniilor de „captare" a frecvențelor vîrtejurilor desprinse de către frecvențele de vibrație ale cilindrului. Poziția acestor porțiuni de captare poate fi determinată, aproximativ, dacă se duc pe diagramă drepte orizontale care arată frecvența desprinderii vîrtejurilor de cilindrul fix în fiecare din cazurile cercetate.

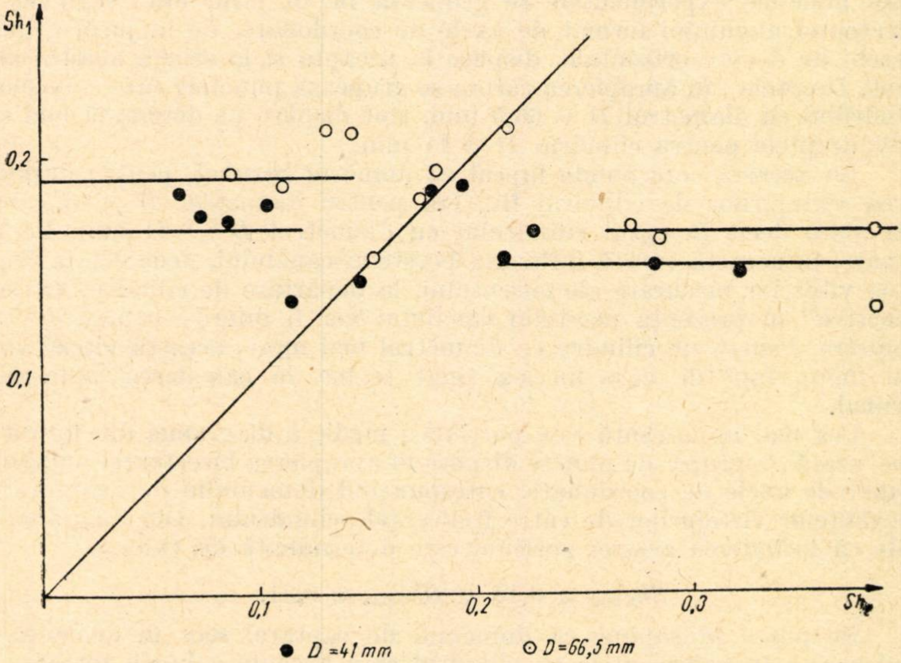


Fig. 7. — Dependența numerelor Struhal ale vîrtejurilor de numerele Struhal ale cilindrului în vibrație.

Segmentele de bisectoare de-a lungul cărora se aștern curbele de variație a frecvențelor, conțin punctele de intersecție a dreptelor orizontale menționate cu bisectoarea. Celelalte părți ale curbei, situate în exteriorul domeniilor „de captare", se comportă în felul următor : pentru valori mari ale frecvențelor, curbele au tendința să se apropie asimptotic de unele drepte orizontale, care marchează frecvența de desprindere de cilindrul fix ; pentru frecvențe relativ mici ale vibrației cilindrului, frecvențele de desprindere a vîrtejurilor sînt ceva mai mari decît frecvențele respective de desprindere de cilindrul fix.

În felul acesta, în cazul frecvențelor mari, comportarea curentului în spatele cilindrului este analoagă scurgerii în jurul cilindrului fix, care are un diametru mai mare în comparație cu cilindrul în vibrație. Efectul creșterii suficient de mari a frecvenței se reduce parcă la o creștere a diametrului cilindrului.

Dacă se construiește (fig. 7), pentru toate aceste cazuri simultan, dependența numerelor Struhal ale vîrtejurilor ($Sh_1 = n_1 D/v$) de numerele Struhal ale cilindrului ($Sh_2 = n_2 D/v$), atunci se remarcă următoarele: toate punctele experimentale se grupează fie în jurul unui segment al bisectoarei unghiului format de axele de coordonate, fie în jurul a două perechi de drepte orizontale, dispuse la dreapta și la stînga acestui segment. Dreptele, în apropierea cărora se grupează punctele care corespund cilindrului cu diametrul $D = 66{,}5$ mm, sînt dispuse pe diagramă mai sus decît dreptele pentru cilindrul $D = 41$ mm.

La aceasta corespunde faptul că numărul Struhal, pentru desprinderea vîrtejurilor de cilindrul fix, era pentru diametrul $D = 66{,}5$ mm mai mare decît în cazul cilindrului cu diametrul $D = 41$ mm. Pe cît se pare, în aceasta constă influența peretelui canalului, deoarece la egalitatea vitezelor măsurate ale curentului, la depărtare de cilindru, vitezele ,,efective'' în prezența peretelui canalului vor fi diferite pentru diferite diametre. Pentru un cilindru cu diametrul mai mare, această viteză va fi mai mare, fapt de care nu s-a ținut seama la calcularea numerelor Struhal.

Cea mai importantă este porțiunea medie a diagramei din figura 7, care arată o grupă de puncte dispuse în apropierea bisectoarei unghiului format de axele de coordonate, corespunzînd domeniului de ,,captare'' a frecvențelor vîrtejurilor de către frecvențele cilindrului. Din diagramă se vede că întinderea acestei porțiuni este determinată de valorile

$$Sh_{2\,\min} \approx 0{,}15 \quad , \quad Sh_{2\,\max} \approx 0{,}21.$$

Se poate presupune că domeniul de captare, scos în evidență în felul acesta în experiențele cu cilindrul care execută vibrații forțate, va avea importanță la determinarea condițiilor de apariție a autovibrațiilor cilindrului, adică în cazul cînd vibrațiile cilindrului fixat elastic sînt provocate de acțiunea curentului incident. Dacă pentru o anumită viteză a curentului v numărul Struhal al cilindrului, care corespunde frecvenței proprii a vibrațiilor lui, va fi situat în interiorul domeniului de captare, atunci în acest caz este posibilă apariția unor autovibrații permanente intense ale cilindrului, deoarece frecvența de desprindere a vîrtejurilor se poate asocia la frecvența cilindrului. În acest caz, frecvența autovibrațiilor va fi apropiată de frecvența vibrațiilor proprii ale cilindrului.

Mecanismul de formare și desprindere a vîrtejurilor, pentru diferite regimuri de vibrație, nu a fost pînă în prezent elucidat obiectiv, pe baza studierii materialului fotografic existent. Totuși, din observațiile vizuale asupra vibrațiilor cilindrilor, rezultă că mecanismul de formare și desprindere a vîrtejurilor este diferit, în funcție de frecvența vibrațiilor cilindrului. Pentru frecvențe mici acest proces este foarte apropiat, în ceea ce privește caracterul său, de fenomenele care se observă la scurgerea în jurul cilindrului fix. Naşterea vîrtejului se produce pe partea exterioară (în raport cu zona căii de vîrtejuri) a cilindrului, în primul rînd datorită stratului limită, care se desprinde de pe această parte. Însă, în cazul frecvenţelor mari ale vibraţiilor cilindrului, stadiul iniţial de formare a vîrtejurilor decurge imediat în spatele cilindrului, în interiorul căii de vîrtejuri. În acest caz, în apropierea peretelui cilindrului se observă o apariţie periodică a unui domeniu relativ îngust de scurgere puternică de tipul vînelor, care antrenează în mişcare turbionară părţile puţin mobile ale lichidului din zona căii de vîrtejuri. În felul acesta, procesul de formare a vîrtejurilor decurge, în acest caz, în principal, datorită variaţiilor brusce ale scurgerii, în legătură cu caracterul ei nepermanent.

Prezentată la şedinţa de Comunicări I.M.A. din 28 octombrie 1957.

LA TRACE TOURBILLONNAIRE LORS DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR DES CYLINDRES EN ÉTAT DE VIBRATION

RÉSUMÉ

L'article expose les résultats des recherches expérimentales sur la trace tourbillonnaire, qui apparaît lors de l'écoulement autour d'un cylindre en état de vibration. Les auteurs ont obtenu les diagrammes de la dépendance des fréquences des tourbillons détachés, des fréquences du cylindre en état de vibration, ainsi que ceux de la dépendance des nombres de Stroukhal des tourbillons, des nombres de Stroukhal des cylindres. Ils ont établi l'intervalle à l'intérieur duquel ces nombres se rapprochent de leur égalité. Les auteurs émettent des considérations sur l'importance que les données obtenues peuvent offrir pour l'établissement des zones de variation de la vitesse du courant, zones à l'intérieur desquelles des autovibrations intenses des constructions élastiques prennent naissance.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Dépendance de la fréquence de détachement des tourbillons, de la vitesse du courant incident. *1*, Electromoteur; *2*. réducteur; *3*. rhéostat, permettant de varier la frequence des vibrations du cylindre; *4*. coulisse, permettant de varier l'amplitude des vibrations du cylindre.

Fig. 2. — L'installation qui produit les vibrations forcées de va-et-vient du cylindre. *1*. Electromoteur; *2*.réducteur; *3*. rhéostat, permettant de varier la fréquence des vibrations du cylindre; *4*. coulisse, permettant de varier l'amplitude des vibrations du cylindre.

Fig. 3. — Fixation rigide du cylindre à deux barres parallèles, mises en mouvement au moyen de l'installation de la figure 2.

Fig. 4. — Dispositif d'enregistrement cinématographique.

Fig. 5. — Photographies successives du domaine avoisinant le cylindre en état de vibration.

Fig. 6. — Dépendance de la fréquence des tourbillons détachés, de la fréquence de vibration du cylindre.

Fig. 7. — Dépendance des nombres de Stroukhal des tourbillons, des nombres de Stroukhal du cylindre en état de vibration.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA

VORTICAL TRACES IN THE CASE OF A FLOW AROUND VIBRATING CYLINDERS

ABSTRACT

The results are given, of experimental research on the vortical trace which appears in the case of a flow around a vibrating cylinder.

The diagrams were obtained, of the frequency dependence of the detached vortexes, on the frequencies of the vibrating cylinder, and of the dependence of the vortex Struhal numbers, on the cylinder Struhal numbers.

The domain was established, in which these numbers tend toward equality. Considerations are made, according to which the data obtained may prove important for establishing the variation zones of the current velocity, within which intense auto-vibrations of the elastic constructions appear.

LIST OF FIGURES

Fig. 1. — Dependency of the vortex detachment frequency on the incident current velocity.

Fig. 2. — Installation producing to and fro forced vibrations of the cylinder. *1.* Electromotor; *2.* reducer; *3.* rheostat allowing the vibration frequency of the cylinder to be varied; *4.* link allowing the vibration amplitude of the cylinder to be varied.

Fig. 3. — Rigid fixation of the cylinder to two parallel bars, which were put in motion with the help of the installation shown in fig. 2

Fig. 4. — Arrangement for filming.

Fig. 5. — Successive photographs of the domain in the vicinity of the vibrating cylinder.

Fig. 6. — Dependency of the detached vortex frequencies on the cylinder vibration frequency.

Fig. 7. — Dependency of the vortices Struhal numbers on the vibrating cylinder Struhal numbers.

FILTRAREA ŞI SCURGEREA PRIN CONDUCTE A FLUIDELOR ÎN MAI MULTE FAZE

DE

V. A. ARHANGHELSKI *)

Filtrarea fluidelor în mai multe faze se întîlneşte în practica inginerească în primul rînd la exploatarea zăcămintelor de petrol cu gaze dizolvate şi la utilizarea procedeelor de recuperare secundară a petrolului. Aceste situaţii conduc la două probleme fundamentale :

— scurgerea în mediul poros a amestecurilor în două faze petrol-gaz şi cazul mai general a amestecurilor în trei faze petrol-gaz-apă ;

— deslocuirea în mediul poros a unui lichid cu ajutorul altui lichid sau gaz.

La exploatarea zăcămintelor de petrol cu gaze dizolvate apar în acelaşi timp o serie de probleme în care se cere să se calculeze mişcarea în strat şi în sondă, care formează un sistem hidraulic unitar.

Necesitatea acestui studiu se explică prin aceea că în cazul petrolului cu gaze dizolvate debitul sondei se determină prin căderea de presiune din ea (pentru diametru şi adîncime date ale sondei neunivoc însă în funcţie de raţia de gaze la gura sondei (sau la talpa sondei), adică de relaţia între debitul de gaz şi de petrol ; raţia de gaze însă în cazul general de degazarea petrolului din strat variază în funcţie de presiunea din strat.

Din aceste motive, este natural să se considere problema filtrării lichidelor neomogene şi aceea a scugerii acestor lichide prin conducte (avînd în vedere în ultimul caz în primul rînd conductele verticale).

În prezent se studiază problema filtrării şi scurgerii prin conducte a unui amestec în două faze de lichid-gaz, şi în foarte mică măsură aceea a unui amestec în trei faze ; de aceea, în lucrarea de faţă va fi vorba aproape exclusiv despre amestecurile în două faze de lichid şi gaz, iar problema cercetărilor asupra mişcării amestecurilor în trei faze va fi atacată doarpe scurt.

Mişcările amestecurilor de lichid-gaz atît în strat cît şi în conducte sînt prin natura lor mişcări nepermanente.

---

*) Institutul de mecanică al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S..

Mişcarea nepermanentă în medii poroase este reprezentată prin patru ecuaţii diferenţiale : două ecuaţii ale mişcării, separat pentru fiecare fluid şi două ecuaţii de continuitate pentru gazul total (adică acela care se mişcă atît în stare liberă cît şi în soluţie) şi pentru lichidul degazat (mai exact, lichidul redus la condiţii atmosferice). Acest sistem poate fi redus la două ecuaţii neliniare cu derivate parţiale ; dacă filtrarea se produce fără abatere de la legea lui Darcy, atunci pentru amestecul petrol-gaz ecuaţiile pot fi prezentate sub forma

$$\nabla\left[\gamma\frac{F}{\mu}\nabla P\right]+\nabla\left[S\frac{F_1}{\mu_1}\nabla P\right]=\frac{m}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma(1-\sigma)+S\sigma\right], \qquad (1)$$

pentru gazul total şi

$$\nabla\frac{F_1}{\mu_1\beta}\nabla P=\frac{m}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sigma}{\beta}\right) \qquad (2)$$

pentru lichidul degazat.

Acestea sînt cunoscutele ecuaţii la a căror stabilire s-a ţinut seama de proprietăţile reale ale lichidelor şi gazelor, şi anume de viscozitatea lichidului μ_1 şi a gazului μ, de greutatea specifică a lichidului γ_1 şi a gazului γ, de solubilitatea în greutate a gazului în lichid S şi de coeficientul de volum al lichidului β, ca funcţii empirice de presiunea P, şi de permeabilitatea de fază a mediului poros pentru gaz F şi pentru lichid F_1, ca funcţii empirice de saturaţia cu lichid σ a spaţiului ; în acest caz

$$\beta=\frac{\gamma_1^0}{\gamma_1-S},$$

unde γ_1^0 este greutatea specifică a lichidului la presiunea atmosferică, m porozitatea şi k permeabilitatea absolută a mediului poros.

Soluţiile ecuaţiilor (1) şi (2) nu au fost încă găsite, însă pentru unele cazuri mai simple au fost elaborate soluţii aproximative ; interes practic prezintă soluţiile pentru cazul mişcării plan-radiale într-un strat orizontal. Este bine ca ecuaţiile diferenţiale ale filtrării nepermanente să fie prezentate pentru gazul total sub forma

$$q=-2\pi rkh\left[\gamma\frac{F}{\mu}+S\frac{F_1}{\mu_1}\right]\frac{\partial P}{\partial r}, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial r}=-2\pi km\frac{\partial}{\partial t}[\gamma(1-\sigma)+S\sigma], \qquad (4)$$

iar pentru lichid sub forma

$$q_1=-2\pi rkh\frac{F_1(\gamma_1-S)}{\mu_1}\frac{\partial P}{\partial r}, \qquad (5)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial q_1}{\partial r}=-2\pi km\frac{\partial}{\partial t}[\sigma(\gamma_1-S)], \qquad (6)$$

unde q şi q_1 sînt debitele în greutate ale gazului total şi petrolului degazat. De aici putem obţine un sistem de două ecuaţii

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{\gamma F}{\mu}+\frac{SF_1}{\mu_1}\right)r\frac{\partial P}{\partial r}\right]=\frac{rm}{k}\frac{\partial M}{\partial t}\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(F_1\frac{\gamma_1-S}{\mu_1}\,r\frac{\partial P}{\partial r}\right)=\frac{rm}{k}\frac{\partial N}{\partial t}\,, \tag{8}$$

unde s-au introdus notaţiile

$$M=\gamma(1-\sigma)+S\sigma, \tag{9}$$

$$N=(\gamma_1-S)\sigma.$$

Mărimea M dă conţinutul în greutate de gaz total (liber şi în soluţie) pe unitatea de spaţiu poros, iar mărimea N dă conţinutul în lichid degazat.

În cele ce urmează prin raţie de gaze Γ vom înţelege raportul dintre debitul în greutate al gazului total şi debitul în greutate al lichidului degazat; prin urmare

$$\Gamma=\frac{\gamma\,\psi\,\mu^{*}+S}{\gamma_1-S}\,, \tag{10}$$

unde s-au introdus notaţiile

$$\psi=\frac{F}{F_1}\,;\;\mu^{\star}=\frac{\mu_1}{\mu}\,,$$

mărimea ψ fiind în acest caz funcţie de saturaţie, iar mărimea $\mu^{\star}$ funcţie de presiune.

Metodele aproximative de rezolvare se bazează pe folosirea în calcule a metodei succesiunii stărilor staţionare; principiul acestei metode constă, după cum se ştie, în fixarea unei serii de momente concrete, şi în cercetarea mişcării în fiecare din aceste momente considerînd-o permanentă, cu condiţia ca regimurile în două momente succesive să satisfacă condiţia de continuitate. În aplicarea la problemele filtrării petrolului cu gaze dizolvate, metoda succesiunii stărilor staţionare duce la concluzia că raţia de gaze pentru fiecare regim instantaneu este aceeaşi pe tot parcursul filtrării. Posibilitatea aplicării metodei la exploatări petrolifere se bazează pe considerentul că variaţiile parametrilor stării stratului (presiunea, saturaţia cu petrol etc.) în timp sînt mult mai lente decît variaţiile lor în spaţiu. Această posibilitate este confirmată prin compararea calculelor efectuate prin metoda succesiunii stărilor staţionare cu rezultatele obţinute din rezolvarea ecuaţiilor (3) — (7) exprimate în diferenţe finite.

În calculele prin metoda succesiunii stărilor staţionare este firesc să se folosească funcţia auxiliară a lui S. Hristianovici (a cărei introducere permite ca ecuaţiile filtrării permanente să fie reduse la ecuaţia lui Laplace pentru această funcţie). Cînd se ţine seama de proprietăţile reale ale gazului şi lichidului, funcţia auxiliară H are forma

$$H=\int_{P_0}\frac{F_1(P)(\gamma_1-S)}{\mu_1}\,, \tag{11}$$

unde $F_1(P)$ este permeabilitatea de fază pentru lichid, exprimată în funcție de presiune prin intermediul relației (10); rația de gaze se consideră în acest caz ca un parametru. Introducînd această funcție în problema afluxului plan-radial al țițeiului cu gaze dizolvate spre sondă, obținem

$$q_1 = 2\pi k h r \frac{dH}{dr} \cdot \tag{12}$$

Este natural să se considere că în fiecare moment variațiile debitului la trecerea de la o secțiune a stratului la alta sînt proporționale cu suprafața stratului dintre secțiunile considerate; integrînd relația (12) în această ipoteză, putem obține între valorile funcției H și debitul de lichid q în două secțiuni următoarea relație

$$H_e - H_i = \frac{1}{2\pi k h}\left[q_{1e} \ln \frac{r_e}{r_i} - (q_{1e} - q_{ri})\left(\frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \ln \frac{r_e}{r_i} - \frac{1}{2}\right)\right], \tag{13}$$

unde cu indicele e se notează raportarea mărimii la secțiunea r_e, iar cu indicele i raportarea la secțiunea $r_i < r_e$. Să cercetăm aplicarea metodei la problema afluxului plan-radial al petrolului spre sondă în regimul de gaze dizolvate.

Calculele numerice arată că variațiile în timp ale mărimilor M și N pe conturul de drenare sînt în acest caz foarte apropiate de variațiile valorilor acelorași mărimi mediate în volumul întregului strat. De aceea, notînd cu indicele k raportarea mărimilor la conturul zăcămîntului petrolifer, obținem ecuația continuității sub forma

$$q_1 = \Omega \frac{dN_k}{dt}, \quad q = \Omega \frac{dM_k}{dt}. \tag{14}$$

Debitele de gaz și petrol pe conturul de drenare sînt în acest caz nule, adică

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_k = 0.$$

Ținînd seama de aceasta și de (10), putem obține din (7) și (8)

$$\Gamma_k = \frac{dM_k}{dN_k} \cdot \tag{15}$$

Mărimile Γ, M și N sînt funcții de saturație σ și de presiunea P; prin urmare, integrînd numeric relația (14), putem obține condiția la limită a problemei considerate sub forma dependenței între mărimile P și σ.

Dispunînd de această dependență, este comod ca la efectuarea calculului să se dea intensitatea de variație a presiunii P_k pe conturul de drenare

$$P_k = P(t). \tag{16}$$

Fie cunoscut regimul instantaneu pentru momentul inițial $t = 0$; dîndu-se o serie de momente t_1, t_2, $t_s, \ldots$, putem să determinăm din (16) valorile presiunii pe conturul de drenare în aceste momente. Mai departe, din condiţia la limită putem găsi valorile saturaţiei, după care, în conformitate cu (10), obţinem valorile raţiei de gaze, iar apoi din (9) mărimile M_k şi N_k şi din (11) valorile funcţiei auxiliare H. Pentru un interval de timp $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, valoarea mediată în acest interval $\widetilde{q}_1$ a debitului de petrol poate fi reprezentată sub forma

$$\widetilde{q}_1 = \Omega \frac{\Delta N_k}{\Delta t} .$$

Calculînd mărimea $\widetilde{q}_1$ pentru toate intervalele de timp, putem construi apoi curbele variaţiei în timp atît a acestei mărimi cît şi a altor mărimi necesare pentru calcul (P_k, σ_k, H_k, Γ). După aceasta, punînd $q_e = 0$, putem găsi din ecuaţia (13) valorile în sondă ale funcţiei H pentru orice moment, iar cu ajutorul acesteia din urmă putem determina valorile presiunii şi ale saturaţiei. Menţionăm că în acest caz condiţia de continuitate pentru gaz este îndeplinită automat; într-adevăr, debitul de gaz, determinat din ecuaţia dinamică, este

$$q = \Gamma q_1 = \frac{dM_k}{dN_k} q_1$$

şi o expresie analoagă pentru debitul de gaz rezultă şi din ecuaţia continuităţii (14).

Deslocuirea unui fluid cu ajutorul altui fluid se poate produce prin pomparea lichidului sau gazului în zăcămîntul de petrol, pomparea gazului în straturile acvifere în scopul înmagazinării subterane a gazului etc.

În aceste probleme intervine studiul deplasărilor frontierei de separare între două fluide, care este tratat într-un număr mare de cercetări. În cele mai multe dintre acestea se studiază cazul a două fluide incompresibile şi care nu se dizolvă unul în altul, avînd de asemenea şi o viscozitate constantă.

În aceste condiţii, s-a efectuat cercetarea problemelor unidimensionale, care conduc la o ecuaţie cvaziliniară de ordinul întîi cu derivate parţiale. De exemplu, în cazul afluxului axial-simetric spre sondă a petrolului deslocuit de apa marginală, sistemul de ecuaţii iniţial

$$u_a = -\frac{kF_a}{\mu_a}\frac{\partial P}{\partial r}, \quad \frac{\partial u_a}{\partial r} + \frac{u_a}{r} = m\frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

$$u_p = -\frac{kF_p}{\mu_p}\frac{\partial P}{\partial r}, \quad \frac{\partial u_p}{\partial r} + \frac{u_p}{r} = m\frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

(cu indice se notează raportarea mărimii la apă sau la petrol, iar σ este saturaţia cu petrol *a spaţiului poros*) poate fi redus uşor la forma

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \Phi(\sigma)\frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} = 0, \qquad (16')$$

unde $\Phi(\sigma)$ este *funcție de saturația cu petrol formată din funcțiile empirice* F_a și F_p pentru $\mu^* = \text{const.}$,

$$\tau = \frac{1}{2\pi m h} \int_0^t Q(\eta)\, d\eta ,$$

$$\zeta = \frac{r^2}{2} ,$$

Q fiind debitul apei care pătrunde în strat, iar η o variabilă de integrare.

Soluția ecuației (16) se determină prin utilizarea valorilor funcției σ la momentul inițial și se găsește pe cale elementară. Această soluție duce la concluzia că, în conformitate cu experiența, în procesul deslocuirii nu există o frontieră de separare clar exprimată în mediul poros între cele două fluide, ci se formează o zonă intermediară, în care se mișcă ambele fluide.

Problemele deslocuirii fluidelor compresibile și dizolvate și, în particular, ale deslocuirii petrolului cu gaze dizolvate cu ajutorul apei sau gazului sînt mult mai complicate; la rezolvarea lor se folosesc metode aproximative și, în particular, metoda succesiunii stărilor staționare.

Să considerăm problema plan-radială a dizlocării petrolului cu gaze dizolvate cu ajutorul apei, în prezența zonei intermediare. În acest caz vom presupune că în zona intermediară se păstrează o saturație cu petrol reziduală σ_r; respectiv permeabilitatea pentru apă în această zonă va fi diferită de aceea din domeniul ocupat de apă în momentul inițial (adică pînă la începerea procesului de deslocuire).

Vom numi contur petrolifer frontiera interioară a domeniului intermediar și vom nota cu indicele k raportarea mărimilor la această frontieră.

Din ecuația continuității pentru apă, care pătrunde în strat

$$q_a = -m(1-\sigma_r)\,\pi \frac{dr_k^2}{dt} \tag{17}$$

și ecuația dinamică scrisă pentru mișcarea apei în domeniul dintre conturul de alimentare (raza r_0, presiunea P_0) și conturul petrolifer, rezultă

$$m_1 \pi \frac{dr_k^2}{dt} = -\frac{2\pi(P_0 - P_k)}{\mu\left(k \ln \frac{r_0}{r_{k_0}} + k_1 \ln \frac{r_{k_0}}{r_k}\right)} , \tag{18}$$

unde $m_1 = m\,(1-\sigma_r)$, r_{k_0} fiind poziția inițială a conturului petrolifer.

Presiunea P_0 pe conturul de alimentare (a cărui poziție poate fi considerată invariabilă) trebuie considerată de cele mai multe ori constantă, sau se dă ca funcție de timp. De asemenea este comod ca mărimea P_k să fie dată ca funcție de timp în care caz ecuația (18) se integrează ușor.

Să reprezentăm rezultatul integrării, de exemplu, sub forma

$$\left(k \ln r_{k_0} + k_1 \ln \frac{r_0}{r_{k_0}}\right)(r_k^2 - r_{k_0}^2) - k\left(r_k^2 \ln \frac{r_k}{1{,}65} - r_{k_0}^2 \ln \frac{r_{k_0}}{1{,}65}\right) = -$$

$$= -\frac{2kk_1}{\mu_a m} \int_0 (P_0 - P_k)\, dt, \tag{19}$$

care dă dependența dintre poziția conturului petrolifer și presiunea pe el și determină în același timp legea de deplasare $r_k(t)$ a acestui contur.

Legea de deplasare este arătată grafic în figura 1. Vom nota, după cum se arată pe această figură, o serie de momente t_1, t_2, t_3, ... ; problema practică a calculului este determinarea valorilor debitului de petrol, debitului de gaz și presiunii în sondă în momentele alese.

Admitem că mișcarea în domeniul ocupat de petrolul cu gaze dizolvate este determinată, de exemplu, pentru momentul t_2 ; aceasta înseamnă că de-a lungul segmentului [2,2]—[2, n] sînt cunoscute valorile presiunii și saturației, prin urmare și ale mărimilor M și N și se cunosc valorile debitului de petrol și ale debitului de gaz. Ne propunem problema determinării regimului în domeniul ocupat de petrol pentru momentul t_3, adică de-a lungul segmentului [3,3] — [3, n]; în acest caz, menționăm că în punctul [3,3] se cunoaște, în conformitate cu (19), presiunea $P_k^{\cdot}$.

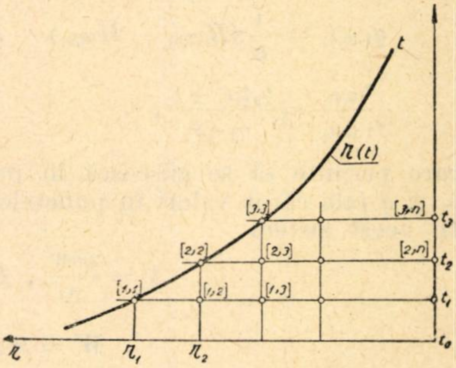


Fig. 1

În intervalul de timp $\Delta t = t_3 - t_2$ dintr-o parte a stratului de volum $W = \pi (r_2^2 - r_3^2)\, h$ este deslocuit gazul total în greutate de $m\, W (\overline{M} - S\, \sigma_r)$ și petrolul (degazat) în greutate de $m\, W [\overline{N} - \sigma_r (\gamma_1 - S)]$; debitele, mediate în intervalul $\Delta\, t$, ale gazului $\widetilde{q}$ și petrolului $\widetilde{q}_1$ sînt

$$\widetilde{q} = \frac{mW (\overline{M} - S\,\sigma_r)}{\Delta t}, \quad q_1 = \frac{mW [\overline{N} - \sigma_r (\gamma_1 - S)]}{\Delta t}\,.$$

Valorile mărimilor q și q_1 în momentul final al intervalului Δt pot fi obținute în ipoteza că variațiile acestor mărimi în intervalul Δt se produc după o lege liniară; prin urmare, expresia rației de gaze în momentul cînd conturul petrolifer ajunge în secțiunea r_{k_3} are forma

$$\Gamma = \frac{q}{q_1} = \frac{2\widetilde{q} - q_i}{2\widetilde{q}_1 - q_{1i}}\,,$$

unde q_i și q_{1i} sînt valorile debitului de gaz și petrol la începutul intervalului Δt. După valoarea rației de gaze determinată în felul acesta și după presiunea în punctul [3,3] cunoscută din condiția (18), poate fi găsită valoarea saturației cu gaz. După aceasta poate fi făcut calculul mișcării în momentul t_3 și în domeniul ocupat de petrolul cu gaze dizolvate. Într-adevăr, pentru domeniul [2,3] — [3,3] — [3, n] — [2, n] din figura 1 se cunoaște regimul de-a lungul segmentului [2,3] — [2, n] și condiția la limită în punctul [3,3]. Aceasta permite să se calculeze regimul pentru momentul t_3 prin metoda succesiunii stărilor staționare, ca în cazul cercetat mai sus al epuizării stratului în regimul de gaze dizolvate sau rezolvînd ecuațiile mișcării, prezentate în prealabil în diferențe finite. La efectuarea calculului prin a doua metodă, regimul din strat care corespunde, de exemplu, punctului [3,4], se determină prin rezolvarea următorului sistem de patru ecuații algebrice (cîte două ecuații pentru gaz și pentru lichid),

$$\begin{aligned} q_{1\,[3,4]} &= A\ [\overline{N}(t_2) - \overline{N}(t_3)] + q_{1\,[2,3]} + q_{1\,[3,3]} - q_{1\,[2,4]}\,, \\ q_{[3,4]} &= A\,[\overline{M}(t_2) - \overline{M}(t_3)] + q_{[2,3]} + q_{[3,3]} - q_{[2,4]}\,, \\ q_{1\,[3,4]} &= \frac{1}{B}\,(H_{[3,3]} - H_{[3,4]}) - q_{1\,[3,3]}\,, \\ \frac{q_{[3,4]}}{q_{1\,[3,4]}} &= \frac{\gamma_0\psi\mu^{*} + S}{\gamma_1 - S}\,, \end{aligned} \tag{20}$$

care permite să se găsească în punctul [3,4] valorile mărimilor P, σ, q_1 și q (ale căror valori în punctele [3,3], [2,3] și [2, 4] sînt cunoscute). În acest sistem

$$A = \frac{2mW}{\Delta t}\,,\ B = \frac{1}{4\,\pi\,k}\ln\frac{r_{k_3}}{r_{k_4}}\,,$$

$$W = \pi\,h\,(r_{k_3}^2 - r_{k_4}^2),$$

iar cu M și N s-au notat mărimile M și N mediate în volumul W; a treia ecuație a sistemului s-a obținut ca dependență între valorile funcției H în secțiunile r_{k_3} și r_{k_4} pentru momentul t_3 și media aritmetică a valorilor debitului de petrol la capetele segmentului $(r_3 - r_4)$; mai exact, această ecuație poate fi reprezentată sub forma (13).

Trecem la cercetarea problemei mișcării amestecurilor de gaz și lichid prin sonde (considerate conducte verticale).

Ecuația dinamică poate fi obținută aplicînd, de exemplu, teorema cantității de mișcare la volumul elementar de amestec $\Omega\ \delta\ L$ (Ω fiind aria secțiunii conductei, δL înălțimea volumului) în proiecție pe axa x, care coincide cu axa conductei (luînd, de exemplu ca pozitivă direcția în sus a acestei axe).

Fie M_1 masa lichidului și M masa gazului din volumul elementar, u și c fiind respectiv viteza lichidului și viteza gazului. Pe măsură ce presiunea scade la deplasarea volumului, o parte din gaz trece din starea de soluție în lichid în stare liberă; fie $d\ M$ masa gazului care se degajă din soluție după timpul dt; cantitatea de mișcare a volumului considerat este $M_1\ u + M\,c$ la momentul t și $(M_1 - d\ M)\ (u + du) + (M + dM)\ (c + dc)$ la momentul $t + dt$; de aici

$$M_1\ d\,u + Mdc + dMv = \Sigma\,Fdt, \tag{21}$$

unde $v = c - u$ și $\Sigma\ Fdt$ este suma impulsurilor forțelor exterioare.

Mărimea dM are expresia

$$dM = d\,\frac{SM_1}{\gamma_1} = \frac{\gamma_1 SdM_1 + \gamma_1 M_1 dS - SM_1 d\gamma_1}{\gamma_1^2}\,.$$

Avînd în vedere că $dS = S(P)\frac{dP}{dx}u\,dt$, $d\gamma_1 = \gamma_1'\frac{dP}{dx}u\,dt$ (unde P este presiunea), precum și condiția $dM = -\,dM_1$, putem aduce ecuația (21) la forma

$$M_1 u\frac{du}{dx} + Mc\frac{dc}{dx} + u\,v\frac{M_1}{\gamma_1 + S}\left[S'(P) + \frac{S}{\gamma_1}\gamma'(P)\right]\frac{dP}{dx} = \sum F. \qquad (22)$$

Forțele exterioare, aplicate volumului de amestec considerat, sînt greutatea lichidului $g\,M_1$, greutatea gazului gM, forțele de presiune $\left(-\frac{dP}{dx}\Omega\,\delta L\right)$ și forțele de rezistență $\left(-\frac{dP_f}{dx}\Omega\,\delta L\right)$. Notăm cu ρ partea din volumul $\Omega\,\delta\,L$ care revine fracțiunii de gaz liber, adică saturația cu gaz a amestecului. Atunci $g\,M_1 = \gamma_1(1-\rho)\,\Omega\,\delta\,L$, $g\,M = \gamma\,\rho\,\Omega\,\delta\,L$ și după introducerea în ecuația (22) a expresiilor pentru forțele exterioare și după unele transformări simple, acesta ia forma

$$\frac{\gamma_1(1-\rho)}{g\,\gamma_c}u\,du + \frac{\gamma\rho}{g\gamma_c}c\,dc + \frac{\gamma_1(1-\rho)}{g\,(\gamma_1+S)}vu\left[S'(P) - \frac{S}{\gamma_1}\gamma'(P)\right]\frac{dP}{dx} =$$

$$= -\,dx - \frac{dP}{\gamma_c} - \frac{dP_f}{\gamma_c}, \qquad (23)$$

unde mărimea $\gamma_c = \gamma_1(1-\rho) + \gamma\,\rho$ reprezintă greutatea specifică a amestecului.

Introducem pentru calculele ulterioare notațiile

$$\frac{q}{q_1} = \alpha,\ \frac{q_1}{\Omega} = w,\ \frac{1}{\gamma_c}\frac{dP_f}{dx} = I,$$

cu ajutorul cărora vitezele lichidului și gazului pot fi prezentate sub forma

$$u = \frac{w}{1-\rho},\ c = \frac{\alpha w}{\rho},$$

iar ecuația (23) se aduce la forma

$$(1+\eta)\frac{dP}{\gamma_c} + \frac{\gamma_1 w}{g\gamma_c}d\,\frac{w}{1-\rho} + \frac{\gamma}{g\gamma_c}\alpha\,wd\frac{\alpha w}{\rho} + (1+I)\,dx = 0,$$

unde

$$\eta = \frac{v\,w\,\gamma_1}{g(\gamma_1+S)}\left[S'(P) - \frac{S\gamma'(P)}{\gamma_1}\right].$$

În condițiile practice ale mișcării amestecurilor mărimea η este neglijabilă în comparație cu unitatea, iar ecuația mișcării amestecului ia forma definitivă

$$\frac{dP}{\gamma_c} + \frac{\gamma_1 w}{g\gamma_c}d\,\frac{w}{1-\rho} + \frac{\gamma}{g\gamma_c}\alpha\,w\,d\,\frac{\alpha w}{\rho} + (1+I)\,dx = 0. \qquad (24)$$

Introducînd în (24) în locul vitezei w debitele de lichid şi de gaz, ecuaţia mai poate fi prezentată şi sub forma

$$\frac{dP}{\gamma_c} + \frac{\gamma_1 q_1}{g\,\Omega^2\,\gamma_c}\,d\,\frac{q_1}{1-\rho} + \frac{\gamma q}{g\,\Omega^2\gamma_c}\,d\,\frac{q}{\rho} + (1 + I)\,dx = 0. \tag{25}$$

În cazul particular al amestecurilor cu gaze insolubile (w = const., $\gamma_1\,q_1$ = const.) şi presupunînd că scurgerea amestecului este izotermică, în locul lui (25) obţinem

$$\frac{dP}{\gamma_c} + (1 + I)\;dx + \frac{A}{\gamma_1}\,d\,\frac{1}{1-\rho} + \frac{A}{\gamma_c}\,d\,\frac{P_0}{P\rho} = 0,$$

unde

$$A_1 = \frac{\gamma_1\,q_1^2}{g\Omega^2},\;\; A_2 = \frac{\gamma^\circ\alpha^\circ q_1^0}{g\,\Omega^2}$$

şi γ° şi α° sînt respectiv greutatea specifică a gazului şi mărimea α, reduse la presiunea atmosferică.

În ecuaţia (24) mărimea γ_1 este o funcţie empirică de presiune, mărimea γ se determină din ecuaţia de stare, iar viteza w se exprimă în funcţie de presiune sub forma

$$w = \frac{\overset{\circ}{\gamma_1}\,w^\circ}{\gamma_1 - S},$$

unde γ_1° şi w^0 sînt respectiv greutatea specifică a lichidului şi viteza reduse la presiunea atmosferică. Greutatea specifică a amestecului γ_c este dată de presiune şi de saturaţia cu gaz; exprimînd raţia de gaze prin relaţia

$$\Gamma = \frac{\gamma q + S q_1}{\gamma_1 q_1 - S q_1} = \frac{\alpha\gamma + S}{\gamma_1 - S}, \tag{26}$$

obţinem şi pentru mărimea α o expresie în funcţie de presiune (cu Γ ca parametru),

$$\alpha = \frac{\Gamma}{\gamma}(\gamma_1 - S) - \frac{S}{\gamma}\cdot \tag{27}$$

După aceasta, ecuaţia (24) se rezolvă simplu prin metoda integrării *numerice*, cu utilizarea dependenţelor empirice pentru saturaţia cu gaze ρ şi pentru panta hidraulică I, obţinute în experienţele asupra mişcării amestecurilor.

Există un număr apreciabil de propuneri pentru aceste dependenţe; totuşi, problema obţinerii dependenţelor utile în condiţii de variaţie largă a parametrilor mişcării amestecurilor este deocamdată departe de a fi rezolvată.

Saturaţia cu gaz a amestecului poate fi considerată funcţie de raţia de gaze; însă această funcţie este multiparametrică; parametrii ei, după cum s-a lămurit prin experienţe, sînt debitul (sau viteza redusă) a lichidului, diametrul conductei, tensiunea superficială între lichid și gaz, proprietățile fizice ale fluidelor (greutatea specifică și viscozitatea); influența unora din acești parametri asupra caracterului funcției nu este în general lămurită. Cercetările experimentale din ultimii ani, efectuate de Institutul unional de petrol (Moscova) au permis să se propună, de exemplu, următoarele formule pentru saturația cu gaz, care conțin, ca parametri, debitul lichidului, diametrul conductei și tensiunea superficială.

Pentru valori relativ mici ale saturației cu gaz, care corespund, de exemplu, scurgerii amestecului în formă de emulsie, se poate lua

$$\rho = \frac{\alpha}{1 + \alpha + \frac{0,3}{w} \nu^{\frac{1}{3}}}, \tag{28}$$

iar pentru valori mari ale saturației cu gaz, care corespund structurilor ,,înlănțuită'' și ,,axială'' ale amestecului este valabilă relația

$$\rho = \frac{1}{1 + \sqrt{0,28 \frac{w}{\alpha}} + \sqrt{2,25 \frac{wD}{\alpha}} \nu^{\frac{1}{3}}}. \tag{29}$$

În aceste formule ν este tensiunea superficială relativă (în raport cu sistemul apă-aer) între faza lichidă și cea gazoasă; viteza w și diametrul conductei D trebuie să fie luate în metri pe secundă, respectiv metri.

Tot atît de complicată este și problema găsirii expresiei pentru panta hidraulică. Una din căile pentru rezolvarea acestei probleme, folosită în Institutul de mecanică (Moscova), este cercetarea expresiei

$$I = I_1 + \lambda^{*} F r_1^{m}, \tag{30}$$

unde I_1 este panta hidraulică la scurgerea lichidului omogen cu debitul corespunzător celui din mișcarea considerată a amestecului, λ^{*} coeficientul de rezistență, considerat ca funcție de mărimile α și ρ, și

$$Fr_1 = \frac{w^2}{gD}.$$

La prelucrarea datelor experimentale ale diferitelor organizații, efectuate în Institutul de mecanică pentru coeficientul de rezistență λ^{*}, s-a obținut expresia

$$\lambda^{*} = a\ (\zeta - 1), \tag{31}$$

unde

$$\zeta = \frac{(1 + \alpha)^n}{\gamma_c} (\gamma_1 - \gamma_\alpha), \tag{32}$$

iar valorile medii ale exponenților m și n ale coeficientului a obținute la prelucrarea datelor erau

$$a = 0,34,\quad n = 0,66,\quad m = 0,8.$$

Trebuie subliniat încă o dată că nici formula pantei hidraulice, nici formula saturației cu gaz date aici nu au pretenția de a avea generalitatea și exactitatea necesară pentru calculele inginerești; pentru fundamentarea acestui fapt este suficient să spunem că experiențele care au dus la obținerea acestor formule, au fost făcute cu amestecuri numai de aer cu apă în special, și în mică măsură cu uleiuri minerale, într-un domeniu mic de variație a presiunii și cu o metodică diferită pentru măsurarea saturației cu gaz în diferitele cazuri. Obținerea dependențelor empirice continuă să rămînă o problemă fundamentală (și, pe cît se pare, cea mai dificilă) în studiul mișcării fluidelor în mai multe faze. Dificultățile devin și mai numeroase la trecerea de la studiul amestecurilor în două faze la studiul amestecurilor în trei faze, la necesitatea de a se lua în considerare solubilitatea gazelor în lichide și diversitatea proprietăților fizice ale fluidelor în condiții practice, de exemplu, exploatarea zăcămintelor de petrol cu gaze dizolvate. De aceea, este foarte important să se facă cercetări direct la sondele în funcțiune și nu numai în condiții de laborator, unde este extrem de dificil să se creeze condiții care să se apropie de acelea existente în schelă. În prezent în U.R.S.S. se procedează la organizarea cercetărilor în condiții de exploatare petroliferă după un program care permite să se studieze, în particular, legea rezistențelor la mișcarea amestecurilor.

Cercetarea dependențelor empirice existente permite, totuși, să se obțină unele rezultate și concluzii interesante din punct de vedere practic.

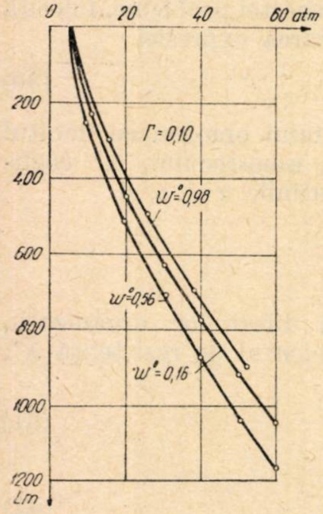


Fig. 2

În figura 2, sînt arătate curbele distribuției presiunii pe lungimea sondei, obținute prin calcul, folosind dependențele empirice arătate mai sus; la diferite curbe corespund diferite valori ale debitului de petrol; rația de gaze este aceeași în toate aceste cazuri.

Aceste curbe ale distribuției presiunii sînt, la o rație de gaze dată, universale pentru o sondă dată, în sensul că efectuînd calculul pentru o lungime suficient de mare a sondei, le putem utiliza pentru găsirea căderii de presiune la adîncimi diferite ale tălpii sondei sau la diferite valori ale presiunii la gura sondei. Caracteristic este faptul că pentru o presiune invariabilă dată la gura sondei, căderea de presiune nu variază în funcție de debit în mod monoton; de exemplu, în cazul considerat presiunea la o adîncime de 900 m este egală cu 48,5 atm pentru $w^\circ = 0{,}16$ m/s, 42 atm pentru $w^\circ = 0{,}56$ m/s și 50,5 atm pentru $w^\circ = 0{,}98$ m/s; presiunea coloanei de lichid omogen în absența scurgerii este de 79 atm. În figura 3, a fost construită, cu ajutorul acestor date, diagrama dependenței între debitul sondei și presiunea în secțiunea considerată, conform căreia într-un domeniu oarecare căderea de presiune crește o dată cu debitul. Această dependenţă pare la prima vedere paradoxală ; totuşi, ea este confirmată pe deplin de datele experienţelor. Într-adevăr, la bancurile de laborator a fost obţinută de repetate ori pe cale experimentală dependenţa întro debitul de aer şi debitul de apă la mişcarea amestecurilor prin conducte

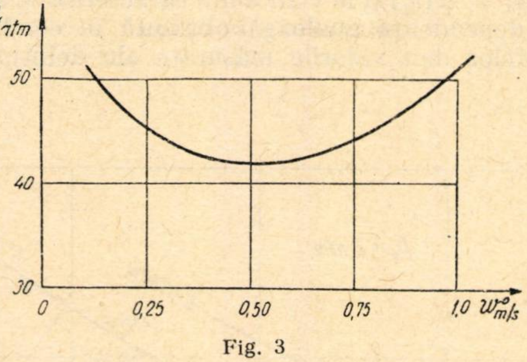


Fig. 3

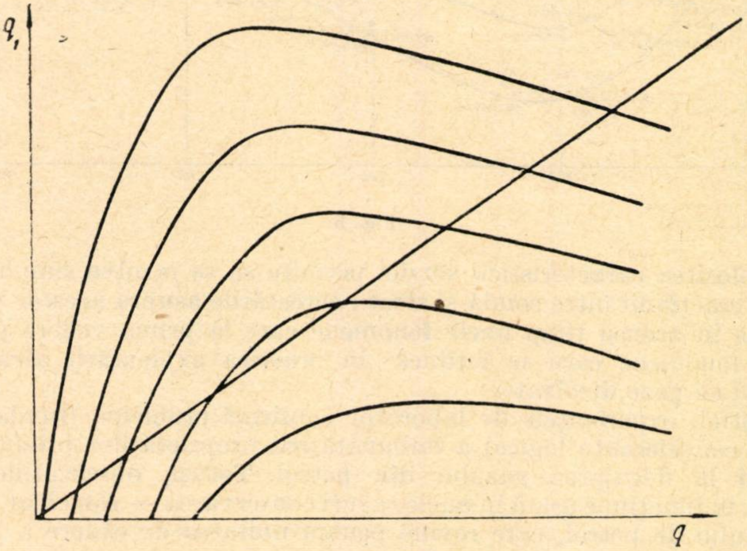


Fig. 4

verticale ; dacă se păstrează invariabilă presiunea P_0 la ieşirea din conductă şi se dau diferite valori presiunii în secţiunea de intrare a aerului, atunci dependenţa are forma arătată în figura 4. Drept parametru al familiei de curbe de pe această diagramă se consideră presiunea în secţiunea în care se introduce aerul în conducte. Dacă pe diagramă se duce o dreaptă care pleacă din originea coordonatelor, atunci punctele de intersecţie a dreptei cu curbele pentru diferite valori ale presiunii la intrare determină o serie de valori ale debitului şi presiunii în secţiunea de debitare a aerului pentru condiţia $\alpha^\circ = \text{const.}$, adică $\Gamma = \text{const.}$ Construind după aceste date diagrama dependenței între debitul de apă și presiunea în secțiunea de debitare a aerului, obținem o curbă analoagă celei arătate în figura 3. Variind unghiul de înclinare a dreptei, putem obține o serie de curbe care au ca parametru valorile rației de gaze. În cele ce urmează vom nota aceste curbe cu $p_1 = \varphi\ (q_1)$ și le vom numi caracteristica sondei. În figura 5 este arătată o dependență analoagă obținută în condiții de exploatare (numerele punctelor dau valorile măsurate ale debitului și presiunii la talpa sondei).

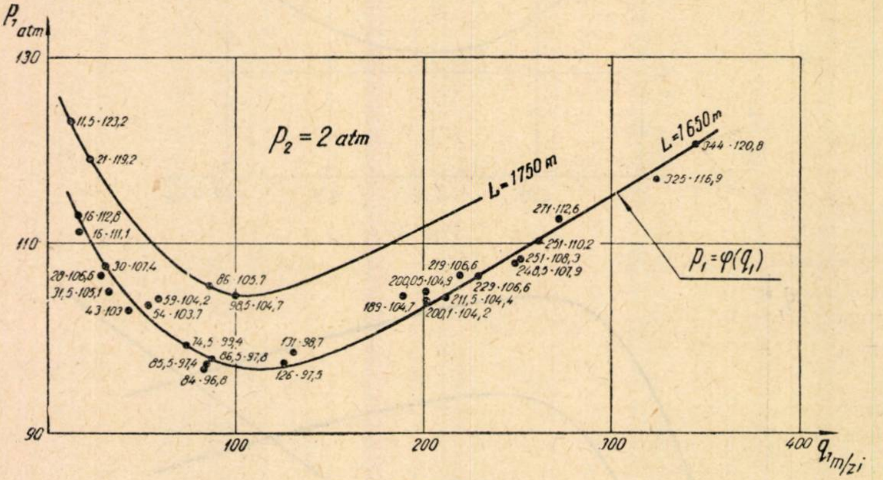


Fig. 5

Folosirea caracteristicii sondei permite să se rezolve simplu problemele interacțiunii între sondă și strat; cercetările asupra acestor probleme lămuresc în același timp unele fenomene care la prima vedere par paradoxale, fenomene care se întîlnesc în practica exploatării zăcămintelor de petrol cu gaze dizolvate.

Astfel, experiențele de laborator confirmă problema (fundamentată ușor de considerente logice) a îmbunătățirii proprietăților productive ale stratului la degajarea gazului din petrol. Totuși, observațiile asupra sondelor în funcțiune arată în unele cazuri conservarea — sau chiar creșterea — debitului de petrol, care revine pentru unitatea de cădere a presiunii, după ce în strat a început degajarea gazului.

Ca exemplu în tabela de mai jos se dau datele observațiilor asupra funcționării uneia din sonde; în aceste observații s-a făcut măsurarea

Timpul de măsurare	Debitul de petrol t/zi	Rația de gaze	Presiunea în strat atm	Presiunea la gura sondei atm	Presiunea în talpa sondei atm	Δp Atm	Căderile de presiune	
							$\Delta_1 p$ (în strat) atm	$\Delta_2 p$ (în sondă) atm
a. 1947	128	0,14	—	32,0	99,4	71	3,6	67,4
a. 1947	190	0,14	103	30,0	97,6	73	5,4	67,6
a. 1947	252	0,12	—	29,0	95,6	74	7,4	66,6
a. 1948	220	0,25	97	39,8	84	57,2	13	44,2

presiunii la gura sondei iar cu ajutorul manometrului de adîncime s-a făcut măsurarea la talpa sondei a debitului de petrol şi a raţiei de gaze; presiunea în strat se determina după oprirea funcţionării sondei.

Referindu-ne la ultima coloană a tabelei, putem observa că la două măsurători făcute în anul 1947 pentru debite de petrol care diferă între ele aproape de două ori (128 t/zi şi 252 t/zi), căderea de presiune în sondă practic nu s-a schimbat; pentru un debit mai mare ea era chiar mai mică decît pentru un debit mai mic. În felul acesta se creează impresia că amestecul se mişcă prin coloana sondei ca şi cînd nu ar întîmpina rezistenţe.

În realitate, căderea de presiune la un debit de 252 t/zi este mai redusă datorită presiunii la gura sondei ceva mai mici decît pentru debitul de 128 t/zi.

Datorită acestui fapt, în cazul considerat, saturaţia cu gaz a amestecului era ceva mai mare şi creşterea căderii de presiune datorită creşterii forţelor de rezistenţă era compensată de descreşterea greutăţii specifice a amestecului.

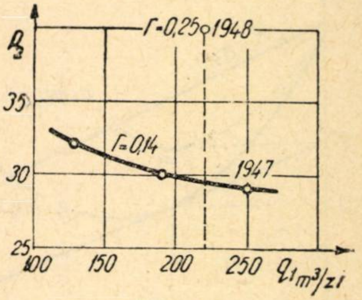


Fig. 6

În figura 6 este arătată dependenţa între presiunea la gura sondei şi debit după măsurătorile din anul 1947. Această dependenţă are caracterul aceleia pentru care creşterea presiunii la gura sondei duce la descreşterea debitului; acelaşi caracter (calitativ) l-ar avea această dependenţă şi la mişcarea petrolului omogen. În acelaşi timp, presiunea la gura sondei, care corespunde debitului de 220 t/zi, determinată după această curbă, şi presiunea la gura sondei, pentru acelaşi debit în anul 1948, au valorile de circa 30 atm în primul caz şi 39,8 atm. în al doilea caz.

În anul 1947 debitul, raportat la unitatea de cădere a presiunii în întregul sistem, era de 3,45 t/atm zi, iar în anul 1948, în timp ce în strat se degaja intens gazul, debitul a crescut pînă la 3,85 t/atm zi. Totuşi, aceasta nu înseamnă că proprietăţile productive ale stratului s-au îmbunătăţit. Dimpotrivă, din datele tabelei se vede că în strat căderea de presiune în anul 1948 este aproape de două ori mai mare decît valoarea ei din anul 1947. În acelaşi timp, în urma creşterii bruşte a raţiei de gaze, s-a îmbunătăţit capacitatea de tranzit a sondei, aceasta compensînd înrăutăţirea proprietăţilor productive ale stratului.

De aici rezultă că, în general, degajarea gazului din strat la descreşterea presiunii stratului, care este însoţită inevitabil în prima etapă de creşterea raţiei de gaze, poate duce în acest timp atît la descreşterea cît şi la creşterea debitului de petrol, în funcţie de importanţa relativă a componentelor $\Delta_1 p$ şi $\Delta_2 p$ în crearea căderii de presiune în sistemul sondă-strat.

Importanţa principală din punct de vedere practic o are problema determinării presiunii stratului, pentru care încetează erupţia sondei.

Atît în această problemă cît și în celelalte, mișcarea în sistemul sondă-strat este nepermanentă ; la rezolvare, ținînd seama de intensitatea mică a variațiilor presiunii stratului în timp, putem aplica, la calculul mișcării în strat, cu un grad de exactitate suficient pentru scopuri practice, metoda succesiunii stărilor staționare. Mișcarea în sondă în fiecare moment dat o putem considera permanentă pentru acea valoare a rației de gaze care se determină prin presiunea în strat în acest moment. Prin această considerare a mișcării în sistem, rația de gaze va fi aceeași la un moment dat și pe lungimea sondei. În problema încetării erupției, presiunea la gura sondei se consideră constantă, definindu-se ca cea mai joasă posibilă după condițiile de recoltare a gazului în zăcămînt.

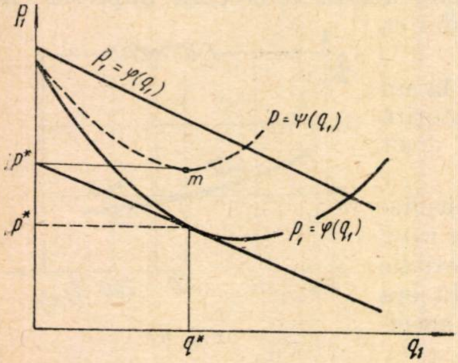


Fig. 7

În cel mai simplu caz, cînd degazarea petrolului se produce în sondă, rația de gaze este constantă iar caracteristica sondei se prezintă printr-o singură curbă ; ea poate fi construită prin puncte, determinînd din calcul pentru cîteva valori ale debitului de petrol lungimea porțiunii de sondă pe care are loc mișcarea amestecului și calculînd apoi valorile presiunii la talpa sondei

$$p_1 = p_i + \gamma_1^* (L - L_1) + \Delta p,$$

unde p_i este presiunea pentru care începe degazarea petrolului, γ_1^* greutatea specifică a petrolului în condiții de strat, L adîncimea sondei și Δp_f căderea de presiune, condiționată de pierderile hidraulice pe porțiunea $L - L_1$ a sondei.

Lucrul comun al sondei și stratul este determinat de condiția ca debitul de petrol din sondă să fie egal cu afluxul de petrol omogen venind din strat spre talpa sondei.

Să construim pe o diagramă comună (fig. 7) curba $p_1 = \varphi_1 (q_1)$ a dependenței între afluxul de petrol din strat spre sondă și presiunea la talpa sondei pentru o anumită valoare a presiunii stratului P, precum și caracteristica sondei $p_1 = \varphi (q_1)$; punctul de intersecție a ambelor curbe determină condițiile de lucru comun al stratului și sondei pentru o presiune a stratului dată. La o variație a valorii presiunii stratului va corespunde o altă curbă $p_1 = \varphi_1 (q_1)$ și un alt punct de intersecție.

Încetarea erupției se produce atunci cînd presiunea stratului, în descreșterea ei, atinge o valoare pentru care curba $p_1 = \varphi_1 (q_1)$ este tangentă la curba $p_1 = \varphi (q_1)$; punctul de tangență va determina valoarea debitului sondei q_1^* și a presiunii în talpă p_1^*, iar punctul p^* va determina valoarea presiunii stratului care corespunde încetării erupției. Aceleași rezultate le putem obține mărind ordonatele curbei $p_1 = \varphi (q_1)$ cu mărimea căderii de presiune a stratului pentru valorile corespunzătoare ale debitului de petrol şi construind pe diagrama din figura 7 curba $P = \psi\ (q_1)$ a valorilor presiunii stratului necesară pentru menţinerea regimurilor din sondă, date de curba $p_1 = \varphi\ (q_1)$. Punctul minim m de pe curba $P = \psi\ (q_1)$ determină parametrii care corespund încetării erupţiei.

Încetarea erupţiei apare pentru o anumită valoare a debitului de petrol, care este cu atît mai mare decît zero cu cît sînt mai ridicate proprietăţile productive ale stratului; presiunea stratului şi tălpii, care corespund încetării erupţiei sînt cu atît mai mari cu cît sînt mai joase proprietăţile productive ale stratului.

În cazul cînd degazarea petrolului se produce în strat, valoarea raţiei de gaze se schimbă datorită variaţiilor presiunii stratului, iar caracteristica sondei se reprezintă printr-o familie de curbe $p_1 = \varphi\ (q_1)$. Această caracteristică poate fi construită în urma calculelor mişcării amestecului de gaz şi lichid în sondă pentru cîteva valori ale raţiei de gaze; forma ei este arătată în figura 8, unde diferitele curbe au notaţiile conform valorilor raţiei de gaze pentru care au fost construite.

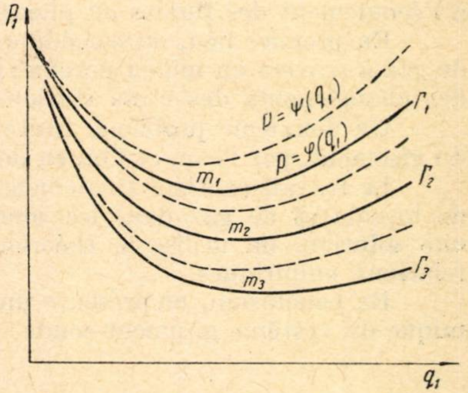


Fig. 8

Fie, de exemplu, cazul cînd în strat există regimul de gaze dizolvate.

Dîndu-se arbitrar pe o curbă, de exemplu Γ_1, a caracteristicii sondei, cîteva grupe de valori ale presiuni p_1 şi debitului de petrol din sondă q_1, şi făcînd calculele mişcării petrolului cu gaze dizolvate din strat, putem construi apoi prin puncte curba $P = \psi\ (q_1)$ a valorilor presiunii stratului, care asigură posibilitatea funcţionării sondei în conformitate cu curba Γ_1. La fel pot fi construite dependenţele $P = \psi\ (q_1)$, care corespund altor curbe ale caracteristicii sondei. Punctele m_1, m_2 etc. determină valorile lui $p_1^{\star}$, $p_2^{\star}$, etc., ale presiunii stratului, pentru care încetează erupţia în cazul cînd raţia de gaze este egală cu Γ_1, Γ_2 etc. Prin urmare, poate fi construită grafic dependenţa $P = f_1\ (\Gamma)$ între presiunea stratului şi raţia de gaze, satisfăcînd condiţia de încetare a erupţiei sondei. Pe de altă parte, în regimul de gaze dizolvate există o anumită dependenţă între presiunea stratului şi raţia de gaze, care se stabileşte din condiţiile pe conturul de drenare al sondei. Această ultimă dependenţă o vom nota cu $P = f_2\ (\Gamma)$. Dacă se construiesc pe o diagramă comună curbele $P = f_1\ (\Gamma)$ şi $P = f_2\ (\Gamma)$, atunci punctul lor de intersecţie determină valorile presiunii stratului şi raţiei de gaze, pentru care încetează erupţia sondei.

Folosind metode de calcul grafo-analitice analoage, putem rezolva şi alte diferite probleme referitoare la mişcarea lichidelor gazate în sistemul strat-sondă.

FILTRAGE ET ÉCOULEMENT DES FLUIDES À TRAVERS DES CONDUITES, EN PLUSIEURS PHASES

RÉSUMÉ

On étudie dans ce travail quelques problèmes importants, relatifs à l'écoulement des fluides en plusieurs phases.

En premier lieu, on considère le filtrage d'un mélange de liquide et de gaz à travers un milieu poreux ; ce problème est résolu par la méthode des changements des états stationnaires.

Un deuxième problème traité est celui de la dislocation du pétrole du gisement, par l'eau, et l'on en donne la solution par la même méthode.

Le travail contient finalement l'étude de l'écoulement des mélanges de liquide et de gaz dans les sondes (tubes verticaux). Pour arriver à une solution, on utilise le théorème de l'impulsion ainsi que certaines relations empiriques.

En conclusion, on présente une série de considérations sur la dynamique du système gisement-sonde.

FILTERING AND FLOW THROUGH PIPES OF FLUIDS IN SEVERAL PHASES

ABSTRACT

The above is a study of some important problems in connection with the flow of fluids in several phases.

In the first place, the filtering of a liquid and gas mixture through a porous medium is considered, the problem being solved by the method of changes of stationary states. The second problem treated by the author is that of dislocation of oil from the oil-bearing stratum with the aid of water, which is solved by the same method. Finally, the article deals with the flow of a liquid and gas mixture through oil-wells (vertical pipes). The problem is solved by means of the impulse theorem and of some empirical relations. In conclusion, some considerations are made in connection with the dynamics of a stratum — oil-well system.

STUDIU ASUPRA MIŞCĂRII SATELIŢILOR ARTIFICIALI ÎN MEDIUL REZISTENT

DE

M. M. NIŢĂ

1. INTRODUCERE

În prezenta lucrare, ne propunem să studiem mişcarea sateliţilor artificiali într-un mediu rezistent.

Mişcarea corpurilor cereşti într-un mediu rezistent a constituit subiectul multor cercetări în domeniul Mecanicii cereşti.

Astfel, F. Tisserand şi O. Backlund [1] au ţinut cont de rezistenţa mediului în studiul mişcării cometei Encke.

Mai tîrziu, mişcarea corpurilor cereşti în mediul rezistent este reluată de P. Fatou [2] şi J. Chazy [3].

Referitor la mişcarea sateliţilor artificiali în atmosferă, E. Esclangon [4] deduce din teorema energiei şi integrala ariilor unele concluzii calitative asupra variaţiilor elementelor orbitei satelitului.

J. Chazy [5] ajunge la aceleaşi concluzii ca şi E. Esclangon fără a integra ecuaţiile diferenţiale ale mişcării.

D. G. King-Hele [6] îşi propune să determine variaţia vitezei satelitului precum şi variaţia tangentei la traiectorie. În această lucrare, se indică unele aspecte generale ale mişcării satelitului fără a indica legea mişcării satelitului pe orbită precum şi variaţia elementelor orbitei. De altfel, acest studiu este efectuat în ipoteza că orbitele sînt aproape circulare ceea ce restrînge foarte mult domeniul de aplicaţie. Pe de altă parte, datorită multiplelor aproximaţii, rezultatele obţinute pot fi folosite doar informativ fără a ne aştepta la o bună concordanţă cu rezultatele observate.

Cu precizia dorită de calcul, ecuaţiile diferenţiale ale unei astfel de mişcări, se pot integra în termeni infiniţi folosind teoria perturbaţiilor.

Noi, ne propunem să integrăm aceste ecuaţii diferenţiale în termeni finiţi, fără a impune vreo restricţie asupra naturii orbitei.

2. IPOTEZE

1. Se neglijează mișcarea de rotație a Pămîntului, considerînd că Pămîntul este legat invariabil față de un sistem de axe cerești.

2. Presupunem că Pămîntul are o formă perfect sferică și o distribuție omogenă a maselor; urmează ca influența formei turtite a Pămîntului, precum și a distribuției neomogene a maselor să fie introdusă sub forma unor corecții în rezultatele obținute.

3. Se consideră Pămîntul izolat în spațiu; această ipoteză poate fi considerată ca fiind justă, dacă distanța satelitului artificial față de Pămînt este mică în raport cu distanța pînă la Lună sau eventual pînă la Soare.

4. Inițial vom considera o structură omogenă a mediului rezistent. Această ipoteză poate fi justă dacă satelitul se mișcă în spațiul cosmic, unde am putea considera o distribuție uniformă a materiei cosmice, pe distanțe suficient de mari. Dacă satelitul se află în straturile superioare ale atmosferei, ipoteza de mai sus este justă dacă excentricitatea orbitei satelitului este atît de mică încît să putem considera că satelitul va efectua un număr oarecare de revoluții într-un mediu aproape omogen. Dacă excentricitatea orbitei satelitului este mare, vom considera atmosfera împărțită în zone sferice concentrice de densitate constantă; grosimea acestor zone poate fi considerată oricît de mică în funcție de precizia de calcul dorită. Modul de folosire a rezultatelor în acest din urmă caz, îl vom indica în cuprinsul lucrării.

5. Vom considera că forța de rezistență a mediului $\overrightarrow{R}$ este dată de relația

$$\bar{R} = -\rho\, S\, C_x \frac{F(v)}{v}\, \bar{v}, \tag{1}$$

unde

ρ = densitatea mediului;
S = o suprafață de referință;
C_x = coeficient unitar al forței de rezistență;
v = viteza;
$F(v)$ = o funcție de viteză.

Vom lua,

$$\frac{F(v)}{v} = 1.$$

Considerăm deci, o lege liniară în raport cu viteza a rezistenței mediului, ceea ce este în perfect acord cu lucrările citate mai sus referitoare la studiul mișcării cometei Encke [1]. P. Fatou [2], J. Chazy [3] și [5] și E. Esclangon [4] consideră de asemenea că rezistența mediului variază după o lege liniară în raport cu viteza.

S. Travers, într-o lucrare recentă [7] arată că dacă lungimea medie a drumului liber al moleculelor este mai mare decît diametrul corpului, rezistența la înaintare variază după o lege liniară în raport cu viteza. La înălțimea de 180 km față de suprafața Pămîntului, lungimea medie a drumului liber al moleculelor este de ordinul zecilor de metri. Rezultă că pentru corpuri suficient de mari putem considera ca justă legea liniară a forței de rezistență pînă la înălțimea la care lungimea medie a drumului liber a moleculelor devine egală cu diametrul corpului.

În acest caz, vom avea

$$\bar{R} = -\rho S C_x \bar{v} = -\lambda_1 \bar{v}, \tag{2}$$

unde

$$\lambda_1 = \rho S C_x = \text{constant}. \tag{3}$$

3. ECUAŢIILE DIFERENŢIALE ALE MIŞCĂRII

Fie un corp S de masă, m, care se mişcă într-un mediu rezistent, în cîmpul de atracție al unui corp central de masă M (Pămîntul).

Ecuația diferențială a mişcării va fi

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{kM_m}{r^3}\bar{r} - \lambda_1 \bar{v}, \tag{4}$$

unde

k = constanta atracției universale ;

$\bar{r}$ = vectorul de poziție al corpului S în raport cu centrul O (fig. 1).

Ecuația (4) se poate scrie

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{kM}{r^3}\bar{r} - \lambda \bar{v}, \tag{5}$$

unde

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{m}.$$

Aplicînd teorema energiei, obținem

$$v^2 = \frac{2kM}{r} - 2\lambda\int_0^t v^2 dt + h \tag{6}$$

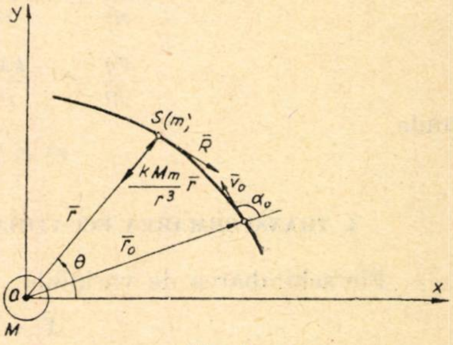


Fig. 1

sau

$$v^2 = \frac{2kM}{r} - 2\lambda\int_0^r \bar{v}\, d\bar{r} + h, \tag{7}$$

unde h este o constantă, avînd valoarea

$$h = v_0^2 - \frac{2kM}{r_0}.$$

Se observă că deoarece cîmpul de forțe este neconservativ, teorema energiei nu furnizează o integrală primă a ecuațiilor de mişcare.

Aplicînd teorema momentului cinetic, se obține

$$\frac{d(\bar{r} \times \bar{v})}{\bar{r} \times \bar{v}} = -\lambda\, dt, \tag{8}$$

de unde constatăm că mişcarea este plană şi anume că orbita va fi situată în planul determinat de vectorii $\bar{r}_0$ şi $\bar{v}_0$.

Integrînd ecuaţia (8) se obţine o integrală primă a ecuaţiei de mişcare (integrala ariilor)

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = r_0^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{t=0} e^{-\lambda t} . \tag{9}$$

Notăm

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = r\ v \sin \alpha = c = \text{dublul vitezei areolare la momentul } t;$$

$$r_0^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{t=0} = r_0\, v_0 \sin \alpha_0 = c_0 = \text{dublul vitezei areolare la momentul } t = 0.$$

Ecuaţia (9) cu notaţiile adoptate va avea forma

$$c = c_0\, e^{-\lambda t}. \tag{10}$$

P. Fatou [2], E. Esclangon [4] şi J. Chazy [5] obţin ecuaţiile (6) şi (10) sub diferite forme, de unde deduc unele aspecte calitative ale mişcării.

Mişcarea fiind plană, considerăm în planul determinat de $\bar{r}_0$ şi $\bar{v}_0$ un sistem de coordonate xoy, cu originea o în centrul Pămîntului.

Ecuaţia (5) se poate scrie

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{kM}{r^3} x - \lambda \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{kM}{r^3} y - \lambda \frac{dy}{dt}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

unde

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

4. TRANSFORMAREA ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE ALE MIŞCĂRII

Fie schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned} X &= f(t)\, x, \\ Y &= f(t)\, y, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$dT = \varphi(t)\, dt . \tag{13}$$

În planul XOY, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării vor fi

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2X}{dT^2} &= -\frac{kMX}{R^3} \cdot \frac{f^3}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi}\left[\frac{2}{f} \cdot \frac{df}{dt} - \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} - \lambda\right]\frac{dX}{dT} + \\ &\quad + \frac{X}{f^2\, \varphi^2}\left[f \cdot \frac{d^2f}{dt^2} - 2\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \lambda f \frac{df}{dt}\right], \\ \frac{d^2Y}{dT^2} &= -\frac{kMY}{R^3} \cdot \frac{f^3}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi}\left(\frac{2}{f} \cdot \frac{df}{dt} - \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \lambda\right]\frac{dY}{dT} + \\ &\quad + \frac{Y}{f^2\varphi^2}\left[f \frac{d^2f}{dt^2} - 2\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \lambda f \frac{df}{dt}\right]\cdot \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Funcţiile $f(t)$ şi $\varphi(t)$ le vom defini în aşa fel încît ecuaţiile (14) să nu conţină termeni în $\frac{dX}{dT}, \frac{dY}{dT}$, X şi Y.

Cu alte cuvinte, funcţiile $f(t)$ şi $\varphi(t)$, trebuie să satisfacă ecuaţiile

$$\frac{2}{f} \cdot \frac{df}{dt} - \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \lambda = 0\,, \tag{15}$$

$$f \cdot \frac{d^2 f}{dt^2} - 2\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \lambda f \frac{df}{dt} = 0. \tag{16}$$

Cu condiţiile la limite $f(0) = 1$ şi $\varphi(0) = 1$, găsim prin integrarea sistemului de ecuaţii (15) şi (16),

$$f(t) = \frac{e^{\lambda t}}{2 - e^{\lambda t}}\,, \tag{17}$$

$$\varphi(t) = \frac{e^{\lambda t}}{(2 - e^{\lambda t})^2}\,. \tag{18}$$

Deci ecuaţia (13), ţinînd cont de (18) se poate scrie

$$\int_0^T dT = \int_0^t \frac{e^{\lambda t}}{(2 - e^{\lambda t})^2}\, dt, \tag{19}$$

de unde

$$T = \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda(2 - e^{\lambda t})}\,. \tag{20}$$

Astfel ecuaţiile (14) devin

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2X}{dT^2} &= -\frac{kMX}{R^3}\, e^{\lambda t}(2 - e^{\lambda t})\,, \\ \frac{d^2Y}{dT} &= -\frac{kMY}{R^3}\, e^{\lambda t}(2 - e^{\lambda t})\,, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

unde $R^2 = X^2 + Y^2$.

Deoarece în planul XOY variabila independentă este T, vom obţine ţinînd cont de (20)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2X}{dT^2} &= -\frac{kMX}{R^3}\, \Psi(T)\,, \\ \frac{d^2Y}{dT^2} &= -\frac{kMY}{R^3}\, \Psi(T), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

unde

$$\Psi(T) = \frac{1 + 2\lambda T}{(1 + \lambda T)^2} \tag{23}$$

Mişcarea în planul xoy va fi cunoscută dacă se cunoaşte mişcarea în planul XOY.

Astfel dacă în planul XOY, punctul material se va afla la timpul T în A (X, Y), în planul xoy, punctul material se va afla (fig. 2) la timpul corespunzător t dat de relaţia (20) în punctul a (x, y).

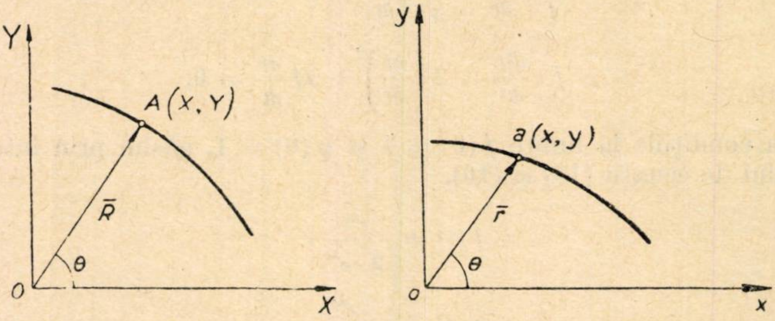


Fig. 2

În coordonate polare, se constată că la timpul t corespunzător timpului T din relaţia (20), punctului A (R, θ) îi va corespunde în planul xoy punctul a (r, θ), unde,

$$r = \frac{2-e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}} R. \tag{24}$$

Deci la timpul t corespunzător timpului T, vom avea numai o micşorare a razei vectoare, argumentul rămînînd acelaşi; de fapt, acest lucru se observa de la început din transformările (12).

Ecuaţia (22) reprezintă în planul XOY mişcarea unui corp în cîmpul de atracţie al unui corp central a cărui masă variază după legea

$$M^* = M\,\Psi(T). \tag{25}$$

Astfel, am putea spune că făcînd transformările de variabile (12) şi (13), influenţa rezistenţei mediului asupra mişcării din planul xoy a fost transformată în influenţa variaţiei (fictive) a masei Pămîntului, după legea (25) asupra mişcării din planul XOY.

Dacă vom nota

$$V^2 = \left(\frac{dX}{dT}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dT}\right)^2$$

forma vectorială a ecuaţiilor (21) va fi

$$\frac{d\overline{V}}{dT} = -\frac{kM\Psi(T)}{R^3}\,\overline{R}. \tag{26}$$

Aplicînd teorema energiei, se obţine

$$d\,(V^2) = -\frac{2kM\Psi(T)}{R^2}\,dR\,, \tag{27}$$

de unde se constată că teorema energiei nu furnizează o integrală primă a ecuaţiilor de mişcare. La această concluzie se putea ajunge de la început, deoarece cîmpul de forţe al unui centru atractiv cu masă variabilă, este neconservativ.

Teorema momentului cinetic ne dă

$$\frac{d}{dT}(\overline{R} \times \overline{V}) = 0, \tag{28}$$

de unde rezultă că în planul XOY, se păstrează legea ariilor.

Integrînd ecuaţia (28) obţinem

$$\overline{R} \times \overline{V} = \overline{C}. \tag{29}$$

Efectuînd operaţiile corespunzătoare, găsim

$$|\overline{C}| = X\frac{dY}{dT} - Y\frac{dX}{dT} = \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)e^{\lambda t}.$$

Din ecuaţia (10) avem că

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c_0 e^{-\lambda t}$$

deci,

$$|\overline{C}| = R\frac{d\theta}{dT} = c_0 = r_0 v_0 \sin\alpha_0 = \text{const.} \tag{30}$$

Să revenim la ecuaţiile (22). În cazul general, pentru o formă oarecare a funcţiei $\Psi(T)$, ecuaţiile (22) nu se pot integra prin cuadraturi.

H. Gyldén [8] îşi propune pentru prima dată, rezolvarea problemei de mişcare a două corpuri cu masă variabilă care se atrag după legea lui Newton.

H. Gyldén formulează această problemă din punct de vedere matematic în urma sugestiei date de Th. von Oppolzer [9]. Acesta arată că neconcordanţa între valorile obţinute prin calcul şi cele obţinute prin observaţii, pentru acceleraţia seculară a Lunii, se datoreşte pe lîngă altele şi depunerii de materie cosmică pe Pămînt şi pe Lună, ceea ce face ca masa celor două corpuri să fie variabilă în timp.

H. Gyldén [8] integrează ecuaţiile de mişcare prin cuadraturi folosind o metodă de integrare aproximativă.

I. V. Meşcerski [10] arată că pentru o formă particulară a funcţiei $\Psi(T)$, problema celor două corpuri cu masă variabilă se poate reduce la problema a două corpuri cu masă constantă folosind anumite transformări de variabile.

E. O. Lovett [11] încearcă să demonstreze că transformările indicate de I. V. Meşcerski, nu ar fi cele juste, şi că problema celor două corpuri cu masă variabilă se reduce la problema a două corpuri cu masă constantă, cînd funcţia $\Psi(T)$ are o formă liniară.

I. V. Meşcerski [12] arată în ce constă eroarea făcută de E. O. Lovett în lucrarea sa şi tratează cazul general cînd ecuaţiile de mişcare se pot integra prin cuadraturi folosind anumite transformări de variabile. Acesta arată că numai în cazul în care funcţia $\Psi(T)$ are forma

$$\Psi_1(T) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 T^2 + \alpha_2 T + \alpha_3}} \tag{31}$$

folosind anumite transformări de variabile, noile ecuaţii de mişcare, se pot integra prin cuadraturi.

Considerăm cazul cînd $\alpha_2^2 - 4\,\alpha_1\,\alpha_2 = 0$.

În acest caz, funcţia $\Psi_1(T)$ devine

$$\Psi_2(T) = \frac{1}{1 + \beta T} \cdot \tag{32}$$

Din ecuaţia (23) se observă că funcţia $\Psi(T)$ obţinută de noi ia pentru $T = 0$ aceeaşi valoare ca şi funcţia $\Psi_2(T)$ şi anume

$$\Psi(0) = \Psi_2(0) = 1.$$

Reprezentînd grafic funcţiile $\Psi(T)$ şi $\Psi_2(T)$ observăm că pentru $T > 0$ aceste funcţii au aproximativ aceleaşi valori (fig. 3), dacă atribuim o valoare convenabilă coeficientului β.

De asemenea se observă că pentru o anumită valoare a timpului T, în domeniul $T > 0$, cele două funcţii iau aceleaşi valori.

Punem condiţia ca pentru

$$T_1 = \frac{1}{n\lambda} \tag{33}$$

să avem $\Psi(T_1) = \Psi_2(T_1)$.

Valoarea coeficientului β, în această condiţie va fi

$$\beta = \frac{\lambda}{n + 2} \cdot \tag{34}$$

Astfel, în intervalul $0 \leqslant T \leqslant \frac{1}{n\lambda}$, diferenţa $\Delta\ \Psi = \Psi - \Psi_2$ va avea valoarea maximă

$$(\Delta\ \Psi)_{\max} = \frac{2n^2}{(2n + 1)^2\,(2n^2 + 4n + 1)} \cdot \tag{35}$$

De altfel, se poate demonstra că şi pentru valori ale lui T situate nu prea mult la dreapta intervalului indicat mai sus, diferenţa $\Delta\ \Psi$ rămîne inferioară valorii indicate de relaţia (35).

Vom face deci aproximaţia

$$\frac{1+2\lambda T}{(1+\lambda T)^2} \approx \frac{1}{1+\beta T}, \tag{36}$$

unde β este dat de relaţia (34).

Considerăm ca acceptabilă aproximaţia de mai sus pentru valorile lui T date de inegalitatea $0 \leqslant T \leqslant \frac{1}{n\lambda}$.

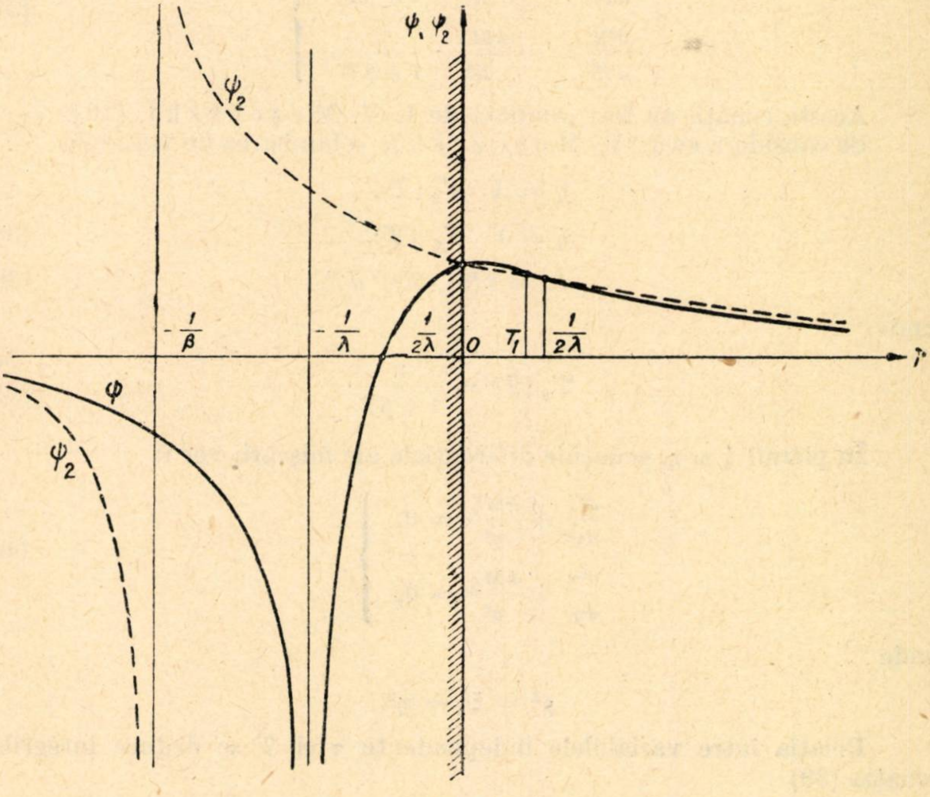


Fig. 3

Această condiţie nu restrînge deloc domeniul de aplicaţie al problemei întrucît λ avînd o valoare foarte mică, valoarea maximă admisibilă pentru T este de ordinul sutelor de zile. Chiar şi pentru valori mai mari ale lui λ, domeniul de aplicaţie al rezultatelor ce le vom obţine nu este deloc restrîns, deoarece atunci cînd T devine egal cu $\frac{1}{n\lambda}$, se poate relua studiul mişcării considerînd acest moment de timp ca origine a mişcării.

De fapt, aceste justificări sînt necesare numai în cazul în care corpul s-ar afla în spaţiul cosmic.

În cazul mişcării sateliților în straturile superioare ale atmosferei nu vom ajunge niciodată la limita superioară a lui T, deoarece vom fi siliți să reluăm studiul mişcării la intrarea satelitului în stratul următor cu densitate constantă a atmosferei (ipoteza 4).

Valoarea lui n se poate defini în aşa fel încît eroarea maximă $(\Delta\,\Psi)_{\max}$ introdusă de aproximația (36) să fie mai mică decît eroarea de calcul.

Considerînd egalitatea aproximativă (36), ecuațiile (22) devin

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2X}{dT^2} &= -\frac{kMX}{R^3}\cdot\frac{1}{1+\beta T},\\ \frac{d^2Y}{dT^2} &= -\frac{kMY}{R^3}\cdot\frac{1}{1+\beta T}.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Aceste ecuații au fost studiate de I. V. Meşcerski [10].

Se consideră cu I. V. Meşcerski, schimbarea de variabile

$$\xi = X\ \Psi_2(T),$$

$$\eta = Y\ \Psi_2\ (T), \tag{38}$$

$$d\tau = [\Psi_2(T)]^2\, dT, \tag{39}$$

unde

$$\Psi_2(T) = \frac{1}{1+\beta T}.$$

În planul $\xi\ \omega\ \eta$, ecuațiile diferențiale ale mişcării vor fi

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{kM\xi}{\rho^3} &= 0,\\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{kM\eta}{\rho^3} &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

unde

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Relația între variabilele independente τ şi T se deduce integrînd ecuația (39)

$$\int_0^\tau d\tau = \int_0^T \frac{dT}{(1+\beta T)^2},$$

de unde

$$\tau = \frac{T}{1+\beta T}. \tag{41}$$

Astfel, în planul $\xi\ \omega\ \eta$, avem mişcarea unui corp în cîmpul de forțe al unui centru atractiv cu masă constantă; ecuațiile (40) se pot integra prin cuadraturi.

Astfel, dacă în planul $\xi\ \omega\ \eta$ la timpul τ, corpul se va afla în punctul $A^{\star}$ $(\rho,\ \theta)$, la timpul T corespunzător timpului τ din relaţia (41), în planul XOY corpul se va afla (fig. 4) în punctul A $(R,\ \theta)$, unde

$$R = (1 + \beta\ T)\ \rho \tag{42}$$

Astfel, cunoscînd mişcarea în planul $\xi\ \omega\ \eta$, se determină mişcarea în planul XOY. Am văzut că dacă se cunoaşte mişcarea în planul XOY,

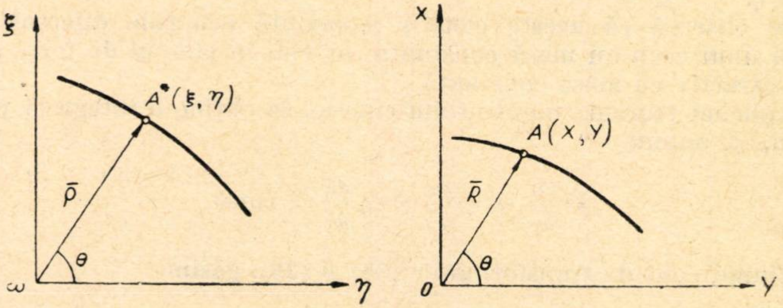


Fig. 4

mişcarea în planul real se poate determina uşor, folosind relaţiile (20) şi (24).

Constatăm că nu este necesar să determinăm mişcarea în planul XOY, deoarece se pot stabili relaţii cu ajutorul cărora să putem determina direct mişcarea în planul real xoy.

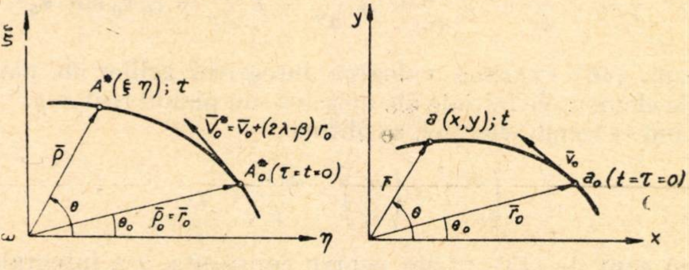


Fig. 5

Astfel, din relaţiile (20) şi (41) deducem că

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1 + (2\lambda - \beta)\tau}{1 + (\lambda - \beta)\tau}, \tag{43}$$

iar din relaţiile (24) şi (42), deducem

$$r = \frac{\rho}{1 + (2\lambda - \beta)\tau} = \frac{2\lambda - \beta + (\beta - \lambda)e^{\lambda t}}{\lambda e^{\lambda t}}\ \rho. \tag{44}$$

Dacă în planul $\xi\,\omega\,\eta$, la timpul τ, corpul se află în punctul $A^\star$ (ρ, θ) în planul real xoy, corpul se va afla (fig. 5) la timpul t dat de relația (43) în punctul a (r, θ), unde r este dat de relația (44).

5. STUDIUL MIȘCĂRII ÎN PLANUL $\xi\omega\eta$

Ecuațiile (40) reprezintă ecuațiile diferențiale ale mișcării în planul $\xi\,\omega\,\eta$.

Se observă că aceste ecuații reprezintă ecuațiile diferențiale ale mișcării unui corp cu masă constantă, în vid, în cîmpul de forțe al unui centru atractiv cu masă constantă.

Aplicînd teorema momentului cinetic, se obține o integrală primă a mișcării, și anume

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\tau} = \xi \frac{d\eta}{d\tau} - \eta \frac{d\xi}{d\tau} = \text{const.}$$

Ținînd cont de transformările (38) și (39), găsim

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{1}{\Psi_2}\cdot\frac{dX}{dT} + \frac{X}{\Psi_2^2}\cdot\frac{d\Psi_2}{dT} = (1+\beta T)\frac{dX}{dT} - \beta X, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \frac{1}{\Psi_2}\cdot\frac{dY}{dT} + \frac{Y}{\Psi_2^2}\cdot\frac{d\Psi_2}{dT} = (1+\beta T)\frac{dY}{dT} - \beta Y. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Notăm cu γ dublul vitezei areolare, în planul $\xi\,\omega\,\eta$; ținînd cont de (30) găsim

$$\gamma = \xi\frac{d\eta}{d\tau} - \eta\frac{d\xi}{d\tau} = X\frac{dY}{dT} - Y\frac{dX}{dT} = r_0\,v_0 \sin\alpha_0 \tag{46}$$

Formula (46) exprimă valoarea integralei ariilor în planul $\xi\,\omega\,\eta$, în funcție de elementele inițiale ale mișcării din planul real xoy.

Aplicînd teorema energiei, se obține

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 = \frac{2kM}{\rho} + \chi. \tag{47}$$

Ținînd cont de (45), găsim pentru constanta χ a integralei energiei, expresia :

$$\chi = V_0^2 + \beta R_0^2 - 2\beta\,\overline{R_0}\cdot\overline{V_0} - \frac{2kM}{R_0}. \tag{48}$$

Pentru a exprima valoarea constantei χ în funcție de elementele inițiale ale mișcării din planul real, deducem, ținînd cont de transformările (12) și (13), că

$$\overline{V_0} = \overline{v_0} + 2\lambda\,\overline{r_0}, \tag{49}$$

$$\overline{R_0} = \overline{r_0}. \tag{50}$$

Astfel, relaţia (48) devine

$$\chi = v_0^2 - \frac{2kM}{r_0} + (4\lambda^2 + \beta^2 - 4\lambda\beta)\, r_0^2 + 2\,(2\lambda - \beta)\, \overline{r}_0 \cdot \overline{v}_0. \qquad (51)$$

În ecuaţiile (6) şi (7), am notat

$$v_0^2 - \frac{2kM}{r_0} = h,$$

unde h reprezintă constanta integralei energiei în cazul cînd în planul real xoy am fi avut mişcarea corpului în vid, cu aceleaşi condiţii iniţiale.

Deci,

$$\chi = h + (4\,\lambda^2 + \beta^2 - 4\,\lambda\beta)\, r_0^2 + 2\,(2\lambda - \beta)\, \overline{r}_0 \cdot \overline{v}_0. \qquad (52)$$

Considerînd cazul mişcării eliptice, ($\chi < 0$), ecuaţia orbitei în planul $\xi\,\omega\,\eta$ va fi

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\left(\theta - \theta_1^*\right)}, \qquad (53)$$

unde

$$p = \frac{\gamma^2}{kM} \text{ — parametrul elipsei ;}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \chi \frac{\gamma^2}{k^2 M^2}} \text{ — excentricitatea elipsei.}$$

Notînd cu a semiaxa mare a elipsei, cu c_1 distanţa între focare şi cu b semiaxa mică a elipsei, vom avea

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \qquad (54)$$

$$c_1 = \frac{p\,\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}, \qquad (55)$$

$$b = \frac{c_1}{\sqrt{-\chi}}. \qquad (56)$$

Constanta θ_1^* indică poziţia axei mari a elipsei, faţă de vectorul $\overline{\rho}_0 = \overline{r}_0$.

Fie

$$V^{*2} = \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2$$

viteza corpului în planul $\xi\,\omega\,\eta$.

Ţinînd cont de relaţiile (45), (49) şi (50), obţinem

$$\overline{V}_0^* = \overline{v}_0 + (2\lambda - \beta)\, \overline{r}_0. \qquad (57)$$

Notînd cu α_0^*, unghiul dintre vectorii $\overline{\rho_0}$ şi $\overline{V_0^*}$ avem că

$$\operatorname{tg} \alpha_0^* = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{v_0 \cos \alpha_0 + (2\lambda - \beta) r_0} \cdot \tag{58}$$

Din relaţia (58) se vede că

$$\alpha_0^* < \alpha_0. \tag{59}$$

Din ecuaţia (53), ţinînd cont că

$$\rho_0 \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)_{\tau = 0} = \gamma = \rho_0 V_0^* \sin \alpha_0^*$$

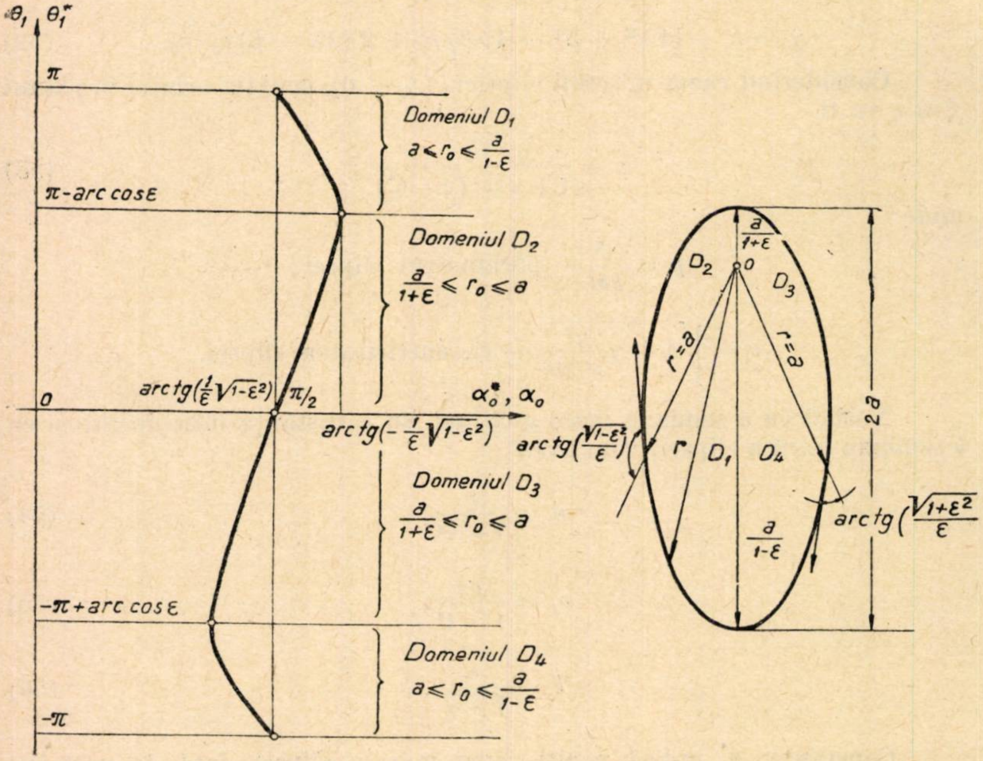

θ₁, θ₁*
π
π-arc cos ε
0
arc tg(1/ε √(1-ε²))
π/2
α₀*, α₀
arc tg(-1/ε √(1-ε²))
-π+arc cos ε
-π
Domeniul D₁
a ≤ r₀ ≤ a/(1-ε)
Domeniul D₂
a/(1+ε) ≤ r₀ ≤ a
Domeniul D₃
a/(1+ε) ≤ r₀ ≤ a
Domeniul D₄
a ≤ r₀ ≤ a/(1-ε)
a/(1+ε)
D₂
0
D₃
r=a
r=a
arc tg(√(1-ε²)/ε)
r
D₁
D₄
2a
a/(1-ε)
arc tg(√(1+ε²)/ε

Fig. 6

se obţine

$$\operatorname{tg} \alpha_0^* = - \frac{1 + \varepsilon \cos \theta_1^*}{\varepsilon \sin \theta_1^*} \cdot \tag{60}$$

Relaţia (60) indică dependenţa funcţională între unghiul θ_1^* care determină poziţia axelor elipsei şi unghiul α_0^*.

Această dependenţă funcţională este reprezentată grafic în figura 6, unde se consideră ca sens pozitiv, pentru unghiul θ_1^*, sensul mişcării.

Se observă că în domeniile D_1 şi D_4, micşorarea unghiului α_0^* atrage după sine creşterea unghiului θ_1^*, în timp ce în domeniile D_2 şi D_3, micşorarea unghiului α_0^* atrage după sine, micşorarea unghiului θ_1^*.

Vom arăta ulterior că axa orbitei din planul $\xi\,\omega\,\eta$ coincide aproximativ cu axa orbitei din planul real xoy.

Pentru a constata care este influenţa rezistenţei mediului asupra poziţiei axei orbitei, vom considera două corpuri aruncate în aceleaşi condiţii iniţiale $(\bar{r}_0, \bar{v}_0)$, unul mişcîndu-se în vid, iar celălalt într-un mediu rezistent.

Ţinînd cont de inegalitatea (59), constatăm că axa orbitei din planul $\xi\,\omega\,\eta$, deci şi axa orbitei din planul real, va fi rotită în sensul mişcării sau în sensul contrar mişcării, faţă de axa unei orbite obţinută cu aceleaşi condiţii iniţiale $(\bar{r}_0, \bar{v}_0)$, în absenţa mediului rezistent, după cum, respectiv :

$$a \leqslant r_0 \leqslant \frac{a}{1-\varepsilon}, \tag{61}$$

$$\frac{a}{1+\varepsilon} \leqslant r_0 \leqslant a. \tag{62}$$

Unghiul dintre axa mare a orbitei din planul $\xi\,\omega\,\eta$ şi vectorul $\vec{\rho}_0$ va fi dat de

$$\operatorname{tg}\,\theta_1^* = \frac{v_0 \cos\alpha_0 + (2\,\lambda - \beta)\,r_0}{v_0 \sin\alpha_0} \cdot \frac{r_0\, v_0^2}{kM - r_0\, v_0^2}. \tag{63}$$

Mişcarea corpului în planul $\xi\,\omega\,\eta$ este studiată în orice tratat de Mecanică cerească sau Astronomie, [13] şi [14].

Considerăm ecuaţia lui Kepler

$$\tau = a\sqrt{\frac{a}{kM}}\,[u - u_0 - \varepsilon\,(\sin u - \sin u_0)], \tag{64}$$

unde anomaliile excentrice u şi u_0 sînt date de

$$u = \operatorname{arc\,cos} \frac{a - \rho_0}{a\varepsilon}, \tag{65}$$

$$u_0 = \operatorname{arc\,cos} \frac{a - \rho_0}{a\varepsilon}. \tag{66}$$

Rezolvînd ecuaţia (64) după metodele uzuale în Astronomie [13] şi [14], ţinînd cont de (65) obţinem valoarea razei vectoare ρ, în funcţie de timpul τ.

Anomaţia adevărată $\theta - \theta_1^*$, este dată de

$$\theta - \theta_1^* = 2 \operatorname{arc\,tg}\left[\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right] \tag{67}$$

de unde, ținînd cont de (64) și (63), obținem valoarea argumentului θ, în funcție de timpul τ.

Cunoaștem deci, pentru fiecare valoare a timpului τ coordonatele polare (ρ, θ) ale corpului, în planul $\xi\,\omega\,\eta$.

Perioada mișcării în planul $\xi\,\omega\,\eta$, va fi

$$\tau_1 = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{kM}}, \tag{68}$$

unde valoarea lui a este dată de (54).

6. STUDIUL MIȘCĂRII ÎN PLANUL REAL *xoy*

Am văzut că dacă în planul $\xi\,\omega\,\eta$ la momentul τ, corpul se află în punctul A^* (ρ, θ), atunci în planul xoy, la timpul t dat de (43), corpul se află în punctul a (r, θ) unde r este dat de relația (44).

Astfel, cunoscînd din relațiile (64), (65) și (67), poziția corpului în planul $\xi\,\omega\,\eta$ în funcție de timpul τ, cu ajutorul relațiilor (43) și (44), vom determina pentru fiecare valoare a timpului t, coordonatele (r, θ) ale satelitului (corpului).

Din relația (44) se constată că traiectoria satelitului în planul real, va fi o spirală eliptică, a cărei axă va coincide aproximativ cu axa mare a elipsei din planul $\xi\,\omega\,\eta$ [15].

În figura 7, se indică orbita corpului în planul $\xi\,\omega\,\eta$, orbita satelitului în planul real xoy, precum și orbita unui satelit lansat cu aceleași condiții inițiale, în vid. Menționăm că în scopul de a se obține o imagine clară, influența rezistenței mediului, este redată exagerat.

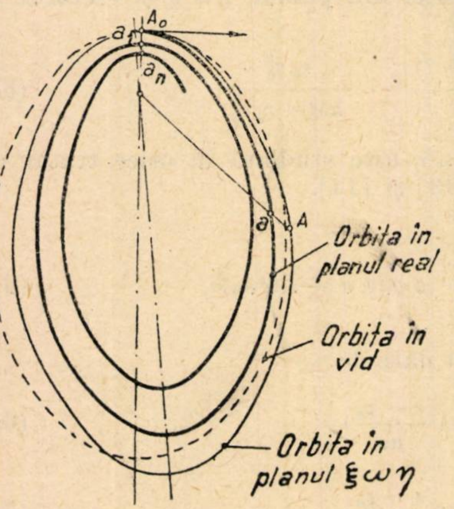


Fig. 7

În cazul de față, am presupus că

$$a \leqslant r_0 \leqslant \frac{a}{1+\varepsilon}.$$

Dacă la momentul inițial, satelitul se afla în punctul A_0, după o revoluție se va afla în punctul a_1, avînd raza vectoare,

$$r_1 = \frac{r_0}{1+(2\lambda-\beta)\tau_1},$$

unde τ_1 este perioada mișcării în planul $\xi\,\omega\,\eta$, avînd valoarea dată de (68).

După n revoluţii, corpul se va afla în punctul a_n, avînd raza vectoare

$$r_n = \frac{r_0}{1 + n\,(2\lambda - \beta)\tau_1}. \tag{69}$$

Micşorarea acestei raze vectoare în timpul celei de a n-a revoluţii, va fi

$$r_{n-1} - r_n = \frac{(2\,\lambda - \beta)\,\tau_1\, r_0}{[1 + (n-1)(2\lambda - \beta)\,\tau_1]\;[1 + n\,(2\lambda - \beta)\,\tau_1]}.$$

Notăm cu

$$\tau_0 = a\sqrt{\frac{a}{kM}}\,(\,\varepsilon \sin u_0 - u_0) \tag{70}$$

momentul primei treceri prin perigeul orbitei din planul $\xi\,\omega\,\eta$.

Astfel, în planul xoy valoarea razei vectoare a perigeului, în cadrul primei revoluţii, va fi

$$r_{p_1} = \frac{\rho_{\min}}{1 + (2\lambda - \beta)\tau_0},$$

unde $\rho_{\min}$ este raza vectoare a perigeului orbitei din planul $\xi\,\omega\,\eta$.

După n revoluţii, raza vectoare a perigeului, va deveni

$$r_{p_n} = \frac{\rho_{\min}}{1 + (2\lambda - \beta)\,(\tau_0 + n\,\tau_1)}. \tag{71}$$

Din relaţia (71), se poate determina după cîte revoluţii corpul va cădea pe corpul central, în ipoteza că mediul rezistent este omogen.

Durata primei revoluţii se obţine din (43), punînd $\tau = \tau_1$; avem că

$$t_1 = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1 + (2\lambda - \beta)\tau_1}{1 + (\lambda - \beta)\tau_1}.$$

Satelitul (corpul) va efectua n revoluţii în timpul,

$$t_n = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1 + n\,(2\lambda - \beta)\tau_1}{1 + n\,(\lambda - \beta)\tau_1} \tag{72}$$

astfel că durata celei de a n-a revoluţii va fi

$$t_n - t_{n-1} = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{[1 + n\,(2\lambda - \beta)\,\tau_1]\;[1 + (n-1)\,(\lambda - \beta)\,\tau_1]}{[1 + n\,(\lambda - \beta)\,\tau_1]\;[1 + (n-1)\,(2\lambda - \beta)\,\tau_1]}. \tag{73}$$

Viteza satelitului pe traiectorie se determină cu formula

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\,\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \tag{74}$$

Componenta radială a vitezei se determină derivînd relaţia (44)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\lambda}{2\,\lambda - \beta + (\beta - \lambda)\,e^{\lambda t}}\cdot\frac{d\rho}{d\tau} - \frac{2\lambda - \beta}{e^{\lambda t}}\,\rho, \tag{75}$$

unde

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\gamma\varepsilon \sin\left(\theta - \theta_1^\star\right)}{p}. \tag{76}$$

Componenta $r \frac{d\theta}{dt}$ va avea, ținînd cont de (10), valoarea

$$r \frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r} = \frac{c_0 e^{-\lambda t}}{r}. \tag{77}$$

Astfel, folosind relațiile (44), (75), (76) și (77), obținem

$$v^2 = \left[\frac{\lambda}{2\lambda - \beta + (\beta - \lambda)e^{\lambda t}} \cdot \frac{\gamma\varepsilon \sin\,(\theta - \theta_1^\star)}{p} - \frac{2\lambda - \beta}{e^{\lambda t}}\,\rho\right]^2 + \\ + \frac{c_0^2\,\lambda^2}{\rho_0^2[2\lambda - \beta + (\beta - \lambda)\,e^{\lambda t}]^2}. \tag{78}$$

Dacă, în loc de raza vectoare ρ, ținînd cont de (44) se introduce raza vectoare r, se obține pentru viteză următoarea expresie

$$v^2 = \frac{\lambda^2}{[2\lambda - \beta + (\beta - \lambda)e^{\lambda t}]^2}\left[\frac{\gamma\varepsilon \sin\,(\theta - \theta_1^\star)}{p} - (2\lambda - \beta)\,r\right]^2 + \frac{c_0^2\,e^{-2\lambda t}}{r^2}. \tag{79}$$

În studiul de mai sus, s-a determinat pentru fiecare valoarea a timpului t (sau τ) valorile coordonatelor ρ, θ și r; deci folosind relația (78) sau (79) se poate determina valoarea vitezei satelitului pentru fiecare moment de timp t.

7. STUDIUL MIȘCĂRII ÎNTR-UN MEDIU REZISTENT NEOMOGEN

În studiul anterior, am considerat că densitatea mediului este constantă. După cum am văzut (ipoteza 4), această condiție nu introduce erori în cazul orbitelor aproape circulare, sau în cazul orbitelor situate în spațiul cosmic, unde se poate considera o structură omogenă a mediului pe distanțe relativ mari.

Considerăm acum un mediu rezistent neomogen, presupunînd că se cunoaște legea

$$\rho = \rho\,(r),$$

unde, spre deosebire de paragrafele de mai sus, notăm cu ρ, densitatea mediului.

În acest caz, vom presupune o distribuție discontinuă a materiei în acest mediu.

Vom considera o serie de suprafețe sferice, concentrice, cu centrul O în centrul corpului central (Pămîntul); aceste suprafețe vor delimita zonele de densitate constantă (fig. 8).

Astfel, în interiorul zonei Z_1, vom presupune că mediul are o densitate constantă, avînd valoarea

$$\rho_1 = \frac{\rho(r_0) + \rho(r_1)}{2}.$$

Densitatea mediului din zona Z_n va fi

$$\rho_n = \frac{\rho(r_{n-1}) + \rho(r_n)}{2}.$$

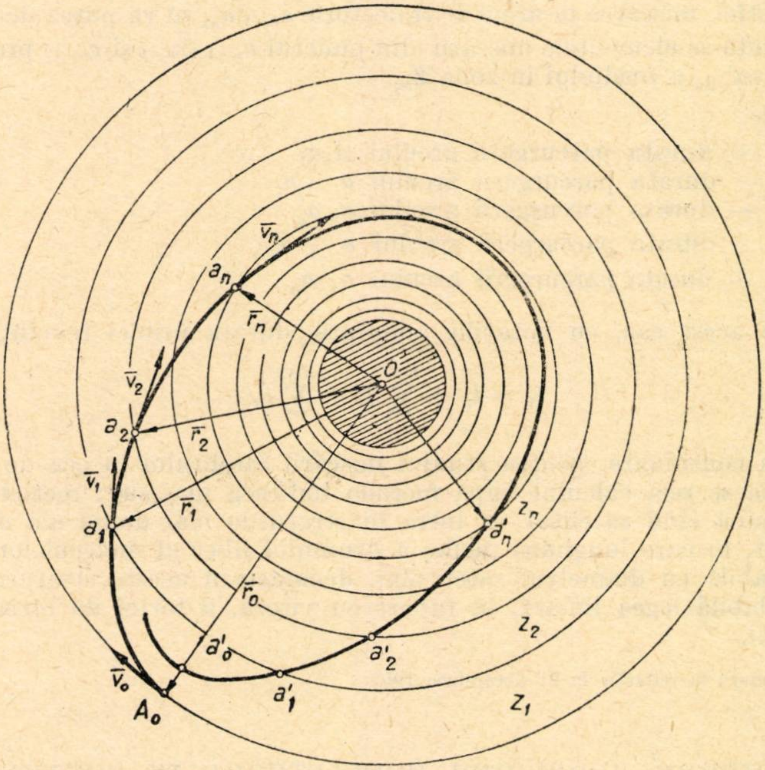

$\bar{v}_n$
a_n
$\bar{r}_n$
O
$\bar{v}_2$
a_2
$\bar{r}_2$
$\bar{v}_1$
a_1
$\bar{r}_1$
z_n
a'_n
$\bar{r}_0$
a'_0
a'_2
z_2
$\bar{v}_0$
A_0
a'_1
z_1

Fig. 8

Pentru a obţine rezultate cît mai exacte, vom considera că lăţimea unei zone descreşte cînd ne apropiem de corpul central, adică

$$r_1 - r_2 > r_2 - r_3 > \ldots > r_{n-2} - r_{n-1} > r_{n-1} - r_n.$$

Valorile r_i şi r_{i+1} vor fi alese în aşa fel, încît eroarea

$$(\Delta \rho)_i = \rho\,(r_{i+1}) - \rho_i = \rho_i - \rho\,(r_i)$$

să nu depăşească o anumită valoare, determinată de precizia de calcul dorită.

În acest caz, rezultatele obţinute mai sus, pot fi folosite în interiorul unei zone de densitate constantă.

Considerînd elementele iniţiale ale mişcării ($\overline{r}_0$, $\overline{v}_0$) vom studia mişcarea satelitului pînă în punctul a_1 (considerînd că pe arcul de traiectorie A_0 a_1, densitatea este constantă, avînd valoarea ρ_1).

În acest punct (a_1), vom considera elementele mişcării ($\overline{r}_1$, $\overline{v}_1$) ca elemente iniţiale ; folosind relaţiile obţinute mai sus, vom studia mişcarea pe arcul de traiectorie a_1 a_2 considerînd pe acest interval că densitatea mediului este ρ_2.

Astfel, mişcarea pe arcul de traiectorie a_{n-1} a_n, se va putea determina cunoscîndu-se elementele mişcării din punctul a_{n-1} ($\overline{r}_{n-1}$ şi $\overline{v}_{n-1}$) precum şi densitatea ρ_n a mediului în zona Z_n.

Fie

t_1 — durata parcurgerii arcului $A_0 a_1$
t_i — durata parcurgerii arcului a_{i-1} a_i
t_n — durata parcurgerii arcului a_n a_n'
t_i' — durata parcurgerii arcului a_{i-1}' a_i'
t_1' — durata parcurgerii arcului a_1' a_0'

În acest caz, cu notaţiile adoptate, durata primei revoluţii va fi

$$t_1 = t_n + \sum_{1}^{n-1} t_i + \sum_{1}^{n-1} t_i'. \tag{80}$$

În continuare, pentru studiul mişcării satelitului în cea de a doua revoluţie se reia calculul după metoda indicată mai sus ; metoda se va aplica pînă cînd satelitul va intra în straturile mai dense ale mediului rezistent, în care lungimea medie a drumului liber al moleculelor devine comparabilă cu diametrul satelitului, deoarece în aceste straturi numai este valabilă legea liniară, în raport cu viteza, a forţei de rezistenţă a mediului.

Primită la redacţie la 21 decembrie 1957.

ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Автор исследует движение искусственного спутника, учитывая сопротивление среды и предпологая, что земля совершенно сферическая, однородная, неподвижная и изолированная в пространстве. Автор интегрирует дифференциальные уравнения движения в квадратурах.

Производится замена переменных (12) и (13), определяемых соотношениями (17) и (18); дифференциальные уравнения (11) принимают вид (22). Если известно движение в плоскости XOY, то движение в плос-

кости *xoy* будет определяться посредством преобразований (12) и (13). Можно считать, что уравнения (22) представляют дифференциальные уравнения движения тела в силовом поле центра притяжения переменной массы.

Для положительных значений момента времени T, можно принять во внимание приближенное равенство (36); погрешность, вытекающая из этого приближения, может быть порядка расчетной погрешности, если выбрать выгодное значение для коэффициента β.

Таким образом получаются дифференциальные уравнения (37); эти уравнения можно проинтегрировать в квадратурах, если выполнить указанную Мещерским в [12] замену переменных (38) и (39).

Изучается закон движения спутника, причем определяется положение и скорость в любой момент времени. Указывается, как можно использовать расчетные формулы для теоретического исследования такого движения в неоднородной среде.

ÉTUDE SUR LE MOUVEMENT DES SATELLITES ARTIFICIELS DANS UN MILIEU RÉSISTANT

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur examine le mouvement d'un satellite artificiel à travers un milieu résistant, dans l'hypothèse que la Terre est parfaitement sphérique, homogène, fixe et complètement isolée en l'espace. On présente l'intégration des équations différentielles du mouvement, par quadratures.

On a remarqué qu'en utilisant les changements de variables (12) et (13), déterminés par (17) et (18), les équations différentielles (11) prennent la forme (22). Le mouvement dans le plan *xoy* peut être déterminé en utilisant les changements de variables (12) et (13), quand le mouvement dans le plan *XOY* est connu. Le système (22) peut être interprété comme représentant les équations différentielles pour le mouvement d'un corps dans un champ de forces centrales, créées par un centre attractif de masse variable.

On remarque, pour les valeurs positives du temps *T*, l'égalité approximative (36); l'erreur résultant de cette approximation ne dépasse pas l'erreur de calcul, si on choisit une valeur convenable pour le coefficient β. On déduit ainsi les équations différentielles (37); ces équations deviennent intégrables par quadratures, en utilisant les changements de variables (38) et (39), indiqués par I. V. Mestschersky [12].

L'auteur étudie la loi du mouvement du satellite, en déterminant la position et la vitesse, pour chaque instant.

On indique également le mode de calcul dans le cas du mouvement d'un satellite artificiel à travers un milieu qui n'est pas homogène.

BIBLIOGRAFIE

1. F. TISSERAND, *Traité de Mécanique Céleste.* Gauthier Villars, Paris, **IV**, 217–232 (1896).
2. P. FATOU, *Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, **174**, 1162 (1922).
3. J. CHAZY, *Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, **174**, 1280 (1922).
4. E. ESCLANGON, *Sur l'impossibilité de transformations en satellites de la Terre, de projectiles issus de points terrestres.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, **225**, 161 (1947).
5. J. CHAZY, *Sur les satellites artificiels de la Terre.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, **225**, 469 (1947).
6. D. G. KING-HELE, *The Descent of an Earth Satellite Through the Upper Atmosphere.* Journal of the British Interplanetary Society, **15**, *6* (*73*) 314 (1956).
7. S. TRAVERS, *Résistance de l'air et théorie cinétique des gaz à très haute altitude.* Mémorial de l'artillerie Française, **30**, 167 (1956).
8. H. GYLDÉN, *Die Bahnbewegungen in einem System von zwei Körpern in dem Falle, dass die Massen Veränderungen unterworfen sind.* Astronomische Nachrichten, **109**, 1 (1884).
9. TH. OPPOLZER, *Über eine Ursache welche den Unterschied zwischen der theoretisch berechneten Säcularacceleration in der Länge des Mondes und der thatsächlichen bedingen kann.* Astronomische Nachrichten, **108**, 67 (1884).
10. I. V. MESTSCHERSKY, *Ein Specialfall des Gyldenschen Problems.* Astronomische Nachrichten, **132**, 9 (1893).
11. E. O. LOVETT, *Note on Gylden's Equations of the Problem of Two Bodies with Masses Varying with the Time.* Astronomische Nachrichten, **158**, 337 (1902).
12. I. V. MESTSCHERSKY, *Über die Integration der Bewegungsgleichungen im Probleme zweier Körper von veränderlicher Masse.* Astronomische Nachrichten, **159**, 229 (1902).
13. G. DEMETRESCU, *Curs de Astronomie.* Curs litografiat, Universitatea „C. I. Parhon", Bucureşti (1945).
14. N. COCULESCU, *Curs de Astronomie teoretică.* Editura Casei Şcoalelor, Bucureşti (1929)
15. И. В. МЕЩЕРСКИЙ, *Работы по механике тел переменной массы.* Гостехиздат, Москва, 173 (1952).

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

PRESIUNILE ȘI CARACTERISTICILE GLOBALE ÎN LUBRIFICAȚIA SUPRAFEȚELOR CILINDRICE CU MIȘCARE DE ROSTOGOLIRE ȘI DE ALUNECARE

DE

N. TIPEI și AL. NICA

Se va considera lubrificația hidrodinamică în straturi subțiri, pentru care ecuația presiunilor este, în cazul lichidelor

$$\operatorname{div}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\operatorname{grad} p\right. = 6\,[2\,V_n - \overline{V}_t^{\star}\operatorname{grad}\delta + \delta\operatorname{div}\overline{V}_t^{\star\star}] = \mathcal{F}(x_1, x_3, t) \tag{1}$$

în care p este presiunea, x_1, x_3, lungimi măsurate de la o origine de-a lungul suprafeței solide (1), x_2 pe normala la aceasta, μ viscozitatea fluidului, V_n este diferența vitezelor normale la suprafețe, $\overline{V}_t^{\star}$ diferența componentelor celor două viteze, iar $\overline{V}_t^{\star\star}$ suma acestora în planul tangent la (1), δ grosimea stratului fluid, ecuația fiind scrisă după ce s-au făcut simplificările cunoscute derivînd din grosimea redusă a păturei fluide și din ordinul de mărime al forțelor de inerție.

Se studiază cazul mai general cînd există pe lîngă rostogolire și alunecare relativă, iar componenta respectivă se consideră de-a lungul axei x_j; condițiile pe frontiere sînt

$$\left.\begin{aligned} V_{11} = V_1;\ V_{12} = V_{13} = 0;\\ V_{21} = V_2\cdot\cos\ \varepsilon;\ V_{22} = V_2\cdot\sin\ \varepsilon;\ V_{23} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Deoarece grosimea δ depinde numai de θ și eventual de timp, rezultă $\operatorname{grad}\ \delta = \frac{1}{r_1}\ \frac{\partial\delta}{\partial\theta}$, membrul al doilea al ecuației (1) fiind

$$\mathcal{F}(\theta,\ x_3,\ t) = 6\quad V_2\cdot\sin\varepsilon - (V_2\cdot\cos\varepsilon - V_1)\,\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\partial\delta}{\partial\theta} + \\ + \frac{\delta}{2r_1}\cdot V_2\left(1 - \frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)^2\frac{\sin\ 2\theta}{\cos\ \varepsilon}\Big]. \tag{3}$$

În cazul rostogolirei pure $V_1 = V_2$, iar $V_2 = 0$ în cazul alunecărei fără rostogolire.

Grosimea δ este (vezi fig. 1)

$$\delta = r_2 \cdot \cos\theta \left[\sqrt{1 + \frac{r_1 + \delta_2}{r_2} \operatorname{tg}^2\theta \left(2 - \frac{r_1 + \delta_2}{r_2}\right)} - 1 + \frac{r_1 + \delta_2}{r_2} \right] - r_1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial\theta} = \sin\ \theta \left(\frac{(r_1 + \delta_2)\left(2 - \dfrac{r_1 + \delta_2}{r_1}\right) - r_2}{\sqrt{1 + \dfrac{r_1 + \delta_2}{r_2}\left(2 - \dfrac{r_1 + \delta_2}{r_2}\right) \operatorname{tg}^2\theta}} + r_2 - r_1 - \delta_2 \right).$$

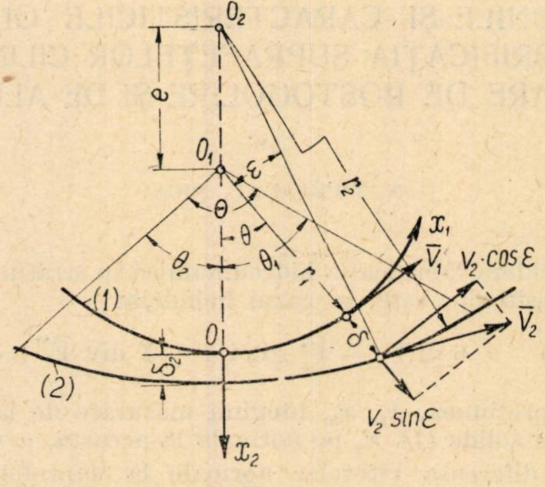

O_2
e
O_1
ε
r_2
θ
θ
θ_2
θ_1
r_1
x_1
$\bar{V}_1$
$V_2 \cdot \cos\varepsilon$
$\bar{V}_2$
δ
(1)
O
δ_2
(2)
$V_2 \sin\varepsilon$
x_2

Fig. 1

Deoarece valorile maxime θ_1 sau θ_2 ale lui θ sînt mici și nu depășesc $\frac{\pi}{6}$, fiind în general sensibil mai reduse, $r_1 < r_2$, iar δ_2 este neglijabil față de r_1, r_2, expresia lui $\frac{\partial\delta}{\partial\theta}$ se poate simplifica obținîndu-se în cele din urmă pentru membrul al doilea al ecuației (1) expresia (vezi [1])

$$\mathcal{F}\,(\theta,\ x_3,\ t) = A_\delta \frac{\partial\delta}{\partial\theta}. \quad (5)$$

În felul acesta, se poate găsi soluția p_∞ a problemei plane pe calea obișnuită [2], obținîndu-se

$$p_\infty = \frac{A\delta\mu_1 r_1}{\delta_1^q}(I_1 + C_1 I_2) + C_2. \quad (6)$$

Pentru $q = 0$ (viscozitate constantă), sau $q = 1$ (viscozitate variabilă), I_1 și I_2 au expresiile din [1].

În cazul mişcării de rostogolire se poate admite $q = 0$ în timp ce pentru alunecare $q = 1$ este mai aproape de realitate.

Soluţia ecuaţiei (1), fără membrul al doilea, $p^\star$ se poate pune sub forma [1]

$$p^\star = \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m}(\theta)\cdot f_{3m}(x_3). \tag{7}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (1) se poate scrie în cele din urmă ([1] şi [2])

$$p = p_\infty - p^\star + a x_3 = \frac{A\delta\mu_1 r_1}{\delta_1^{q}}(I_1 + C_1 I_2) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_{3m}}{\operatorname{ch}\sqrt{|\varkappa_m| r_1\lambda}} \times$$

$$\times \left(\frac{A_{1m,\, n_2+1}}{1 - \cfrac{1 - \cfrac{1}{a}}{\operatorname{ch} \nu\theta}} + \sum_{n=-n,\, m}^{n=n_2} \frac{A_{1m,\, n}}{\operatorname{ch}^n \nu\theta} \right) \operatorname{ch}\sqrt{\chi_m}\left(x_3 + \frac{b_1 - b_2}{2}\right) + C_2. \tag{8}$$

Condiţiile la limită $p = p_0$ pentru $x_3 = -b_1$ şi $x_3 = b_2$, dau apoi [1]

$$\frac{A_\delta \mu_1 r_1}{\delta_1}(I_1 + C_1 I_2) + C_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_{3m} \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\varkappa_m}\dfrac{b}{2}}{\operatorname{ch}\sqrt{|\varkappa_m|\, r_1\lambda}} \left(\frac{A_{1m,\, n_2+1}}{1 - \cfrac{1 - \cfrac{1}{a_\delta}}{\operatorname{ch} \nu\theta}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=-n_1 m}^{n=n_2} \frac{A_{1m,\, n}}{\operatorname{ch}^n \nu\theta} \right) + p_0. \tag{9}$$

Componenta rezultantei presiunilor asupra fusului ($r = r_1$) şi asupra cuzinetului ($r = r_2$), după linia centrelor, este

$$F_t = \int_{-b_1}^{b_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_{1.2}\ (p - p_0) \cos\theta .\ dx_3 \cdot d\theta \tag{10}$$

şi

$$F_m = \int_{-b_1}^{b_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_{1.2}\ (p - p_0) \cdot \sin\theta \cdot dx_3 \cdot d\theta \tag{11}$$

normală la linia centrelor.

Rezultanta este

$$F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} \tag{12}$$

deviată de la linia centrelor cu unghiul $\theta^\star$, dat de relaţia

$$\operatorname{tg}\theta^\star = \frac{F_n}{F_t}. \tag{13}$$

Unghiul θ fiind foarte mic $\left(\theta \ll \frac{\pi}{6}\right)$ – cînd r_1 şi r_2 sînt de semne contrare (ambele suprafeţe convexe), cu atît mai mult este îndeplinită această condiţie — se poate considera $\cos\theta \cong 1$, iar $\sin\theta \cong 0$.

În cazul acesta F_t se capătă din expresia

$$F_t = \int_{-b_1}^{b_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r_{1.2}\,(p - p_0)\cdot dx_3\cdot d\theta, \tag{14}$$

iar

$$F_n = 0\,;\; F = F_t\;;\; \theta^{\star} = 0. \tag{15}$$

Considerînd pentru p expresia (8), se obţine următoarea relaţie pentru F_t:

$$F_t = \frac{r_{1.2}\,A_{\delta}\mu_1 r_1 b}{\delta_1^q}(\mathcal{J}_1 + C_1\mathcal{J}_2) - r_{1.2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{a}_{3m}}{\operatorname{ch}\sqrt{|\varkappa_m|}\,r_1\lambda}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\nu}A_{1m,\,n_2+1}\left[\ln\frac{e^{2\nu\theta_2}}{e^{2\nu\theta_1}} + \frac{4a}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{(e^{\nu\theta_2} - e^{\nu\theta_1})\sqrt{1-a^2}}{1 + e^{\nu(\theta_1+\theta_2)} - a\,(e^{\nu\theta_1} + e^{\nu\theta_2})}\right] +\right.$$

$$\left. + \sum_{n=-n_1\,m}^{n=n_2}\frac{\nu^8}{8}A_{1m,n}\frac{(\theta_2-\theta_1)(2-\nu^2\theta_1\theta_2)}{(2+\nu^2\theta_1^2)(2+\nu^2\theta_2^2)}\right\}\frac{1}{\sqrt{\varkappa_m}}\operatorname{sh}\sqrt{\varkappa_m}\frac{b}{2} +$$

$$+ r_{1.2}\,b\,(\theta_2 - \theta_1)(C_2 - p_0), \tag{16}$$

în care $a = 1 - \dfrac{1}{a_\delta}$, iar $\mathcal{J}_1$ şi $\mathcal{J}_2$ sînt date de expresiile

$$\mathcal{J}_{1,q=0} = \frac{1}{\nu^2\,\delta_2^3}\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2a_\delta - 1)}\left(\frac{1}{(2a_\delta - 1)^2} + \frac{5}{2}\right) - 1\right]\left[\ln\frac{\operatorname{ch}\nu\theta_2 - a}{\operatorname{ch}\nu\theta_1 - a} - (1+a)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\cdot\frac{2\operatorname{sh}\frac{\nu}{2}(\theta_1 - \theta_2)\cdot\operatorname{sh}\frac{\nu}{2}(\theta_1 + \theta_2)}{(\operatorname{ch}\nu\theta_1 - a)(\operatorname{ch}\nu\theta_2 - a)}\right] - \frac{3}{8(2a_\delta - 1)a_\delta}\ln\frac{\operatorname{ch}\nu\theta_2 - a}{\operatorname{ch}\nu\theta_1 - a} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2a_\delta - 1}}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{(2a_\delta - 1)^2} + 1\right) + \frac{1}{2a_\delta - 1}\right]\frac{2}{\nu\sqrt{2a_\delta - 1}}\times$$

$$\left.\times\left[\operatorname{arctg}\frac{\nu\sqrt{2a_\delta - 1}\,(\theta_2 - \theta_1)}{2 + \frac{\nu^2}{2}(2a_\delta - 1)\theta_1\theta_2} + \frac{1}{\theta_1}\ln(1 + \theta_1^2) - \frac{1}{\theta^2}\ln(1 + \theta_2^2)\right]\right\}, \tag{17}$$

$$\mathcal{J}_{1,q=1} = \mathcal{J}_{2,q=0} = \frac{1}{\nu^2\,\delta_2^2}\left[\frac{1}{2a_\delta}\left(1 + \frac{1}{2a_\delta - 1}\right)\ln\frac{\operatorname{ch}\nu\theta_2 - a}{\operatorname{ch}\nu\theta_1 - a} +\right.$$

$$\left. + \frac{4(a_\delta - 1)}{(2a_\delta - 1)^2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\nu\sqrt{2a_\delta - 1}\,(\theta_2 - \theta_1)}{2 + \frac{\nu^2}{2}(2a_\delta - 1)\theta_1\theta_2} + \frac{1}{\theta_1}\ln(1 + \theta_1^2)\frac{1}{\theta_2} - \ln(1 + \theta_2^2)\right)\right],$$

$$\mathcal{J}_{2,q=1} = \frac{4}{\nu^2\delta_2\,(2a_\delta - 1)}\left((\operatorname{arc\,tg}\frac{\nu\sqrt{2a_\delta - 1}\,(\theta_2 - \theta_1)}{2 + \frac{\nu^2}{2}(2a_\delta - 1)\,\theta_1\theta_2} + \frac{1}{\theta_1}\ln(1 + \theta_1^2) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\theta_2}\ln(1 + \theta_2^2)\right).$$

Folosind expresia (9), se obține

$$\begin{aligned} F_t = {} & r_{1.2}\sum_{m=1}^{\infty} b\mathcal{A}_{3m}\,\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\varkappa_m}\,\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\sqrt{|\varkappa_m|}\,r_1\lambda}\left\{\frac{1}{2\nu}A_{1m,\,n_2+1}\left[\ln\frac{e^{2\nu\theta_2}}{e^{2\nu\theta_1}}+\right.\right. \\ & \left.+\frac{4a}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-a^2}\,(e^{\nu\theta_2}-e^{\nu\theta_1})}{1+e^{\nu(\theta_1+\theta_2)}-a(e^{\nu\theta_1}+e^{\nu\theta_2})}+\sum_{n=-n_1\,m}^{n=n_2}\frac{\nu^8}{8}A_{1m,\,n}\times\right. \\ & \left.\times\frac{(\theta_2-\theta_1)(2-\nu^2\theta_1\theta_2)}{(2+\nu^2\theta^2{}_1)(2+\nu^2\theta_2^2)}\right\}-r_{1,2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_{3m}}{\operatorname{ch}\sqrt{|\varkappa_m|}\,r_1\lambda}\left\{\frac{1}{\nu}A_{1m,\,n_2+1}\times\right. \\ & \times\left[\ln\frac{e^{2\nu\theta_2}}{e^{2\nu\theta_1}}+\frac{4a}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-a^2}\,(e^{\nu\theta_2}-e^{\nu\theta_1})}{1+e^{\nu(\theta_1+\theta_2)}-a(e^{\nu\theta_1}+e^{\nu\theta_2})}\right]+ \\ & \left.+\sum_{n=-n_1\,m}^{n=n_2}\frac{\nu^8}{8}A_{1m,\,n}\frac{(\theta_2-\theta_1)(2-\nu^2\,\theta_1\theta_2)}{(2+\nu^2\theta_1^2)(2+\nu^2\theta_2^2)}\right\}\frac{1}{\sqrt{\chi_m}}\operatorname{sh}\sqrt{\chi_m}\,\frac{b}{2}, \end{aligned} \tag{18}$$

în care a și r au valorile specificate.

Deși foarte redusă ca mărime, componenta F_n poate contribui la modificarea direcției după care acționează rezultanta presiunilor; expresia de mai jos dă valoarea lui F_n, considerînd pentru p forma (9) și făcînd aproximația sin $\theta \cong \theta$:

$$\begin{aligned} F_n = {} & r_{1,2}\sum_{m=1}^{\infty} b\mathcal{A}_{3m}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\varkappa_m}\,\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\sqrt{|\varkappa_m|}\,r_1\lambda}\left\{\mathcal{A}_{1m,\,n_2+1}\left[\frac{\theta_2^2-\theta_1^2}{2}+\right.\right. \\ & \left.\left.+\frac{a}{\nu^2}\ln\frac{\nu^2\theta_2^2+2\,(1-a)}{\nu^2\theta_1^2+2\,(1-a)}\right]\sum_{n=-n_1 m}^{n=n_2}\frac{A_{1m,\,n}(\theta_2^2-\theta_1^2)}{2\,(n-1)\left[\left(1+\frac{\nu^2\,\theta_1^2}{2}\right)\left(1+\frac{\nu^2\,\theta_2^2}{2}\right)\right]^{n-1}}\right\}- \\ & -r_{1.2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_{3m}}{\operatorname{ch}\sqrt{|\chi_m|}\,r_1\lambda}\left\{A_{1m,\,n_2+1}\left[\frac{\theta_2^2-\theta_1^2}{2}+\frac{a}{\nu^2}\ln\frac{\nu^2\theta_2^2+2\,(1-a)}{\nu^2\theta_1^2+2\,(1-a)}\right]+\right. \\ & \left.+\sum_{n=-n_1\,m}^{n=n_2}\frac{A_{1m,\,n}(\theta_2^2-\theta_1^2)}{2\,(n-1)\left[\left(1+\frac{\nu^2\theta_1^2}{2}\right)\left(1+\frac{\nu^2\theta_2^2}{2}\right)\right]^{n-1}}\right\}\frac{2}{\sqrt{\varkappa_m}}\operatorname{sh}\sqrt{\chi_m}\,\frac{b}{2} \end{aligned} \tag{19}$$

a și r avînd valorile precedente.

Pentru obținerea acestei relații s-a folosit încă o dată aproximația

$$\operatorname{ch}^n \nu\theta \cong \left(1+\frac{\nu^2\theta^2}{2\,!}\right)^n$$

neglijînd termenii de ordin superior, ceea ce introduce o eroare inferioară lui 2%, preferabilă deci soluției $\theta \cong \operatorname{sh}\,\theta$.

În cele precedente s-a ajuns la o rezolvare a problemei presupunînd că unghiul Θ (fig. 1) are valori foarte mari faţă de majoritatea cazurilor, practice. Dacă se admite că Θ, θ_1, θ_2 sînt mici, se poate aproxima grosimea peliculei de fluid cu ajutorul formulei [1]

$$\delta = \delta_2 . \, e^{\tilde{\nu} \theta^2} . \tag{20}$$

Relaţia (20) poate reprezenta de asemenea mai bine cazul cînd r_1 şi r_2 sînt de semne contrarii (ambele suprafeţe convexe).

Rezultă în cele din urmă expresia lui p cu ajutorul polinoamelor lui Hermite $H_m(\xi)$, ([1], [3])

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\varkappa_m} \left(x_3 + \frac{b_1 - b_2}{2} \right)}{\operatorname{ch} \sqrt{\varkappa_m}\, r_1 \lambda} \right) \mathcal{C}_{3m} \cdot f_{1m} + p_0 , \tag{21}$$

în care

$$f_{1m} = 2^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{1}{2} \left[(3-q) \tilde{\nu} + \sqrt{5 (3-q) \tilde{\nu}} \right] \theta^2} . \, H_m \left(\sqrt[4]{5 (3-q) \tilde{\nu}} . \, \theta \right)$$

$$\text{pentru } \varkappa = 4 m + 1$$

$$f_{1m} = (-1)^m . \, e^{-\frac{(3-q)\tilde{\nu}}{2} \theta^2} \cdot H_m \left(\sqrt[4]{20 (3-q) \tilde{\nu}} . \, \theta \right) \tag{22}$$

$$\text{pentru } \varkappa = 2 m$$

$$H_m(\xi) = (-1)^m . \, e^{\varsigma^2} \frac{d^m}{d \xi^m} e^{-\xi^2} \qquad (\xi = c\theta)$$

p va fi deci de forma

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\chi_m} \left(x_3 + \frac{b_1 - b_2}{2} \right)}{\operatorname{ch} \sqrt{\chi_m}\, r_1 \lambda} \right) \mathcal{C}_{3m \cdot a \cdot} e^{-b^\star \theta^2} H_m(c\theta), \tag{23}$$

în care

$$a = 2^{-\frac{m}{2}}$$

$$\text{pentru } \varkappa = 4 m + 1$$

$$a = (-1)^m \tag{24}$$

$$\text{pentru } \varkappa = 2 m$$

$$b^\star = \frac{1}{2} \left[(3-q) \tilde{\nu} + \sqrt{5 (3-q) \tilde{\nu}} \right]$$

$$\text{pentru } \varkappa = 4 m + 1$$

$$b^\star = \frac{(3-q)\tilde{\nu}}{2} \text{ pentru } \varkappa = 2 m \tag{25}$$

$$c = \sqrt[4]{5 (3-q) \tilde{\nu}} \text{ pentru } \varkappa = 4 m + 1$$

$$c = \sqrt[4]{20 (3-q) \tilde{\nu}} \text{pentru } \varkappa = 2 m \tag{26}$$

Pentru $H_m\,(c\theta)$ vom folosi în primul rînd relaţiile care ne dau valorile asimptotice [4]

$$H_m\,(c\theta) = (-1)^n\, 2^n\,(2\,n-1)\,!\,!\, e^{\frac{(c\theta)^2}{2}} \left[\cos\sqrt{4\,n+1}\cdot c\,\theta + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right] \quad \text{pentru } m = 2\,n \tag{27}$$

$$H_m\,(c\theta) = (-1)^n\, 2^{n+\frac{1}{2}}\,(2n-1)\,!\,!\,\sqrt{2\,n+1}\; e^{\frac{(c\theta)^2}{2}}\left[\sin\sqrt{4\,n+3}\;c\,\theta + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \quad \text{pentru } m = 2\,n+1$$

Consideraţiile precedente asupra lui F_t şi F_n sînt şi mai evidente în acest caz; folosind relaţiile (14), (27) obţinem pentru F_t o expresie de forma

$$F_t = r_{1,2}\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_{3m}\cdot \mathcal{J}_m \left[\, b - \frac{2\,\mathrm{sh}\sqrt{\chi_m}\,\frac{b}{2}}{\sqrt{\varkappa_m}\cdot \mathrm{ch}\sqrt{\varkappa_m}\, r_1\lambda}\right], \tag{28}$$

în care:

$$\mathcal{J}_m = a\,(-1)^n\, 2^n\,(2\,n-1)\,!\,!\left\{\frac{1}{\sqrt{4n+1}\,.\,c}\left[\sin\sqrt{4\,n+1}\cdot c\theta_2 .\, e^{-k^2\theta_2^2} - \right.\right.$$
$$\left. -\sin\sqrt{4\,n+1}.\; c\,\theta_1 .\; e^{-k^2\theta_1^2}\right] + \left(\theta_1\cdot e^{-k_2\theta_1^2} - \theta_2\cdot e^{-k^2\theta_2^2}\right) +$$
$$\left. + \frac{\sqrt{\pi}}{k}\,\Phi\;(k,\ \theta_1,\ \theta_2).\left[\,1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right]\right\}, \quad \text{pentru } m = 2n \tag{29}$$

$$\mathcal{J}_m = a\;(-1)^n\, 2^{n+\frac{1}{2}}\,(2n-1)\,!\,!\,\sqrt{2\,n-1}\left\{\frac{\sqrt{4n+3}\;c}{2k^2}\left[\,\theta_1\cdot e^{-k^2\theta_1^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\,\theta_2\cdot e^{-k^2\theta_2^2}\right] + \frac{\sqrt{\pi}}{k}\,\Phi\;(k,\ \theta_1,\ \theta_2)\; O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right\}, \quad \text{pentru } m = 2\,n+1$$

$$\left(k^2 = b^{\star} - \frac{c^2}{2}\right),$$

Dacă se exprimă polinoamele lui Hermite, $H_m\,(c\theta)$, cu ajutorul unei serii de puteri ale lui $(c\theta)$, de forma [4]

$$H_m\,(c\theta) = \sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} (-1)^i\, 2^{m-i}\, 1.3.5\ldots\,(2\,i-1)\cdot C_m^{2i}\,(c\theta)^{m-2i} \tag{30}$$

adică

$$H_m(c\theta) = \sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} A_i (c\theta)^{m-2i} \tag{31}$$

F_t va avea forma

$$F_t = r_{1.2} \sum_{m=1}^{\infty} a\, \mathfrak{A}_{3m} \left[b - \frac{2\,\mathrm{sh}\sqrt{\varkappa_m}\,\frac{b}{2}}{\sqrt{\varkappa_m}\,\mathrm{ch}\sqrt{\varkappa_m}\, r_1\lambda} \right] \sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} A_i \cdot c^{m-2i}\, \mathcal{J}_{m-2i} \tag{32}$$

Notînd $m - 2i = p$, relațiile de recurență pentru integrala $\mathcal{J}_{p=m-2i}$ sînt următoarele

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{J}_p &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \theta^p e^{-b^\star\theta^2} \cdot d\theta = \frac{1}{2b^\star} \left(\theta_1^{p-1} e^{-b^\star\theta_1^2} - \theta_2^{p-1} e^{-b^\star\theta_2^2} \right) + \frac{m}{2b^\star} \mathcal{J}_{p-2} \\
&\vdots \\
\mathcal{J}_2 &= \frac{1}{2b^\star} \left(\theta_1 \cdot e^{-b^\star\theta_1^2} - \theta_2 \cdot e^{-b^\star\theta_2^2} \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4b^{\star\,3/2}}\, \Phi(b^\star, \theta_1, \theta_2) \\
\mathcal{J}_1 &= \frac{1}{2b^\star} \left(e^{-b^\star\theta_1^2} - e^{-b^\star\theta_2^2} \right).
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

În aceste expresii, a, $b^\star$, c sînt dați de expresiile (22), (23), (24), iar r poate lua valoarea $r = r_1$ sau $r = r_2$, după cum este vorba de fus sau de cuzinet.

Se poate obține valoarea lui F_n (considerînd $\sin\,\theta \cong \theta$) cu ajutorul expresiilor (32), (33), în care se va nota : $p = m - 2i + 1$.

Momentul de frecare pentru fus ($r = r_1$; $x_2 = 0$) și pentru cuzinet ($r = r_2$; $x_2 = \delta$), se exprimă în forma cea mai generală, cu ajutorul expresiei

$$M_{1.2} = r_{1,2} \int_{-b_1}^{b_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)_{x_2 = 0,5} dx_3 .\ dx_1. \tag{34}$$

Luînd în considerație relațiile [5]

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= r_1^2\, b \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu \frac{V}{\delta}\, d\theta + \frac{r_1}{2l} \alpha\,\Delta\,\Theta \int_{-b_1}^{b_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (p - p_0) .\ \sin\theta\, dx_3 .\ dx_1 \\
M_2 &= -\, r_2^2\, b \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu \frac{V}{\delta} \cdot d\theta + \frac{r_2}{2l} \alpha\,\Delta\,\Theta \int_{-b_1}^{b_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (p - p_0) \sin\,\theta\, dx_3 \cdot dx_1
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

se obține în cele din urmă pentru fus

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= \frac{r_1^2\, \mu_1 b V}{\delta_1} (\theta_1 - \theta_2) + \frac{\alpha\Delta}{2} F_n\ ;\ \text{pentru } q = 1 \text{ (viscozitate variabilă)} \\
M_1 &= \frac{2 r_1^2\, \mu_1 b V}{\nu a_\delta \cdot \delta_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a^2 - 1}} \ln \frac{e^{\nu(\theta_1 + \theta_2)} + e^{\nu\theta_1} (2a - \sqrt{4a^2 - 1} + e^{\nu\theta_2} (2a + \sqrt{4a^2 - 1}) + 1}{e^{\nu(\theta_1 + \theta_2)} + e^{\nu\theta_1} (2a + \sqrt{4a^2 - 1}) + e^{\nu\theta_2} (2a - \sqrt{4a^2 - 1}) + 1} + \\
&\quad + \frac{\alpha A}{2} F_n\ ;\ \text{pentru } q = 0 \text{ (viscozitate constantă)}
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

şi pentru cuzinet

$$\left.\begin{aligned} M_2 &= -\frac{r_2^2\mu_1 b V}{\delta_1}(\theta_1-\theta_2)+\frac{\alpha\Delta}{2}F_n;\ \text{pentru } q=1\,(\text{viscozitate variabilă}) \\ M_2 &= -\frac{2r_2^2\mu_1 b V}{\nu\cdot a_\delta\cdot\delta_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4a^2-1}}\ln\frac{e^{\nu(\theta_1+\theta_2)}+e^{\nu\theta_1}(2a-\sqrt{4a^2-1})+e^{\nu\theta_2}(2a+\sqrt{4a^2-1})+1}{e^{\nu(\theta_1+\theta_2)}+e^{\nu\theta_1}(2a+\sqrt{4a^2-1})+e^{\nu\theta_2}(2a-\sqrt{4a^2-1})+1}+ \\ &\quad +\frac{\alpha\Delta}{2}F_n;\ \text{pentru } q=0\ (\text{viscozitate constantă}) \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

F_n este dat de expresiile (19), sau (32), (33), în care $p = m - 2i + 1$, iar $a = 1 - \frac{1}{a_\delta}$.

Este suficient să se considere un număr finit m de soluţii, precizia calculelor crescînd însă cu m.

Primită la redacţie la data de 30 decembrie 1957.

ДАВЛЕНИЯ И ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СМАЗКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ КАЧЕНИИ И СКОЛЬЖЕНИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой статье рассматривается движение тонких слоев вязкой жидкости между двумя цилиндрическими поверхностями с относительным движением качения и скольжения.

Вводя некоторые упрощения во второй части уравнения давлений и апроксимируя выражение толщины жидкого слоя при помощи гиперболических функций, получают общее решение трехмерного движения, соответственно распределение давлений.

Затем расчитывается равнодействующая сила давлений на цапфу и на подшипник.

Далее рассматривается некоторое показательное выражение для этих же толщин, для малых центральных углов несущей зоны, для твердых поверхностей с радиусами кривизны противоположных знаков.

В этом случае общее решение можно выразить просто при помощи многочленов Гермита и на основании тех же упрощающих гипотез благодаря малым центральным углам несущей зоны получить и равнодействующую давлений.

Выводятся также и моменты трения для цапфы и для подшипника.

LES PRESSIONS ET LES CARACTÉRISTIQUES GLOBALES DANS LA LUBRIFICATION DES SURFACES CYLINDRIQUES À MOUVEMENT DE ROULEMENT ET DE GLISSEMENT

RÉSUMÉ

On considère le mouvement en couches minces du fluide visqueux entre deux surfaces cylindriques à mouvement relatif de roulement et de glissement.

En faisant quelques simplifications dans le second membre de l'équation des pressions et en approximant l'expression de l'épaisseur de la couche fluide à l'aide des fonctions hyperboliques, on obtient la solution générale du mouvement tridimensionnel, respectivement, la répartition des pressions.

On calcule ensuite la résultante des pressions sur le tourillon et le coussinet.

On considère de même une expression exponentielle pour les mêmes épaisseurs, pour de petits angles au centre de la zone portante ou pour des surfaces solides à rayons de courbure de signes contraires.

Dans ce cas, la solution générale peut être exprimée d'une façon simple à l'aide des polynômes d'Hermite et, en faisant les mêmes hypothèses simplificatrices, en vertu des petits angles au centre de la zone portante, on obtient aussi la résultante des pressions.

On déduit également les moments de frottement pour le tourillon et le coussinet.

BIBLIOGRAFIE

1. N. TIPEI, *Lubrificația suprafețelor cilindrice cu mișcare de rostogolire și alunecare.* S.C.M.A., **VIII**, *4* (1957).
2. N. TIPEI, *O metodă generală pentru studiul miscării în pelicula de lubrifiant dintre două suprafețe de dimensiuni finite.* S.C.M.A., **II**, 27 (1951).
3. E. KAMKE, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* Москва (1951).
4. И. РЫЖИК, И. ГРАДШТЕЙН, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений,* Москва (1951).
5. N. TIPEI, *Hidroaerodinamica lubrificației.* Ed. Acad. R.P.R., București (1957).

CONSIDERAȚII ASUPRA LUBRIFICAȚIEI CU GAZE ÎN REGIM TURBULENT

DE

V. N. CONSTANTINESCU

În studiile efectuate pînă în prezent asupra lubrificației cu gaze, s-a considerat mișcarea în stratul de lubrifiant ca fiind laminară, ipoteză justificată de faptul că mișcarea se efectuează în straturi subțiri și deci că numărul Reynolds

$$Re = \frac{\rho V \delta}{\mu} \tag{1}$$

(unde ρ este densitatea, V viteza relativă dintre suprafețe, μ viscozitatea, iar δ grosimea stratului de lubrifiant), are valori reduse.

Ținînd însă seama că principalele aplicații ale lubrificației cu gaze constau în realizarea de lagăre la viteze relative mari, apare ca deosebit de interesant și studiul lubrificației cu gaze în regim turbulent, deoarece, la creșterea continuă a vitezei relative, numărul Reynolds va depăși valoarea numărului Reynolds critic, iar mișcarea în interiorul stratului de lubrifiant va degenera într-una turbulentă. Pentru dimensiuni și jocuri relative uzuale, turația corespunzătoare numărului Reynolds critic este de ordinul de mărime 80 000 rot/min, valoare destul de ridicată dar totuși atinsă deja astăzi în unele mașini.

* * *

Pentru a scrie ecuațiile de mișcare în stratul de lubrifiant, vom porni de la ecuațiile generale de mișcare ale fluidelor vîscoase compresibile sub forma

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\Delta u + \frac{1}{3}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right),\\
\frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\Delta v + \frac{1}{3}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right),\\
\frac{\partial w}{\partial t} - w\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\Delta w + \frac{1}{3}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

şi de la ecuaţia de continuitate

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

în care u, v, w sînt componentele vitezei după direcţiile x, y, z, t timpul, iar p presiunea.

Vom considera sistemul de referinţă obişnuit în problemele de lubrificaţie şi anume, dat fiind faptul că grosimea δ este foarte redusă în raport cu celelalte dimensiuni ale suprafeţelor lubrifiante ($\sim 10^{-3}$), vom considera axele x şi z cuprinse în întregime pe una din suprafeţe, iar axa y normală la aceasta.

Întocmai ca şi pentru studiul lubrificaţiei cu fluide incompresibile [1], [2] vom considera toate mărimile care caracterizează mişcarea sub forma

$$\varphi = \overline{\varphi} + \varphi'; \quad \overline{\varphi} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi \, dt, \tag{4}$$

unde $\overline{\varphi}$ este valoarea medie în raport cu timpul a mărimei φ, iar φ' pulsaţia acesteia ($\overline{\varphi'} = 0$).

În plus, vom considera, ca şi pentru cazul mişcării laminare [3], [4], o legătură între presiune şi densitate de forma

$$\frac{\overline{p}}{\overline{\rho}^{\varkappa}} = \text{const.}; \quad 1 \leqslant \varkappa \leqslant 1,4. \tag{5}$$

De asemenea vom face aproximaţia, întrebuinţată şi în problemele de strat limită, că pulsaţia ρ' are o influenţă secundară asupra mişcării. Această aproximaţie permite simplificări considerabile în ecuaţiile de mişcare (neglijarea termenilor de forma $\overline{\rho'\varphi'}$ în raport cu tensiunile turbulente), introducînd în schimb erori neglijabile asupra distribuţiei vitezelor şi presiunilor, deoarece, după cum se va vedea, datorită condiţiilor specifice ale problemei (mişcare în straturi subţiri între frontiere solide, pe care $\varphi' = 0$ [1], [2]), distribuţia vitezelor şi presiunilor depinde în primul rînd de valorile presiunilor şi densităţii la perete, unde $p' = \rho' = 0$.

În aceste condiţii, introducînd expresii de forma (4) în ecuaţiile (2) şi (3), operînd medierea în raport cu timpul şi efectuînd simplificările ce rezultă din faptul că mişcarea are loc în straturi foarte subţiri, aceste ecuaţii se scriu, pentru mişcări permanente, sub forma

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\overline{\rho}\,\overline{u'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{\rho}\,\overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\overline{\rho}\,\overline{u'w'}\right),\\
\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\overline{\rho}\,\overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{\rho}\,\overline{v'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\overline{\rho}\,\overline{v'w'}\right),\\
\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\overline{\rho}\,\overline{u'w'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{\rho}\,\overline{v'w'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\overline{\rho}\,\overline{w'^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

şi

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\,\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{\rho}\,\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{\rho}\,\bar{w})}{\partial z}=0. \tag{7}$$

Tensiunile turbulente $\overline{u'u'}$, $\overline{u'v'}$, $\overline{u'w'}$ etc. au toate acelaşi ordin de mărime, dar datorită faptului că scurgerea se efectuează în straturi subţiri, derivatele în raport cu x şi z ale acestor mărimi vor fi în raportul $\frac{\delta}{x}$ ($\sim 10^{-3}$) mai mici decît derivatele în raport cu y şi deci, neglijabile.

În consecinţă, sistemul (6) se poate scrie sub forma mai simplă

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}&=\mu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}(-\bar{\rho}\,\overline{u'v'}),\\
\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(-\bar{\rho}\,\overline{v'^2}),\\
\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}&=\mu\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}(-\bar{\rho}\,\overline{v'w'}).
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

În cazul mişcării bidimensionale, sistemul (8) se scrie

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}&=\mu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}(-\bar{\rho}\,\overline{u'v'}),\\
\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(-\bar{\rho}\,\overline{v'^2}).
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Din examinarea sistemului (8) sau (9), întocmai ca şi pentru cazul mişcării incompresibile [1], [2], rezultă o primă deosebire faţă de regimul laminar şi anume, faptul că presiunile nu mai sînt constante în lungul grosimii stratului de lubrifiant $\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}\neq 0\right)$ şi prezintă un minim către mijlocul grosimii δ. Totuşi această variaţie nu influenţează în primă aproximaţie repartiţia vitezelor şi presiunilor. Într-adevăr, notînd cu

$$\sigma(x,y,z)=-\bar{\rho}\,\overline{v'^2} \tag{10}$$

a doua ecuaţie a sistemului (8) sau (9) se scrie

$$\bar{p}=\pi(x,z)+\sigma(x,y,z);\frac{\partial\pi}{\partial y}=0, \tag{11}$$

în care π este presiunea pe cei doi pereţi, deoarece la $y=0$, δ, $\sigma=0$. De asemenea $\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}=\frac{\partial\pi}{\partial x}$, $\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}=\frac{\partial\pi}{\partial z}$, deoarece după cum s-a arătat, $\frac{\partial\sigma}{\partial x}$, $\frac{\partial\sigma}{\partial z}$ sînt în raportul $\frac{\delta}{x}$ mai mici decît $\frac{\partial\sigma}{\partial y}$, $\frac{\partial\pi}{\partial x}$ etc. Totodată, în ecuaţiile de mişcare care dau repartiţia vitezelor nu intervine $\bar{p}$ ci $\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}$ şi $\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}$ derivate care, conform celor de mai sus, nu sînt influențate de variația presiunii, iar în ce privește repartiția presiunilor, interesează în primul rînd presiunile pe cele două suprafețe lubrificate. De aceea în cele ce urmează vom înțelege prin $\overline{p}$, $\pi\,(x, z)$, adică presiunea la perete.

În același timp se constată că sistemele (8), (9) au aceeași formă ca și în cazul lubrificației cu fluidele incompresibile [1], [2]. În consecință întocmai ca și pentru regimul laminar, se poate conchide că compresibilitatea nu influențează în primă aproximație alura generală a distribuției vitezelor, sau, mai precis, distribuția vitezelor este aceeași ca și pentru mișcarea incompresibilă la aceleași valori $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}$, $\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}$, μ, $\overline{\rho}$ etc. Influența compresibilității asupra distribuției vitezelor în stratul de lubrifiant se va manifesta în mod indirect prin modificarea valorilor derivatelor $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}$, $\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}$, deoarece distribuția presiunilor va fi modificată prin faptul că ecuația de continuitate (7) are o formă diferită față de cazul incompresibil.

În consecință vom putea utiliza pentru distribuția de viteze $\overline{u}$, ipoteza lungimii de amestec a lui Prandtl sub forma

$$-\overline{\rho}\,\overline{u'v'} = \overline{\rho}\, l^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right|; \quad l = xy\left(0 \leqslant y \leqslant \frac{\partial}{2}\right) \tag{12}$$

și, renunțînd la notațiile de mediere, deoarece ne interesează numai valorile medii, dar notînd în schimb cu

$$\overline{u} = \frac{u}{V}, \ \overline{y} = \frac{y}{\partial}, \ R_e = \frac{\rho V \delta}{\mu} \tag{13}$$

valorile adimensionale, ecuația diferențială care dă distribuția vitezelor $\overline{u}$ se scrie

$$A\overline{y}^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\right| + \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} + B\,\overline{y} - C = 0, \tag{14}$$

unde

$$A = \varkappa^2\, Re \ ; \quad B = -\frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{15}$$

și toate rezultatele privind integrarea ecuației (14) și studiul distribuției vitezelor în cazul mișcărilor incompresibile, cuprinse în lucrările [1], [2], [5] vor fi aplicabile și în cazul lubrificației cu gaze.

În particular, notînd viteza medie într-o secțiune

$$u_{t_m} = u_{m_c} + u_m, \tag{16}$$

în care $u_{m_c} = \frac{1}{2} V$ este viteza medie corespunzătoare unei mișcări Couette, există și pentru lubrificația cu gaze relația

$$B = k\,\overline{u_m}, \tag{17}$$

în care

$$k = k_0 + k_1 R^n e = 12 + 0{,}14 \ Re^{0{,}725} \tag{18}$$

adică, ținînd seama de a doua relație (15)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu}{\delta^2}\left[k_0 + k_1 R^n e\right] u_m = -\frac{\mu}{\delta^2}\left[12 + 0{,}14\left(\frac{\rho V \delta}{\mu}\right)^{0{,}725}\right] u_m . \tag{19}$$

În cazul mișcărilor bidimensionale, integrînd ecuația continuității (7) în raport cu y de la 0 la δ, aceasta se poate scrie global sub forma

$$\rho\, u_{m_c}\, \delta + \rho\, u_m\, \delta = \rho_m \frac{V}{2}\, \delta_0 = \text{constant}, \tag{20}$$

în care ρ_m este densitatea corespunzătoare secțiunii în care presiunea prezintă un maxim sau un minim, iar δ_0 grosimea δ a stratului de lubrifiant în secțiunea respectivă. Ecuația (20) se mai poate scrie sub forma

$$u_m = -\frac{1}{2} V\left(1 - \frac{\rho_m \delta_0}{\rho\, \delta}\right) \tag{21}$$

sau, ținînd seama de relația (5)

$$u_m = -\frac{1}{2} V\left(1 - \frac{C_1}{p^{\frac{1}{\varkappa}}\delta}\right), \tag{22}$$

în care

$$C_1 = p_m^{\frac{1}{\varkappa}}\, \delta_0, \tag{23}$$

p_m fiind presiunea maximă sau minimă (corespunzătoare densității ρ_m).

Notînd

$$R'e = \frac{\rho_0 V \Delta}{\mu}, \tag{24}$$

în care Δ este jocul mediu dintre cele două suprafețe, iar ρ_0 o densitate de referință, de exemplu densitatea în punctul de alimentare, și înlocuind expresia (22) pentru u_m în relația (19) se obține ecuația diferențială a presiunilor sub forma

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu V}{2\,\delta^2}\left[k_0 + k_1\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n}{\varkappa}} Re'^{n}\right]\left(1 - \frac{C_1}{p^{\frac{1}{\varkappa}}\delta}\right) \tag{25}$$

sau

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu V}{\delta^2}\left(1 - \frac{C_1}{p^{\frac{1}{\varkappa}}\delta}\right) + \frac{0{,}07\,\mu\, V}{\delta^{1{,}275}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{0{,}725}{\varkappa}} R_e'^{0{,}725}\left(1 - \frac{C_1}{p^{\frac{1}{\varkappa}}\delta}\right), \tag{26}$$

în care p_0 este presiunea corespunzătoare densității ρ_0.

Se constată că derivata presiunilor se compune dintr-un prim termen egal cu derivata presiunilor în cazul regimului laminar [4] și un al doilea termen, cu o structură asemănătoare, proporțional cu numărul Reynolds $R'e$ și cu presiunea p, la puterea 0,725, respectiv la puterea $\frac{0{,}725}{\varkappa}$. Influența celui de al doilea termen devine preponderentă pe măsură ce numărul Reynolds Re' crește, el fiind de cîteva ori mai mare în valoare absolută decît primul.

Dat fiind faptul că ecuația (26) are o structură în linii generale asemănătoare cu cea obținută în cazul regimului laminar, iar condițiile la limită pentru determinarea celor două constante de integrare care vor apare în relația care dă distribuția presiunilor, sînt aceleași, se poate face afirmația că, întocmai ca și pentru cazul incompresibil [1], [5], curba presiunilor va avea o alură asemănătoare cu aceea obținută în cazul regimului laminar, dar valorile presiunilor care se nasc în interiorul stratului de lubrifiant vor fi sensibil sporite față de cazul regimului laminar. În consecință, capacitatea portantă a unui lagăr funcționînd în regim turbulent este sensibil sporită față de cazul laminar corespunzător.

Ecuația diferențială (26) este neliniară și greu de integrat în mod exact. Ținînd însă seama de observațiile precedente, se poate adopta un procedeu de integrare prin aproximații succesive pornindu-se de la o expresie pentru presiuni de forma

$$p_{\mathrm{I}} = p_0 + \beta\,(p_l - p_0), \tag{27}$$

în care p_l este presiunea corespunzătoare regimului laminar, iar β o constantă. Atunci, mărginindu-ne la o primă iterație, distribuția presiunilor se poate scrie sub forma

$$p = p_0 + \int_0^x \frac{6\mu V}{\delta^2}\left(1 - \frac{C_1}{p_{\mathrm{I}}^{\frac{1}{\varkappa}}\delta}\right)dx + \int_0^x \frac{0{,}07\,\mu V Re'^{\,0{,}725}}{\delta^{1{,}725}}\left(\frac{p_{\mathrm{I}}}{p_0}\right)^{\frac{0{,}725}{k}}\left(1 - \frac{C_1}{p_{\mathrm{I}}^{\frac{1}{\varkappa}}\partial}\right)dx \tag{28}$$

constanta C_1 determinîndu-se prin punerea condițiilor la limită numai la finele zonei lubrificate, deoarece după cum se constată din relația (28) condițiile la limită pentru începutul zonei lubrificate sînt implicit satisfăcute.

Constanta β din relația (27) poate fi determinată punînd de exemplu condiția ca distribuția presiunilor p_{I} să difere cît mai puțin de distribuția dată de relația (28), în acest caz și eroarea introdusă de procedeul de iterație adoptat fiind minima.

★

Considerațiile de mai sus sînt evident aplicabile cînd mișcarea în tot stratul de lubrifiant este efectiv turbulentă, fapt care trebuie verificat în cazul cînd numărul Reynolds are valori mai mici.

Astfel, să considerăm un număr Reynolds efectiv egal cu

$$Re_m = \frac{2\rho\, u_{t_m}\delta}{\mu} \tag{29}$$

ales astfel pentru a-l putea compara cu numărul Reynolds care se consideră de obicei pentru lagărele neîncărcate unde se ia ca viteză de referinţă (a se vedea de exemplu formula Taylor [1]) viteza relativă dintre suprafeţe $V = 2\,u_{t_m} = 2\,u_{m_c}$ (16). Ţinînd seama de ecuaţia de continuitate (20) rezultă imediat

$$Re_m = \frac{\rho_m}{\rho_0}\frac{\delta_0}{\Delta} R'e = \frac{C_1}{p_0^{\frac{1}{\varkappa}}\Delta} R'e = \text{constant} \qquad (30)$$

adică numărul Reynolds efectiv este constant în tot lungul stratului de lubrifiant (viscozitatea μ fiind considerată constantă). Această valoare (30) pentru Re_m trebuie comparată cu numărul Reynolds critic, pentru a verifica dacă mişcarea are efectiv un caracter turbulent.

Primită la redacţie la data de 20 noiembrie 1957.

О ГАЗОВОЙ СМАЗКЕ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Записываются уравнения газовой смазки при турбулентном режиме; выявляется, что, так же как и в случае ламинарного режима, сжимаемость не оказывает непосредственного влияния на распределение скоростей. В этих условиях, используя результаты, полученные при исследовании распределения скоростей при смазке несжимаемыми жидкостями (1,2), и уравнение непрерывности, записывают дифференциальное уравнение распределения давления в случае двухмерных движений. Рассматривая форму этого уравнения, можно отметить некоторые функциональные свойства подшипников при турбулентном режиме. Для интегрирования дифференциального уравнения давлений предлагают способ итерации, сводящийся к единственному уравнению, исходя из решения, имеющего то же строение, что и решение, полученное в соответствующем ламинарном случае.

CONSIDÉRATIONS SUR LA LUBRIFICATION AUX GAZ EN RÉGIME TURBULENT

RÉSUMÉ

On écrit les équations de la lubrification aux gaz, en relevant le fait que, tout comme pour le régime laminaire, la compressibilité du gaz n'a pas une influence directe sur la distribution des vitesses. Dans ces conditions, on écrit l'équation différentielle des pressions, en utilisant les résultats de l'étude de la distribution des vitesses pour la lubrification avec un fluide incompressible [1], [2] et l'équation de la continuité. En

examinant l'équation différentielle des pressions obtenue, on relève certaines propriétés du fonctionnement des paliers à gaz en régime turbulent. Afin d'intégrer l'équation différentielle des pressions, on propose une méthode d'itération réduite à une seule, en partant d'une solution ayant la même structure que la solution obtenue pour le cas du régime laminaire respectif.

BIBLOGRAFIE

1. V. N. CONSTANTINESCU, *On the turbulent Lubrication. Proceedings of the Conference on Lubrication and Wear.* The Institution of Mechanical Engineers, London (1957).
2. V. N. CONSTANTINESCU, *Influența turbulenței asupra mișcării în stratul de lubrifiant.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1*, (1958).
3. N. TIPEI, *Ecuațiile lubrificației cu gaze,* Comunicările Acad. R.P.R., **IV**, *11—12*, 699 (1954).
4. V. N. CONSTANTINESCU, *Repartiția presiunilor în lagărele de alungire infinită lubrificate cu gaze.* Comunicările Acad. R.P.R., **IV**, *2*, 377 (1955).
5. — *Studiul lubrificației bidimensionale în regim turbulent.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1* (1958).
6. — *Asupra unor proprietăți și soluții la limită ale ecuațiilor lubrificației cu gaze.* Comunicările Acad. R.P.R., **IV**, *9* (1955).

UNGERE — FRECARE — UZURĂ

CERCETARI ASUPRA CARACTERISTICILOR DE FUNCŢIONARE A LAGĂRELOR CONSTRUITE DIN MATERIALE DIFERITE

DE

GH. VASILCA şi AL. NICA

Aspectul fizic complex şi dificultăţile matematice, care se cer ocolite, au condus în teoria hidrodinamică a lubrificaţiei la soluţii pentru calculul lagărelor, în care lipsesc parametrii cu privire la proprietăţile fizice ale ansamblului de frecare, cu excepţia viscozităţii lubrifiantului.

Pe de altă parte, caracterizarea funcţională, experimentală, a unui ansamblu de frecare este influenţată la rîndul ei, din punct de vedere cantitativ, în mod hotărîtor de condiţiile de experimentare. Chiar la măsurarea unor parametri, ca de exemplu a momentului de frecare, rezultatele sînt legate uneori de incertitudini şi împrăştieri importante.

În aceste condiţii, calcularea riguroasă a unui lagăr, pentru un anumit material antifricţiune, pare a prezenta deocamdată dificultăţi.

În cele ce urmează se examinează unele aspecte ale problemei, care ar putea conduce în unele cazuri la soluţii de calcul, avînd evident un caracter aproximativ şi, în ce priveşte parametrii, limitat.

O astfel de soluţie poate fi obţinută făcînd uz de un parametru convenabil, cum este coeficientul adimensional de portanţă (corespunzător numărului Sommerfeld) dat de relaţia [1]

$$\zeta = \frac{d\Psi^2}{2\mu_1}\frac{p}{V}, \tag{1}$$

$$\zeta = \frac{3\sqrt{C_n^2 + C_t^2}}{1 + \alpha} = f(\alpha, \lambda), \tag{2}$$

în care d este diametrul fusului, Ψ jocul relativ, μ_1 viscozitatea lubrifiantului la intrare în lagăr, p presiunea specifică medie din lagăr, V viteza periferică a fusului, C_n şi C_t coeficienţii adimensionali ai componentelor rezultantei presiunilor normal şi după linia centrelor, α excentricitatea relativă, iar λ alungirea relativă.

La un ansamblu de frecare, relaţia între p şi V poate fi stabilită pe cale experimentală, sub formă de caracteristică de sarcină $p = f(V)$.

Dacă la ridicarea caracteristicii $p = f(V)$ s-ar putea măsura şi grosimea minimă δ_2 a filmului de lubrifiant, se poate calcula excentricitatea relativă α_X, iar din (1) ζ_X şi trasa curba $\zeta_X = f(\alpha_X, \lambda)$ pentru ansamblul de frecare X. Diferenţa între curbele ζ_X, ζ_Y etc. (fig. 1) marchează, dacă toate celelalte elemente sînt aceleaşi, influenţa particularităţilor fizice diferite ale ansamblurilor de frecare, asupra parametrilor funcţionali cuprinşi în relaţiile (1) şi (2).

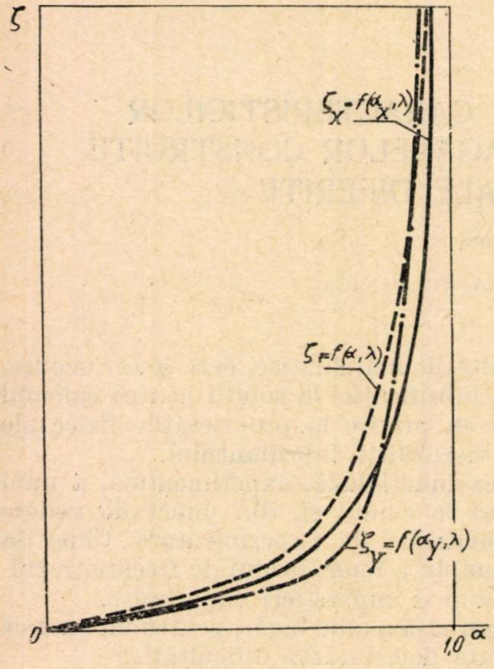


Fig. 1

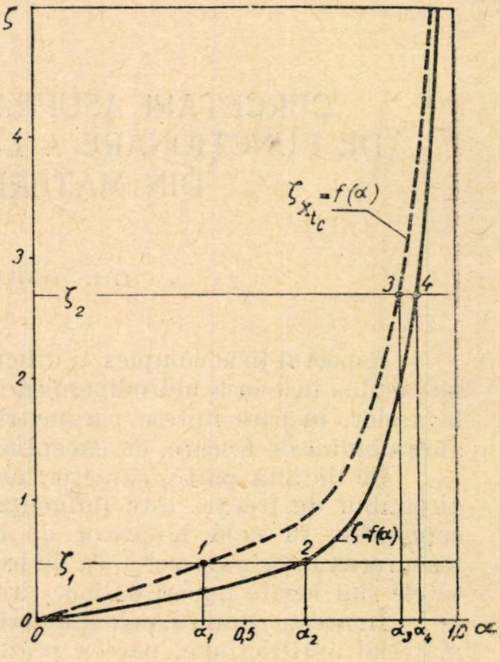


Fig. 2

Aceste curbe prezintă însă diferenţe şi faţă de curba teoretică $\zeta = f(\alpha, \lambda)$, din următoarele cauze mai importante :

— probabilităţii, mai mari sau mai mici, de a se realiza experimental exact condiţiile la limită, în cazul de faţă o zonă de suprapresiuni egală cu π etc., admise la stabilirea ecuaţiei presiunilor,

— influenţei particularităţii fizice a ansamblului de frecare, menţionate,

— aproximaţiilor admise în dezvoltările teoretice,

— erorilor de citire de care sînt afectaţi parametrii măsuraţi, şi

— ipotezei asupra variaţiei temperaturii t_c (sau a debitului de lubrifiant de care este direct legată) a lagărului, obligatorie la experimentare, pentru obţinerea unei caracteristici de sarcină $p = f(V)$ univoce.

Cu parametrii luaţi după o curbă $\zeta_{X_{t_c}} = f(\alpha_{X_{t_c}}, \lambda)$, lagărul proiectat a fi construit din elementele ansamblului X, poate fi calculat în consecinţă cît de riguros, reproducînd cît mai fidel condiţiile de experimentare.

Măsurarea grosimii minime δ_2 a filmului de lubrifiant prezintă însă în general dificultăţi. Vibraţiile din lagăr în timpul funcţionării, încovoierea fusului, geometria imperfectă a suprafeţelor active, microgeometria încă relativ rugoasă la o mare parte a cazurilor practice etc. impun rezerve cu privire la măsurarea grosimilor de film sub aproximativ $1 \div 2.10^{-3}$ mm, prin metodele şi cu aparatura curentă de care se dispune. Lagărele de la maşinile moderne lucrează însă cu coeficienţi de portanţă mari, deci tocmai cu grosimi de film reduse.

O soluţie aproximativă a problemei s-ar putea obţine în acest caz, folosind pentru excentricitatea relativă valori mai puţin riguroase şi anume, luate, pentru $\zeta_{X_{t_c}}$ calculat cu relaţia (1), din curba teoretică $\zeta = f(\alpha, \lambda)$.

Dacă se ţine seama de alura curbelor $\zeta = f(\alpha, \lambda)$, se poate vedea uşor că la valori ale lui $\zeta_{X_{t_c}}$ mai mari, de exemplu ζ_2, (fig. 2), diferenţele între $\alpha_{X_{t_c}} = \alpha_3$ şi $\alpha = \alpha_4$ nu pot fi prea mari. La valori mai mici ζ_1, între α_1 şi α_2 apar însă unele diferenţe. La valori foarte mici ale lui $\zeta_{X_{t_c}}$ diferenţa între excentricitatea relativă reală şi cea dată de curba teoretică devine iarăşi mai mică, deoarece curbele se întîlnesc în origină.

Pentru a se arăta şi unele aspecte cantitative ale metodei de determinare aproximativă a excentricităţii relative, se dau mai jos rezultatele unor cercetări experimentale făcute cu diferite ansambluri de frecare.

Materialele antifricţiune folosite la construirea cuzineţilor experimentali sînt :

— o compoziţie cu 83% Sn (Y—Sn 83) (fig. 3);

— un aliaj cu mult aluminiu, de tipul $Zn\,Al_{30}\,Cu_{1,7}$ (fig. 4);

— un bronz de plumb, de tipul Bz Pb 15 (fig. 5);

— un material plastic (I), pe bază de răşină furfurol-fenolică cu tocătură textilă (fig. 6);

— un aliaj de zinc cu puţin aluminiu, de tipul $Zn\,Al_4\,Cu_1$ (fig. 7);

— un metal alb pe bază de plumb, de tipul $Pb_{74}\,Sb_{14,9}\,Sn_{6,9}$ (fig. 8);

— un material plastic (II), pe bază de răşină crezol-rezolică cu inserţie textilă stratificată (fig. 9).

Pentru ca rezultatele să fie mai concludente, s-a adoptat metoda experimentală cu regimul de funcţionare la temperatura $t_c =$ const. a cuzinetului (caracteristica $p = f(V)$, izotermică). Încercarea s-a făcut la sarcini şi viteze continue şi la diferite regimuri t_c de funcţionare (pentru unele ansambluri chiar la trei asemenea regimuri).

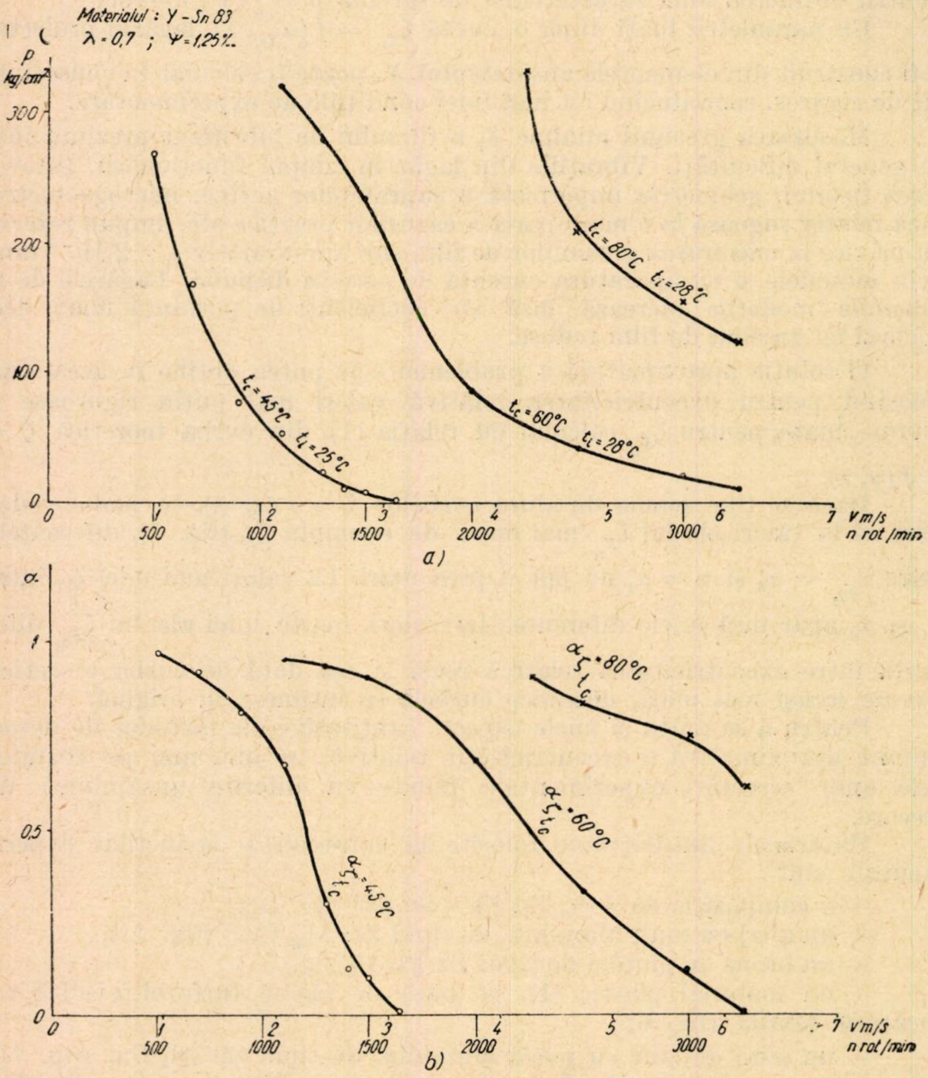

Materialul : Y - Sn 83
λ = 0,7 ; Ψ = 1,25‰
p kg/cm²
300
200
100
0
$t_c = 45°C$
$t_i = 25°C$
$t_c = 60°C$
$t_i = 28°C$
$t_c = 80°C$
$t_i = 28°C$
0
1
2
3
4
5
6
7
v m/s
500
1000
1500
2000
3000
n rot/min
a)
α
1
0,5
0
$\alpha\,t_c = 45°C$
$\alpha\,t_c = 60°C$
$\alpha\,t_c = 80°C$
b)

Fig. 3

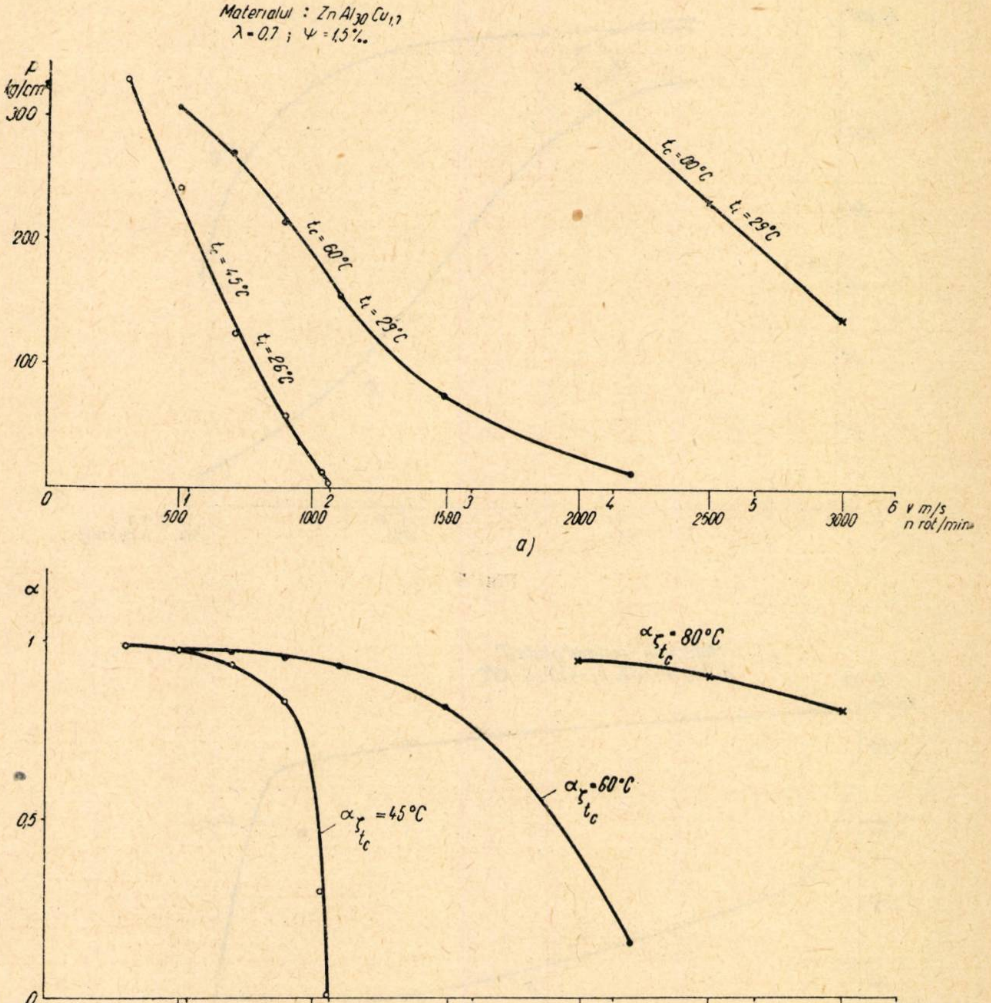

Materialul : $ZnAl_{30}Cu_{1,7}$
$\lambda = 0,7$; $\Psi = 1,5‰$
p kg/cm²
300
200
100
0
$t_c = 45°C$
$t_i = 26°C$
$t_c = 60°C$
$t_i = 29°C$
$t_c = 80°C$
$t_i = 29°C$
1
2
3
4
5
6 v m/s
500
1000
1500
2000
2500
3000
n rot/min
a)
α
1
0,5
0
$\alpha_{\zeta_{t_c}} = 45°C$
$\alpha_{\zeta_{t_c}} = 60°C$
$\alpha_{\zeta_{t_c}} = 80°C$
1
2
3
4
5
6 v m/s
500
1000
1500
2000
2500
3000
n rot/min
b.)

Fig. 4

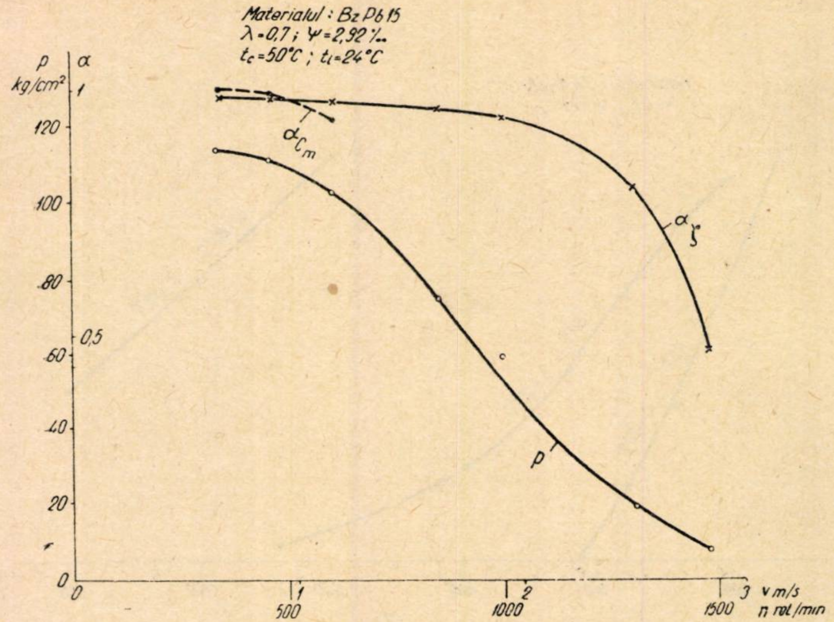

Materialul : Bz Pb 15
λ=0,7 ; Ψ=2,92 ‰
tc=50°C ; ti=24°C
p
kg/cm²
α
1
120
100
80
0,5
60
40
20
0
0
αcm
αζ
p
1
500
2
1000
3
1500
v m/s
n rot/min

Fig. 5

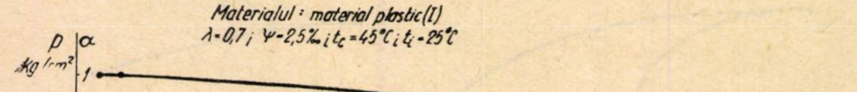

Materialul : material plastic (I)
λ=0,7 ; Ψ=2,5‰ ; tc=45°C ; ti=25°C
p
kg/cm²
α
1
120
100
80
0,5
60
40
20
0
0
αζ
αcq
p
1
500
2
1000
3
1500
V m/s
n rot/min

Fig. 6

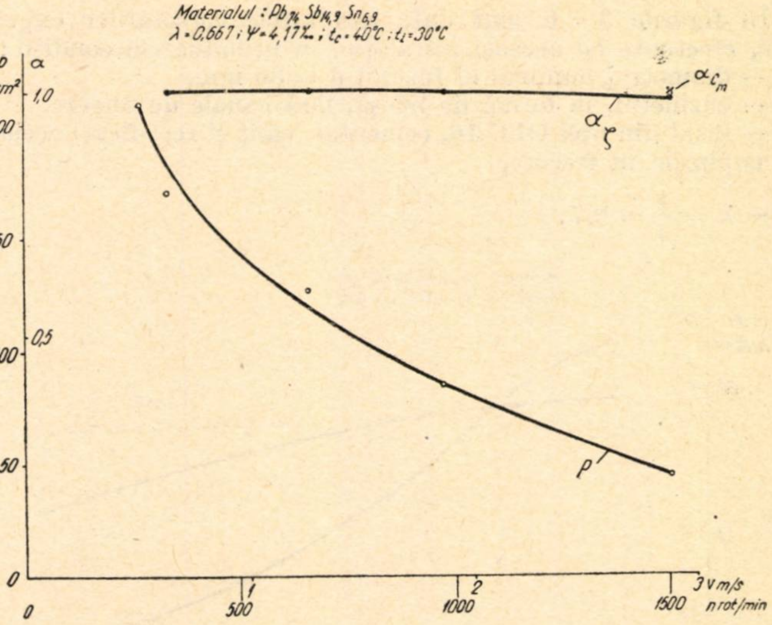

Materialul : Pb74 Sb14,9 Sn6,9
λ = 0,667 ; ψ = 4,17‰ ; tc = 40°C ; ti = 30°C
p
kg/cm²
α
1,0
200
150
0,5
100
50
0
0
1
500
2
1000
3 v m/s
1500
n rot/min
αcm
αζ
p

Fig. 7

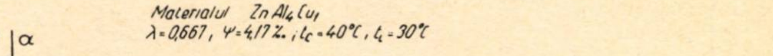

Materialul Zn Al4 Cu1
λ = 0,667 , ψ = 4,17‰ ; tc = 40°C , ti = 30°C
p
kg/cm²
α
1
200
150
0,5
100
50
0
0
1
500
2
1000
3 Vm/s
1500
n rot/min
αcm
αζ
p

Fig. 8

În figurile 3 ÷ 6 sînt date rezultatele cercetărilor experimentale proprii, efectuate cu aceeași instalație, în următoarele condiții :

— diametrul nominal al fusului $d = 36$ mm,

— cuzinetul, în formă de bucșă, fără canale de ungere,

— fusul din oțel OLC 16, cementat, călit și rectificat, același pentru toate cuplurile în frecare,

— $\lambda = \frac{b}{d} = 0{,}7$,

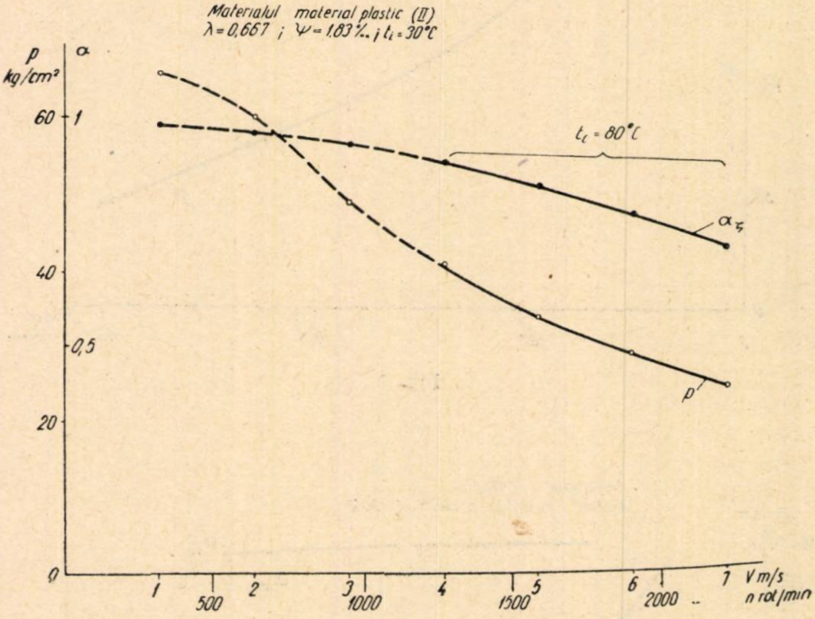


Fig. 9

— jocul relativ Ψ se arată pentru fiecare material în figura respectivă,

— lubrifiantul este ulei tip 305 (STAS), a cărui curbă de viscozitate este arătată în figura 10 ; intrarea uleiului în lagăr se face printr-un orificiu b_i cu $\varnothing = 4$ mm, situat la mijlocul cuzinetului și anume : pe direcția sarcinii în zona descărcată în cazul figurilor 3, 4 și 6, iar în cazul figurii 5, la π_2 în amonte față de direcția sarcinii ; alimentarea s-a făcut în circuit închis cu ulei sub presiunea $p_i = 1{,}5$ at = const. și la temperatura de intrare t_i (măsurată la cuzinet și arătată pe figură la fiecare material în parte) menținută constantă de-a lungul caracteristicii $p = f(V)$,

— temperatura de funcționare t_c a cuzinetului s-a măsurat pe direcția sarcinii, în zona încărcată, la mijlocul cuzinetului, la 1,5 mm distanță de suprafața activă, cu un termometru ; de-a lungul curbei $p = f(V)$ regimul de funcționare s-a considerat izotermic dacă t_c nu a variat mai mult de ± 0,2°C timp de 30 ÷ 60 minute ; t_c se arată pe figură la fiecare material în parte,

— temperatura lagărelor paliere a fost menţinută de asemenea constantă,

— caracteristicile funcţionale ale ansamblului de frecare au fost ridicate după un rodaj prealabil de cel puţin 12 ore.

În figurile 7 şi 8 sînt prezentate date experimentale extrase din cercetările făcute de Heidebroek [2] asupra variaţiei coeficientului de frecare. Ele se caracterizează prin debite de lubrifiant foarte mari, peste 40 l/h, datorite mai ales jocului ($\Psi = 4{,}17\,{}^0/_{00}$) şi presiunii de alimentare $p_i = 3{,}5$ at, deci de asemenea mari. Celelalte particularităţi experimentale sînt : diametrul fusului 60 mm, $\lambda = 0{,}667$, $t_e = 40$°C, $t_i = 30$°C, iar uleiul folosit BC8 (4,5 E° la 50°C).

Caracteristica $p = f(V)$ din figura 9 corespunde pe porţiunea între $V \cong 4 \div 7$m/s la un regim de funcţionare $t_c = 80$°C = const., iar ramura corespunzătoare la $V <$ 4 m/s punctelor de ieşire din regimul hidrodinamic (intrare în regimul mixt) stabilite pe baza curbei lui Stribeck. Această ultimă ramură a curbei $p = f(V)$ evident că nu mai este izotermică. Alte elemente experimentale sînt : diametrul fusului 60 mm, $\lambda = 0{,}667$, $\Psi = 1{,}83\,{}^0/_{00}$, $t_i = 30$°C, lubrifiantul avînd o viscozitate de 3,5°E la 50°C. Debitul de ulei a fost menţinut constant la $q = 5$ l/h.

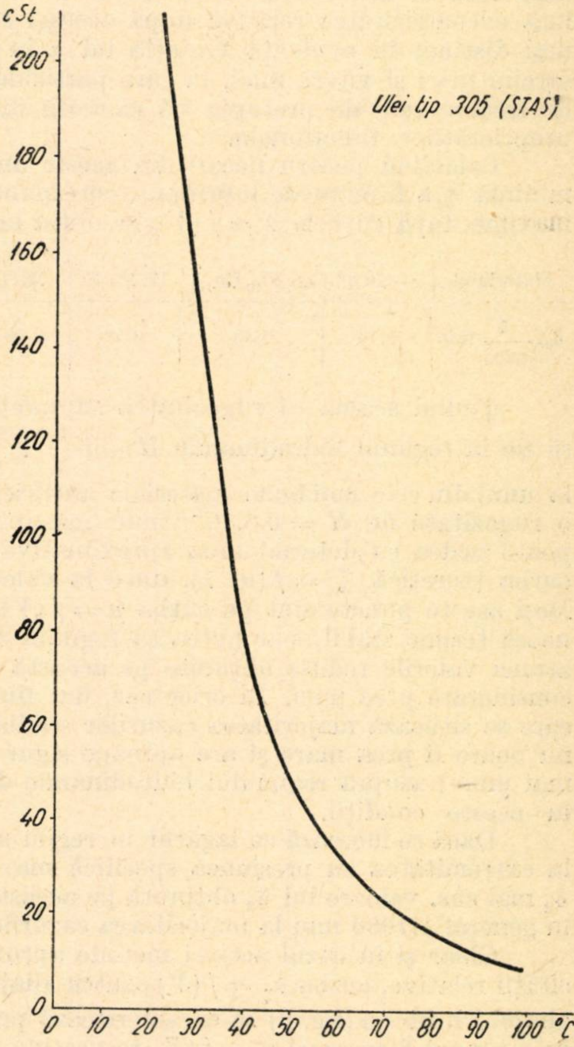


Fig. 10

Cu ajutorul soluţiei (1) s-a calculat, pentru fiecare caracteristică $p = f(V)$ şi pentru fiecare ansamblul de frecare, coeficientul de portanţă $\zeta_{x_{t_c}}$. Excentricitatea relativă corespunzătoare s-a luat după curba dată de relaţia (2) şi s-au trasat curbele $\alpha_{\zeta_{t_c}} = f(V)$.

Din aceste grafice se poate constata de exemplu că deși excentricitatea relativă s-a luat după aceeași curbă (teoretică), curbele $\alpha_\zeta = f(V)$ prezintă oarecare diferențe de alură de la un material la altul, diferențieri care apar de altfel la caracteristicile de sarcină $p = f(V)$. Faptul că s-a luat excentricitatea relativă după aceeași curbă, nu permite însă să iasă mai distinct în evidență variația lui α în regimurile de funcționare cu sarcini mari și viteze mici, în care particularitățile fizice ale ansamblului de frecare este de presupus că exercită influența cea mai mare asupra proprietăților funcționale.

Calculînd pentru fiecare din aceste ansambluri de frecare grosimea minimă δ_2 a filmului de lubrifiant, corespunzătoare excentricității relative maxime după curbele $\alpha = f(V)$, se obțin următoarele valori

Materialul	$\gamma-$Sn 83	Zn Al_{30} $Cu_{1.7}$	Bz Pb 15	MP (I)	Zn Al_4 Cu_1	Pb Sb Sn	MP (II)
$\delta_2, \frac{1}{1000}$ mm	0,79	0,35	0,58	0,094	0,15	0,15	1,05

Ținînd seama că rugozitatea suprafețelor active se recomandă [1] să fie în regimul hidrodinamic $H = \left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{10}\right) \delta_2$, și că suprafața activă la unul din cele mai bune materiale antifricțiune (Y—Sn 83) are practic o rugozitate de $H = 0{,}5.10^{-3}$ mm (măsurată cu aparatul Schmaltz), se poate vedea că determinarea aproximativă a excentricității relative din curba teoretică $\zeta = f(\alpha, \lambda)$, duce la valori puțin cam mici pentru δ_2. Deși aceste puncte sînt pe curba $p = f(V)$, deci în care lagărul funcționează termic stabil, s-ar putea ca regimul de ungere să fie totuși mixt și atunci valorile reduse obținute pe această cale pentru δ_2 nu mai pot fi considerate prea mici. În orice caz, dat fiind domeniul de valori mici în care se situează majoritatea cazurilor studiate, diferența față de realitate nu poate fi prea mare și are aproape sigur un efect pozitiv (prin δ_2 real mai mare) asupra regimului hidrodinamic de ungere la lagărele calculate în aceste condiții.

Dacă se lucrează cu lagărul în regim $p = f(V)$ sever, însă nu tocmai la extremitatea cu presiunea specifică maximă, pentru care s-a calculat δ_2 mai sus, valoare lui δ_2 obținută pe această cale aproximativă depășește în general 1/1000 mm la majoritatea cazurilor studiate.

Chiar și în cazul acestei metode aproximative de calcul a excentricității relative, curba $\alpha_\zeta = f(V)$ pentru aliajul Zn Al_4 Cu_1 (fig. 7) și pentru aliajul Pb Sb Sn (fig. 8) se caracterizează prin valori foarte mari ale lui α de-a lungul diagramei $p = f(V)$ respective. Cum s-a arătat, aceste lagăre au lucrat cu debite de lubrifiant foarte mari, peste 40 l/h, spre deosebire de celelalte ansambluri de frecare, încercate cu debite reduse (maximum 8 l/h). Răcirea deosebit de energică cu ajutorul lubrifiantului permite în asemenea cazuri o încărcare mare a lagărului și deci obținerea unor coeficienți de portanță, și în consecință a unor valori pentru excentricitatea relativă, ridicate. Curbele $\alpha_\zeta = f(V)$ prezintă în aceste cazuri de asemenea un palier foarte pronunțat.

Debitele de lubrifiant importante se realizează cu jocuri relative Ψ şi cu presiuni de alimentare p_i mari, contribuind, prin acţiunea lor reciprocă complimentară, la realizarea, cu ocazia experimentării, a unei condiţii la limită de bază (zona de suprapresiune $= \pi$). Valorile aproximative pentru α_ζ luate din curba teoretică, ar trebui să fie deci în acest caz mai exacte. Valorile mici obţinute pentru δ_2 ($0{,}15.10^{-3}$ mm), corespunzătoare la $p_{\max}$, arată totuşi că nu este chiar aşa, cauza putînd fi atribuită în acest caz absenţei parametrului temperatură (sau debit) din relaţia (1) respectiv (2), parametru indispensabil la determinarea caracteristicii de sarcină $p = f(V)$.

Încercări proprii cu un material plastic (de tipul cu care s-au făcut încercările în cazul fig. 6) cu debite mari de acelaşi ordin de mărime, au condus la o curbă $\alpha_\zeta = f(\alpha, \lambda)$ asemănătoare cu acelea din figurile 7 şi 8 (pentru aliaje metalice). Cercetări mai ample în această direcţie vor putea arăta dacă, în cazul evacuării căldurii din lagăr în mod preponderent prin lubrifiant, influenţa particularităţilor fizice ale ansamblului de frecare asupra proprietăţilor funcţionale nu trece, cantitativ, pe plan cu totul secundar. Adică, dacă nu s-ar putea, ca prin debite foarte mari de lubrifiant să se obţină lagăre cu proprietăţi funcţionale mai independente de materialul lagărului, cel puţin pentru acelea cu durate, neîntrerupte (opriri-porniri rare), lungi de funcţionare şi cu regim hidrodinamic asigurat.

Metoda de determinare aproximativă a excentricităţii relative poate fi aplicată de asemenea făcînd uz de coeficienţii adimensionali de debit C_q şi de moment C_m, în a căror expresii intră şi parametrii p, q şi f, ce pot fi determinaţi experimental.

Comparînd rezultatele obţinute în acest caz α_{C_q} şi α_{C_m} cu α_ζ de-a lungul aceleiaşi caracteristici de sarcină $p = f(V)$, se constată în unele cazuri concordanţe acceptabile. Astfel, pentru α_{C_q} mai ales la valorile mici ale lui α (fig. 6), iar pentru α_{C_m} la valorile mari ale lui α (fig. 5, 7 şi 8), Coeficientul de frecare f, necesar pentru calcularea lui C_m a fost măsurat într-un singur punct al caracteristicii $p = f(V)$, restul valorilor fiind determinate cu relaţia [3]

$$f = \frac{1}{pV}(Kq + K_0 Q_0), \tag{3}$$

în care $K_0 Q_0$ se referă la partea de căldură produsă în lagăr, disipată prin piesele instalaţiei experimentale.

Nepotrivirile mai mari, pe restul domeniului caracteristicii $p = f(V)$ şi la celelalte ansambluri de frecare, între α_ζ de o parte şi α_{C_q} şi α_{C_m} pe de altă parte, precum şi între α_{C_q} şi α_{C_m} pot fi atribuite în mare măsură nerealizării riguroase a condiţiilor la limită cînd se experimentează. În cazul lui C_m, poate predomina dificultatea separării în timpul măsurătorilor a momentului real de frecare de momentul dat de rezultanta presiunilor şi de sarcină, sau de momentele de frecare din lagărele paliere.

Pentru a obţine o precizie mai mare la calcularea lagărelor cu alunecare, apare deci necesară stabilirea unor corespondenţe, tot mai riguroase, între parametrii funcţionali urmăriţi pe cale teoretică şi experimentală. În dezvoltările teoretice, instrumentul matematic permite compararea şi apropierea soluţiilor obţinute în diferitele ipoteze. În cercetările experimentale se resimte nevoia unui mijloc similar, ca de exemplu încercări în condiţii stabilite prin prescripţii, care să ducă la rezultate comparabile. La fel de importantă poate fi considerată şi problema alegerii unor parametri comuni de tratare teoretică şi experimentală a părţii aplicative a lubrificaţiei.

Primită la redacţie la data de 13 februarie 1958.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОЧИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОДШИПНИКОВ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Точный расчет подшипника скольжения представляется в настоящее время достаточно затруднительным, вследствие отсутствия в теоретических формулах соответствующего параметра, учитывающего физические особенности трущихся частей; кроме того, экспериментальные функциональные характеристики $p = f(V)$ и т. д. всецело зависят от опытных условий (оказывающих влияние на выполнение граничных условий), методов и точности измерений.

Точный расчет возможен лишь в случае точного определения экспериментальным путем относительной эксцентричности α и построения для кривой $p_x = f(V)$ трущейся пары, например, соответствующей кривой $\zeta_x = f(\alpha_x \lambda)$ (рис. 1). Измерение минимальной толщины δ_2 пленки смазки при значениях ниже $1 - 2.10^{-3}$ мм является до сих пор затруднительным, вследствие изгибания вала, вибрации цапфы и т. д.

Используется подходящий параметр ζ и на рисунке 2 показывается, что разница $|\alpha_x| - |\alpha|$ (на теоретической кривой $\zeta = f(\alpha, \lambda)$) не является слишком важной при больших или меньших значениях относительной эксцентричности. Приближенный метод расчета подшипников может состоять в этом случае из использования значений для α, взятых с теоретической кривой.

Количественный аспект этого приближенного метода указан на рисунках 3—9 для 7 различных трущихся пар. В общем отмечается различие хода кривых $\alpha_\zeta = f(V)$ между различными трущимися парами, что, впрочем, является характерным и на диаграммах $p = f(V)$.

Приближенное определение относительной эксцентричности можно вынести и из безразмерного коэффицнента расхода C_q или из коэффициента момента C_m, причем в некоторых случаях получается соответствие межеду α_{C_q}, α_{C_m} и α_ζ (рис. 5, 6, 7 и 8). Вследствие более затруднительного выполнения экспериментальным путем граничных условий для расхода, в особенности при питании под давлением, а в отношении C_m отделение

при измерении фактического момента трения от моментов трения в вспомогательных подшипниках или от момента, данного равнодействующей давлений и нагрузкой, расхождение результатов в случае α_{C_q} и α_{C_m} является несколько большим.

Результаты, в этом отношении, могут быть значительно улучшены путем проведения экспериментальных исследований на более поддающихся сравнению основаниях, как например по определенным указаниям, построенных на принципе теоретического и экспериментального исследования вопроса смазки, основанного на возможно более многочисленных общих параметрах.

RECHERCHES SUR LES CARACTÉRISTIQUES DE FONCTIONNEMENT DES PALIERS CONFECTIONNÉS EN MATÉRIAUX DIVERS

RÉSUMÉ

Le calcul rigoureux d'un palier à glissement présente actuellement des difficultés, d'une part, en raison de l'absence, dans les formules théoriques, d'un paramètre qui tienne compte des particularités physiques du couple en frottement ; d'autre part, à cause du fait que les caractéristiques expérimentales de fonctionnement $p = f(V)$, etc. dépendent d'une manière décisive des conditions d'expérimentation (avec leur effet sur la réalisation des conditions à la limite), des méthodes et de la précision des mesures.

Un calcul rigoureux serait possible si on pouvait déterminer avec précision, par voie expérimentale, l'excentricité relative α et construire, pour un $p_x = f(V)$ d'un couple en frottement, la courbe $\zeta_x = f(\alpha_x, \lambda)$ respective, par exemple (fig. 1). La mesure de l'épaisseur minimum δ_2 de la pellicule de lubrifiant, pour les valeurs au-dessous de 1 à 2.10^{-3} mm apparaît encore comme difficile, à cause de la flexion de l'axe, des vibrations du tourillon, etc.

Faisant usage du paramètre convenable ζ, la figure 2 montre que la différence $|\alpha_x| - |\alpha|$ (sur la courbe théorique $\zeta = f(\alpha, \lambda)$) n'est pas très importante pour les valeurs plus grandes et plus petites de l'excentricité relative. Une méthode approximative de calcul des paliers pourrait être, dans ce cas, celle qui utiliserait pour α les valeurs prises sur la courbe théorique.

L'aspect quantitatif de cette méthode approximative est indiqué dans les figures 3—9 pour sept couples en frottement différents. On remarque en général une différence d'allure des courbes $\alpha_\zeta = f(V)$, d'un couple en frottement à un autre, ce qui est d'ailleurs caractéristique pour les diagrammes $p = f(V)$ également.

La détermination approximative de l'excentricité relative peut être faite également à partir du coefficient adimensionnel de débit C_q ou du coefficient de moment C_m, et l'on obtient, dans certains cas, une concordance

entre α_{C_q}, α_{C_m} et α_ζ (fig. 5, 6, 7 et 8). La réalisation expérimentale des conditions à la limite pour le débit, surtout pour le cas de l'alimentation sous pression, et, pour ce qui concerne C_m, la séparation à la mesure du moment réel de frottement des moments de frottement dans les paliers auxiliaires ou du moment donné par la résultante des pressions et de la charge apparaissant comme plus difficiles, les dispersions dans les résultats sont un peu plus élevées dans le cas de α_{C_q} et α_{C_m}.

L'efficience des résultats dans cette direction peut être sensiblement améliorée en effectuant les recherches expérimentales sur des bases plus comparables, par exemple d'après certaines prescriptions élaborées suivant le principe que le problème de la lubrification doit être traité — tant théoriquement qu'expérimentalement — par un nombre aussi élevé que possible de paramètres communs.

BIBLIOGRAFIE

1. N. TIPEI, *Hidroaerodinamica lubrificaţiei*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti (1957).
2. E. HEIDEBROEK, *Forschungen auf dem Gebiete der Lagertechnik*. A.T.Z., *14*, 349 (1941).
3. GH. VASILCA, *Studiul coeficientului de frecare într-un lagăr circular cu ajutorul curbelor $p = f\ (V)$*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1*, 75 (1957).

ASUPRA PROBLEMEI PLANE A ELASTICITĂȚII ÎN COORDONATE OBLICE

DE

PETRE P. TEODORESCU

1. Introducere. De multe ori determinarea stării de tensiune sau a stării de deformație într-un element de construcție se reduce la rezolvarea unei probleme plane de elasticitate (stare de tensiune plană sau stare de deformație plană). De altfel, noi preferăm totdeauna să efectuăm un calcul cît mai simplu (cînd acest lucru este posibil cu o aproximație suficient de bună) și să rezolvăm o problemă în două variabile în loc de o problemă spațială (în trei variabile).

O asemenea problemă se studiază în mod obișnuit folosind coordonate carteziene rectangulare, care sînt cele mai indicate în cazul grinzilor pereți cu contur dreptunghiular, de exemplu. În alte cazuri însă se pot folosi alte sisteme de coordonate, care se aleg în mod convenabil funcție de conturul domeniului plan considerat.

Astfel, pentru grinzi pereți oblice (contur paralelogram, avînd eventual una din laturi aruncată la infinit), grinzi pereți triunghiulare sau grinzi pereți trapezoidale este util să se folosească coordonate oblice. Grinzi pereți de acest fel se întîlnesc în practica inginerească; de exemplu pîlnia unui buncăr este mărginită de plăci plane cu contur triunghiular sau (mai adesea) trapezoidal care, pe lîngă acțiunea de placă supusă la încovoiere, lucrează și ca grinzi pereți, supuse la o stare de tensiune plană.

Un studiu al problemei plane a elasticității în coordonate oblice prezintă astfel un interes deosebit. Un asemenea studiu făcut, în general, în coordonate curbilinii oarecare sau, în particular, în coordonate curbilinii ortogonale și în coordonate curbilinii armonice se găsește — de exemplu — într-un articol din 1955 al lui E. Hampe [8]; s-au folosit transformările de variabilă corespunzătoare sistemelor de coordonate alese, alegîndu-se componentele tensorului eforturilor unitare sau ale vectorului deplasare tot după rețeaua de curbe coordonate.

Un studiu direct în coordonate oblice, folosind transformări de coordonate (schimbări de variabilă), a fost făcut pentru prima dată în

1916 de către H. Favre [4], care a reluat [5] acest studiu în 1942. Mai recent P. Lardy s-a ocupat atît de cazul plăcilor oblice [10], cît și de cazul grinzilor pereți oblice [11]. Unele din rezultatele studiilor sale, făcute în condițiile menționate mai sus, se pot deduce și prin particularizare din lucrarea [8] a lui E. Hampe. De asemenea N. J. Nielsen [14], J. Krettner [9] și S. T. A. Oedman [15] au publicat lucrări în legătură cu aceste plăci. Recent A. Beleș și M. Mihailescu [3] au studiat o asemenea problemă și pentru învelitori subțiri. Urmărind aceste studii (schimbările de coordonate făcute, alegerea componentelor tensorului tensiune etc.), constatăm că o alegere mai judicioasă a diferitelor mărimi ce intervin ne poate conduce la simplificări importante de calcul, astfel ca rezultatele obținute să constituie o generalizare naturală a rezultatelor cunoscute din cazul problemei în coordonate carteziene ortogonale.

De aceea considerăm că un studiu local (în jurul și în vecinătatea unui punct din corp) direct în coordonate oblice este util, deoarece ne permite să ne dăm mai bine seama de mărimile geometrice și mecanice ce intervin, precum și de modul în care se comportă acestea; în cele ce urmează vom încerca să prezentăm un astfel de studiu, în care (spre deosebire de P. Lardy) vom alege anumite schimbări de coordonate și anumite componente pentru diferitele mărimi întîlnite (pentru eforturi unitare alegem componentele normală și tangențială, după cum a procedat și W. Flügge [6], [7] într-un studiu general asupra variației eforturilor unitare în jurul unui punct într-o învelitoare subțire) care să ne conducă la un studiu local și global (punerea condițiilor pe contur) cît mai simplu. De asemenea, trebuie să menționăm că, din această cauză, rezultatele obținute de noi nu se pot deduce prin simplă particularizare din cele corespunzătoare unor coordonate curbilinii oarecare.

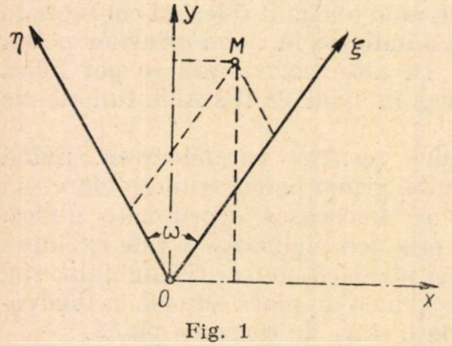


Fig. 1

2. Schimbări de axe de coordonate; schimbări de variabilă. Alegem un sistem de axe de coordonate $\xi O \eta$, (fig. 1) care fac între ele un unghi $\omega < \pi$ și ducem bisectoarea exterioară Ox [înclinată cu unghiul $(\pi - \omega)/2$ față de cele două axe] și bisectoarea interioară Oy (înclinată cu $\omega/2$ față de cele două axe). Urmărind o idee dată de M. Mihailescu [13], putem face astfel o schimbare de axe de coordonate, care să păstreze anumite proprietăți de simetrie.

Coordonatele unui punct curent se vor putea scrie sub forma

$$x = (\xi - \eta) \sin \frac{\omega}{2} ,$$
$$y = (\xi + \eta) \cos \frac{\omega}{2} , \qquad (1)$$

sau rezolvînd în raport cu coordonatele oblice

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left(x \operatorname{cosec}\frac{\omega}{2} + y \sec\frac{\omega}{2}\right), \\ \eta &= -\frac{1}{2}\left(x \operatorname{cosec}\frac{\omega}{2} - y \sec\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Folosind formulele de derivare ale unei funcţii compuse şi ţinînd seama de derivatele parţiale ale relaţiilor (2), găsim operatorii

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\operatorname{cosec}\frac{\omega}{2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\sec\frac{\omega}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Aplicînd succesiv formulele (3), putem scrie operatorul Δ al lui Laplace sub forma

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\cos\omega\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\operatorname{cosec}^2\omega. \tag{4}$$

De asemenea obţinem

$$\begin{aligned} \Delta\Delta = \Bigg[\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} - 4\cos\omega\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\,\partial\eta} + 2\,(2+\cos 2\,\omega)\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2} - \\ - 4\cos\omega\,\frac{\partial^4}{\partial\xi\partial\eta^3} + \frac{\partial^4}{\partial\eta^4}\Bigg]\operatorname{cosec}^4\omega. \end{aligned} \tag{5}$$

3. Eforturi unitare. Echilibru elastic. Vom lua în considerare componentele obişnuite[1] ale efortului unitar : componenta normală şi cea tangenţială (fig. 2). Introducem astfel tensorul eforturilor unitare sub forma

$$\mathscr{T}_\sigma \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_\xi & \tau_{\xi\eta} \\ & \cdot \\ \tau_{\eta\xi} & \sigma_\eta \end{Bmatrix}, \tag{6}$$

care ne determină în întregime starea de tensiune în jurul unui punct.

Pentru aceasta vom considera un element infinit mic de formă triunghiulară, decupat din grinda perete[2] şi acţionat de eforturi unitare ca în figura 2. Grosimea grinzii perete fiind luată egală cu unitatea, ne vom referi numai la elemente de linie din planul median. Am ales pentru eforturile unitare convențiile de semne obișnuite, τ_n avînd semnul pozitiv cînd rotește elementul pe care acționează în sensul acelor unui ceasornic. Forțele masice sînt proporționale cu elementul de arie, iar eforturile unitare sînt proporționale cu elementul de linie; deci putem neglija pe primele în raport cu celelalte în scrierea ecuațiilor de echilibru.

---

[1] Spre deosebire de noi, P. Lardy [11] foloseşte componentele paralele cu axele $O\xi$ şi $O\eta$, care însă îşi pierd semnificaţia fizică de mai sus.

[2] În cele ce urmează ne vom referi la grinzi pereţi, situîndu-ne în cazul unei stări de tensiune plană ; rezultatele rămîn valabile şi pentru cazul unei stări de deformaţie plană.

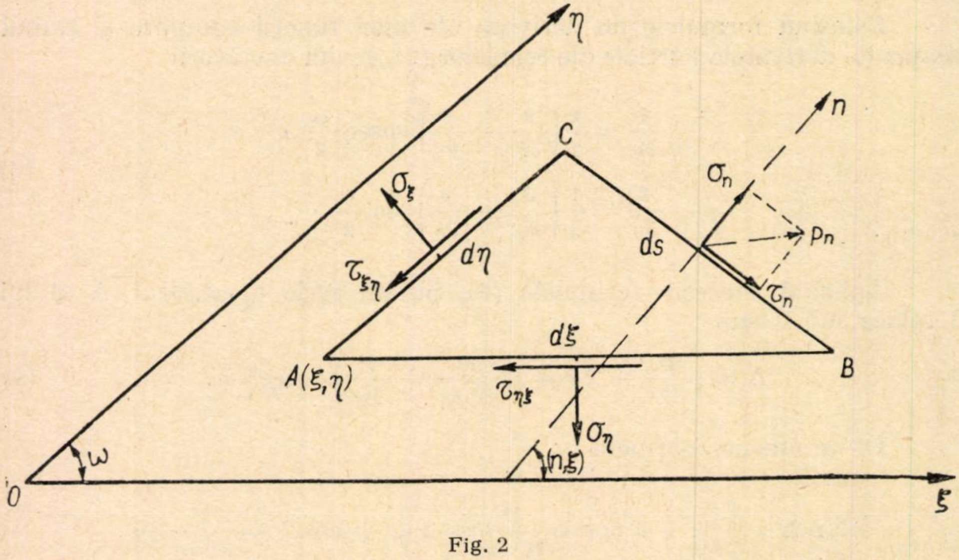


Fig. 2

Ecuația de moment în raport cu mijlocul laturii BC ne va da

$$\tau_{\xi\eta}\, d\eta \frac{ds}{2} \cos\left[(n, \xi) - \omega\right] - \tau_{\eta\xi}\, d\xi \frac{ds}{2} \cos(n, \xi) -$$

$$- \sigma_\xi\, d\eta \left\{\frac{d\eta}{2} + \frac{ds}{2} \sin\left[(n, \xi) - \omega\right]\right\} + \sigma_\eta\, d\xi \left[\frac{d\xi}{2} - \frac{ds}{2} \sin(n, \xi)\right] = 0. \quad \text{(a)}$$

Dacă ținem seama de

$$\frac{ds}{\sin \omega} = \frac{d\xi}{\cos\left[(n, \xi) - \omega\right]} = \frac{d\eta}{\cos(n, \xi)}, \quad (7)$$

găsim relația

$$\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi} = (\sigma_\xi - \sigma_\eta) \operatorname{ctg} \omega, \quad (8)$$

care generalizează legea parității eforturilor unitare tangențiale din cazul coordonatelor carteziene rectangulare și se reduce la aceasta făcînd $\omega = \pi/2$.

Ecuația de proiecție pe direcția normalei $\overline{n}$ se va scrie

$$\sigma_n\, ds = - \sigma_\xi\, d\eta \sin\left[(n, \xi) - \omega\right] + \sigma_\eta\, d\xi \sin(n, \xi) +$$

$$+ \tau_{\xi\eta}\, d\eta \cos\left[(n, \xi) - \omega\right] + \tau_{\eta\xi}\, d\xi \cos(n, \xi)\,; \quad \text{(b)}$$

dacă ţinem seama de (7) şi (8) obţinem, după unele transformări,

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_\xi + \sigma_\eta) + \frac{1}{2}(\sigma_\xi - \sigma_\eta)\cos 2(n, \xi) + \tau_{\eta\xi}\sin 2(n, \xi) + \\ + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\zeta})\operatorname{ctg}\omega\cos^2(n, \xi). \tag{9}$$

Analog, prin proiecţie pe direcţia lui τ_n, obţinem

$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_\xi - \sigma_\eta)\sin 2(n, \xi) - \tau_{\eta\xi}\cos 2(n, \xi) + \\ + \frac{1}{2}(\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\operatorname{ctg}\omega\sin 2(n, \xi). \tag{10}$$

Prin particularizare din (9) şi (10) sau scriind direct echilibrul unor elemente infinit mici (fig. 3, *a* şi *b*), putem găsi relaţiile de trecere de la eforturile unitare în coordonate carteziene rectangulare la cele în coordonate oblice

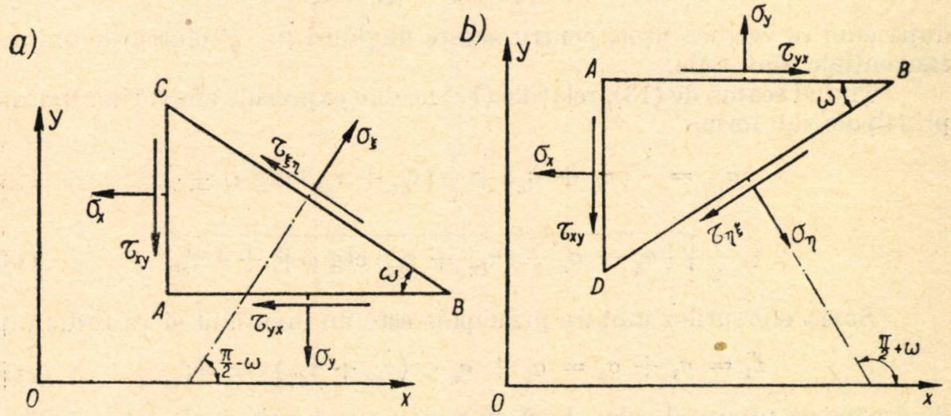

a)
C
y
σ_x
τ_{xy}
$\tau_{\xi\eta}$
σ_ξ
ω
A
B
τ_{yx}
σ_y
$\frac{\pi}{2}-\omega$
O
x
b)
σ_y
y
τ_{yx}
A
B
ω
σ_x
τ_{xy}
$\tau_{\eta\xi}$
σ_η
D
$\frac{\pi}{2}+\omega$
O
x

Fig. 3

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_x\cos^2\frac{\omega}{2} + \sigma_y\sin^2\frac{\omega}{2} + \tau_{xy}\sin\omega, \\ \sigma_\eta &= \sigma_x\cos^2\frac{\omega}{2} + \sigma_y\sin^2\frac{\omega}{2} - \tau_{xy}\sin\omega, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin\omega + \tau_{xy}\cos\omega, \\ \tau_{\eta\xi} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin\omega - \tau_{xy}\cos\omega. \end{aligned} \tag{11'}$$

Rezolvînd în raport cu σ_x, σ_y, τ_{xy}, putem scrie și relațiile de trecere de la eforturile unitare în coordonate rectangulare la cele în coordonate oblice

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2}(\sigma_\xi + \sigma_\eta) - \frac{1}{2}(\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2}, \\ \sigma_y &= \frac{1}{2}(\sigma_\xi + \sigma_\eta) + \frac{1}{2}(\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\,\mathrm{ctg}\,\frac{\omega}{2}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}(\tau_{\xi\eta} - \tau_{\eta\xi})\sec\omega = \frac{1}{2}(\sigma_\xi - \sigma_\eta)\,\mathrm{cosec}\,\omega. \tag{12'}$$

Anulînd derivatele în raport cu $(n,\ \xi)$ ale funcțiilor (9) și (10) găsim valorile extreme ale eforturilor unitare. Astfel direcțiile principale vor fi date de

$$\mathrm{tg}\,2\,(n,\ \xi) = \frac{2\,\tau_{\eta\xi}}{\sigma_\xi - \sigma_\eta + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\mathrm{ctg}\,\omega}; \tag{13}$$

după cum se verifică ușor, pentru aceste unghiuri $(n,\ \xi)$ eforturile unitare tangențiale sînt nule.

Ținînd seama de (13), relațiile (12) ne dau expresiile eforturilor unitare principale sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{1}{2}(\sigma_\xi + \sigma_\eta) + \frac{1}{2}(\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\,\mathrm{ctg}\,\omega \pm \\ &\pm \frac{1}{2}\sqrt{[\sigma_\xi - \sigma_\eta + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\,\mathrm{ctg}\,\omega]^2 + 4\,\tau_{\eta\xi}^2} \end{aligned} \tag{14}$$

Suma eforturilor unitare principale este un invariant și va fi dată de

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_\xi + \sigma_\eta + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\,\mathrm{ctg}\,\omega; \tag{15}$$

de asemenea produsul celor două eforturi unitare principale este un invariant de forma

$$I_2 = \sigma_1\,\sigma_2 = \sigma_\xi\,\sigma_\eta - \tau_{\eta\xi}^2 + \sigma_\eta\,(\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\,\mathrm{ctg}\,\omega. \tag{16}$$

Deci eforturile unitare principale vor fi date de o ecuație de forma

$$\sigma^2 - I_1\,\sigma + I_2 = 0. \tag{17}$$

Pentru direcții care bisectează direcțiile principale obținem eforturi unitare tangențiale maxime sau minime date de

$$\tau_{\substack{\max\\ \min}} = \pm\,\frac{1}{2}\sqrt{[\sigma_\xi - \sigma_\eta + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\,\mathrm{ctg}\,\omega]^2 + 4\,\tau_{\eta\xi}^2}\,. \tag{18}$$

Ținînd seama de relațiile (13) și (14) precum și de formula

$$\mathrm{tg}\,2\,(n,\ \xi) = \frac{2\,\mathrm{tg}\,(n,\ \xi)}{1 - \mathrm{tg}^2\,(n,\ \xi)}, \tag{c}$$

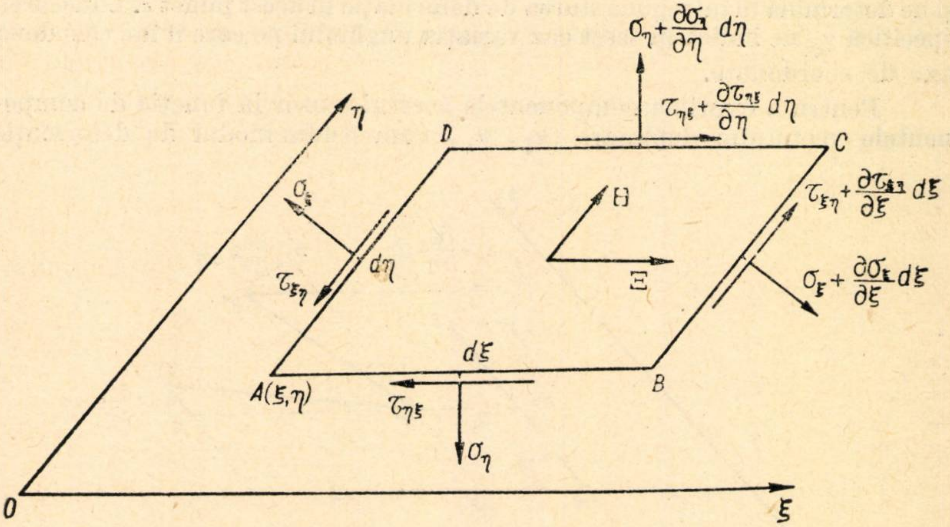
găsim cu uşurinţă

$$\operatorname{tg}(n, \xi) = \frac{\sigma_{1,2} - \sigma_\xi - (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi}) \operatorname{ctg} \omega}{\tau_{\eta\xi}}, \tag{19}$$

relaţie care ne determină unghiurile corespunzătoare celor două direcţii principale.

Folosind rezultatele de mai sus putem scrie şi ecuaţiile liniilor izostatice, traiectoriile eforturilor unitare tangenţiale maxime etc.

Studiul făcut se referă la comportarea eforturilor unitare în jurul unui punct. În completarea studiului local va trebui să vedem ce se întîmplă cînd trecem de la un element de linie ce trece printr-un punct la alt element de linie ce trece printr-un punct învecinat. Pentru aceasta vom scrie ecuaţiile de echilibru (proiecţii) ale unui element infinit mic (fig. 4) de formă paralelogram, de dimensiuni $d\xi \; d\eta$, decupat din corp. Ţinînd seama de variaţia eforturilor unitare prin trecerea de la o faţă a paralelogramului la o faţă infinit vecină şi notînd cu Ξ şi H componentele după cele două axe ale forţei masice, obţinem ecuaţiile de echilibru sub forma



$\sigma_\eta + \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \eta} d\eta$
$\tau_{\eta\xi} + \frac{\partial \tau_{\eta\xi}}{\partial \eta} d\eta$
η
D
C
σ_ξ
Η
$\tau_{\xi\eta} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \xi} d\xi$
dη
$\tau_{\xi\eta}$
Ξ
$\sigma_\xi + \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} d\xi$
dξ
A(ξ,η)
B
$\tau_{\eta\xi}$
σ_η
0
ξ

Fig. 4

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}(\tau_{\eta\xi} \sin \omega - \sigma_\eta \cos \omega) + \Xi \sin^2 \omega = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial \xi}(\tau_{\xi\eta} \sin \omega - \sigma_\xi \cos \omega) + \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \eta} + H \sin^2 \omega = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

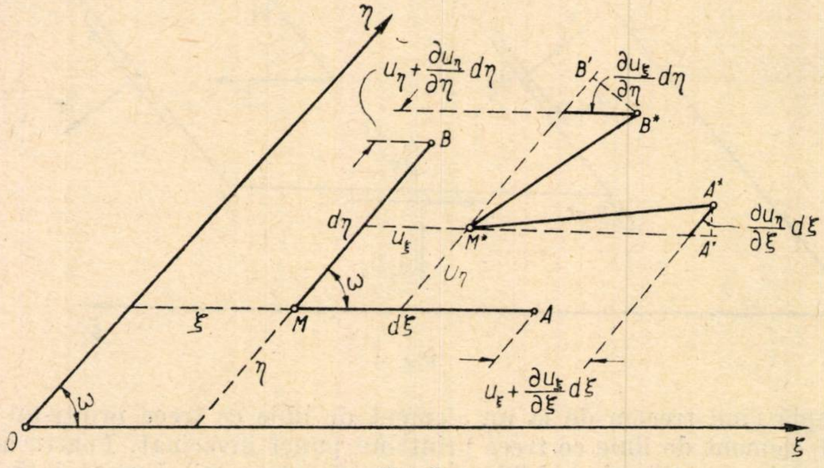
ecuaţii diferenţiale care exprimă condiţiile de ordin mecanic pe care trebuie să le verifice eforturile unitare.

4. Deplasări. Deformații specifice. Aspectul mecanic al problemei, studiat mai sus, trebuie completat cu un aspect geometric. Pentru un punct (ξ, η) din planul median al grinzii perete trebuie să calculăm deplasările și deformațiile specifice. Tensorul corespunzător al deformațiilor specifice se va putea scrie sub forma

$$\mathcal{T}_{\varepsilon} \equiv \left\{\begin{matrix} \varepsilon_{\xi} & \frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta} & \varepsilon_{\eta} \end{matrix}\right\} \tag{21}$$

și ne determină în întregime starea de deformație în acest punct ε. Lunecarea specifică $\gamma_{\xi\eta}$ ne indică în acest caz variația unghiului pe care îl fac cele două axe de coordonate.

Pentru a exprima componentele acestui tensor în funcție de componentele vectorului deplasare (u_{ξ}, u_{η}) vom studia modul de deformație



η
$u_\eta + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} d\eta$
B'
$\frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} d\eta$
B*
B
A*
dη
$\frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} d\xi$
u_ξ
M*
A'
u_η
ω
ξ
M
dξ
A
η
$u_\xi + \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} d\xi$
ω
O
ξ

Fig. 5

al elementului unghiular AMB, care devine $A^{\star}M^{\star}B^{\star}$ (fig. 5). Luînd segmentele $\overline{M^{\star}A^{\star}} \cong \overline{M^{\star}A'}$ și $\overline{M^{\star}B^{\star}} \cong \overline{M^{\star}B'}$ obținem relațiile

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi} &= \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \xi} \cos \omega , \\ \varepsilon_{\eta} &= \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} \cos \omega , \end{aligned} \tag{22}$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \left(\frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \xi} \right) \sin \omega . \tag{22'}$$

Dacă eliminăm pe u_ξ, u_η între aceste ecuaţii găsim ecuaţia de continuitate

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\xi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\eta}{\partial \xi^2} = \sin \omega \frac{\partial^2}{\partial \xi \, \partial \eta} \left[\gamma_{\xi\eta} + (\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta) \operatorname{ctg} \omega \right]. \tag{23}$$

Fie un element de linie după direcţia On (fig. 6, *a*), determinat de punctele $A\,(\xi, \eta)$ şi $B\,(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$. După deformaţie acest element se mută în A^*B^*, astfel încît deplasările punctului A vor fi (u_ξ, u_η), iar deplasările punctului B vor fi $\left(u_\xi + \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} d\eta\right)$ şi $\left(u_\eta + \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} d\eta\right)$. Prin deplasarea segmentului A^*B^* paralel cu el însuşi pînă cînd A^* coincide cu A, găsim segmentul AB' (fig. 6, *b*). Putem aprecia astfel variaţia deplasării prin trecerea de la A la B. Componentele acestei deplasări, după direcţiile ξ şi η, vor fi

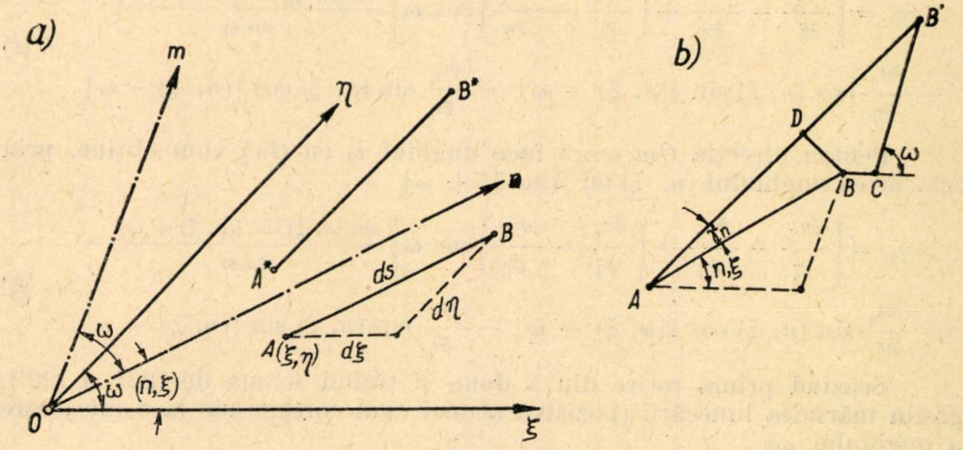


Fig. 6

$$\overline{BC} = \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} d\eta,$$
$$\overline{CB'} = \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} d\eta, \tag{d}$$

iar componentele după direcţiile AB' şi normala la aceasta vor fi

$$\overline{BD} = -\,\overline{BC} \sin\,(n, \xi) - \overline{CB'} \sin\,[(n, \xi) - \omega],$$
$$\overline{DB'} = \overline{BC} \cos\,(n, \xi) + \overline{CB'} \cos\,[(n, \xi) - \omega]. \tag{e}$$

Observînd că alungirea (scurtarea) specifică pe direcția n este dată de raportul $\overline{DB'}/\overline{AB}$, unde $\overline{AB} = ds$ și ținînd seama de (d), (e), (22), (22′) și de (fig. 6, *a*)

$$-\frac{d\xi}{\sin[(n,\xi)-\omega]} = \frac{d\eta}{\sin(n,\xi)} = \frac{ds}{\sin\omega}, \tag{24}$$

găsim

$$\begin{gathered}\varepsilon_n = \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta) + \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\cos 2(n,\xi) + \frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta}\sin 2(n,\xi) - \\ - \left[\frac{1}{2}(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\sin 2(n,\xi) + \gamma_{\xi\eta}\sin^2(n,\xi)\right]\operatorname{ctg}\omega.\end{gathered} \tag{25}$$

De asemenea unghiul γ_n de rotație a elementului AB este dat de raportul BD/AB

$$\begin{gathered}\gamma_n = \left[\frac{\partial u_\xi}{\partial\xi} - \frac{\partial u_\eta}{\partial\eta} + \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial\xi} - \frac{\partial u_\xi}{\partial\eta}\right)\cos\omega\right]\frac{\sin(n,\xi)\sin[(n,\xi)-\omega]}{\sin\omega} - \\ - \frac{\partial u_\eta}{\partial\eta}\cos(n,\xi)\sin[(n,\xi)-\omega] - \frac{\partial u_\xi}{\partial\eta}\sin(n,\xi)\cos[(n,\xi)-\omega].\end{gathered} \tag{f}$$

Pentru direcția *Om* (care face unghiul ω cu *On*) vom obține, prin înlocuirea unghiului (n, ξ) cu $[(n, \xi) + \omega]$

$$\begin{gathered}\gamma_m = \left[\frac{\partial u_\xi}{\partial\xi} - \frac{\partial u_\eta}{\partial\eta} + \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial\xi} - \frac{\partial u_\xi}{\partial\eta}\right)\cos\omega\right]\frac{\sin(n,\xi)\sin[(n,\xi)+\omega]}{\sin\omega} - \\ - \frac{\partial u_\eta}{\partial\xi}\sin(n,\xi)\cos[(n,\xi)+\omega] - \frac{\partial u_\xi}{\partial\eta}\cos(n,\xi)\sin[(n,\xi)+\omega].\end{gathered} \tag{g}$$

Scăzînd prima rotire din a doua și ținînd seama de (22) și (22′), găsim mărimea lunecării (pozitivă atunci cînd corespunde la o micșorare a unghiului ω)

$$\gamma_{nm} = (\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta')\sin 2(n,\xi) - \gamma_{\xi\eta}\cos 2(n,\xi). \tag{26}$$

Observăm că relațiile (25) și (26) generalizează pe cele cunoscute din cazul coordonatelor rectangulare; spre deosebire însă de acestea, ele nu sînt de aceeași formă cu cele de la variația eforturilor unitare în jurul unui punct. Se poate face și în acest caz un studiu al formulelor (25) și (26), determinîndu-se direcțiile principale și valorile extreme ale deformațiilor specifice.

Este de asemenea interesant să vedem modul de trecere de la rezultatele în coordonate ortogonale la cele în coordonate oblice. Pentru aceasta observăm că, în coordonate carteziene rectangulare, deplasările vor fi

$$\begin{gathered}u = (u_\xi - u_\eta)\sin\frac{\omega}{2}, \\ v = (u_\xi + u_\eta)\cos\frac{\omega}{2},\end{gathered} \tag{27}$$

date de aceeași lege ca și schimbarea de variabilă (1). Putem scrie de asemenea

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{1}{2}\left(u \operatorname{cosec}\frac{\omega}{2} + v \sec\frac{\omega}{2}\right), \\ u_\eta &= -\frac{1}{2}\left(u \operatorname{cosec}\frac{\omega}{2} - v \sec\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Folosind operatorii (3) și ținînd seama de faptul că în coordonate rectangulare deformațiile specifice sînt date de

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{29'}$$

găsim relațiile care ne exprimă deformațiile specifice în coordonate oblice funcție de cele în coordonate rectangulare

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos\omega + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin\omega, \\ \varepsilon_\eta &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos\omega - \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin\omega, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\gamma_{\xi\eta} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin\omega. \tag{30'}$$

Putem obține și relațiile inverse

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta) - \frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta}\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta) + \frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\gamma_{xy} = (\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\operatorname{cosec}\omega. \tag{31'}$$

Cu ajutorul formulelor de transformare de mai sus putem obține cu ușurință rezultatele în coordonate oblice din cele cunoscute în cazul coordonatelor rectangulare.

5. Legea lui Hooke. Aspectul mecanic și geometric al problemei este întregit cu un aspect de natură fizică ; va trebui să stipulăm o anumită relație între eforturi unitare și deformații specifice, relație care să fie cît mai simplă cu putință.

Pentru aceasta vom calcula[1]) întîi eforturile unitare normale paralele cu cele două axe de coordonate. Facem pe rînd $(n, \xi) = 0$ şi $(n, \xi) = \omega$ în formula (9) şi ţinem seama de (8); găsim astfel eforturile unitare normale

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\xi &= \sigma_\eta + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi}) \operatorname{ctg} \omega, \\ \bar{\sigma}_\eta &= \sigma_\eta + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi}) \operatorname{ctg} \omega. \end{aligned} \tag{h}$$

Legea generalizată a lui Hooke ne va da în acest caz expresiile deformaţiilor specifice ε_ξ, ε_η în funcţie de eforturile unitare $\bar{\sigma}_\xi$, σ_η şi σ_ξ, $\bar{\sigma}_\eta$. Vom putea scrie relaţiile

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{E} [\sigma_\xi - \mu\, \sigma_\eta + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi}) \operatorname{ctg} \omega], \\ \varepsilon_\eta &= \frac{1}{E} [\sigma_\eta - \mu\, \sigma_\xi + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi}) \operatorname{ctg} \omega]. \end{aligned} \tag{32}$$

Observăm de asemenea că eforturile unitare tangenţiale ne dau lunecări a căror sumă constituie variaţia unghiului ω, lunecarea specifică $\gamma_{\xi\eta}$. Putem scrie

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{1}{2G} (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi}). \tag{33}$$

Aceste relaţii se reduc în particular la cele cunoscute în cazul coordonatelor carteziene rectangulare; ele se pot deduce de asemenea ţinînd seama de formulele de transformare menţionate mai sus, precum şi de legea lui Hooke scrisă în coordonate rectangulare.

Mai trebuie arătat că, în ecuaţia (33), constanta G introdusă nu este independentă de celelalte două.

Pentru aceasta vom observa că dacă avem

$$\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sigma, \tag{34}$$

rezultă o lege de paritate a eforturilor unitare tangenţiale

$$\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi} = \tau. \tag{35}$$

în baza relaţiei (8). În acest caz ecuaţia (13) ne dă

$$\operatorname{tg} 2\, (n, \xi) = \operatorname{tg} \omega, \tag{i}$$

de unde

$$(n, \xi) = \frac{\omega}{2} + k \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1). \tag{36}$$

Eforturile unitare principale vor fi date de (14) sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma + \tau \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}, \\ \sigma_2 &= \sigma - \tau \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}. \end{aligned} \tag{37}$$

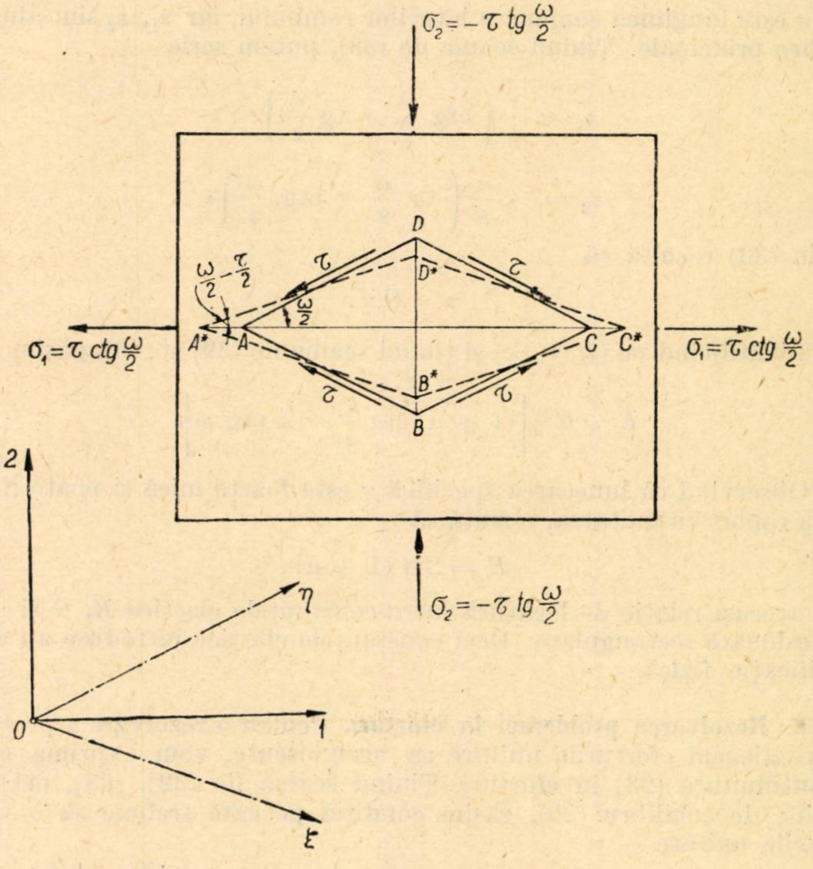
---

[1]) Ne vomr eferi la cazul unei stări de tensiune plană.

Invers vom considera un element de formă dreptunghiulară, acționat de eforturile unitare principale

$$\sigma_1 = \tau \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}, \quad \sigma_2 = -\tau \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}. \tag{38}$$

Pe un element din interior $ABCD$, de formă rombică (fig. 7), cu laturile AB și AD paralele cu axele $O\xi$, respectiv $O\eta$ și înclinate cu $\omega/2$



$\sigma_2 = -\tau\, tg \frac{\omega}{2}$
$\sigma_1 = \tau\, ctg \frac{\omega}{2}$
$\sigma_1 = \tau\, ctg \frac{\omega}{2}$
$\sigma_2 = -\tau\, tg \frac{\omega}{2}$
D
D*
A*
A
C
C*
B*
B
τ
$\frac{\omega}{2} - \frac{\tau}{2}$
$\frac{\omega}{2}$
2
η
1
0
ξ

Fig. 7

față de direcția principală 1, vor acționa numai eforturile unitare tangențiale τ. În acest caz elementul se deformează devenind $A^*B^*C^*D^*$, iar unghiul ω se transformă în $(\omega - \gamma)$. Vom putea exprima acest unghi cu ajutorul relației

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}, \tag{j}$$

De asemenea, ţinînd seama de modul de deformaţie al rombului *ABCD*, vom scrie

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{a\sin\frac{\omega}{2}(1+\varepsilon_2)}{a\cos\frac{\omega}{2}(1+\varepsilon_1)}, \tag{k}$$

unde a este lungimea comună a laturilor rombului, iar ε_1, ε_2 sînt alungirile specifice principale. Ţinînd seama de (38), putem scrie

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{\tau}{E}\left(\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}+\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right),\\ \varepsilon_2&=-\frac{\tau}{E}\left(\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}\right),\end{aligned} \tag{39}$$

iar din (33) rezultă că

$$\tau=G\gamma. \tag{40}$$

Identificînd pe (j) cu (k) şi ţinînd seama de (39) şi (40), găsim relaţia

$$E=G\gamma\left[(1+\mu)\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}-2\operatorname{ctg}\omega\right]. \tag{l}$$

Observînd că lunecarea specifică γ este foarte mică şi poate fi neglijată în raport cu unitatea, rezultă că

$$E=2G(1+\mu), \tag{41}$$

adică aceeaşi relaţie de legătură între constantele elastice E, G şi μ ca şi în coordonate rectangulare. Deci constantele elastice introduse au aceeaşi semnificaţie fizică.

6. Rezolvarea problemei în eforturi. Pentru o rezolvare a problemei, în care alegem eforturile unitare ca necunoscute, vom exprima ecuaţia de continuitate (23) în eforturi. Ţinînd seama de (32), (33), (41) şi de ecuaţiile de echilibru (20), găsim condiţia pe care trebuie să o verifice eforturile unitare

$$\Delta\left[\sigma_\xi+\sigma_\eta+(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})\operatorname{ctg}\omega\right]=-(1+\mu)\left(\frac{\partial\Xi}{\partial\xi}+\frac{\partial H}{\partial\eta}\right). \tag{42}$$

Eforturile unitare vor fi date deci de sistemul (20), (42). În lipsa forţelor masice, din ecuaţiile (20) rezultă

$$\begin{aligned}\sigma_\xi&=\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\quad \tau_{\eta\xi}\sin\omega-\sigma_\eta\cos\omega=-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi},\\ \sigma_\eta&=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\quad \tau_{\xi\eta}\sin\omega-\sigma_\xi\cos\omega=-\frac{\partial\psi}{\partial\eta}.\end{aligned} \tag{m}$$

Dacă ţinem seama de (8), căpătăm

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\,, \tag{n}$$

de unde

$$\varphi = \frac{\partial F}{\partial \eta}\,;\ \psi = \frac{\partial F}{\partial \xi}\,. \tag{o}$$

Eforturile unitare capătă deci forma

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\,, \\ \sigma_\eta &= \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\,, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta}\cos\mathrm{ec}\,\omega + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\operatorname{ctg}\omega\,, \\ \tau_{\eta\xi} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta}\operatorname{cosec}\omega + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\operatorname{ctg}\omega\,. \end{aligned} \tag{43'}$$

În cazul particular al coordonatelor rectangulare regăsim reprezentarea dată de G. B. Airy [1], [2] în 1862.

Dacă integrăm relaţiile (22) în raport cu ξ, respectiv η şi ţinem seama de legea lui Hooke (32) şi de reprezentările (43) şi (43′) putem scrie expresiile componentelor deplasării sub forma

$$\begin{aligned} E\sin^4\omega\,[u_\xi - (-\,\omega^0\,\eta + u_\xi^0)] &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\,d\xi - \cos\omega \int \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\,d\eta + \\ &+ (3\cos^2\omega - \mu\sin^2\omega)\frac{\partial F}{\partial \xi} - \cos\omega\,(2 + \cos^2\omega - \mu\sin^2\omega)\frac{\partial F}{\partial \eta} - \\ &- f_1(\eta) + f_2(\xi)\cos\omega\,, \\ E\sin\omega\,[u_\eta - (\omega^0\,\xi + u_\eta^0)] &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\,d\eta - \cos\omega \int \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\,d\xi + \\ &+ (3\cos^2\omega - \mu\sin^2\omega)\frac{\partial F}{\partial \eta} - \cos\omega\,(2 + \cos^2\omega - \mu\sin^2\omega)\frac{\partial F}{\partial \xi} - \\ &- f_2(\xi) + f_1(\eta)\cos\omega\,, \end{aligned} \tag{44}$$

unde u_ξ^0, u_η^0; ω^0 sînt deplasările, respectiv rotirea corpului considerat ca un rigid, iar $f_1(\eta)$ şi $f_2(\xi)$ sînt integrale particulare ale ecuaţiei cu derivate parţiale

$$\begin{aligned} &\frac{df_1(\eta)}{d\eta} + \frac{df_2(\xi)}{d\xi} = \\ &= \int \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3}\,d\xi + \int \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3}\,d\eta - 4\cos\omega\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right) + 2\,(2 + \cos 2\omega)\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta}\,\cdot \end{aligned} \tag{45}$$

Ținînd seama de (42), (43) și (43′) rezultă că funcția $F = F(\xi, \eta)$ este biarmonică

$$\Delta\Delta\, F = 0. \tag{46}$$

De asemenea remarcăm că introducînd peste tot în membrul al doilea din (45) integrale duble (în raport cu ξ și η), găsim operatorul (5); ținînd seama de ecuația (46), putem afirma deci că ecuația (45) este cu variabile separate, de forma

$$\frac{df_1(\eta)}{d\eta} + \frac{df_2(\xi)}{d\xi} = F_1(\eta) + F_2(\xi), \tag{47}$$

așa că folosim integralele particulare

$$\begin{aligned} f_1(\eta) &= \int F_1(\eta)\, d\eta, \\ f_2(\xi) &= \int F_2(\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{48}$$

Pentru rezolvarea problemei, studiul local făcut trebuie completat cu un studiu global, care să privească corpul în ansamblul său (condiții pe contur). Pentru aceasta vom considera elementul de formă triunghiulară din figura 2 situat cu latura *BC* pe conturul corpului. Notînd cu $p_{n\xi}$, $p_{n\eta}$ proiecțiile sarcinii exterioare superficiale unitare pe direcții normale la axele $O\eta$, respectiv $O\xi$, găsim

$$\begin{aligned} p_{n\xi}\, ds &= \sigma_\xi\, d\eta - (\tau_{\eta\xi} \sin\omega - \sigma_\eta \cos\omega)\, d\xi, \\ p_{n\eta}\, ds &= -\, \sigma_\eta d\xi + (\tau_{\xi\eta} \sin\omega - \sigma_\xi \cos\omega)\, d\eta. \end{aligned} \tag{49}$$

Aici am ținut seama de faptul că la o creștere pozitivă ds (în sens invers acelor unui ceasornic) corespunde $d\xi < 0$ și $d\eta > 0$. Relațiile (7) ne mai permit să scriem aceste relații sub forma

$$\begin{aligned} p_{n\xi} \sin\omega &= \sigma_\xi \cos(n, \xi) + (\tau_{\eta\xi} \sin\omega - \sigma_\eta \cos\omega) \cos[(n, \xi) - \omega], \\ p_{n\eta} \sin\omega &= \sigma_\eta \cos[(n, \xi) - \omega] + (\tau_{\xi\eta} \sin\omega - \sigma_\xi \cos\omega) \cos(n, \xi). \end{aligned} \tag{50}$$

De asemenea, dacă înlocuim pe (43) și (43′) în (49) găsim

$$\begin{aligned} p_{n\xi} &= \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right), \\ p_{n\eta} &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right), \end{aligned} \tag{51}$$

de unde, prin integrări succesive se pot găsi expresiile funcției F, ale derivatei normale și ale derivatei tangențiale cu ajutorul încărcării p_n pe contur. Se ajunge la interpretarea cunoscută din cazul coordonatelor carteziene, conform căreia funcția F într-un punct al conturului este momentul încovoietor într-o grindă fictivă care urmărește conturul, în sens invers acelor unui ceasornic, pornind dintr-un punct fix, arbitrar ales; iar derivata tangențială $\frac{\partial F}{\partial s}$ și derivata normală $\frac{\partial E}{\partial n}$ a funcției eforturilor sînt forţa tăietoare (cu semn schimbat), respectiv forţa axială în această grindă.

Cu aceasta problema plană a elasticităţii este în întregime formulată în coordonate oblice.

De asemenea, eliminînd eforturile unitare, putem găsi o rezolvare în deplasări a problemei, analogă celei dată de K. Marguerre [12] în cazul coordonatelor rectangulare.

7. Forţe masice. Forţe de inerţie. În cazul unor forţe masice oarecare, va trebui să alegem un sistem de integrale particulare pentru ecuaţiile (20). Se observă că putem lua

$$\sigma_\xi = -\sin^2\omega \int \Xi\, d\xi, \qquad \sigma_\eta = -\sin^2\omega \int \mathrm{H}\, d\eta, \tag{52}$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}\sin 2\omega \int \Xi\, d\xi, \qquad \tau_{\eta\xi} = -\frac{1}{2}\sin 2\omega \int \mathrm{H}\, d\eta. \tag{52'}$$

În cazul particular al coordonatelor rectangulare ajungem la rezultatele pe care le-am prezentat în lucrări anterioare [17], [22]. Putem însă alege şi alte integrale particulare

$$\sigma_\xi = 0\,, \quad \sigma_\eta = 0, \tag{53}$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\sin\omega \int \mathrm{H}\ d\xi, \qquad \tau_{\eta\xi} = -\sin\omega \int \Xi\ d\eta, \tag{53'}$$

care nu mai corespund în cazul coordonatelor rectangulare. În acest caz, ecuaţia (42) ne arată că funcţia F trebuie să satisfacă ecuaţia

$$\Delta\Delta F = \cos\ \omega\ \Delta\ (\int \Xi\, d\eta + \int \Xi\, d\xi) - (1+\mu)\left(\frac{\partial \Xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \eta}\right), \tag{54}$$

deci va trebui să căutăm o integrală particulară a acestei ecuaţii.

Putem face un studiu analog cu cel din [22], arătînd că funcţia F şi derivatele sale parţiale sînt univoc determinate dacă sarcinile exterioare, care acţionează pe contur, îşi fac echilibru cu forţele masice.

Un caz particular important îl constituie acţiunea forţelor de inerţie proporţionale cu derivata a doua în raport cu timpul a deplasărilor mici u_ξ, u_η. Putem face un studiu analog cu cel din [19], găsind rezultate care generalizează pe acestea.

8. Influenţa variaţiei de temperatură. Această influenţă se manifestă prin deformaţiile specifice liniare la care dă naştere; aceste deformaţii cauzează la rîndul lor eforturi unitare suplimentare. Legea lui Hooke

(32), (33) va trebui completată prin adăugarea unor deformații specifice suplimentare

$$\varepsilon'_{\xi} = \varepsilon'_{\eta} = \alpha\, T \ ; \ \gamma'_{\xi\eta} = 0, \tag{55}$$

unde T este variația de temperatură, iar α este coeficientul de dilatație termică.

Ținînd seama de ecuația de continuitate (23), ecuația (42) va deveni (în lipsa forțelor masice)

$$\Delta\, [\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\, \mathrm{ctg}\, \omega + E\alpha T] = 0. \tag{56}$$

Cu aceste rezultate putem rezolva problema, folosind metodele indicate de noi în [23].

9. Grinzi pereți anizotrope. În cazul unor corpuri anizotrope legea lui Hooke capătă o formă mai complicată, după cum s-a arătat în [24]. Pentru diferite cazuri particulare de anizotropie putem găsi rezultate interesante, în special pentru grinzi pereți ortotrope (rezultate care generalizează în acest caz pe cele date în [25]).

10. Metode de calcul. Pentru cîteva cazuri particulare simple se pot folosi așa-numitele metode elementare de calcul (bazate pe polinoame biarmonice). Aceste metode se pot de altfel folosi și punînd condiții pe contur în puncte (metode aproximative în acest caz), după cum se arată în [18].

Polinoamele biarmonice se pot calcula cu ușurință, mai ales dacă observăm că se poate folosi relația

$$F = \Phi + (a + b\xi + c\eta)\ \Psi \qquad (a,\ b,\ c = \text{const.}), \tag{57}$$

care ne arată modul de alcătuire a unei funcții biarmonice cu ajutorul a două funcții armonice.

În cazuri mai complicate este util să se folosească dezvoltările în serie. Pentru aceasta se pornește de la integralele armonice particulare

$$\Phi = e^{\lambda\, [\xi + (\cos\omega \pm i \sin\omega)\, \eta]}, \tag{58}$$

unde λ este o constantă arbitrară, și de la cele ce se obțin schimbînd între ele rolurile variabilelor ξ și η. De aici obținem integralele sub forma unor produse între linii trigonometrice și exponențiale sau linii hiperbolice, cu ajutorul cărora alcătuim seriile care folosesc în calcul.

Dacă aplicăm metodele de calcul indicate în [16], [20] și [21], putem rezolva problema unui contur paralelogram triunghiular sau trapezoidal în cazul unor încercări oarecare cu sarcini exterioare. Ideea de bază constă în faptul că toate (sau unele) din laturile care alcătuiesc conturul sînt linii de coordonate, iar dezvoltările în serie folosite ne indică cu ușurință modul de variație al sarcinilor exterioare de-a lungul lor.

Primită la redacție la data de 31 iulie 1957.

О ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ УПРУГОСТИ В КОСОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе, используя оригинальным образом некоторые составляющие напряжений и удельных деформаций, автор излагает теорию плоской упругости в косоугольных координатах. Приводятся весьма важные результаты по напряжениям, смещениям и удельным деформациям. Указывается также способ решения задачи в усилиях.

Рассматриваются и некоторые частные задачи, как например: случай каких-либо объемных сил и сил инерции, влияние вариации температуры и случай анизотропных балок-стенок. Приводится затем несколько методов решения задачи в случае параллелограмного, треугольного или трапециевидного контуров.

SUR LE PROBLÈME PLAN DE L'ÉLASTICITÉ EN COORDONNÉES OBLIQUES

RÉSUMÉ

En utilisant d'une manière originale certaines composantes des tensions et des déformations spécifiques, l'auteur présente une théorie de l'élasticité plane en coordonnées obliques. On donne les résultats les plus importants pour les tensions et pour les déplacements et les déformations spécifiques. On indique aussi la solution en efforts du problème.

On attaque également quelques problèmes particuliers : le cas des forces massiques quelconques et des forces d'inertie, l'influence de la variation de la température et le cas des poutres-parois anisotropes. On indique en outre quelques méthodes pour résoudre les cas du contour parallélogramme, triangle et trapèze.

BIBLIOGRAFIE

1. G.-B. AIRY, British Assoc. Adv. Sci. Rept. (1862).
2. — *On the Strains in the Interior of Beams.* Phil.-Trans., **153**,49 (1863).
3. A. BELEŞ, M. MIHAILESCU, *Ecuațiile de echilibru în coordonate oblice la învelitorile subțiri de grosime constantă.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *3*, 631 (1956).
4. H. FAVRE, *Sur l'introduction des coordonnées obliques dans la théorie de l'élasticité.* Bull. Techn. de la Suisse Romande, 231 şi 333 (1916).
5. — *Contribution à l'étude des plaques obliques.* Schweitz. Bauzeitung (1942).
6. W. FLÜGGE, *Die Spannungsermittlung in Scheiben und Schalen aus Eisenbeton.* Ing. Archiv, **I**, *5*, 481 (1930).
7. — *Statik und Dynamik der Schalen.* Verlag von J. Springer, Berlin (1957).
8. E. HAMPE, *Zur Berechnung von beliebig begrenzten Scheiben* (Rahmenecken, Bogenscheibenbrücken, usw.) *mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion*, Baupl. und Bautechn. Ann., **9**, *3*, 127 (1955).

9. J. KRETTNER, *Beitrag zur Berechnung schiefwinklinger Platten.* Ing. Archiv, 47 (1954).
10. P. LARDY, *Die strenge Lösung des Problems der schiefen Platte.* Schweiz. Bauzeitung, **67**, *15*, 207 (1949).
11. — *Die Elastizitätstheorie der parallelogrammförmigen Scheibe*, Schweiz. Bauzeitung, **67**, *31*, 419 (1949).
12. K. MARGUERRE, *Ebenes und achsensymmetrisches Problem der Elastizitätstheorie*, Zamm, **13**,*6*, 437 (1933).
13. M. MIHAILESCU, *Teoria de încovoiere la paraboloizii hiperbolici.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *2*, 42 (1956).
14. N. J. NIELSEN, *Skaevwinklede Plader. G.E.C. Gad.*, Copenhaga, (1944).
15. S.T.A. OEDMAN, *Studies of Boundary Value Problems.* (partea a III-a). *Oblique Plate in Oblique Co-ordinates*, Proc. of Swed. Cem. and Concr. Res. Inst., Stockholm, *25* (1955).
16. P. P. TEODORESCU, *Calculul grinzilor pereţi în caz general de rezemare şi încărcare.* Ed. Min. Înv., Bucureşti (1955).
17. — *O metodă de rezolvare a problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare.* Comunicările Acad. R.P.R., **VI**, *2*, 285 (1956).
18. — *O metodă de aproximare a condiţiilor pe contur în cazul problemei plane a elasticităţii.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *3*, 655 (1956).
19. — *Asupra unei metode generale de rezolvare a problemei plane a elastodinamicii.* Comunicările Acad. R.P.R., **VI**, *6*, 795 (1956).
20. — *Asupra calculului grinzilor pereţi cu o singură deschidere. Nota I.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1*, 115 (1957).
21. — *Asupra calculului grinzilor pereţi cu o singură deschidere. Nota* II. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *2*, 451 (1957).
22. — *Asupra problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de matematică şi fizică, **IX**, *2*, 481 (1957).
23. — *Asupra problemei plane a termoelasticităţii.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de matematică şi fizică, **IX**, *2*, 471 (1957).
24. — *Asupra problemei plane a elasticităţii unor corpuri anizotrope. I. Relaţii între eforturi unitare şi deformaţii specifice.* Comunicările Acad. R.P.R., **VII**, *4*, 395 (1957).
25. — *Asupra problemei plane a elasticităţii unor corpuri anizotrope. III. Corpuri ortotrope.* Comunicările Acad. R.P.R., **VII**, *5*, 503 (1957).

O PROBLEMĂ DE TIP MIXT DIN ÎNCOVOIEREA PLĂCILOR ELASTICE

DE

CRISTIAN STĂNESCU

În lucrarea de față se cercetează o problemă de tip mixt referitoare la încovoierea unei plăci elastice subțiri, izotropă, încărcată cu o sarcină normală pe planul ei median, presupunînd că pe anumite porțiuni ale frontierei placa este încastrată, pe restul frontierei placa fiind liberă.

Acest caz a format obiectul unui studiu întreprins de G. F. Mandjavidze [1], în legătură cu cercetarea unei ecuații integrale singulare cu coeficienți discontinui. Pornind de la reprezentările integrale date de D. I. Șcherman [2] în elasticitatea plană, autorul stabilește ecuația integrală singulară corespunzătoare; în continuare, se aplică procedeul de regularizare dat în monografia lui N. I. Mushelișvili [3] și se ajunge final la o ecuație integrală, care prezintă însă serioase dificultăți de rezolvare.

Soluția dată în lucrarea de față este mai simplă; cu ajutorul unei reprezentări conforme, problema este redusă la o problemă de tip Hilbert [3] pentru planul infinit secționat în lungul unor arce, aparținînd aceluiași cerc.

1. ECUAȚIILE PROBLEMEI. CONDIȚII LA LIMITĂ

În cele ce urmează, se consideră că planul median al plăcii subțiri ocupă în planul complex $z = x + iy$ un domeniu simplu conex finit S și se admite că frontiera domeniului, care constă din conturul simplu închis L, are o curbură ce variază în mod continuu. Să presupunem acum că frontiera este împărțită în $2n$ părți din punctele a_k, b_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ (fig. 1). Introducem notația

$$L' = \sum_{k=1}^{n} L_k$$

pentru a indica totalitatea arcelor netede L_k, avînd extremitățile a_k și b_k și prevăzute cu un sens pozitiv determinat (de la a_k la b_k) ; restul frontierei pe care o notăm cu L'' va corespunde atunci totalității arcelor $b_k\, a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $a_{n+1} = a_1$).

Vom considera că partea L' a frontierei este liberă, iar L'' este încastrată.

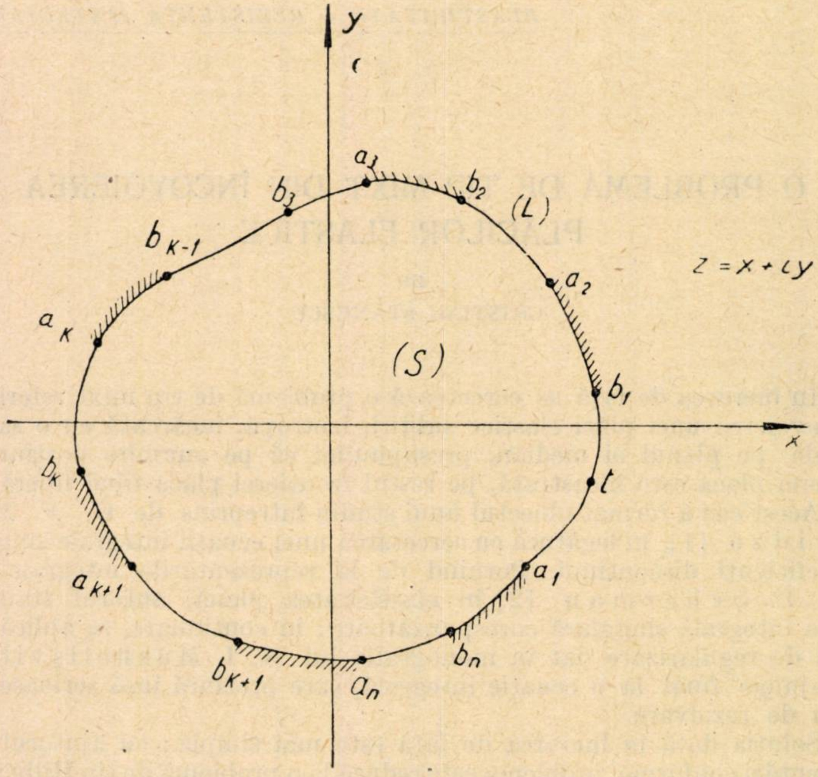


Fig. 1

Fie $w\,(x, y)$ deplasarea normală a plăcii încărcată cu sarcina $p\,(x, y)$, normală pe planul ei median.

În acest caz, problema se reduce la soluționarea ecuației [4]

$$D\, \Delta\, \Delta\, w = p\,(x, y) \tag{1}$$

cu următoarele condiții la limită

$$\begin{aligned} &\Delta w - (1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0\,; \frac{\partial\,(\Delta w)}{\partial \nu} + (1-\mu)\,\frac{\partial^3 w}{\partial s^2\, \partial \nu} = 0 \text{ pe } L', \\ &w = 0 \qquad ; \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \qquad\qquad \text{pe } L'', \end{aligned} \tag{2}$$

unde D reprezintă rigiditatea la încovoiere a plăcii, μ este constanta lui Poisson, Δ operatorul lui Laplace, iar ν este normala exterioară la conturul L.

Pentru soluţionare, fie w_0 o soluţie particulară oarecare a ecuaţiei (1). Atunci funcţia $W = w - w_0$ va fi o funcţie biarmonică în domeniul S şi, după cum se ştie, are forma [5]

$$W = Re\,[\bar{z}\,\varphi(z) + \chi(z)], \tag{3}$$

unde $\varphi(z)$ şi $\chi(z)$ sînt funcţii olomorfe arbitrare în domeniul S.

Introducînd, pentru simplitate, notaţia

$$\chi'(z) = \psi(z) \tag{4}$$

se obţine din (2) condiţia la limită pentru $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ [1], [6]

$$\begin{aligned} &\varkappa\,\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = f_1(t) + i\,At + B + i\,C \qquad \text{pe } L', \\ &\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f_2(t) \qquad \text{pe } L'', \end{aligned} \tag{5}$$

unde $\varkappa$ este o constantă definită de

$$\varkappa = \frac{3+\mu}{1-\mu} > 1, \tag{6}$$

iar A, B, C sînt constante reale, necunoscute a priori, şi care iau valorile A_k, B_k, C_k pe arcul L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Funcţiile $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ sînt cunoscute, ele fiind date de

$$\begin{aligned} f_1(t) = &-\frac{1}{1-\mu}\int_{a_k}^{t}\left\{\Delta w_0 - (1-\mu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} + i\int_{s_{a_k}}^{s}\left[\frac{\partial(\Delta w_0)}{\partial\nu} + \right.\right. \\ &\left.\left. + (1-\mu)\frac{\partial^3 w_0}{\partial s^2\,\partial\nu}\right]ds\right\}dt \qquad (t \text{ pe } L_k), \\ f_2(t) = &-\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + i\,\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \qquad (t \text{ pe } L''). \end{aligned}$$

În expresia lui $f_1(t)$ limitele inferioare, a_k şi s_{a_k}, corespund respectiv afixului şi abscisei curbilinii a extremităţii a_k a arcului L_k, iar limitele superioare, t şi s, au aceleaşi semnificaţii ele referindu-se la un punct curent situat pe arcul L_k.

2. SOLUŢIA PROBLEMEI

Fie $z = \omega(\zeta)$ transformarea conformă care reprezintă domeniul S pe interiorul cercului de rază unitate din planul ζ şi de frontieră γ. Vom considera cazul cînd funcţia $\omega(\zeta)$ este un polinom [1])

$$z = w(\zeta) = \sum_{j=1}^{m} d_j\,\zeta^j \quad (d_m \neq 0) \tag{7}$$

---

[1]) În mod analog se poate cerceta cazul domeniilor ale căror funcţii de reprezentare pe cerc sînt funcţii raţionale, dar datorită simplităţii expunerii ne vom limita la cazul polinomului.

coeficientul d_1 fiind evident diferit de zero pentru ca reprezentarea să fie biunivocă.

Notăm (fig. 2) cu α_k, β_k acele puncte de pe circumferința γ care corespund punctelor a_k, b_k de pe conturul L, prin γ' acea parte a circumferinței care corespunde lui L', iar prin γ'' restul acesteia; în acest caz, arcelor L_k le corespund arcele γ_k și sensul de la α_k la β_k coincide cu sensul pozitiv pe γ_k.

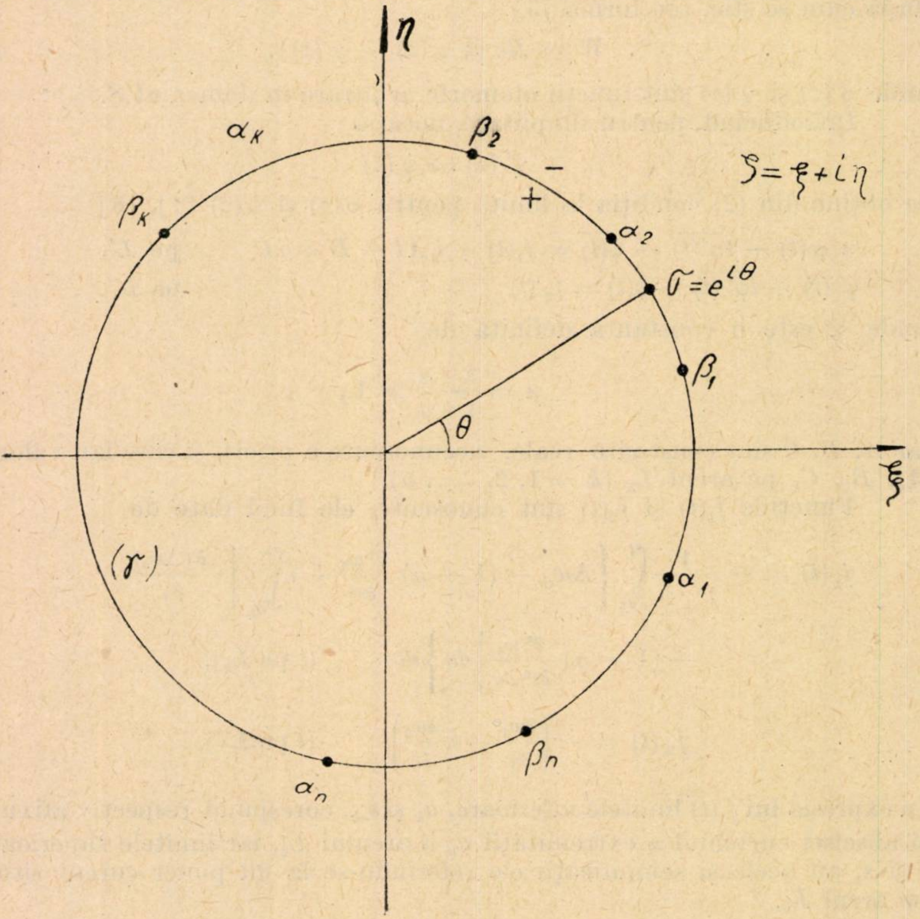


Fig. 2

În continuare vom nota cu $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ transformatele funcțiilor $\varphi(z)$, $\psi(z)$. Funcțiile $\varphi(\zeta)$ și $\psi(\zeta)$ sînt evident olomorfe în domeniul $|\zeta| < 1$ și prin urmare se pot dezvolta în serie Taylor; mai mult încă, din cauza gradului de arbitrar al acestor funcții putem scrie

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k \quad ; \quad \psi(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k' \zeta^k, \tag{8}$$

în care c_k, c'_k sînt constante complexe. Condiția la limită (5), transcrisă în domeniul transformat ζ, este

$$\begin{aligned} &\varkappa\,\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\,\overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = f_1(\sigma) + iA\,\omega(\sigma) + B + iC \quad \text{pe } \gamma', \\ &\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\,\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f_2(\sigma) \quad \text{pe } \gamma'', \end{aligned} \tag{9}$$

punctul $\sigma = e^{i\theta}$ aparținînd circumferinței γ[1] ($|\zeta| = 1$).

Să remarcăm că în (9), f_1 și f_2, determinate inițial ca funcții de t, pot fi considerate ca funcții date de σ, deoarece avem $t = \omega(\sigma)$. Reamintim că constantele reale A, B, C iau valorile A_k, B_k, C_k, dacă σ aparține arcului γ_k și că ele se determină ulterior.

Condiția la limită (9) se poate reduce ușor la rezolvarea unei probleme de tip Hilbert [3] în cazul contururilor deschise.

În acest scop vom extinde funcția $\varphi(\zeta)$, definită inițial pentru $|\zeta| < 1$ și în exteriorul cercului de rază unitate, adică pentru $|\zeta| > 1$ în modul următor [2]) [7]

$$\varphi(\zeta) = -\frac{\omega(\zeta)}{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\,\overline{\varphi'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} - \overline{\psi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}. \tag{10}$$

Se constată pe baza relației (10), că funcția $\varphi(\zeta)$ este olomorfă în tot planul[3]) cu excepția punctului infinit care este un pol.

Pentru a găsi partea principală, observăm că pentru $|\zeta| > 1$ putem scrie

$$\frac{\omega(\zeta)}{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \sum_{j=0}^{m} e_j\,\zeta^j + 0\left(\frac{1}{\zeta}\right) \tag{11}$$

calcularea coeficienților e_j ($j = 0, 1, \ldots, m$) necesitînd operații algebrice elementare pentru o funcție de reprezentare (7) cunoscută.

Deducem atunci, în baza formulelor (10) și (11) și a dezvoltărilor (8), că în apropierea punctului de la infinit avem

$$\varphi(\zeta) = -\sum_{p=0}^{m} \Lambda_p\,\zeta^p + \text{o funcție olomorfă}, \tag{12}$$

---

[1]) Este evident să $\omega'(\sigma) \neq 0$ peste tot pe γ (conturul L avînd o curbură ce variază în mod continuu).

[2]) Datorită acestei extinderi, problema se reduce numai la determinarea funcții $\varphi(\zeta)$. Din relația (9) se poate deduce $\psi(\zeta)$ în funcție de $\varphi(\zeta)$, care este definită acum în tot planul ζ, afară de punctele aparținînd circumferinței γ (a se vedea relația (28)).

[3]) Pentru $[\zeta] < 1$, a se vedea (8); se remarcă că transformarea $z = \omega(\zeta)$ fiind biunivocă, $\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ nu se anulează în exteriorul și nici pe cercul γ.

în care

$$\Lambda_p = \sum_{k=1}^{m-p+1} k\, \bar{c}_k\, e_{p+k-1} \tag{13}$$

În cele ce urmează, vom căuta funcția $\varphi(\zeta)$ sub forma

$$\varphi(\zeta) = \Phi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f_2(\sigma)\, d\sigma}{\sigma - \zeta} - \sum_{p=0}^{m} \Lambda_p\, \zeta^p . \tag{14}$$

În acest caz este ușor de văzut că funcția $\Phi(\zeta)$ este necesar să se anuleze la infinit și, în baza condițiilor (9), satisface următoarei condiții la limită

$$\Phi^+(\sigma) - \Phi^-(\sigma) = 0 \qquad \text{pe } \gamma'', \tag{15}$$

$$\varkappa\, \Phi^+(\sigma) + \Phi^-(\sigma) = f(\sigma) + (\varkappa + 1) \sum_{p=0}^{m} \Lambda_p\, \sigma^p + \\ + i A\, \omega(\sigma) + B + i C \quad \text{pe } \gamma', \tag{16}$$

prin semnele (+) sau (−) notînd valorile la limită pe care le ia funcția $\Phi(\zeta)$ pe partea stîngă, respectivă dreaptă, a lui γ (vezi fig. 2). În condiția (16), $f(\sigma)$ este o funcție cunoscută; ea este dată

$$f(\sigma) = f_1(\sigma) - \frac{\varkappa - 1}{2} f_2(\sigma) - \frac{\varkappa + 1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f_2(\sigma_0)\, d\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma} \tag{17}$$

integrala fiind luată în valoarea principală.

Relația (15) arată că partea γ'' a frontierei nu este o linie de salturi a funcției $\Phi(\zeta)$, adică $\Phi(\zeta)$ este olomorfă în planul ζ secționat în lungul lui γ'. Pentru determinarea acestei funcții dispunem de condiția (16). Prin urmare, funcția $\Phi(\zeta)$ este o soluție a unei probleme de tip Hilbert [3] în cazul contururilor deschise $\gamma_k = \alpha_k\beta_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ și, în cele ce urmează vom căuta soluția problemei aparținînd clasei h_{2n} [1]), care se anulează la infinit.

Funcția canonică de clasa dată, a problemei neomogene este

$$X(\zeta) = \prod_{k=1}^{n} (\zeta - \alpha_k)^{\frac{1}{2} - i\delta} (\zeta - \beta_k)^{\frac{1}{2} + i\delta}, \tag{18}$$

unde

$$\delta = \frac{\ln \varkappa}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{3 + \mu}{1 - \mu}, \tag{19}$$

---

[1]) Prin soluție aparținînd clasei h_{2n} se înțelege soluția care rămîne mărginită în vecinătatea tuturor extremităților α_k și β_k, care în cazul de față sînt nesingulare (a se vedea [3], partea a II-a, pag. 325).

prin $X(\zeta)$ înțelegîndu-se ramura olomorfă în planul ζ, secționat în lungul lui γ', și pentru care, pentru valori mari ale lui $|\zeta|$, avem

$$\lim_{|\zeta|\to\infty} |\zeta^{-n} X(\zeta)| = 1. \tag{20}$$

Soluția problemei neomogene este [3]

$$\Phi(\zeta) = \frac{X(\zeta)}{2\pi\varkappa i}\int_{\gamma'} \frac{f(\sigma) + (\varkappa+1)\sum_{p=0}^{m} \Lambda_p \sigma^p + iA\,\omega(\sigma) + B + iC}{X^+(\sigma)(\sigma-\zeta)}\, d\sigma \tag{21}$$

cu condițiile

$$\int_{\gamma'} \frac{\sigma^j\,[f(\sigma) + (\varkappa+1)\sum_{p=0}^{m} \Lambda_p \sigma^p + iA\,\omega(\sigma) + B + iC]\, d\sigma}{X^+(\sigma)} = 0 \tag{22}$$

$$(j = 0, 1, \ldots, n-1),$$

care exprimă că $\Phi(\zeta)$ se anulează la infinit.

În (21) și (22), precum și în relațiile care vor urma, prin $X^+(\sigma)$ s-a notat valoarea pe care o capătă funcția $X(\zeta)$ pe partea stîngă a lui γ'.

Să remarcăm acum că integrala

$$\frac{\varkappa+1}{2\pi\varkappa i}\int_{\gamma'} \frac{\sum_{p=0}^{m} \Lambda_p \sigma^p}{X^+(\sigma)(\sigma-\zeta)}\, d\sigma$$

se calculează ușor sub formă finită. Aplicînd teorema reziduurilor se obține

$$\frac{\varkappa+1}{2\pi\varkappa i}\int_{\gamma'} \frac{\sum_{p=0}^{m} \Lambda_p \sigma^p\, d\sigma}{X^+(\sigma)(\sigma-\zeta)} = \frac{\sum_{p=0}^{m} \Lambda_p \zeta^p}{X(\zeta)} - P(\zeta), \tag{23}$$

unde $P(\zeta)$ este un polinom determinat prin condiția [1]

$$\lim_{|\zeta|\to\infty}\left[\frac{\sum_{p=0}^{m} \Lambda_p \zeta^p}{X(\zeta)} - P(\zeta)\right] = 0. \tag{24}$$

Rezultă atunci, în baza relațiilor (14), (21) și (23)

$$\varphi(\zeta) = \frac{X(\zeta)}{2\pi\varkappa i}\int_{\gamma'} \frac{f(\sigma) + iA\,\omega(\sigma) + B + iC}{X^+(\sigma)(\sigma-\zeta)}\, d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f_2(\sigma)\, d\sigma}{\sigma-\zeta} - X(\zeta)\, P(\zeta). \tag{25}$$

---

[1] Se ține seama de determinarea aleasă pentru $X(\zeta)$ (conf. relației (20)).

PESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA

După cum este ușor de observat, gradul polinomului $P(\zeta)$ este $m-n$ (a se vedea condiția (24)); pentru $m<n$ trebuie să considerăm $P(\zeta)=0$, iar în cazul $m=n$, polinomul se reduce la o constantă și anume $\Lambda_m = c_1 \bar{e}_m$. Ultima etapă a rezolvării problemei la limită constă în determinarea constantelor necunoscute care intervin în expresia (25) a lui $\varphi(\zeta)$.

Vom considera, pentru a arăta procedeul care trebuie urmat, cazul $m>n$.

Necunoscute sînt constantele A, B, C, precum și coeficienții c_k $(k=1, 2, \ldots, m+1)$ din dezvoltarea (8) a funcții $\varphi(\zeta)$. Acești coeficienți apar prin intermediul combinațiilor Λ_p $(p=0, 1, \ldots, m)$ date de (13) și, implicit, o parte din ei figurează în coeficienții polinomului $P(\zeta)$[1]. Pentru găsirea acestor necunoscute, se dezvoltă membrul drept al egalității (25) într-o serie de puteri în vecinătatea punctului $\zeta=0$, reținînd în dezvoltare termenii de la ζ la ζ^{m+1} inclusiv [2]; utilizînd dezvoltarea (8) pentru $\varphi(\zeta)$ se obține, prin identificarea coeficienților diferitelor puteri ale lui ζ, un sistem, din care se deduc coeficienții c_k $(k=1, 2, \ldots, m+1)$, în funcție de A, B, C.

Mai departe, se pot exprima combinațiile Λ_p $(p=0, 1, \ldots, m)$ în funcție numai de A, B, C, folosind relațiile (13). Aceste combinații intervin în condițiile (22), care se pot scrie și sub următoarea formă echivalentă, ușor de verificat, remarcînd că $A=A_k$, $B=B_k$, $C=C_k$ pe γ_k $(k=1, 2, \ldots, n)$

$$\sum_{k=1}^{n} i A_k \int_{\gamma_k} \frac{\sigma^j\,\omega(\sigma)\,d\sigma}{X^+(\sigma)} + \sum_{k=1}^{n} (B_k + iC_k) \int_{\gamma_k} \frac{\sigma^j\,d\sigma}{X^+(\sigma)} +$$

$$+ \int_{\gamma'} \frac{\sigma^j \left[f(\sigma) + (\varkappa+1) \sum\limits_{p=0}^{m} \Lambda_p \sigma^p\right] d\sigma}{X^+(\sigma)} = 0 \qquad (26)$$

$$(j = 0, 1, \ldots, n-1)$$

În modul acesta, cele n condiții (26) ne dau $2n$ ecuații reale conținînd necunoscutele A_k, B_k, C_k; deoarece sînt necesare, după cum este ușor de observat, $3n$ ecuații, restul de relații decurge din analiza satisfacerii condițiilor la limită. Se poate verifica ușor că condiția la limită (2) pe porțiunea liberă L' este satisfăcută. Pe porțiunea încastrată avem,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

de unde rezultă $\dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ și $w = \rho_k$ pe arcele $b_k\, a_{k+1}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, care intră în compunerea lui L''.

---

[1] În general, nu toate combinațiile Λ_p intervin în coeficienții polinomului $P(\zeta)$, determinat de (24).

[2] Nu sînt necesari alți termeni.

Dacă reușim să satisfacem condiția $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n$, atunci notînd cu ρ valoarea lor comună, este evident că $w - \rho$ va da soluția problemei.

Fie g_{a_k}, g_{b_k} valoarea funcției w_0 [1]) în punctele de afixe a_k, b_k. Condiția de mai sus, după cum se constată, se reduce la aceea că

$$Re \int_{\alpha_k \beta_k} [\varphi^+(\sigma) - \varphi^-(\sigma)]\, d\overline{\omega(\sigma)} = g_{a_k} - g_{b_k} \qquad (27)$$

$$(k = 1,2, \ldots, n),$$

$\varphi^+(\sigma)$, $\varphi^-(\sigma)$ fiind valorile la limită pe care le ia funcția $\varphi(\zeta)$ respectiv pe partea stîngă și dreaptă a lui γ.

Avem astfel numărul necesar de ecuații pentru determinarea constantelor A_k, B_k, C_k. Se poate arăta că sistemul astfel obținut este totdeauna compatibil. Constantele A_k, B_k, C_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ fiind cunoscute, se pot găsi coeficienții c_j $(j = 1, 2, \ldots, m + 1)$ și, în sfîrșit, polinomul $P(\zeta)$.

În modul acesta funcția $\varphi(\zeta)$ este pe deplin determinată. Funcția $\psi(\zeta)$ se deduce din (10) și ea este dată de

$$\psi(\zeta) = - \frac{\overline{\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}}{\omega'(\zeta)}\, \varphi'(\zeta) - \overline{\varphi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}. \qquad (28)$$

Se poate demonstra ușor că $\varphi(\zeta)$ și $\psi(\zeta)$, determinate de (25) și (28), satisfac condițiile la limită (9).

Pentru cazurile $m = n$ și $m < n$, procedeele care trebuie urmate în găsirea constantelor necunoscute sînt în totul analoage aceluia utilizat în cazul de mai sus și de aceea nu ne vom opri asupra lor. Remarcăm doar că în cazul $m < n$, avem $P(\zeta) = 0$, iar condițiile (22) se scriu

$$\int_{\gamma'} \frac{\sigma^j [f(\sigma) + iA\,\omega(\sigma) + B + iC]\, d\sigma}{X^+(\sigma)} = 0 \qquad (29\,a)$$

$$(j = 0, 1, \ldots, n - m - 2),$$

$$\int_{\gamma'} \frac{\sigma^j \left[f(\sigma) + (\varkappa + 1) \sum\limits_{p=0}^{m} \Lambda_p \sigma^p + iA\,\omega(\sigma) + B + iC\right] d\sigma}{X^+(\sigma)} = 0 \qquad (29\,b)$$

$$(j = n - m - 1, n - m, \ldots, n - 1).$$

Interpretarea condițiilor (29 a) este simplă, ele asigurînd că funcția $\varphi(\zeta)$ are un pol la infinit de ordinul m; dacă $n - m = 1$, aceste condiții sînt satisfăcute de la sine.

Eforturile, momentele și tensiunile se pot calcula elementar, deoarece este posibilă o reprezentare a lor prin intermediul celor două funcții analitice $\varphi(z)$ și $\psi(z)$ [2]). În cazul cînd se utilizează transformarea conformă, este mult mai avantajos să se recurgă la exprimarea lor în funcție de coordonatele curbilinii ortogonale, introduse prin intermediul reprezentării conforme [8].

---

[1]) Soluția particulară a ecuației (1).

[2]) Avem în vedere formulele clasice din teoria plăcilor subțiri [4]; deoarece $w = w_0 + W$, afirmația se referă numai la contribuția dată de funcția W.

Procedeul expus în lucrarea de față permite de asemenea o exprimare a componentelor eforturilor și momentelor în coordonate curbilinii ortogonale, însă printr-o singură funcție, determinată în întregul plan (afară de circumferința γ).

Primită la redacție la 13 decembrie 1957.

ОДНА ЗАДАЧА СМЕШАННОГО ТИПА ПО ИЗГИБАНИЮ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе рассматривается смешанного типа задача изгиба тонкой, упругой, изотропной пластинки, с нормальной нагрузкой, приложенной к срединной ее плоскости, в предположении, что определенные участки ее контура жестко закреплены, а остальные остаются свободными.

Пусть срединная плоскость пластинки занимает конечную односвязную область, которую можно конформно отобразить внутри окружности единичного радиуса при помощи одной функции в виде многочлена.

Граничная задача сводится к решению задачи типа Гильберта для бесконечной плоскости, рассеченной вдоль некоторых дуг, принадлежащих общему кругу. Для решения задачи используется метод, данный Н. И. Мусхелишвили.

UN PROBLÈME DU TYPE MIXTE SUR LA FLEXION DES PLAQUES ÉLASTIQUES

RÉSUMÉ

On étudie dans ce travail un problème du type mixte ayant trait à la flexion d'une plaque élastique mince, isotrope, portant une charge normale à son plan médian ; on fait l'hypothèse que, sur certaines portions de la frontière, la plaque est encastrée et qu'elle est libre sur le reste de la frontière.

On admet que le plan médian de la plaque occupe un domaine connexe simple, fini, dont on peut faire la représentation conforme sur l'intérieur du cercle, de rayon unité, à l'aide d'une fonction en forme de polynôme. Le problème à la limite est réduit à la solution d'un problème du type de Hilbert pour le plan infini, sectionné le long d'arcs qui appartiennent au même cercle.

Pour la solution de ce problème, on applique la méthode de N. I. Moushélichvilli.

BIBLIOGRAFIE

1. Г. Ф. Манджавидзе, *Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными козффициентами и его применение в теории упругости.* ПММ, **XV,** *3* (1951),
2. Д. И. Шерман, *Смешанная задача статической теории упругости для плоских многосвязных областей.* ДАН СССР, **XXVIII**, *1* (1940).
3. N. I. Musheliświli, *Ecuații integrale sinqulare* I.S.R.S., București (1955).
4. S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells.* NewYork (1940).
5. E. Goursat, *Sur l'équation* $\Delta\Delta U = 0$. Bull. de la Soc. Math. de France, **26** (1898).
6. А. И. Каландия, *Изгиб упругой пластинки в виде эллиптического кольца.* ПММ, **XVII,** *6* (1953).
7. N. I. Musheliświli, *Cîteva probleme fundamentale ale teoriei matematice a elasticității,* I.S.R.S. București (1956).
8. Yi-Yuan-Yu, *Bending of Isotropic Thin Plates by Concentrated Edge Couples and Forces.* Journal of Applied Mechanics, Trans. A.S.M.E., **76** (1954).

ELASTICITATE – REZISTENȚA MATERIALELOR

TORSIUNEA ARBORELUI CU CANELURI RADIALE EXTERIOARE

DE

V. MANEA

Considerăm un arbore a cărui secțiune transversală are forma din figura 1.

Rezolvarea problemei torsiunii acestui arbore revine la a determina o funcție $\Psi\,(r,\,\theta)$ armonică în interiorul secțiunii transversale, satisfăcînd condiția la limită

$$\Psi_c = \frac{r^2}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2}\,. \qquad (1)$$

Găsirea soluției exacte în cazul de față este deosebit de dificilă.

De aceea, vom încerca o soluționare aproximativă cu ajutorul seriilor.

Vom căuta funcția de tensiune la torsiune

$$\Psi\,(r,\,\theta) = \Psi_1\,(r,\,\theta) \qquad (2)$$

în interiorul dreptunghiului curbiliniu $(m,\,n,\,p,\,q)$ pe care îl vom numi pe scurt domeniul D_1, și

$$\Psi\,(r,\,\theta) = \Psi_0\,(r,\,\theta) \qquad (3)$$

în interiorul cercului de rază $r = a$, domeniu notat cu D_0. Funcțiile $\Psi_1\,(r,\,\theta)$ și $\Psi_0\,(r,\,\theta)$ trebuie să fie armonice.

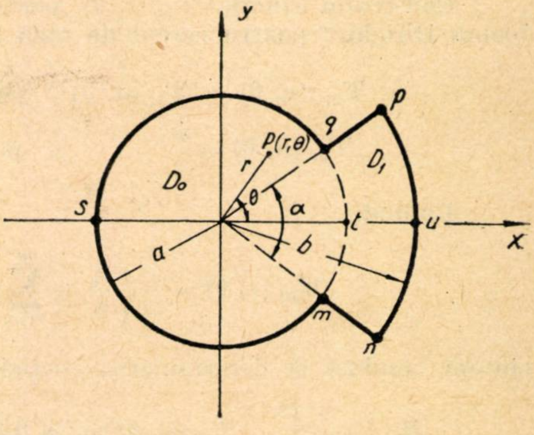


Fig. 1

În plus, funcția $\Psi_1\,(r,\,\theta)$ satisface condiția (1) pe porțiunile libere ale conturului domeniului D_1, iar $\Psi_0\,(r,\,\theta)$ satisface aceeași condiție pe arcul $(q,\,s,\,m)$.

Vom impune condiția de conjugare

$$\Psi_1(a,\theta) = \Psi_0(a,\theta), \tag{4 a}$$

$$\frac{\partial \Psi_1(a,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial \Psi_0(a,\theta)}{\partial r} \tag{4 b}$$

pe arcul comun (m, t, q).

Considerăm mai întîi o funcție armonică $\Psi_{11}(r,\theta)$ care satisface condiției (1) pe porțiunile libere ale conturului domeniului D_1, fiind mărginită și continuă pe arcul (m, t, q).

Pot exista o infinitate de asemenea funcții.

Una din aceste funcții o constituie funcția de tensiune la torsiune pentru sectorul circular de unghi α și de rază b

$$\Psi_{11}(r,\theta) = \frac{b^2}{2}\sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \cdot \cos\frac{n\pi}{\alpha}\,\theta + \frac{r^2}{2}\,\frac{\cos 2\theta}{\cos\alpha} \tag{5}$$

dată de De Saint-Venant [1], unde

$$A_n = \cdot\,\frac{16\,\alpha^2(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n\,((n\pi)^2-(2\,\alpha)^2)}\,. \tag{6}$$

Construim funcţia $\Psi_{01}(r,\theta)$, pentru domeniul D_0, rezolvînd o problemă Dirichlet pentru cercul de rază a cu condiția la limită evidentă

$$\begin{aligned} \Psi_{01}\,(a,\theta) &= \Psi_{11}(a,\theta) \qquad \text{pentru } -\alpha/2 \leqslant \theta \leqslant \alpha/2\,, \\ \Psi_{01}(a,\theta) &= \frac{a^2}{2} \qquad\qquad\quad \text{pentru } \alpha/2 \leqslant \theta \leqslant 2\pi-\alpha/2. \end{aligned} \tag{7}$$

Punînd

$$\Psi_{01}(r,\theta) = \frac{a^2}{2}\left\{\frac{B_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m\left(\frac{r}{a}\right)^m \cos\ m\ \theta\right\} \tag{8}$$

sîntem conduși la determinarea coeficienților B_m sub forma

$$B_m = \frac{2}{\pi\,a^2}\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\Psi_{11}(a,\theta)\cos m\ \theta\ \mathrm{d}\ \theta + \frac{1}{\pi}\int_{\alpha/2}^{2\pi-\alpha/2}\cos \mathrm{m}\ \theta.\ \mathrm{d}\theta. \tag{9}$$

Introducînd în (9) expresia lui $\Psi_{11}(a,\theta)$ dată de (5) se obține

$$B_m = \frac{b^2}{a^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} A_n\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} K_{nm} + L_m\,, \tag{10}$$

unde

$$K_{nm} = \frac{2\,n\,\alpha(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{m\,\alpha}{2}}{(n\pi)^2 - (m\alpha)^2}\,,$$

$$L_m = \frac{1}{\pi}\,\frac{8\,\sin\frac{m\,\alpha}{2}}{(m^2-4)\,m} - \frac{4}{\pi}\,\frac{\operatorname{tg}\alpha\cos\frac{m\,\alpha}{2}}{m^2-4}\,, \tag{11}$$

$$L_0 = \frac{1}{\pi}(\operatorname{tg}\alpha + 2\pi - \alpha)\,;\; L_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha\right). \tag{12}$$

Seria (5) este absolut și uniform convergentă.

În ce privește seria (8), ținînd cont de expresia coeficientului K_{nm} dată de (11) și de expresia lui A_n dată de (6), putem pune

$$B_m = \frac{32\,\alpha}{\pi}\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{m^2-4}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\left(\frac{\cos\frac{m\,\alpha}{2}}{(m\,\pi)^2 - (2\,\alpha)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos\frac{m\,\alpha}{2}}{(n\,\pi)^2 - (m\,\alpha)^2}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} + L_m \tag{13}$$

De aci, observînd că suma din membrul drept rămîne mereu mărginită, pentru orice valoare a lui m, deducem că și seria (8) este absolut și uniform convergentă.

În cazul limită, cînd $a = b$, se obține din (13) după cîteva transformări

$$B_m = 0 \quad B_0 = 2 \text{ pentru } m \neq 0 \tag{13'}$$

ceea ce corespunde arborelui fără canelură.

Pînă acum am construit funcția $\Psi_{01}(r, \theta)$, valabilă în domeniul D_0 satisfăcînd condiția la limită (7).

În continuare vom construi funcția $\Psi_1(r, \theta)$, armonică, care să satisfacă și condiția (4 b).

Vom pune

$$\Psi_1(r, \theta)\,) = \Psi_{11}(r,\theta) + \frac{a^2}{2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{2k-1} C_n\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\right\}\cos\frac{n\pi}{\alpha}\cdot\theta \tag{14}$$

Termenul aditiv se anulează pe porțiunile libere ale conturului domeniului D_1, ceea ce face ca și $\Psi_1(r, \theta)$ să satisfacă condiția la limită (1).

Din modul cum am ales funcția $\Psi_{11}(r, \theta)$ deducem că termenul aditiv capătă valori mici pe arcul comun celor două domenii, adică $\Psi_1(r, \theta)$ diferă puțin de $\Psi_{11}(r, \theta)$.

Pentru domeniul D_0 vom lua o funcție avînd aceeași dezvoltare ca cea din (8), care va trebui să satisfacă condiția la limită (1) și condiția de conjugare (4)

$$\Psi_0(r, \theta) = \frac{a^2}{2}\left\{\frac{B_0'}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m'\left(\frac{r}{a}\right)^m \cos \cdot m\,\theta\right\}. \tag{15}$$

Coeficienții B_m' vor diferi cu puțin de B_m.
În virtutea condiției (4 a) vom avea

$$\Psi_0(a, \theta) = \Psi_{11}(a, \theta) + \frac{a^2}{2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{2k-1} C_n\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2n\pi}{\alpha}}\right)\cos\frac{n\pi}{\alpha}\,\theta, \tag{16}$$

de unde se obține

$$B_m' - \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{2k-1} C_n\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2n\pi}{\alpha}}\right)K_{nm} = B_m. \tag{17}$$

Utilizînd condiția (4b), înmulțind cu $\cos\frac{n\pi}{\alpha}\,\theta$ și integrînd între limitele $-\alpha/2$ și $\alpha/2$ obținem

$$2\sum_{m=1}^{\infty} B_m' \frac{m}{n} K_{nm} + C_n\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2n\pi}{\alpha}}\right) = \frac{b^2}{a^2} A_n\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} + \frac{4\,K_{n2}}{n\cos\alpha}. \tag{18}$$

Introducînd notațiile

$$q_n = 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2n\pi}{\alpha}}$$

$$r_n = 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2n\pi}{\alpha}}$$

$$\mathcal{A}_n = \frac{b^2}{a^2} A_n\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} + \frac{4\,K_{n2}}{n\cos\alpha}$$

(17) și (18) devin

$$B_m' - \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{2k-1} C_n\, q_n\, K_{nm} = B_m, \tag{17'}$$

respectiv

$$2\sum_{m=1}^{\infty} B_m' \frac{m}{n} K_{nm} + C_n\, r_n = \mathcal{A}_n. \tag{18'}$$

Am obținut două sisteme infinite, avînd necunoscutele B_m' respectiv C_n, cu termenii liberi B_m respectiv $\mathcal{A}_n$, care tind către zero cînd m și n iau valori foarte mari.

Este necesar ca valorile obținute pentru coeficienții B'_m introduse în (18′) să conducă la serii convergente.

Ținînd seama de (11) și (13) se observă din (17′) că B'_m tinde către zero cînd m tinde la infinit. Prin aceasta, convergența seriilor care intervin în sistemul (18′) este asigurată.

Avem deci de rezolvat un sistem infinit (17′) și un sistem de k ecuații (18′). Practic, vom considera din sistemul infinit (17′) un număr limitat de ecuații, respectiv de coeficienți B'_m, deoarece sîntem asigurați că aceștia tind la zero cînd m crește. Fie p numărul acestor ecuații. Cele două sisteme pot fi privite ca un singur sistem de $k + p$ ecuații cu k necunoscute C_n și p necunoscute B'_m și rezolvat ca atare.

Astfel, am determinat complet cele două funcții de tensiune la torsiune $\Psi_0(r, \theta)$ și $\Psi_1(r, \theta)$.

Eforturile la torsiune sînt date de relațiile

$$\tau_{r_0} = G\Theta\,\frac{\partial\Psi}{r\,\partial\theta};\quad \tau_{\theta 0} = -\,G\,\Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r} - r\right), \tag{19}$$

unde am notat cu Θ unghiul de răsucire, iar rigiditatea la torsiune

$$K = 2\iint_{D_0 + D_1}\left(\Psi(r, \theta) - \frac{r^2}{2}\right) r\cdot dr\cdot d\theta. \tag{20}$$

Vom ține seama evident de modul cum am determinat funcția $\Psi(r, \theta)$, conform cu (2) și (3), atît în (19) cît și la efectuarea integralei (20).

Astfel, în domeniul D_0 vom avea

$$\tau_{r0} = -\,G\,\Theta\left\{\frac{a}{2}\sum_{m=1}^{\infty} mB'_m\left(\frac{r}{a}\right)^{m-1}\sin m\,\theta\right\}, \tag{19′ a}$$

$$\tau_{\theta 0} = -\,G\,\Theta\left\{\frac{a}{2}\sum_{m=1}^{\infty} m\,B'_m\left(\frac{r}{a}\right)^{m-1}\cos m\theta - r\right\}. \tag{19′ b}$$

Similar, în domeniul D_1 vom avea

$$\tau_{r1} = -\,G\,\Theta\left\{\frac{b}{2}\sum_{n=1,3,5..}^{\infty}\frac{n\pi}{\alpha}A_n\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi-1}{\alpha}}\cdot\sin\frac{n\,\pi}{\alpha}\cdot\theta + \frac{r\sin 2\,\theta}{\cos\,\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{2}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{2k-1}\frac{n\pi}{\alpha}C_n\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}-1} - \left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}-1}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}+1}\right]\cdot\sin\cdot\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right\}, \tag{19″ a}$$

$$\tau_{\theta 1} - = G\,\Theta\left\{\frac{b}{2}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{n\pi}{\alpha}A_n\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}-1}\cdot\cos\frac{n\pi}{\alpha}\theta + \frac{r\cos 2\theta}{\cos\alpha} - \right.$$

$$\left. - \frac{a}{2}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{2k-1}\frac{n\pi}{\alpha}C_n\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}-1} + \left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}-1}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}+1}\right]\cos\frac{n\pi}{\alpha}\theta - r\right\}. \tag{19″ b}$$

Înlocuind în formula care dă rigiditatea la torsiune obținem

$$K = 2\int_0^{2\pi}\int_0^a\left\{\frac{a^2}{2}\left[\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} B'_m\left(\frac{r}{a}\right)^m \cos m\theta\right]-\frac{r^2}{2}\right\}r\cdot dr\cdot d\theta +$$

$$+\,2\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\int_a^b\left\{\frac{b^2}{2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} A_n\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\cdot\cos\frac{n\pi}{\alpha}\cdot\theta+\frac{r^2}{2}\,\frac{\cos 2\theta}{\cos\alpha}+\right.$$

$$\left.+\,\frac{a^2}{2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{2k-1} C_n\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}}-\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\right]\cos\frac{n\pi}{\alpha}\theta-\frac{r^2}{2}\right\}r\,dr\,d\theta. \qquad (20')$$

Efectuînd integralele se obțin în definitiv

$$K=\frac{\pi a^4}{2}(B'_0-1)+2\,b^4\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} A_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\alpha^2}{n\pi\,(n\pi+2\alpha)}\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}+2}\right)+$$

$$+\frac{b^4-a^4}{4}\operatorname{tg}\alpha+2a^4\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} C_n\,(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\alpha}{n\pi}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2n\pi}{\alpha}}\frac{\alpha}{n\pi+2\alpha}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}-2}\frac{2n\pi\alpha}{(n\pi)^2-(2\alpha)^2}+\frac{\alpha}{n\pi-2\alpha}\right]+\frac{b^4-a^4}{4}\cdot\alpha \qquad (20'')$$

Se vede de aci că pentru calculul rigidității nu este necesar decît coeficientul B'_0 al dezvoltării (15). Evident că ne putem limita numai la cîțiva coeficienți A_n respectiv C_n, deoarece după cum se vede din (20″) avem o convergență suficient de rapidă.

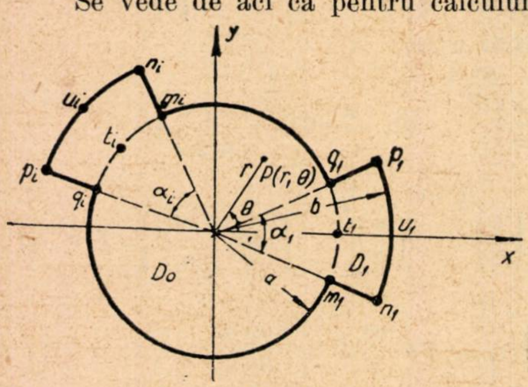


Fig. 2

Arbore cu mai multe caneluri.

În continuare vom extinde pentru cazul arborelui cu mai multe caneluri.

Cînd canelurile sînt de mărimi neegale și dispuse neregulat, soluția problemei torsiunii unui asemenea arbore, se poate obține însă cu oarecare dificultăți de calcul.

Ca şi pentru cazul unei singure caneluri, se consideră iniţial funcţiile de tensiune la torsiune pentru sectoarele circulare care corespund unghiurilor la centru α_i

$$\Psi_{i1}(r,\theta) = \frac{b^2}{2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n^{(i)} \left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha_i}} \cos\frac{n\pi}{\alpha_i}\left(\theta - \theta_i - \frac{\alpha_i}{2}\right) + \\ + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\cos 2\left(\theta - \theta_i - \frac{\alpha_i}{2}\right)}{\cos\alpha_i}, \tag{21}$$

$i = 1, 2, \dots, l$, θ_i avînd semnificaţia din figura 2.

În ce priveşte funcţia $\Psi_{01}(r,\theta)$ o vom construi rezolvînd o problemă Dirichlet pentru cercul de rază a, ce satisface condiţia la limită (1) pe porţiunile libere şi egală cu fiecare din funcţiile de tensiune la torsiune $\Psi_{i1}(a,\theta)$, pe arcul comun corespunzător.

Vom avea

$$\Psi_{01}(r,\theta) = \frac{a^2}{2}\left\{\frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m (B_m \cos m\theta + D_m \sin m\theta)\right\}, \tag{22}$$

în care intervin şi termeni în sinus datoriţi neegalităţii şi dispoziţiei neregulate a canelurilor (nesimetrie).

În mod similar se scrie condiţia de conjugare

$$\Psi_i(a,\theta) = \Psi_0(a,\theta), \tag{23 a}$$

$$\frac{\partial\Psi_i(a,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial\Psi_0(a,\theta)}{\partial r}, \tag{23 b}$$

pe fiecare din arcele (m_i, t_i, q_i), $i = 1, 2, \dots$

Pentru a satisface şi condiţiei (23 b) se procedează într-un mod cu totul analog ca pentru o singură canelură : se adaugă fiecărei funcţii $\Psi_{i1}(r,\theta)$ un polinom care să se anuleze pe porţiunile libere ale conturului domeniului D_i, ceea ce face ca şi $\Psi_i(r,\theta)$ să satisfacă condiţia la limită (1).

Deci,

$$\Psi_{i1}(r,\theta) = \Psi_i(r,\theta) + \frac{a^2}{2}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{2k-1} C_n^{(i)}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{n\pi}{\alpha_i}} - \\ - \left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha_i}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha_i}}\right]\cos\frac{n\pi}{\alpha_i}\left(\theta - \theta_i - \frac{\alpha_i}{2}\right). \tag{24}$$

Ca urmare, pentru domeniul D_0 vom lua

$$\Psi_0(r,\theta) = \frac{a^2}{2}\left\{\frac{B_0'}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m (B_m' \cos m\theta + D_m' \sin m\theta)\right\}. \tag{25}$$

Folosind condiţiile de conjugare (23) se ajunge la $i+2$ sisteme infinite cu necunoscutele B'_m, D'_m şi C^i_n, a căror rezolvare dau soluţia aproximativă a problemei.

În continuare ne vom ocupa numai de arbori care au canelurile egale şi dispuse regulat.

Alegem sistemul de axe astfel încît să avem simetrie faţă de axa Ox, ca în figura 3.

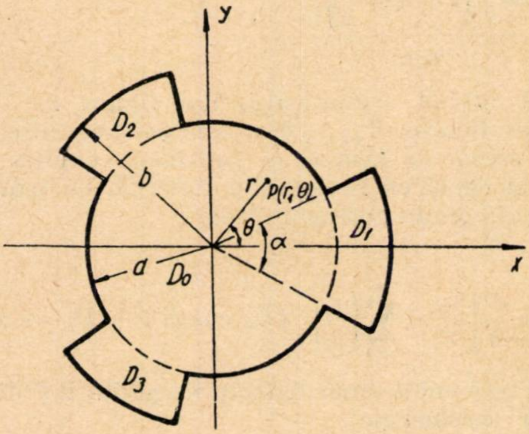


Fig. 3

Calculele efectuate pentru cazul unei singure caneluri pot fi utilizate în întregime.

Într-adevăr, dacă l este numărul canelurilor, iar α unghiul corespunzător sectorului circular dintre două caneluri consecutive avem

$$\Psi_i(r,\theta)=\frac{b^2}{2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}A_n\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\cos\frac{n\pi}{\alpha}\left(\theta-\theta_i-\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{r^2}{2}\,\frac{\cos 2\left(\theta-\theta_i-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}+$$

$$+\frac{a^2}{2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{2k-1}C_n\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}}-\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\right]\cos\frac{n\pi}{\alpha}\left(\theta-\theta_i-\frac{\alpha}{2}\right), \tag{26}$$

unde $i=1,2,\ldots,l$
respectiv

$$\Psi_0(r,\theta)=\frac{a^2}{2}\left\{\frac{B'_1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}B'_{m\cdot l}\left(\frac{r}{a}\right)^{m\cdot l}\cos\,(m\cdot l\,\theta)\right\}. \tag{27}$$

Folosind $\Psi_i(r,\theta)$ şi $\Psi_0(r,\theta)$ de mai sus, se pot obţine toate celelalte relaţii care intervin în rezolvarea problemei torsiunii, într-un mod similar cu cazul unei singure caneluri, ținînd seama că mărimea intervalului de integrare pentru determinarea coeficienților B'_m este egală cu $\frac{2\pi}{l}$.

În ce privește formula rigidității (20′) numai cea de a doua integrală trebuie înmulțită cu numărul canelurilor l.

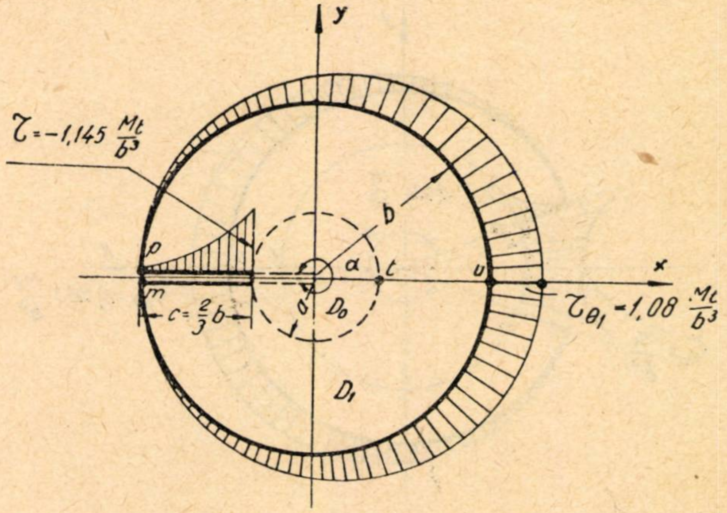

y
x
$\tau=-1{,}145\,\frac{M_t}{b^3}$
b
α
t
u
p
m
$c=\frac{2}{3}b$
δ
D_0
D_1
$\tau_{\theta_1}=-1{,}08\,\frac{M_t}{b^3}$

Fig. 4

Pentru a ilustra cele stabilite în cadrul acestei lucrări vom face două aplicații :

1) Considerăm cazul unui arbore avînd o tăietură de adîncime $C = \frac{2}{3}b$ (fig. 4)

$$\alpha = 360^\circ$$

$$a = \frac{1}{3}b\,.$$

Se obține pentru rigiditatea la torsiune

$$K = 0{,}938\ b^4.$$

Distribuția tensiunilor pe contur e dată în figura 4, unde se arată locul și valoarea tensiunilor maxime.

2) Cel de al doilea exemplu se referă la un arbore cu o singură canelură de adîncime $C = \frac{b}{3}$, și unghi la centru 20°

$$\alpha = 340^\circ$$

$$a = \frac{2}{3}b\,.$$

Se obține pentru rigiditatea la torsiune

$$K = 1{,}262\ b^4\,.$$

Ca şi pentru primul exemplu, în figura 5 se dă distribuţia tensiunilor pe contur precum şi locul şi valoarea tensiunilor maxime. Este interesant de comparat rigiditatea şi valoarea tensiunilor maxime din cele două exemple, cu rigiditatea şi tensiunea maximă a arborelui cu secţiune plină, de rază b şi supus aceluiaşi moment de torsiune M_t.

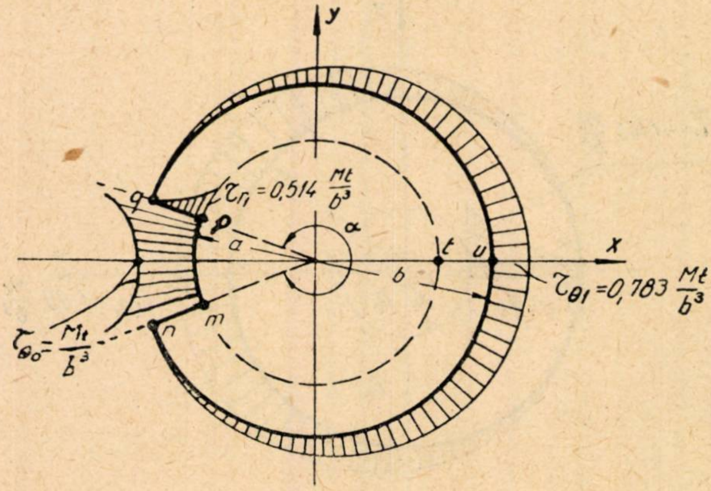

y
x
$\tau_{r_1} = 0{,}514 \frac{M_t}{b^3}$
$\tau_{\theta_1} = 0{,}783 \frac{M_t}{b^3}$
$\tau_{\theta_0} = \frac{M_t}{b^3}$
q
p
a
α
b
t
u
m
n

Fig. 5

În aplicaţia făcută pentru cele două cazuri am considerat în dezvoltarea (5) cît şi (15) pînă la A_6, respectiv B_6 inclusiv şi un singur termen aditiv în (14) cu coeficientul C_1.

Rezultatele obţinute, deşi au un caracter aproximativ, exactitatea depinzînd de numărul termenilor în dezvoltările în serie ce intervin, permit să se tragă cîteva concluzii interesante.

Efortul τ_{r_1}, în lungul peretelui radial al canelurii, este cu atît mai mare cu cît adîncimea acesteia este mai mare. Din (19″ a) se vede că $\tau_{r1} \rightarrow \infty$ ca $\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}-1}$ cînd $r \rightarrow 0$, atîta timp cît $\alpha > \pi$. În cazul arborelui cu cel puţin două caneluri, creşterea efortului τ_{ri} este evitată dacă avem $\alpha_i \leqslant \pi$.

Efortul $\tau_{\theta 1}$, după cum se vede din diagramă, este nul în colţuri şi maxim în partea opusă canelurii.

Efortul $\tau_{\theta 0}$ are valoarea maximă în colţuri, unde devine infinit. Acest lucru rezultă din faptul că pentru $\theta = \pm \alpha/2$ şi $r = 0$ seria din (19′b) devine divergentă, ceea ce confirmă efectul de concentrare a tensiunilor datorit crestăturilor.

În ce priveşte arborele cu mai multe caneluri, se pot trage concluzii analoge.

Primită la redacţie la 10 ianuarie 1958.

КРУЧЕНИЕ ВАЛА С НАРУЖНЫМИ РАДИАЛЬНЫМИ КАНАВКАМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе решается задача вала с одним или несколькими радиальными наружными канавками при помощи рядов и систем бесконечных уравнений. Дается выражение жесткости и напряжений и применение в двух случаях.

TORSION DE L'ARBRE À CANNELURES RADIALES EXTÉRIEURES

RÉSUMÉ

On traite, dans ce travail, à l'aide des séries et des systèmes d'équations infinies, le problème de l'arbre à une ou plusieurs cannelures radiales extérieures. On donne l'expression de la rigidité et des tensions et on en fait l'application à deux cas.

BIBLIOGRAFIE

. S. TIMOSHENKO, *Théorie de l'Elasticité*. Paris-Liège (1948).
21. А. Н. ДИНИК , *Продольный изгиб-кручение*. Москва (1955).

VIBRAȚII

UN PROCEDEU NOU ÎN DETERMINAREA FRECVENȚELOR PROPRII ALE CADRELOR MULTIPLE CU NODURI FIXE

DE

H. S. SCHÄFFER

Pînă în ultimii ani, în problemele de oscilații, efectul continuității sistemelor de cadre nu a fost luat în considerație în măsura în care ar fi fost necesar.

Neajunsurile trepidațiilor născute în interiorul clădirilor industriale a făcut ca determinarea vibrațiilor proprii a scheletelor de rezistență să devină o necesitate în înlăturarea pericolului de rezonanță.

Totuși, problema calculului frecvențelor proprii ale sistemelor de cadre multiple nu este o chestiune simplă. Cu toate că teoretic soluția există, din cauza numărului mare de necunoscute exprimate prin funcții transcendente, conducerea practică a calculelor este foarte greu de efectuat.

Din această cauză, diferiți autori au căutat să înlăture ecuația de condiție, soluționînd problema prin metode iterative. Căile alese presupun însă valori inițiale arbitrare [5], [6].

În prezenta lucrare, exprimîndu-se ecuația frecvențelor proprii a grinzii elastice în raport cu punctele ei fixe, pentru majoritatea cadrelor uzuale cu noduri nedeplasabile, valori inițiale ce se obțin prin aplicarea acestei ecuații uneia din barele sistemului, dau aproximații foarte bune în raport cu valorile exacte.

Ca atare, procedeul pe care-l expunem, se referă la concretizarea acestor observații precum și la posibilitatea de îmbunătățire a rezultatelor.

Înainte de a detalia sistemul de calcul, vom stabili forma ecuației seculare exprimată în funcție de punctele ei fixe.

A. ECUAŢIA VIBRAŢIILOR PROPRII PENTRU GRINDA ÎNCASTRATĂ ELASTIC (REAZEME DE NIVEL)

Grinda încastrată elastic în A şi B este supusă acţiunii dinamice a masei ei (fig. 1). Ecuaţia de mişcare este

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+m\frac{d^2y}{dt^2}=0, \tag{1}$$

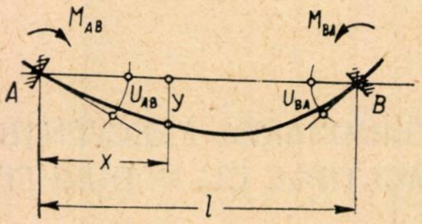


Fig. 1

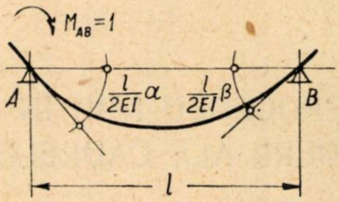


Fig. 2

în care

E = coeficientul de elasticitate ;
I = momentul de inerţie al barei AB, constant pe toată lungimea ;
$m = p/g$, masa unitară ;
y = săgeata în secţiunea x ;
t = variabila timp.

Integrala ecuaţiei diferenţiale (1) indică o mişcare armonică de frecvenţă ω.

Între frecvenţa proprie a vibraţiilor şi elementele geometrice ale barei există relaţia

$$\omega^2=k^4\frac{EI}{m}, \tag{2}$$

k fiind o nouă constantă ce rezultă din operaţiile de integrare a relaţiei diferenţiale (1).

Dacă se notează cu

$$\alpha=\frac{\sin kl\,\mathrm{ch}\,kl-\cos kl\,\mathrm{sh}\,kl}{kl\sin kl\,\mathrm{sh}\,kl}$$

şi (3)

$$\beta=\frac{\mathrm{sh}\,kl-\sin kl}{kl\sin kl\,\mathrm{sh}\,kl},$$

atunci relaţiile dintre momentele de încastrare elastică şi deformaţiile ce se produc sînt

$$U_{AB}=\frac{l}{2EI}(\alpha M_{AB}+\beta M_{BA}),$$
$$U_{BA}=\frac{l}{2EI}(\alpha M_{BA}+\beta M_{AB}). \tag{4}$$

Cantitățile α și β definite de relațiile (3), în afara factorului $\frac{l}{2\,EI}$, nu sînt altceva decît rotațiile extremităților grinzii simple, sub acțiunea unui moment pulsant unitar aplicat într-unul din reazeme (fig. 2).

Este interesant de remarcat că pentru $p = gm = 0$ (grindă privită ca fără masă) rezultă din relația (2), și $k = 0$, cu adevăratele valori pentru α și β

$$\alpha_0 = \frac{2}{3} \text{ și } \beta_0 = \frac{1}{3}\,. \tag{5}$$

Explicitînd momentele, relațiile (4) dau

$$M_{AB} = \frac{2\,EI}{l}\,\frac{\alpha\,U_{AB} - \beta\,U_{BA}}{\alpha^2 - \beta^2},$$

$$M_{BA} = \frac{2\,EI}{l}\,\frac{\alpha\,U_{BA} - \beta\,U_{AB}}{\alpha^2 - \beta^2}\,. \tag{6}$$

Se obține o relație simplă pentru ecuația seculară a grinzii elastice dacă condițiile de capăt sînt exprimate prin introducerea punctelor fixe.

Existența acestora, două pentru fiecare bază, este cunoscută din Statica construcțiilor. Independent de încărcări, poziția lor este determinată numai de constantele geometrice ale sistemului din care face parte bara (fig. 3). Coordonatele acestor puncte, măsurate pozitiv de la reazemul adiacent spre interiorul deschiderii, sînt date de relațiile

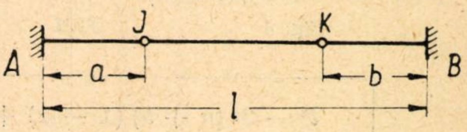


Fig. 3

$$a = \frac{l^2}{3\,(l + 2EI\,\varepsilon_{AB})},$$

$$b = \frac{l^2}{3\,(l + 2\,EI\,\varepsilon_{AB})}, \tag{7}$$

ε_{AB} și ε_{BA} fiind unghiurile cu care se rotesc reazemele sub acțiunea unui moment unitar [8], [9].

Dacă se face o secțiune în dreptul fiecărui reazem, așa cum se arată în figura 4, rotațiile respective sînt

— pentru grinda simplă

$$U_{AB} = \frac{l}{2\,EI}(\alpha\,M_{AB} + \beta\,M_{BA}),$$

$$U_{BA} = \frac{l}{2\,EI}(\alpha\,M_{BA} + \beta\,M_{AB}); \tag{4}$$

— pentru reazeme

$$U_{AB} = -\,\varepsilon_{AB}\,M_{AB}, \tag{8}$$

$$U_{BA} = -\,\varepsilon_{BA}\,M_{BA}.$$

Din egalitatea relaţiilor (4) şi (8) rezultă sistemul

$$(\alpha l + 2EI\,\varepsilon_{AB})\,M_{AB} + \beta l M_{BA} = 0,$$

$$\beta l M_{AB} + (\alpha l + 2EI\,\varepsilon_{BA})\,M_{BA} = 0.$$

Înlocuind pe ε_{AB} şi ε_{BA} cu abscisele punctelor fixe date de relaţia (7) se obţine,

$$[l - 3a\,(1 - \alpha)]\,M_{AB} + 3a\,\beta\,M_{BA} = 0,$$

$$3b\,\beta\,M_{AB} + [l - 3b\,(1 - \alpha)]\,M_{BA} = 0. \tag{9}$$

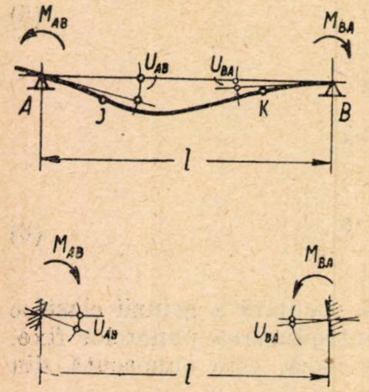


Fig. 4

Sistemul liniar şi omogen în M_{AB} şi M_{BA} la care s-a ajuns admite soluţii nebanale numai dacă determinantul format cu coeficienţii acestor necunoscute este egal cu zero.

Va trebui deci să avem

$$\begin{vmatrix} l - 3a\,(1 - \alpha) & 3a\,\beta \\ 3b\beta & l - 3b\,(1 - \alpha) \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

sau

$$\boxed{l^2 - 3l\,(a + b)\,(1 - \alpha) + 9ab\,[(1 - \alpha)^2 - \beta^2] = 0} \tag{11}$$

Aceasta este ecuaţia pentru determinarea vibraţiilor proprii ale grinzii încastrate elastic.

Punîndu-se în evidenţă rapoartele

$$\xi_{AB} = \frac{a}{l} \text{ şi } \xi_{BA} = \frac{b}{l} \tag{12}$$

şi dacă se notează

$$s = 9\;\xi_{AB} \cdot \xi_{BA}\,;\; r = 3\,(\xi_{AB} + \xi_{BA}) - 2s\,;\; q = 1 - (r + s) \tag{13}$$

ecuaţia (11) capătă următoarea formă, mai practică

$$\boxed{q + r\alpha + s\,(\alpha^2 - \beta^2) = 0} \tag{11_1}$$

Transcendentă în kl prin intermediul cantităţilor α şi β *rămînînd în cadrul ipotezei barelor neîncărcate*, coeficienţii ecuaţiei stabilite nu depind decît de constantele geometrice ale barei, deschiderea şi punctele fixe.

Pentru vibraţiile grinzilor liber rezemate sau cu încastrări perfecte, înlocuind cu 0 sau $\frac{l}{3}$ abscisa punctului fix corespunzător, ecuaţia (11) regăseşte soluţiile determinate prin metoda clasică cu valorile fundamentale respective :

$kl = \pi = 3{,}142$ pentru dubla rezemare liberă ;
$kl = 3{,}927$ pentru rezemare liberă şi încastrare perfectă ;
$kl = 4{,}730$ pentru dubla încastrare perfectă.

Dacă bara face parte dintr-un cadru cu noduri fixe, din punct de vedere al rezemării, ea se va găsi într-o situaţie intermediară.

În consecinţă, întrucît valorile absciselor punctelor fixe sînt cuprinse între 0 şi $\frac{l}{3}$ prima soluţie a ecuaţiei (11) corespunde vibraţiei fundamentale a barei şi este cuprinsă între valorile extreme : 3,142 şi 4,730.

Din punct de vedere al aplicării, valabilitatea ecuaţiei (11) este restrînsă de faptul că la determinarea ei s-a neglijat efectul încărcărilor celorlalte bare.

Vom arăta însă că, pentru majoritatea sistemelor practice, această restrîngere nu influenţează asupra determinării, — cu o bună aproximaţie, — a primei valori pentru vibraţia proprie a barei *AB*.

Funcţiile α şi β fiind intabulate la sfîrşitul lucrării, ecuaţia (11_1) se rezolvă imediat prin încercări.

Soluţiile $\lambda = kl$ date de oricare din ecuaţiile (11) sau (11_1) determină frecvenţa proprie a barei introducînd masa respectivă prin relaţia

$$\omega^2 = \frac{\lambda^4 EI}{l^4 m}. \tag{14}$$

Trebuie să remarcăm aci că A. Raythel [5] stabileşte de asemenea o ecuaţie seculară a grinzilor elastice.

Deosebirea între ecuaţia (11) şi acea din articolul citat constă în faptul că, în *Dynamica dei sistemi solidarii* se ţine cont de încărcările (masele) tuturor barelor prin încastrările reale, dar necunoscute, în raport cu care este exprimată ecuaţia ; în vreme ce ecuaţia (11), neglijînd efectul maselor, are coeficienţii cunoscuţi.

Din această cauză, ecuaţia lui Raythel nu poate servi decît la iteraţii, în timp ce ecuaţia pe care am stabilit-o, după cum se va arăta, poate determina direct, cu o bună aproximaţie, prima valoare a vibraţiei sistemului din care face parte bara.

B. VIBRAŢIILE PROPRII ALE CADRELOR MULTIPLE CU NODURI FIXE

Ecuaţia pe care am stabilit-o pentru vibraţiile grinzii elastic încastrate poate fi aplicată oricăreia din barele unui cadru multiplu cu noduri nedeplasabile cu condiţia de a privi celelalte bare ca fiind fără masă.

Din statica construcţiilor se cunosc procedeele prin care se determină punctele fixe relative fiecăreia din barele sistemului. Ca atare, scriind ecuaţia (11) pentru oricare din acestea, vom obţine soluţii de forma

$$\lambda_i = k_i\, l_i$$

și

$$\omega_i^2 = \frac{\lambda_i^4 E I_i}{l_i^4 m_i} \tag{14_1}$$

indicii referindu-se la o bară oarecare *i*.

Calculate pentru toate barele sistemului, cantitățile ω_i vor diferi între ele.

Considerînd însă situația reală, cadrul vibrează cu una și aceeași frecvență ω, determinată nu numai de elementele geometrice ci și de mase.

Ca atare, scriindu-se ecuația (14) pentru toate cele n bare ale sistemului, se obțin următoarele $(n - 1)$ egalități

$$\omega^2 = \frac{\lambda_1^4 E I_1}{l_1 m_1} = \frac{\lambda_2^4 E I_2}{l_2 m_2} = \ldots = \frac{\lambda_n^4 E I_n}{l_n m_n}. \tag{15}$$

Rezultă de aici că între argumentele λ_i și λ_n trebuie să existe relația

$$\lambda_i = \sqrt[4]{\frac{p_i I_n l_i^4}{p_n I_i l_n^4}}\, \lambda_n, \tag{16}$$

în care s-a înlocuit raportul maselor cu raportul încărcărilor.

Desigur, soluțiile λ_i ale ecuației (11) aplicată fiecărei bare, nu satisfac această relație deoarece, determinarea punctelor fixe statice se face în ipoteza barelor neîncărcate.

Ca urmare, ignorîndu-se influența maselor altor bare în raport cu una, inegalitatea valorilor ω_i, pe de o parte și diferența acestora față de ω pe de altă parte, este de așteptat.

În anumite condiții, însă, neglijarea acestor influențe nu conduce la diferențe apreciabile între una din valorile ω_i convenabil aleasă și ω, valoarea exactă a frecvenței proprii a întregului sistem.

1. Alegerea barei pentru aplicarea ecuației (11)

Relația (16) exprimă raportul între λ_i și λ_n soluții ale ecuației (11) relativ barelor *i* și *n*.

Din tabelele numerice de la sfîrșitul lucrării se poate observa că, de la 0 pînă la zona din jurul cifrei 2, α și β au valori foarte apropiate de valorile relative barei neîncastrate ($\alpha_0 = 2/3$ și $\beta_0 = 1/3$).

Ca urmare dacă cantitatea

$$\sqrt[4]{\frac{p_i I_n l_i^4}{p_n I_i l_n^4}}$$

este un raport subunitar, pe cît posibil mic, atunci λ_i corespunzător celorlalte bare în afară de bara n, vor fi cuprinși în zona menționată sau în vecinătatea ei.

În această situație, din punctul de vedere al exprimării ecuației (11), construcția se găsește în cadrul ipotezei de aplicare a ecuației seculare a barei elastice; deci celelalte bare, afară de bara n pot fi privite ca fără masă, astfel încît soluțiile λ_n să dea frecvența barei ω_n foarte aproape de valoarea exactă ω.

Această observație ne permite să alegem bara pentru care, la aplicarea ecuației (11), se obține cea mai bună aproximație în raport cu soluția exactă.

Este cazul să mai menționăm că sistemele pentru care rezultă necesitatea unei analize dinamice, corespund în foarte mare măsură observațiilor făcute.

Dacă sistemul are mai multe bare cu același λ_n, aproximația cea mai bună se obține aplicînd ecuația (11) barei căreia îi corespund cele mai mici rapoarte ξ_{AB} și ξ_{BA}.

Ca atare, conform relației (16), fixăm bara pentru aplicarea ecuației (11) astfel încît, pentru toate celelalte, λ_i se exprimă prin rapoarte subunitare în funcție de λ_n.

2. Limitarea zonei de apropiere și îmbunătățirea concomitentă a rezultatelor

Aplicînd ecuația seculară a grinzii elastice unei bare aleasă conform celor stabilite anterior, vom obține o primă valoare pentru vibrațiile proprii ale sistemului.

Pentru un calcul definitiv, însă, se poate considera necesar să se cunoască aproximația față de valoarea exactă, și odată cunoscută, să fie apreciată ca insuficientă. De aici să rezulte și necesitatea de a obține rezultate mai bune.

Acest lucru este realizabil tot prin aplicarea ecuației (11), numai că la determinarea coeficienților ei, vom ține seamă și de efectul maselor.

Pentru aceasta este suficient să nu mai considerăm cantitățile a și b cunoscute — abscise ale punctelor fixe statice — ci necunoscute a_{AB} și b_{BA}, ele fiind legate de încastrările reale sub sarcini θ_{AB} și θ_{BA} prin relațiile

$$\begin{aligned} a_{AB} &= \frac{l^2}{3(l + 2EI\,\theta_{AB})}, \\ b_{BA} &= \frac{l^2}{3(l + 2EI\,\theta_{BA})}. \end{aligned} \tag{7_1}$$

Calea de urmat este următoarea

Fie λ_n soluția ecuației (11) aplicată barei n

Relațiile (16) ne dau pentru restul barelor

$$\lambda_1, \lambda_2 \text{ etc. } \lambda_i.$$

Din tabele, avem valorile corespunzătoare

$$\alpha_1\ \beta_1, \alpha_2\ \beta_2, \text{ etc. } \alpha_i\ \beta_i.$$

Cu aceste valori, în baza formulelor de recurență, ce le vom stabili, se obțin cifre noi pentru cantitățile a_{AB} și b_{BA} și pentru rapoarte ξ_{AB} și ξ_{BA} care, introduse în ecuația (11), furnizează noi soluții λ'_n.

În general se observă din aplicații că λ'_n și λ_n încadrează soluția exactă, astfel încît raportul

$$100\,\frac{\lambda'_n-\lambda_n}{\lambda_n}$$

limitează zona de aproximație a rezultatelor.

Prin repetare, se obține precizia dorită.

În calculul de recurență, rapoartele ξ_{AB} și ξ_{BA} se vor lua

$$\xi_{AB}=\frac{1}{3+\frac{\varepsilon_{AB}}{\beta^*}} \quad \text{și} \quad \xi_{BA}=\frac{1}{3+\frac{\varepsilon_{BA}}{\beta^*}}, \tag{17}$$

în care

$$\beta^*=\frac{l}{6EI}. \tag{18}$$

a) *Relația de recurență pentru încastrarea barelor în noduri.*

Să presupunem că aplicăm un moment pulsator unitar

$$M_{BA}=1$$

în reazămul B al barei AB (fig. 5). Fie θ_{BA} rotația corespunzătoare a reazemului considerat.

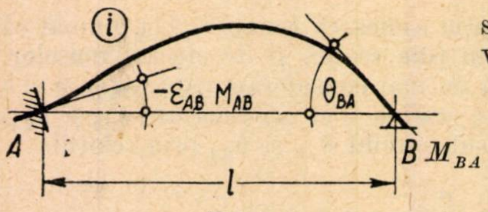


Fig. 5

Conform relațiilor (4), în care s-a introdus direct notațiile făcute, vom avea

$$U_{AB}=\frac{l}{2EI}(\alpha M_{AB}+\beta),$$

$$\theta_{BA}=\frac{l}{2EI}(\alpha+\beta M_{AB}). \tag{19}$$

Să introducem ε'_{AB} încastrarea barei în nodul A.

Atunci

$$U_{AB}=-\varepsilon_{AB}M_{AB} \tag{20}$$

reprezintă rotația nodului.

Eliminînd pe U_{AB} și M_{AB} între relațiile (19) și (20) și notînd

$$\theta^*=\frac{l(\alpha^2-\beta^2)}{2EI\alpha}, \tag{21}$$

$$\theta^\circ=\frac{l}{2EI}\alpha \tag{22}$$

aceleaşi unghiuri pentru cazurile limită relative încastrării perfecte şi, respectiv, liberei rezemări sau articulaţiei, obţinem

$$\theta_{BA} = \frac{\theta^{\cdot} + \varepsilon_{AB}}{1 + \frac{\varepsilon_{AB}}{\theta^0}}. \qquad (23$$

b) *Încastrarea barelor în noduri.*

Prin definiţie, valoarea încastrării ε_{AB} a barei AB în nodul A, este unghiul cu care se roteşte grupul de bare *1*, *2*, *3* din nod, fără bara AB, sub acţiunea unui moment pulsant

$$M_{AB} = 1.$$

Aceasta este, cu alte cuvinte, încastrarea oferită de restul construcţiei, barei AB în nodul A.

În capetele A ale barelor *1*, *2*, *3*, se dezvoltă momente pulsante

$$M_{AC},\ M_{AD} \text{ şi } M_{AE}.$$

Avem evident

$$\varepsilon_{AB} = \theta_{AC}\, M_{AC} = \theta_{AD}\, M_{AD} = $$
$$= \theta_{AE}\, M_{AE}. \qquad (24)$$

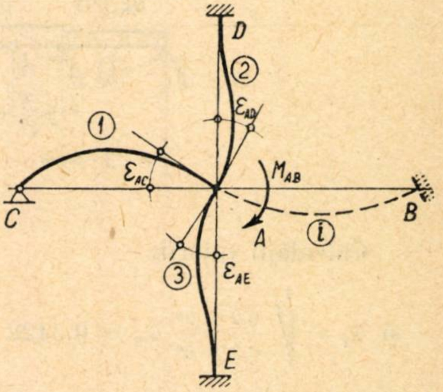


Fig. 6

Scriind echilibrul nodului

$$M_{AC} + M_{AD} + M_{AE} = M_{AB} = 1 \qquad (25)$$

şi eliminînd pe M_{AC}, M_{AD}, M_{AE} între relaţiile (24) şi (25) se obţine

$$\varepsilon_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{\theta_{AC}} + \frac{1}{\theta_{AD}} + \frac{1}{\theta_{AE}}} \qquad (26)$$

sau în general, pentru oricîte bare în nodul A

$$\varepsilon_{AB} = \frac{1}{\sum \frac{1}{\theta}} \qquad (26_1)$$

suma referindu-se la toate barele din nod, în afara barei AB.

C. EXEMPLE DE CALCUL

Vom trata acum exemple practice cu scopul de a demonstra buna aproximaţie ce se obţine din aplicarea ecuaţiei (11) uneia din barele sistemului. Totodată stabilind pentru fiecare caz zona de apropiere a rezultatelor, se va urmări şi mersul calculului de recurenţă.

1. Grindă continuă pe trei reazeme

Ne propunem să determinăm, pe calea aplicării ecuației (11), prima valoare a frecvenței proprii pentru grinda continuă din figura 7. Cu datele geometrice date, s-au calculat punctele fixe statice.

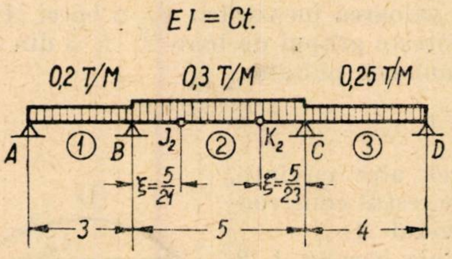


Fig. 7

Calculăm valorile

$$\text{și } \lambda_1 = \sqrt[4]{\frac{0{,}2 \times 3^4}{0{,}3 \times 5^4}}\,\lambda_2 = 0{,}5422\ \lambda_2\,;\ \lambda_3 = \sqrt[4]{\frac{0{,}25 \times 4^4}{0{,}3 \times 5^4}}\,\lambda_2 = 0{,}7644\ \lambda_2\,.$$

Vom aplica barei *2* ecuația (11) deoarece, conform observațiilor făcute, argumentele λ_1 și λ_3 pot fi exprimate prin rapoarte subunitare față de λ_2. Rapoartele punctelor fixe la deschidere, pentru bara *2* sînt (fig. 7)

$$\xi_{BC} = \frac{5}{21} \text{ și } \xi_{CB} = \frac{5}{23}.$$

cu aceasta, ecuația (11) devine

$$16 + 70\ \alpha_2 + 75\ (\alpha_2^2 - \beta_2^2) = 0. \qquad (11_1)$$

Prima soluție a ecuației este : $\lambda_2 = 3{,}845$.

În lucrarea [7] se tratează același exemplu, ajungîndu-se pe calea obișnuită de rezolvare, la condiția

$$(3\alpha_1 + 5\alpha_2)\,(4\alpha_3 + 5\alpha_2) - 25\ \beta_2^2 = 0$$

cu soluția prima $\lambda_2 = 3{,}696$

Față de aceasta, soluția dată de ecuația (11) nu diferă decît cu 4%.

Practic, valoarea exactă nu se cunoaște. Ca atare, cu $\lambda_2 = 3{,}845$, ca valoare inițială, vom aplica calculului de recurență.

Vom avea $\lambda_1 = 2{,}085$; $\lambda_3 = 2{,}939$.

Din tabele obținem

$$\alpha_1 = 0{,}76562\ ;\ \alpha_3 = 1{,}99532$$

Ecuația (11_1) are noua formă

$$0{,}19353 + 0{,}54254\ \alpha_2 + 0{,}26393\ (\alpha_2^2 - \beta_2^2) = 0.$$

Noua soluție îmbunătățită este

$$\lambda_2' = 3{,}650.$$

Zona de apropiere este fixată de raportul

$$100\ \frac{3{,}845 - 3{,}650}{3.845} = 5{,}35\,\%.$$

Se observă că cele două rezultate încadrează soluția exactă. Media

$$\frac{3{,}845 + 3{,}650}{2} = 3{,}748$$

nu va diferi de aceasta cu mai mult de $5{,}34 : 2 = 2{,}675\%$.

O nouă recurență pornită cu ultima valoare

$$\lambda_2' = 3{,}650 \text{ ne dă} : \lambda_2'' = 3{,}710$$

cu o zonă de apropiere de

$$100\ \frac{3{,}710 - 3{,}650}{3{,}650} = 1{,}6\,\%.$$

Media ultimelor rezultate $\lambda_2 = 3{,}680$

nu poate diferi de valoarea exactă cu mai mult de $1{,}6 : 2 = 0{,}8\%$ ceea ce ne îndreptățește să ne oprim la această precizie.

2. Cadru dreptunghiular

Aplicînd ecuația (11), se pune problema determinării frecvenței proprii pentru forma simetriei de vibrație a cadrului dreptunghiular din figura 8. Calculăm $\lambda_1 = 0{,}5970\ \lambda_2$ astfel încît cea mai bună aproximație se va obține aplicînd ecuația (11), barei *2*.

Pentru forma simetrică de vibrație avem rapoartele

$$\xi_{AB} = \xi_{BA} = 0{,}12086.$$

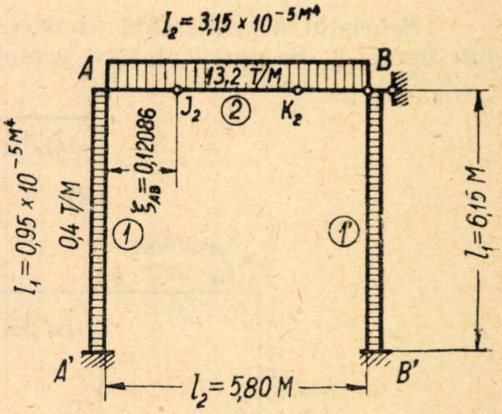


Fig. 8

Cu aceasta ecuația (11) devine

$$0{,}40630 + 0{,}46224\ \alpha_1 + 0{,}13146\ (\alpha_2^2 - \beta_2^2) = 0.$$

Cu soluția $\lambda_2 = 3{,}427$.

Valoarea exactă este dată de condiţia

$$\frac{l_1 I_2}{l_2 I_1}\left(\alpha_1^2 - \beta_1^2\right) + \alpha_1\left(\alpha_2 + \beta_2\right) = 0,$$

care are ca primă soluţie $\lambda_2 = 3{,}419$.

Faţă de valoarea exactă diferenţa este de

$$100\,\frac{3{,}427 - 3{,}419}{3{,}419} = 0{,}25\,\%.$$

Apropierea ce se obţine se datoreşte faptului că bara *AB*, care suportă sarcina dinamică a unei maşini foarte grele (75 t) este disproporţionat solicitată, şi deci alcătuită, în raport cu stîlpii cadrului.

Practic, delimitarea zonei de apropiere conduce la, $\lambda_1 = 2{,}046$ şi din tabele $\alpha_1 = 0{,}75687$, $\beta_1 = 0{,}42120$.

Obţinem $\xi_{AB} = \xi_{BA} = 0{,}11750$.

Noua formă a ecuaţiei este

$$0{,}41926 + 0{,}45648\,\alpha_2 + 0{,}12426\left(\alpha_2^2 - \beta_2^2\right) = 0 \qquad (11_1)$$

cu soluţia îmbunătăţită.

$$\lambda_2' = 3{,}419.$$

Zona de apropiere este de 0,25 % (s-a obţinut, de fapt, din prima recurenţă valoarea exactă).

O nouă recurenţă repetă ultima soluţie, astfel încît $\lambda_2 = 3{,}419$, dă practic prima frecvenţă proprie a cadrului considerat.

3. Cadrul închis

Scheletul de rezistenţă al unei construcţii industriale are aspectul din figura 9. Se cere valoarea primei frecvenţe

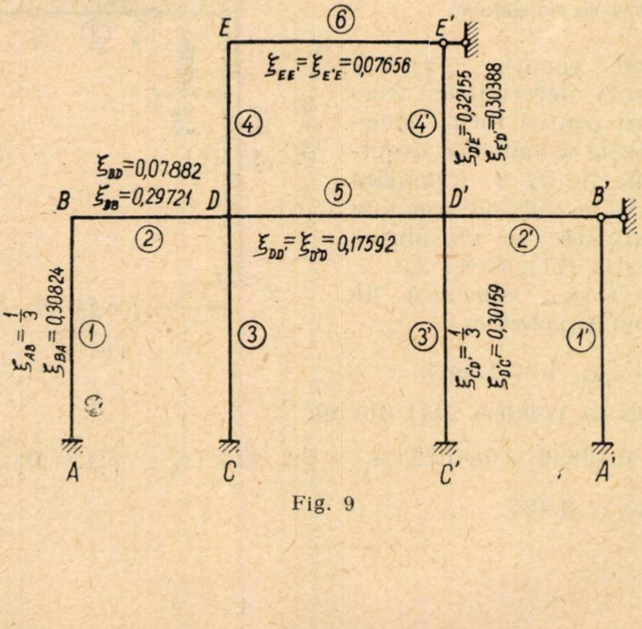

E
⑥
E'
$\xi_{EE'} = \xi_{E'E} = 0{,}07656$
④
④'
$\xi_{D'E'} = 0{,}32155$
$\xi_{E'D'} = 0{,}30388$
$\xi_{BD} = 0{,}07882$
$\xi_{DB} = 0{,}29721$
B
D
⑤
D'
B'
②
$\xi_{DD'} = \xi_{D'D} = 0{,}17592$
②'
$\xi_{AB} = \frac{1}{3}$
$\xi_{BA} = 0{,}30824$
①
③
③'
$\xi_{C'D'} = \frac{1}{3}$
$\xi_{D'C'} = 0{,}30159$
①'
A
C
C'
A'

Fig. 9

pentru forma simetrică de vibraţie. Din punct de vedere static sistemul este „închis”.

Cu datele geometrice cuprinse în tabela 1, s-au calculat punctele fixe înscriindu-se rezultatul direct pe figură sub forma rapoartelor ξ. Cea mai bună aproximaţie se va obţine aplicînd ecuaţia (11) barei *5* deoarece, aşa după cum de vede din calculul următor, numai în raport cu această bară, argumentele celorlalte se pot exprima prin rapoarte subunitare.

Tabela 1

Bara	Secţiunea	p	I	l	β^*
1	30×30	0,2	0,6 10^{-5}	5	1,38889
2	30×50	2,0	3,1 „	4	0,21505
3	45×45	0,5	3,3 „	5	0,25253
4	35×75	0,3	1,3 „	5	0,64103
5	45×80	5,0	19,0 „	7	0,06140
6	35×75	1,5	12,0 „	7	0,09722

Relaţiile (16) dau

$$\lambda_1 = 0{,}75776\ \lambda_5,\ \lambda_2 = 0{,}71504\ \lambda_5,\ \lambda_3 = 0{,}61809\ \lambda_5,$$
$$\lambda_4 = 0{,}6180\ \lambda_5,\ \lambda^6 = 0{,}82530\ \lambda_5,$$

cu

$$\xi_{DD'} = \xi_{D'D} = 0{,}17592$$

(fig. 9) obţinem ecuaţia (11)

$$0{,}22301 + 0{,}49846\ \alpha_5 + 0{,}27853\ (\alpha_5^2 - \beta_5^2) = 0. \tag{11$_1$}$$

Prima soluţie a acestei ecuaţii este

$$\lambda_5 = 3{,}611.$$

Să determinăm zona de apropiere pornind calculul de recurenţă cu această valoare iniţială.

În tabela 2 sînt concentrate datele necesare recurenţei.

Tabela 2

$\frac{I}{2l}$	n	λ	α	β	$\alpha^2 - \beta^2$	θ^*	θ°
4,16667	*1*	$\lambda_1 = 2{,}736$	+1,22006	+0,87904	+0,71584	+2,44469	+5,08358
0,64516	*2*	$\lambda_2 = 2{,}582$	+1,01015	+0,67076	+0,57048	+0,36435	+0,65171
0,75758	*3*	$\lambda_3 = 2{,}232$	+0,80709	+0,47042	+0,43010	+0,40371	+0,61143
1,92308	*4*	$\lambda_4 = 2{,}232$	+0,80709	+0,47042	+0,43010	+1,02481	+1,55210
0,18421	*5*	$\lambda_5 = 3{,}611$	−0,26894	−0,62747	−0,32139	+0,22014	−0,04954
0,29167	*6*	$\lambda_6 = 2{,}980$	+2,39583	+2,05153	+1,53123	+0,18641	+0,69878

Pentru determinarea încastrărilor, construcția fiind închisă, va trebui să fixăm, apriori, încastrarea barei *5*, în nodul D' căci altfel, în nodul D vom avea mai mult decît o bară căreia nu i-am putut calcula anterior încastrarea.

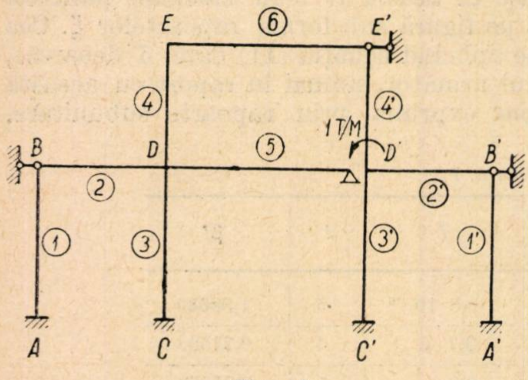


Fig. 10

Pentru a nu lua inițial o valoare cu totul arbitrară, întrucît sistemul este „odată închis”, dacă mergem la definiția încastrării barei *5* în nodul D', este posibil să „deschidem” sistemul, și să determinăm direct valoarea acesteia (fig. 10).

Acum și bara *5* are un reazem exterior în D' astfel încît, în nodul D, se poate calcula încastrarea barei *4* și astfel, să trecem mai departe.

Cu aceasta avem

Din A, via B, spre D, $\theta_{BA} = \theta_1^* = 2{,}44469$ (din tabela 2)

$$\theta_{DB} = \frac{0{,}36435 + 2{,}44469}{1 + \dfrac{2{,}44469}{0{,}65171}} = 0{,}59123. \qquad (23)$$

Din C spre D $\theta_{DC} = \theta_3^* = 0{,}40371$ (din tabela 2)

Din D' spre D $\theta_{DD'} = \theta_5^0 = -0{,}04954$ (din tabela 2).

Încastrarea barei *4* în D este dată de

$$\bar{\varepsilon}_{DE} = \frac{1}{\dfrac{1}{0{,}59133} + \dfrac{1}{0{,}40371} - \dfrac{1}{0{,}04954}} = -0{,}06243. \qquad (26)$$

În continuare, via $E - E'$ formula de recurență (23) dă succesiv

$$\theta_{ED} = \frac{1{,}02481 - 0{,}06243}{1 - \dfrac{0{,}6243}{1{,}55210}} = 1{,}00271 = \varepsilon_{EE'}$$

$$\theta_{E'E} = \frac{0{,}18641 + 1{,}00271}{1 + \dfrac{1{,}00271}{0{,}69878}} = 0{,}48836 = \varepsilon_{E'D'}$$

$$\theta_{D'E'} = \frac{1{,}02481 + 0{,}48836}{1 + \dfrac{0{,}48836}{1{,}55210}} = 1{,}15101$$

$\theta_{D'B'} = \theta_{DB} = 0{,}59123$ și $\theta_{D'C'} = \theta_{DC} = 0{,}40371$

formula (26) aplicată nodului D' dă

$$\varepsilon_{D'D} = 0{,}19852.$$

Din motive de simetrie, pentru calculul încastrării nu mai este nevoie de nici o altă operaţiune.

Pentru a avea toate încastrările barelor vom „închide'' sistemul, refăcînd continuitatea în *D'*. Va trebui să avem

$$\theta_{DD'} = -0{,}13922\ ;\quad \varepsilon_{DE} = -0{,}33173$$

$$\theta_{ED} = \varepsilon_{EE'} = 0{,}88148\ ;\quad \theta_{E'E} = \varepsilon_{E'D} = 0{,}47221\ ;\quad \theta_{D'E'} = 1{,}14781$$

$$\text{şi}\quad \varepsilon_{D'D} = 0{,}19843.$$

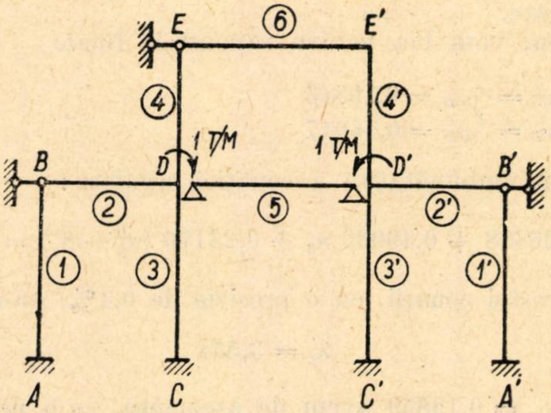


Fig. 11

Diferenţa de sub 0,5% se datoreşte numai aproximaţiei la ultima zecimală. O nouă recurenţă regăşeste valoarea 0,19843.

Trebuie remarcat aici că dacă nu am fi voit să ilustrăm mersul unei recurenţe complete pentru o construcţie închisă, încastrările barei *5* s-ar fi putut obţine şi mai simplu.

Dacă am fi calculat încastrările barei *5* în *D* şi *D'* în mod simultan, din motive de simetrie, construcţia ar fi fost solicitată de două momente pulsante unitare ca în fig. 11.

În această situaţie, sistemul a devenit „deschis''.

Cu aceleaşi valori pentru

$$\theta_{DB} = 0{,}59123 \quad \text{şi} \quad \theta_{DC} = 0{,}40371.$$

Obţinem

$$\varepsilon_{DE} = 0{,}23990\ ;\quad \theta_{ED} = 1{,}09540\ ;\quad \theta_{E'E} = 0{,}49923\ ;\quad \theta_{D'E'} = 1{,}15314$$

$$\text{şi}\quad \varepsilon_{D'D} = 0{,}19859.$$

Desigur că pentru necesităţile aplicării ecuaţiei (11) barei *5* era cel mai simplu de a obţine astfel încastrările. Şi aici diferenţa de 0,8% se datoreşte numai aproximaţiei la ultima zecimală.

Înainte de a trece mai departe, remarcăm rapiditatea convergenţei rezultatelor.

Cu valori inițiale foarte diferite ca cifre și chiar semne

$$\varepsilon_{DE} = -0{,}06243\,; \quad \varepsilon_{DE} = -0{,}33173\,; \quad \varepsilon_{DE} = +0{,}23990$$

s-au obținut aceleași valori finale pentru $\varepsilon_{D'D}$, deoarece diferențele de 0,5% pînă la 0,8% se datoresc, după cum am mai spus, numai aproximațiilor făcute la ultima zecimală.

Din cele de mai sus rezultă că, în comparație cu sistemele ,,deschise'', pentru sisteme ,,închise'', calculul de îmbunătățire se lungește, deoarece, în general, determinarea coeficienților îmbunătățiți ai ecuației (11) necesită recurențe separate.

Cu acestea, vom lua pentru rapoartele finale

$$\varepsilon_{DD'} = \varepsilon_{D'D} = 0{,}19843$$

și vom avea $\xi_{D'D} = \xi_{DD'} = 0{,}16047$

precum și forma îmbunătățită a ecuației seculare:

$$0{,}26888 + 0{,}49936\,\alpha_5 + 0{,}23176\,(\alpha_5^2 - \beta_5^2) = 0 \qquad (11_1)$$

Soluția acestei ecuații, cu o precizie de 0,4%, este

$$\lambda_5' = 3{,}554$$

(dacă $\varepsilon_{D'D} = \varepsilon_{DD'} = 0{,}19859$ avem de asemenea, cu o precizie de 0,26%

$$\lambda_5' = 3{,}554).$$

Aproximația față de primul rezultat este

$$100\;\frac{3{,}611 - 3{,}554}{3{,}611} = 1{,}6\,\%$$

La o nouă recurență se găsește

$$\lambda_5'' = 3{,}559$$

și apoi $\lambda_5''' = 3{,}555$, $\lambda_5^{IV} = 3{,}555$; astfel că valoarea exactă este

$$\lambda_5 = 3{,}555.$$

Valoarea frecvenței proprii dată de acest argument este

$$\omega^2 = 0{,}00159\,\sqrt{Eg}.$$

Forma simetrică de vibrație pentru care s-a calculat frecvența proprie este schițată în figura 12.

Soluția teoretică conduce la același rezultat

$$\lambda_5 = 3{,}555.$$

Pentru a ne da seama de imposibilitatea practică de a se rezolva ecuațiile transcendente ce rezultă din aplicarea soluției clasice, vom da aspectul ecuației de condiție pentru cazul tratat.

Avînd în vedere condițiile de simetrie

$$U_{DD'} = U_{D'D} \quad \text{și} \quad U_{EE'} = U_{E'E}$$

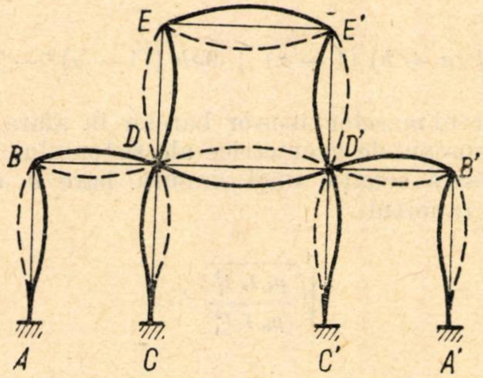


Fig. 12

ecuația dinamică a nodului conduce la un determinant de ordinul trei, din dezvoltarea căruia se obține

$$+\left(\frac{2\,EI_1}{l_6}\,\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2-\beta_1^2}+\frac{2\,EI_2}{l_2}\,\frac{\alpha_2}{\alpha_2^2-\beta_2^2}\right)\left(\frac{2\,EI_4}{l_4}\cdot\frac{\alpha_4}{\alpha_4^2-\beta_4^2}+\frac{2\,EI_6}{l_6}\,\frac{\alpha_6}{\alpha_6^2-\beta_6^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\,EI_6}{l_6}\,\frac{\beta_6}{\alpha_6^2-\beta_6^2}\right)\left(\frac{2\,EI_2}{l_2}\,\frac{\alpha_2}{\alpha_2^2-\beta_2^2}+\frac{2\,EI_3}{l_3}\cdot\frac{\alpha_3}{\alpha_3^2-\beta_3^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\,EI_4}{l_4}\,\frac{\alpha_4}{\alpha_4^2-\beta_4^2}+\frac{2\,EI_5}{l_5}\cdot\frac{\alpha_5}{\alpha_5^2-\beta_5^2}-\frac{2\,EI_5}{l_5}\cdot\frac{\beta_5}{\alpha_5^2-\beta_5^2}\right)-$$

$$-\left(\frac{2\,EI_2}{l_2}\,\frac{\beta_2}{\alpha_2^2-\beta_2^2}\right)^2\left(\frac{2\,EI_4}{l_4}\,\frac{\alpha_4}{\alpha_4^2-\beta_4^2}+\frac{2\,EI_6}{l_6}\,\frac{\alpha_6}{\alpha_6^2-\beta_6^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\,EI_6}{l_6}\,\frac{\beta_2}{\alpha_6^2-\beta_6^2}\right)-\left(\frac{2\,EI_4}{l_4}\cdot\frac{\beta_4}{\alpha_4^2-\beta_4^2}\right)^2\left(\frac{2\,EI_1}{l_1}\,\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2-\beta_1^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\,EI_2}{l_2}\,\frac{\alpha_2}{\alpha_2^2-\beta_2^2}\right)=0.$$

Pentru această ecuație nu se are nici o informație asupra zonei rădăcinilor ei. Cunoscînd soluția determinată pe calea aplicării ecuației (11), s-a verificat ecuația de condiție cu valoarea

$$\lambda_5 = 3{,}555$$

obținîndu-se anularea cu o precizie de 0,84%.

D. CONCLUZII

Din cele expuse pînă aici reiese că procedeul de calcul pe care-l preconizăm pentru determinarea primei valori a frecvenței proprii a cadrelor cu noduri fixe, constă în stabilirea unei ecuații seculare a grinzii incastrată elastic

$$l^2 - 3l\,(a + b)\,(1 - \alpha) + 9ab\,[(1 - \alpha)^2 - \beta^2] = 0 \tag{11}$$

care, neglijînd efectul maselor tuturor barelor în afara masei proprii, depinde numai de constantele geometrice ale sistemului.

Aplicînd această ecuație unei singure bare n astfel aleasă încît, față de celelalte, raportul

$$\sqrt[4]{\frac{p_i\, I_n\, l_i^4}{p_n\, I_i\, l_n^4}} < 1 \tag{16$_1$}$$

obținem soluția λ_n care dă prima valoare a frecvenței proprii pentru întregul sistem prin relația

$$\omega_n^2 = \frac{\lambda_n^4}{l_n^4} \cdot \frac{EI_n}{m_n} \simeq \omega^2. \tag{14}$$

În expresia frecvenței intervine, așa după cum s-a mai spus, numai masa barei căreia i s-a aplicat ecuația (11).

Dacă sistemul conține mai multe bare care satisfac inegalitatea (16_1), ecuația (11) se aplică barei pentru care rapoartele ξ_{AB} și ξ_{BA} sînt cele mai mici.

În ceea ce privește aproximația, s-au concentrat în tabela 3 rezultatele practice obținute anterior.

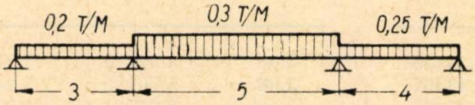
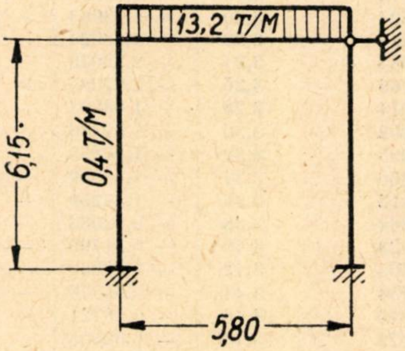
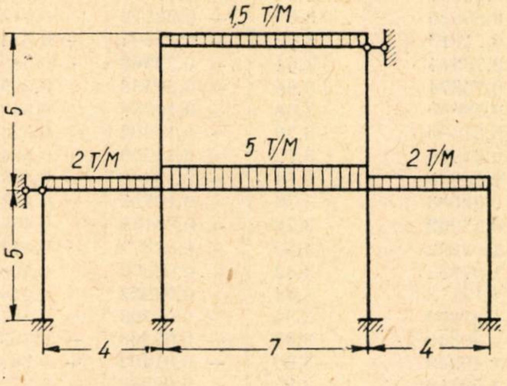
Din considerarea acestor rezultate, reiese că

1. Pentru sisteme de cadre cu noduri fixe, cu elemente diferite, cu o bară cu masă mare în raport cu celelalte care, în general, suportă sarcina dinamică, aproximația față de soluția exactă este maximum 2% (cazurile 2 și 3 din exemplele tratate).
2. Pentru sisteme cu elemente destul de apropiate ca dimensii și mase, aproximația față de soluția exactă este de maximum 5% (cazul 1 din exemplele tratate).

Față de aceste constatări conchidem că aproximațiile ce se obțin sînt cu totul acceptabile, calculul de îmbunătățire permițînd corectarea rezultatelor pînă la precizia dorită.

În concluzie, pe calea soluționării unei ecuații simple, sistemul de calcul pe care-l expunem rezolvă, cu o bună aproximație, problema determinării primei valori a frecvenței proprii pentru majorarea cadrelor uzuale cu noduri fixe.

Tabloul nr. 3

Nr.	Sistemul	Caracteristici	Aproximația
1	 0,2 T/M 0,3 T/M 0,25 T/M 3 5 4	Elemente foarte apropiate	4 %
2	 13,2 T/M 6,15 0,4 T/M 5,80	Masa grinzii mari în raport cu stîlpii	0,25 %
3	 1,5 T/M 5 2 T/M 5 T/M 2 T/M 5 4 7 4	Elemente diferite. O bară cu masă mare în raport cu celelalte	1,60%

Avînd în vedere că rezultatele finale acceptabile sînt obținute direct, fără iterații, procedeul preconizat apare ca deosebit de util pentru calculul practic.

TABELE

$$\alpha = \frac{\sin\lambda \operatorname{ch}\lambda - \cos\lambda \operatorname{sh}\lambda}{\lambda \sin\lambda \operatorname{sh}\lambda} \qquad \beta = \frac{\operatorname{sh}\lambda - \sin\lambda}{\lambda \sin\lambda \operatorname{sh}\lambda}$$

λ	α	β
0,00	0,66667	0,33333
0,50	0,66693	0,33361
0,75	0,66801	0,33464
1,00	0,67094	0,33748
1,10	0,67297	0,33943
1,20	0,67562	0,34202
1,30	0,67911	0,34540
1,40	0,68359	0,34974
1,50	0,68926	0,35524
1,60	0,69638	0,36217
1,70	0,70526	0,37084
1,80	0,71638	0,38166
1,90	0,73022	0,39514
2,00	0,74748	0,41202
2,04	0,75557	0,41993
2,08	0,76443	0,42860
2,12	0,77417	0,43812
2,16	0,78490	0,44864
2,20	0,79670	0,46023
2,24	0,80977	0,47305
2,28	0,82426	0,48734
2,32	0,84034	0,50310
2,36	0,85832	0,52079
2,40	0,87845	0,54064
2,44	0,90111	0,56300
2,48	0,92677	0,58830
2,52	0,95598	0,61718
2,56	0,98949	0,65031
2,60	1,02822	0,68866
2,62	1,94990	0,71013
2,64	1,07341	0,73344
2,66	1,09893	0,75874
2,68	1,12679	0,78640
2,70	1,15718	0,81660
2,72	1,19062	0,84979
2,74	1,22742	0,88635
2,76	1,26817	0,92688
2,78	1,31353	0,97202
2,80	1,36433	1,02252
2,82	1,42153	1,07952
2,84	1,48643	1,14412
2,86	1,56069	1,21809
2,88	1,64634	1,30350
2,90	1,74631	1,40320
2,92	1,86460	1,52119
2,94	2,00631	1,66261
2,96	2,17956	1,83557
2,98	2,39583	2,05153
3,00	2,67333	2,32874
3,02	3,04247	2,69765
3,04	3,55732	3,21199
3,06	4,32472	3,97905
3,08	5,59100	5,24517
3,10	8,07581	7,72934
3,12	15,16632	14,81964
3,14	20,02847	19,99375
π	± ∞	± ∞
3,16	−16,86856	−17,21610
3,18	− 7,86881	− 8,21650
3,20	− 5,03063	− 5,37894
3,22	− 3,63924	− 3,98961
3,24	− 2,83078	− 3,16578
3,26	− 2,27089	− 2,62083
3,28	− 1,88294	− 2,23276
3,30	− 1,59306	− 1,94333
3,32	− 1,36835	− 1,71910
3,34	− 1,18902	− 1,54021
3,36	− 1,04259	− 1,39425
3,38	− 0,92083	− 1,27298
3,40	− 0,81799	− 1,17061
3,42	− 0,72968	− 1,08311
3,44	− 0,65376	− 1,00743
3,46	− 0,58721	− 0,94139
3,48	− 0,52858	− 0,88328
3,50	− 0,47652	− 0,83177
3,52	− 0,42999	− 0,78581
3,54	− 0,38815	− 0,74455
3,56	− 0,35036	− 0,70734
3,58	− 0,31603	− 0,67361
3,60	− 0,28472	− 0,64289
3,62	− 0,25604	− 0,61487
3,64	− 0,22968	− 0,58915
3,66	− 0,20538	− 0,56548
3,68	− 0,18288	− 0,54366
3,70	− 0,16202	− 0,52348
3,72	− 0,14260	− 0,50475
3,74	− 0,12449	− 0,48735
3,76	− 0,10755	− 0,47114
3,78	− 0,09168	− 0,45602
3,80	− 0,07677	− 0,44188
3,82	− 0,06275	− 0,42863
3,84	− 0,04953	− 0,41619
3,86	− 0,03703	− 0,40453
3,88	− 0,02468	− 0,39355
3,90	− 0,01402	− 0,38320
3,92	− 0,00339	− 0,37345
3,927	0,00000	− 0,37690
3,94	0,00671	− 0,36357
3,96	0,01633	− 0,35553
3,98	0,02549	− 0,34729
4,00	0,03424	− 0,33947
4,04	0,05062	− 0,32513

(tabele continuare)

λ	α	β	λ	α	β
4,08	0,06697	−0,31215	4,60	0,19290	−0,22314
4,12	0,07949	−0,30046	4,64	0,19993	−0,20025
4,16	0,09233	−0,28989	4,68	0,20679	−0,21775
4,20	0,10427	−0,28371	4,72	0,21351	−0,21564
4,24	0,11544	−0,27165	4,73	0,21518	−0,21518
4,28	0,12590	−0,26380	4,76	0,22013	−0,21392
4,32	0,13576	−0,25668	4,80	0,22666	−0,21257
4,36	0,14509	−0,25024	4,84	0,23315	−0,21157
4,40	0,15394	−0,24441	4,88	0,23961	−0,21094
4,44	0,16238	−0,23916	4,92	0,24609	−0,21068
4,48	0,17045	−0,23444	4,96	0,25207	−0,21078
4,52	0,17819	−0,23021	5,00	0,25918	−0,21126
4,56	0,18567	−0,22646			

Primită la redacţie la 13 august 1958.

НОВЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ МНОГОБАЛОЧНЫХ РАМ С НЕПОДВИЖНЫМИ УЗЛАМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Для определения собственной частоты многобалочных рам с неподвижными узлами автор приводит вековое уравнение упругой балки в связи с ее неподвижными точками:

$$l^2-3l\ (a+b)\ (1-\alpha)+9ab\ [(1-\alpha)^2-\beta^2]=0.$$

В большинстве практических случаев решение этого уравнения, примененного к одной, подходяще выбранной балке, дает с хорошим приближением первое значение собственной частоты для всей системы.

Для получения высшей точности приводится и рекуррентный метод, последовательно улучшающий коэффициенты уравнения.

UN NOUVEAU PROCÉDÉ POUR LA DÉTERMINATION DES FRÉQUENCES PROPRES DES CADRES MULTIPLES À NŒUDS FIXES

RÉSUMÉ

Pour déterminer la fréquence propre des cadres multiples à nœuds non-déplaçables, l'auteur exprime l'équation séculaire de la poutre élastique par rapport a ses points fixes :

$$l^2-3l\ (a+b)\ (1-\alpha)+9ab\ [(1-\alpha)^2-\beta^2]=0$$

Dans la majorité des cas pratiques, les solutions de cette équation appliquée à une seule barre convenablement choisie fournit — avec une bonne approximation — la première valeur de la fréquence propre pour le système tout entier.

En vue d'obtenir une précision supérieure, on expose également une méthode récurrentielle qui améliore succesivement les coefficients de l'équation.

BIBLIOGRAFIE

1. RADU AGENT, *Metoda aproximațiilor succesive. ESAC, București* (1955).
2. И. В. АНАНИЕВ, *Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем.* Гостехиздат. Москва (1946).
3. GH. EM. FILIPESCU, *Statica construcțiilor și rezistența materialelor.* Impr. Națională, București (1940).
4. Vl. KOLOUSEK, *Baudinamik der Durchlaufträger und Rahmen.* Fach. buchverlag, Leipzig (1953).
5. A. RAYTHEL, *La dinamica dei sistemi solidari.* Giornale del Genio Civile, *11* și *12* (1952).
6. S. RĂUTU, *Calculul vibrațiilor cadrelor prin aproximații succesive.* Studii și cercetări de mecanică aplicată. Ed. Acad. R.P.R., **VII**, *1* (1956).
7. Н. К. СНИТКО, *Методы расчета сооружений на вибрацию и удар.* Ленинград (1953).
8. A. STRASSNER, *Neuere Methoden zur Static der Rahmentragwerken* I. Band. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin (1948).
9. E. SUTER, *Methode der Festpunkte.* Springer, Berlin (1952).

TRATAMENTE MECANICE ŞI PRELUCRAREA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

PROTECȚIA CONTRA COROZIUNII PRIN STRATURI DE METAL PULVERIZAT

DE

V. MARCU, N. ZELINGHER şi P. FREUND

1. CONSIDERAŢII GENERALE

1. 1. Fenomenul coroziunii

Coroziunea suprafețelor metalice este considerată în economia mondială ca o boală gravă a metalelor, de proporția unui adevărat flagel. S-a calculat că pierderile cauzate numai produselor siderurgice prin coroziune, reprezintă anual cam 30% din valoarea acestora. În S.U.A. pagubele provocate de coroziunea metalelor se cifrează anual la circa 8 miliarde dolari, iar în Franța la vreo 600 miliarde franci.

Coroziunea are numeroase aspecte, dintre care cel mai frecvent este coroziunea electrochimică şi cazul special al acesteia, coroziunea atmosferică.

Se ştie că în anumite condiții se pot forma pe suprafețele metalice microelemente galvanice locale. Cauzele care provoacă diferența de potențial la aceste microelemente pot fi : neomogenitatea compoziției metalului, diferența de cristalizare, impuritățile, tensiunile interne, rugozitatea suprafețelor etc.

Produsul coroziunii poate fi un strat aderent şi impermeabil care, o dată format, se comportă ca un pasivant, împiedicînd continuarea fenomenului, cum este de exemplu la cupru, zinc sau aluminiu.

La fier şi aliajele acestuia (oțelul şi fonta) produsul coroziunii (rugina) este permeabil şi lasă să treacă umiditatea şi oxigenul la metalul de bază, a cărui coroziune progresează neîncetat.

În afară de formele expuse mai sus, există şi coroziunea chimică, a cărei acțiune se manifestă şi asupra metalelor neferoase.

1. 2. Protecția contra coroziunii

Pentru protejarea suprafețelor metalice contra coroziunii există numeroase procedee printre care a început să se utilizeze, în ultimii ani și metalizarea prin pulverizare.

Gradul de protecție depinde de polaritatea respectivă a metalului de bază și a celui din stratul protector, fapt care a necesitat clasarea metalelor într-un tabel din acest punct de vedere. Pentru metalele și aliajele industriale mai frecvent utilizat este tabelul următor [1]

↑ mai anodice

Magneziul
Zincul
Cadmiul
Aluminiul
Fierul
Cromul
Nichelul
Plumbul
Staniul
Alama
Bronzul
Cuprul
Argintul
Aurul
Platina

↓ mai catodice

Protecția dată de straturile metalizate prezintă un caracter special datorit porozității acestor straturi.

Să presupunem că avem de protejat un metal A, printr-un strat metalizat format de un alt metal, B. Dacă metalul B este mai anodic decît A, porozitatea nu are decît o importanță secundară, iar stratul metalizat nu este necesar să fie perfect impermeabil. Este cazul, de exemplu, la protecția unei piese de oțel prin pulverizare cu zinc sau aluminiu, la care elementul galvanic, format de cele două metale, provoacă atacul și consumarea metalului protector.

Dacă însă metalul B este mai catodic decît A, de exemplu cazul nichelului sau cuprului față de fier, protecția nu poate fi asigurată decît dacă stratul metalizat este perfect impermeabil.

La cea mai mică discontinuitate, sau fisură a stratului protector, începe coroziunea metalului de bază, A, care se accelerează și provoacă desprinderea stratului protector [2].

2. STUDII DE COROZIUNE EFECTUATE LA INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

2. 1. Obiectul studiilor

Produsele siderurgice sînt protejate contra coroziunii, în majoritatea cazurilor, prin straturi metalizate de zinc sau aluminiu, în cazul cînd se adoptă pulverizarea metalelor ca mijloc de protecție [3].

Colectivul de metalizare I.M.A. a fost preocupat să cunoască şi modul de comportare la coroziune a straturilor de oţel pulverizat, întrucît asupra acestei chestiuni nu există date în literatură.

La această preocupare am ajuns în urma observaţiilor practice indicate mai jos :

a) O osie de vagon feroviar, metalizată la unul din capete, a rămas afară timp de cîteva luni, sub acţiunea unor mari variaţii de temperatură şi umiditate. S-a remarcat că regiunea metalizată a osiei era mult mai puţin oxidată decît regiunea nemetalizată.

b) S-au expus la acţiunea atmosferii trei categorii de epruvete şi anume : nemetalizate, metalizate cu oţel, stratul metalizat fiind strungit şi rectificat şi metalizate, rămase sub forma brută a stratului.

S-a constatat că epruvetele nemetalizate erau intens oxidate, cele din categoria a doua mai puţin, iar stratul metalizat brut nu prezenta nici o urmă de rugină după două luni de expunere la umiditatea atmosferică.

2. 2. Coroziunea electrochimică

Colectivul de metalizare a întreprins, cu colaborarea specialiştilor în chimie, studii de laborator prin două metode diferite ca utilaj şi schemă de montaj, după cum urmează :

Metoda epruvetelor cilindrice *). Instalaţia pentru studierea polarizării s-a făcut după schema din figura 1 [4].

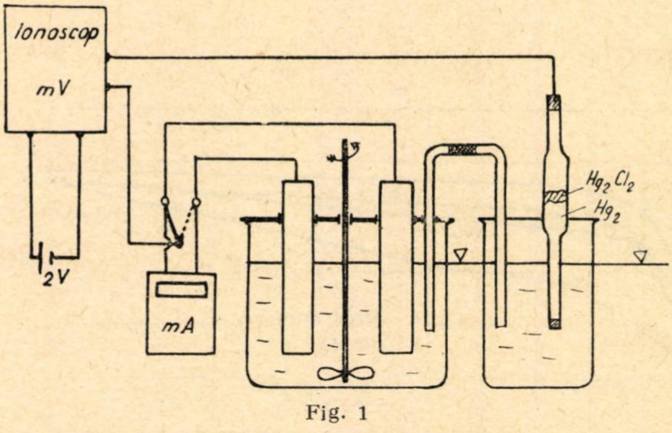


Fig. 1

Unul din electrozi era din oţel, iar celălalt din cupru, în formă de bare cilindrice, cu diametrul de 12 mm şi lungimea de 80 mm.

Electrozii erau cufundaţi într-o soluţie de NaCl, asupra căreia acţiona un agitator, iar ca electrod de referinţă s-a luat electrodul de calomel. Încercările s-au efectuat la temperatura ambiantă.

---

*) Lucrări efectuate cu colaborarea tov. ing. L. Rozeanu şi O. Preoţescu.

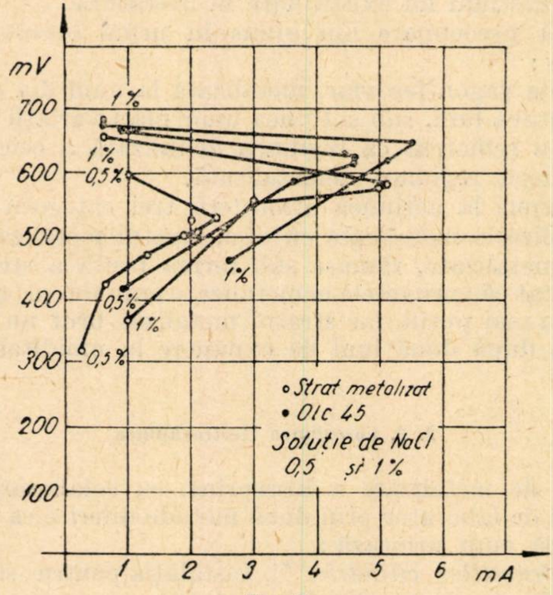

mV
700
600
500
400
300
200
100
1
2
3
4
5
6
mA
1%
1%
0,5%
1%
0,5%
1%
0,5%
∘ Strat metalizat
• Olc 45
Soluție de NaCl
0,5 și 1%

Fig. 2

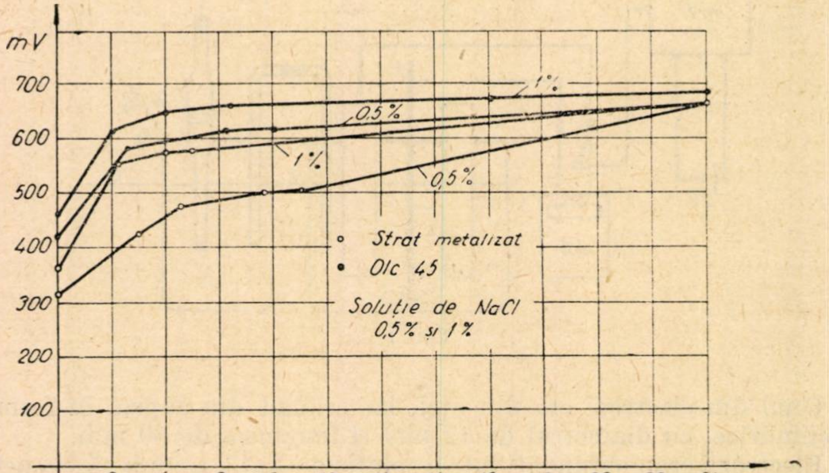

mV
700
600
500
400
300
200
100
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
Timp, ore
1%
0,5%
1%
0,5%
∘ Strat metalizat
• Olc 45
Soluție de NaCl
0,5% și 1%

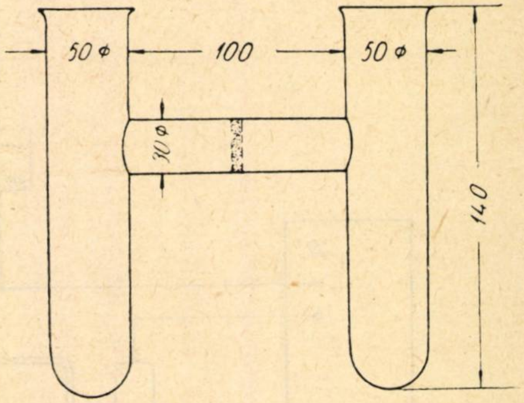
Fig. 3

În urma polarizării treptate în timp, s-a determinat potenţialele electrozilor, faţă de electrodul de referinţă, precum şi intensitatea curentului debitat în scurtcircuit.

S-au efectuat mai multe serii de încercări cu electrozi nemetalizaţi şi metalizaţi, precum şi cu concentraţii a soluţiei de NaCl de 0,5 şi 1%. În figura 2 este redată diagrama potenţialului în funcţie de intensitatea curentului, din care rezultă că la concentraţia de 0,5% NaCl, intensitatea curentului de scurtcircuit, care caracterizează cantitativ fenomenul de coroziune a stratului metalizat, este de numai 49% faţă de cazul epruvetei nemetalizate, deci stratul metalizat este mai rezistent la coroziune.

În figura 3 este redată variaţia potenţialului, în funcţie de timp pînă la durata de 24 ore ; s-a constatat, de asemenea, un avantaj pentru epruveta metalizată.

*Metoda epruvetelor plate**). Pentru ridicarea curbelor de polarizare s-a utilizat o celulă specială în formă de *H* (figura 4), la care spaţiul anodic a fost separat de spaţiul catodic prin ajutorul sticlei sinterizate, pentru a evita amestecul anolitului cu catolitul.



Celula electrolitica

Fig. 4

Ca epruvete pentru studiul coroziunii s-au folosit trei categorii de plăci circulare de oţel şi anume : metalizate cu oţel, nemetalizate şi polizate, brute nemetalizate.

Epruvetele, avînd diametrul de 38 mm, erau prevăzute cu cîte o tije pentru introducerea lor în interiorul celulei.

Înainte de a fi puse în mediul agresiv epruvetele au fost protejate pe muchie cu o răşină anticorozivă, iar locurile de îmbinare cu tijele au fost degresate cu benzen şi acetonă.

Ca sursă de curent s-a utilizat o baterie de acumulatori de 36 V, ca anod auxiliar un electrod de platină, iar ca electrod de referinţă s-a recurs la electrodul de calomel.

Măsurarea potenţialelor s-a făcut cu compensatorul tehnic tip 0,145.

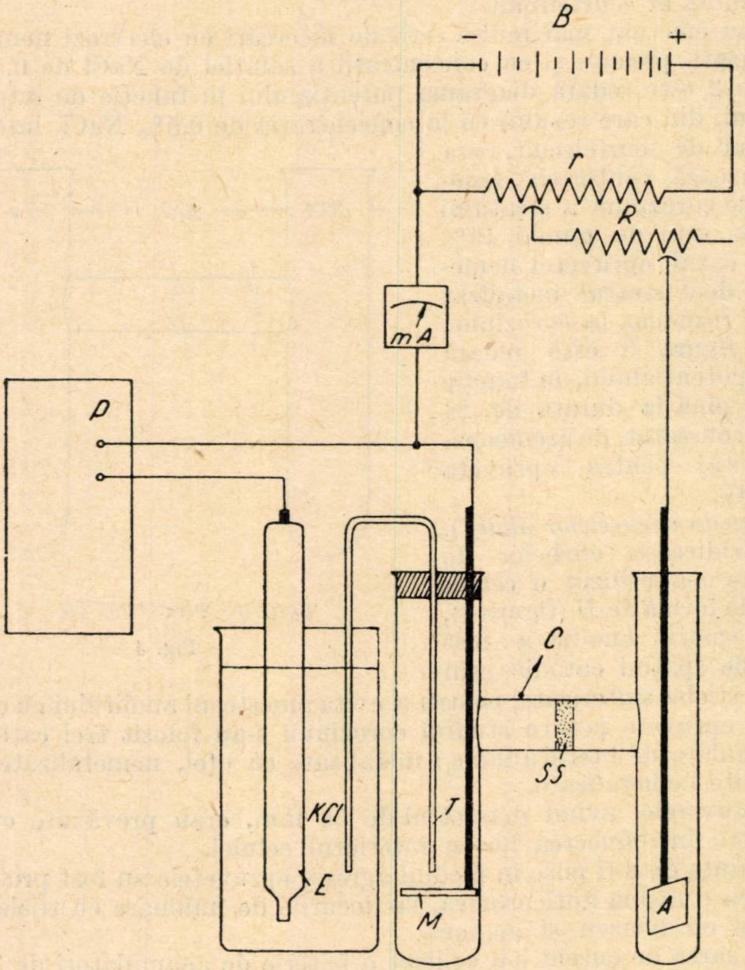
Schema instalaţiei este indicată în figura 5 [5].

Ca mediu coroziv s-a folosit o soluţie de clorură de sodiu 10%, acid clorhidric 2% şi acid azotic 6N, care s-au introdus în compartimentele celulei.

Încercările s-au executat la temperatura ambiantă. Într-un compartiment s-a pus electrodul de platină, iar în celălalt epruveta de experimentat precum şi o punte electrolitică Haber-Luggin pentru măsurarea potenţia-

---

*) Lucrări efectuate cu colaborarea tov. ing. L. Schwartz şi O. Radovici.



B - baterie pentru acumulatori 36 V

r - reostat 3000 Ω

R - rezistență variabilă 1 MΩ

mA - miliampermetru

C - celula de lucru

A - electrod auxiliar de platină

M - electrodul de studiat

T - capilară Haber - Luggin

SS - perete de sticlă sinterizată

E - electrod de referință (calomel)

KCl - Soluție saturată de clorură de potasiu

P - compensator tehnic (potențiometru)

Fig. 5

lelor. După introducerea epruvetei s-au făcut măsurători succesive ale potențialului electrodic. Cînd acesta a ajuns la o valoare staționară s-a legat polul pozitiv al sursei de curent la electrodul de platină, iar polul negativ la epruvetă, realizîndu-se polarizarea acesteia.

S-a mărit curentul la fiecare două minute cu valoare stabilită și s-a măsurat potențialul corespunzător.

Cifrele obținute au permis trasarea diagramelor din figurile 6 (clorură de sodiu 10%) și 7 (acid clorhidric 2%) care indică viteza de coroziune a celor trei categorii de epruvete, în diverse medii corozive.

Diagramele arată în abscise variația logaritmică a intensității curentului, iar în ordonate variația potențialelor la scara zecimală.

În figura 8 se arată variația potențialelor staționare în funcție de timp a celor trei categorii de epruvete în acid azotic 6N, iar în figura 9 diagrama de polarizare anodică a epruvetelor, în acid azotic 6N.

Studiul diagramelor obținute a permis să ajungem la următoarele concluzii :

a) Viteza de coroziune a pieselor metalizate este mai mare, în medii agresive chimice, decît a pieselor nemetalizate.

b) Rezultatele polarizării anodice și ale potențialelor staționare în acid azotic 6N ne arată că se produce o pasivare a oțelului metalizat. Acest fapt este de o importanță deosebită pentru cazul coroziunii atmosferice, unde știm că fenomenul de pasivare poate interveni în cazul coroziunii uscate.

Stratul protector dat de acțiunea pasivantă a acidului azotic nu este însă durabil, după cum se arată în literatură [6].

Acest strat este foarte fin, dens și impermeabil, însă și foarte fragil.

2. 3. Coroziunea atmosferică

S-au efectuat două categorii de încercări după cum urmează :

Încercări pentru determinări cantitative. S-au expus la coroziune atmosferică, timp de 25 zile, plăcuțe dreptunghiulare de 25 × 50 mm din oțel metalizat, oțel polisat și oțel brut din prelucrare, care au fost în prealabil cîntărite la balanța analitică.

La început atmosfera a avut un procent foarte redus de umiditate. După 10 zile de expunere plăcuțele nemetalizate s-au acoperit complet cu rugină, în timp ce plăcuțele metalizate prezentau o suprafață în general neschimbată, cu mici localizări de oxid de fier.

Survenind o ploaie, rugina a apărut și pe suprafețele metalizate. Cîntărindu-se toate epruvetele după oxidare și raportînd diferența de greutate la timpul de expunere și suprafața plăcuțelor, s-a găsit o ușoară reducere a greutății plăcuțelor metalizate, în raport cu celelalte.

Încercări cu caracter calitativ. S-a amintit despre aceste încercări la paragraful 2.1, punctul *b*. Ele au fost repetate, expunînd și fragmente de strat metalizat la acțiunea coroziunii atmosferice.

S-a constatat că suprafețele acoperite cu un strat de oțel pulverizat neprelucrat nu se oxidează chiar în atmosferă umedă.

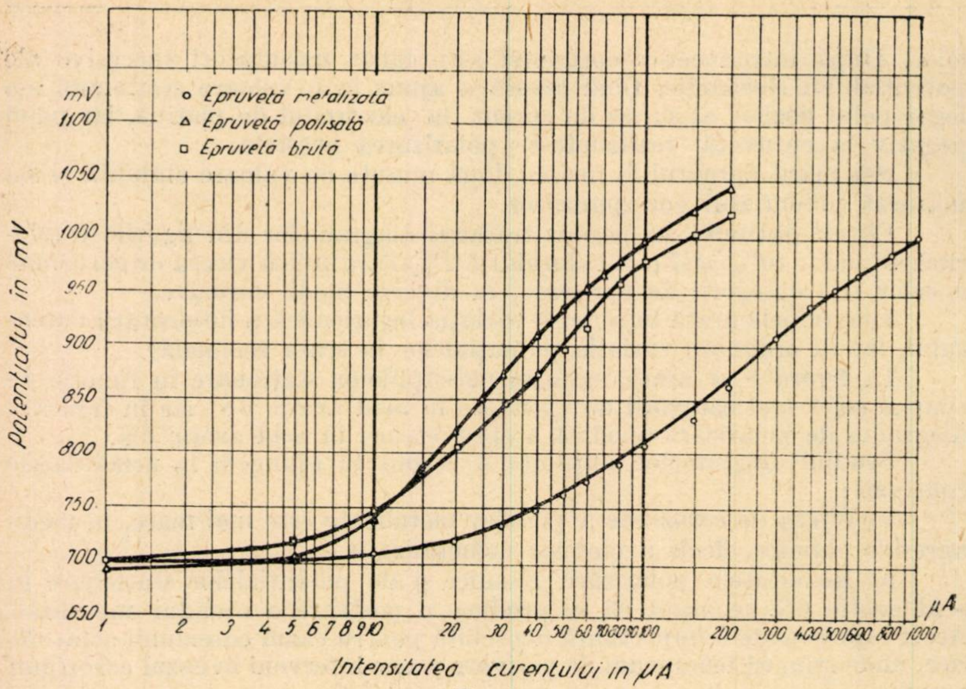

mV
○ Epruvetă metalizată
△ Epruvetă polisată
□ Epruvetă brută
1100
1050
1000
950
900
850
800
750
700
650
Potentialul in mV
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
200
300
400
500
600
800
1000
μA
Intensitatea curentului in μA

Fig. 6

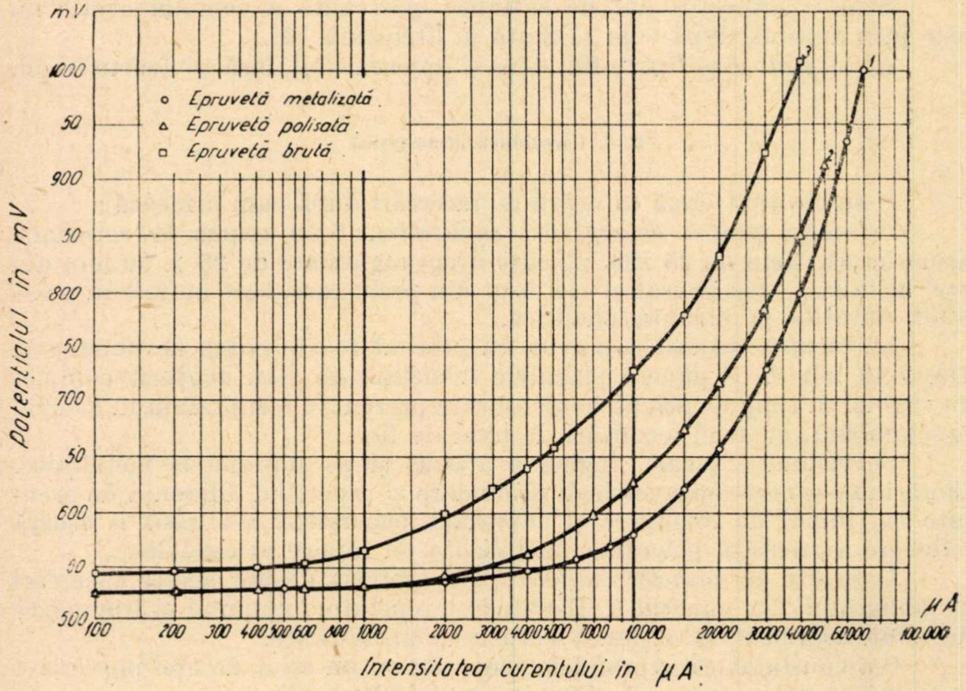

mV
○ Epruvetă metalizată
△ Epruvetă polisată
□ Epruvetă brută
1000
50
900
50
800
50
700
50
600
50
500
Potențialul in mV
1
2
3
100
200
300
400
500
600
800
1000
2000
3000
4000
5000
7000
10.000
20000
30000
40000
60000
100.000
μA
Intensitatea curentului in μA

Fig. 7

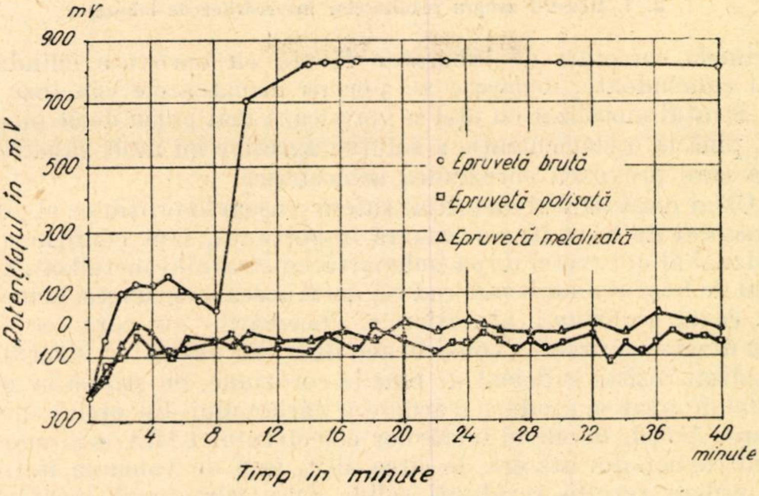

mV
900
700
500
300
100
0
100
300
Potențialul în mV
○ Epruvetă brută
□ Epruvetă polisată
△ Epruvetă metalizată
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
minute
Timp în minute

Fig. 8

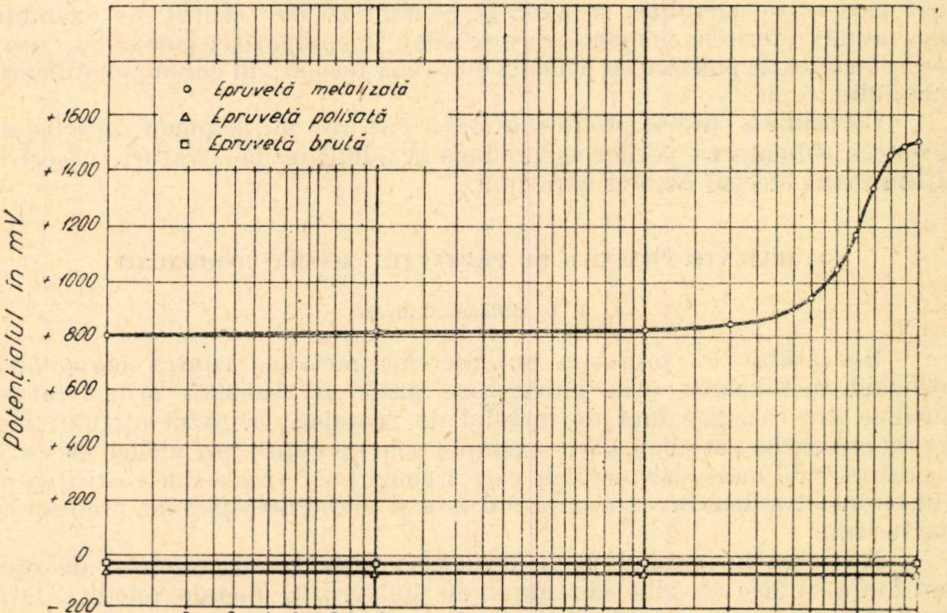

○ Epruvetă metalizată
△ Epruvetă polisată
□ Epruvetă brută
+ 1600
+ 1400
+ 1200
+ 1000
+ 800
+ 600
+ 400
+ 200
0
− 200
Potențialul în mV
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
200
300
400
600
800
1000
Intensitatea curentului în µA

Fig. 9

2. 4. Discuții asupra rezultatelor încercărilor de laborator

Primele cercetări de laborator făcute cu epruvete cilindrice sînt cele mai concludente, deoarece au permis următoarele concluzii :

a) Stratul metalizat cu oțel se corodează mai puțin decît piesa nemetalizată, pînă la o concentrație a soluției agresive cu mult superioară față de aceea care provoacă coroziunea atmosferică.

b) Chiar dacă stratul metalizat suferă o ușoară coroziune, el protejează totuși metalul de bază într-o măsură importantă, fapt confirmat de examenul vizual al epruvetei după îndepărtarea stratului metalizat. Oxidarea metalului de bază era mult mai redusă decît aceea a epruvetei nemetalizate.

În cazul coroziunii atmosferice, încercările cu caracter calitativ, făcute cu diverse epruvete expuse în aer liber, au arătat că stratul brut de oțel metalizat rezistă suficient de bine la coroziune. Se știe că la obținerea unui astfel de strat se produce o ardere a carbonului din oțelul sîrmelor de metalizare. Astfel, în cursul lucrărilor colectivului I.M.A. s-a constatat că procentul carbonului ars era de circa 40% față de valoarea inițială. Din această ardere rezultă reziduuri solide care colmatează porii stratului, dîndu-i o culoare neagră.

Dacă se polisează o suprafață metalizată cu oțel, secționîndu-se deci particulele metalice, se aduc în contact cu electrolitul (de exemplu apa salină) diferitele elemente care se aflau în compoziția particulei, acoperite înainte de polisare cu pelicula omogenă formată în cursul solidificării metalului topit.

Coroziunea care se produce în acest caz este un fenomen superficial, deoarece colmatarea porilor se produce în adîncime pe straturi succesive și limitează efectul acestei coroziuni.

3. APLICAȚII PRACTICE DE PROTECȚIE CONTRA COROZIUNII

3. 1. Mijloace utilizate

S-a arătat că protecția suprafețelor metalice contra coroziunii, utilizînd metalizarea prin pulverizare poate fi realizată prin straturi anodice sau catodice față de metalul de protejat. În cazul oțelului sau fontei straturile catodice, ca de exemplu cele de cupru sau nichel, necesită o grosime mai mare, iar metalele care trebuie pulverizate sînt costisitoare. Un alt inconvenient în cazul cuprului este și toxicitatea gazelor produse la pulverizare.

De aceea în aproape 90% din cazuri protecția suprafețelor de oțel sau fontă se face cu zinc sau aluminiu pulverizat, metale anodice față de fier.

În lucrarea [2] se recomandă în special aluminiul care dă o excelentă protecție în toate cazurile de coroziune.

Piesele protejate cu un strat de aluminiu pulverizat rezistă foarte bine și în apa de mare, aluminiul avînd față de zinc un pH cu o valoare mai scăzută.

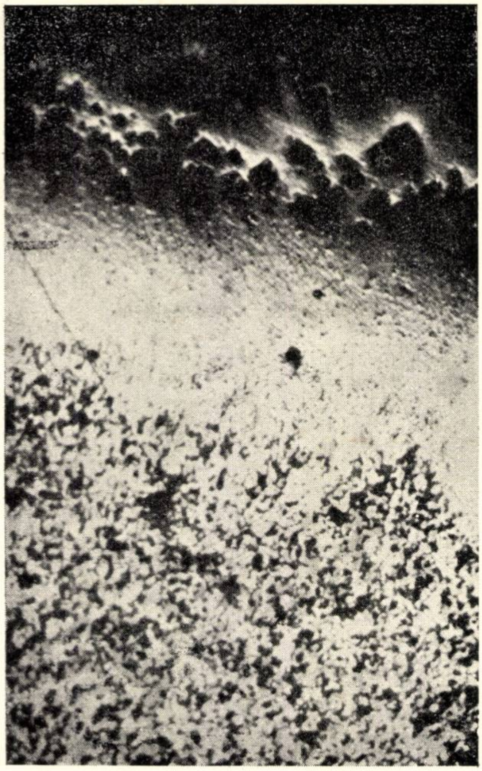


Fig. 10

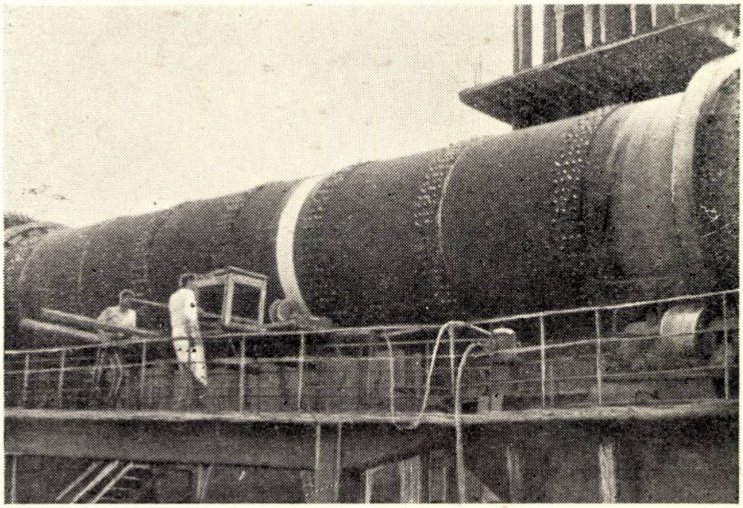


Fig. 11

c. 808

Prin utilizarea aluminiului pulverizat s-au efectuat aplicaţiile practice, indicate mai jos, de protecţie contra coroziunii.

La Departamentul energiei electrice. Capele de la izolatorii liniilor de înaltă tensiune sînt protejate contra coroziunii atmosferice prin zincare, obţinută introducînd capele în zinc topit. S-a constatat că acest procedeu nu este economic, deoarece zincul, volatilizîndu-se la temperatura de 930°C, se produc pierderi ale metalului protector.

Cerîndu-se asistenţa tehnică la I.M.A. colectivul de metalizare a efectuat aplicarea pe capele trimise de ICPET a unui strat de aluminiu pulverizat, gros de 0,2—0,3 mm. Piesele astfel protejate au fost înapoiate la ICPET, pentru a fi montate în vederea examinării modului cum se comportă la coroziunea atmosferică.

Lucrările [8], [9] şi [10] arată că în numeroase ţări clădirile metalice, podurile sau stîlpii liniilor de transport a energiei electrice, protejaţi prin aluminiu pulverizat, rezistă timp de 12—15 ani la coroziunea atmosferică. În consecinţă este sigur că şi capele metalizate de colectivul I.M.A. vor da satisfacţie.

Alitarea de supape. O uzină a Departamentului industriei petrolului ne-a solicitat, şi colectivul I.M.A. a efectuat metalizarea cu aluminiu pulverizat a unor supape de motoare „Diesel'', cărora li s-a aplicat apoi un tratament termic [11].

Încercările mecanice şi metalografice efectuate asupra acestor supape după alitare au permis următoarele constatări:

a) Duritatea metalului de bază a fost de 241—246 Hv, iar a stratului alitat de 300—420 Hv.

b) S-a obţinut o difuzare în masa oţelului a aluminiului pulverizat, după cum se constată din micrografia din figura 10.

Se atrage atenţia că acest strat difuzat, care conţine Al_2O_3, să nu depăşească grosimea la care dă soluţie solidă, pentru a evita efectul abraziv asupra scaunelor supapelor.

Protecţia unui cuptor rotativ pentru o uzină metalurgică care posedă un cuptor rotativ tip „WÄLZ'' cu următoarele caracteristici:

lungime	41 m
diametru.	2,50 m
grosimea tablei învelişului exterior	25 mm
temperatura învelişului în timpul funcţionării cuptorului.	250—300°C

Suprafaţa exterioară a învelişului cuptorului suferă o coroziune rapidă şi intensă din cauza temperaturii ridicate. Uzina a încercat fără succes tot felul de vopsele şi bitumuri, cerînd în cele din urmă, prin ASIT, asistenţa tehnică la I.M.A.

Colectivul Institutului de mecanică aplicată s-a deplasat la uzina respectivă, cu utilajul său, metalizînd cu un strat de aluminiu, gros de 0,2—0,3 mm o porţiune de 3 m² din învelişul exterior al cuptorului.

Uzina a comunicat după 4 luni că acest strat a realizat o protecţie perfectă învelişului cuptorului contra coroziunii şi a solicitat concursul pentru metalizarea integrală cu aluminiu pulverizat a acelui cuptor.

În figura 11 se vede cuptorul rotativ în timpul operației de metalizare prin pulverizare cu aluminiu.

Temperatura ridicată a învelișului nu a permis operatorilor să lucreze la distanța normală pentru astfel de metalizări și a impus realizarea unei comenzi de la distanță a aparatului de pulverizare.

În schimb această temperatură are avantajul de a menține stratul de aluminiu în stare plastică, fapt care reduce sensibil porozitatea și asigură o mai bună protecție contra coroziunii.

Este preferabil ca metalizarea întregii suprafețe exterioare a cuptorului să se facă într-o perioadă cînd activitatea la cuptor va fi sistată pentru diverse reparații, amenajări sau controluri.

Învelișul cuptorului avînd o suprafață de 322 m^2, va fi necesar să se lucreze simultan cu două, sau preferabil cu trei echipe pentru a se termina cît mai curînd operația de metalizare cu aluminiu a învelișului.

Metalizarea unei statui. În urma unei cereri a Combinatului Fondului Plastic, conducerea Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia” a autorizat colectivul de metalizare să studieze metalizarea cu cupru a unei statui din piatră artificială, înaltă de 2,7 m.

După lucrări experimentale efectuate asupra unor mici machete, colectivul I. M. A. a trecut la metalizarea, pe porțiuni a statuii. S-a depus un strat de cupru gros de 0,3—0,4 mm — consumîndu-se circa 10 kg de cupru, față de 500 kg cît ar fi necesitat turnarea statuii din metal masiv.

S-a realizat deci o economie de metal de 98%, fără a se altera calitățile artistice ale statuii care după șlefuire și patinare a căpătat aspectul unei statui obișnuite de metal turnat.

Operația de metalizare a durat circa 14 ore, deci cu mult mai puțin decît durează operațiile de turnare.

Statuia metalizată a fost prezentată la expoziția organizată de Combinatul Fondului Plastic, între 20 octombrie — 20 noiembrie 1957, făcînd obiectul unor aprecieri favorabile.

Astfel de lucrări au fost executate pe scară mai largă în R. P. Polonă [12].

CONCLUZII

Studiile experimentale întreprinse de colectivul de metalizare I.M.A. au permis să se constate avantajele pe care le prezintă metalizarea prin pulverizare pentru protecția suprafețelor metalice.

Se poate obține o economie de metale neferoase, utilizînd straturi de oțel pulverizat, acoperite ulterior cu vopseli sau mase plastice, pentru a mări protecția la coroziunea atmosferică a metalului de bază.

În cazul protecției la coroziunea chimică și la coroziunea provocată de temperaturi înalte este însă imperios necesar a se recurge la straturi din metale neferoase pulverizate. Literatura recomandă pentru acest din urmă caz și utilizarea unei vopsele pe bază de siliconi [13].

În încheiere este interesant de semnalat că actualmente în marile țări industriale metalizarea prin pulverizare a luat un excepțional avînt, astfel încît cantitatea de metal pulverizat pentru protecţia contra coroziunii întrece pe cea utilizată pentru alte scopuri [14].

În luna septembrie 1956, s-a ţinut la Halle, în R. D. G. primul congres internaţional de metalizare prin pulverizare, la care s-au prezentat referate interesante asupra stadiului acestui procedeu în diverse ţări şi asupra aplicaţiilor metalizării prin pulverizare.

În R. P. R. nu s-a dat pînă acum atenţiune acestui domeniu şi ar fi cazul ca metalizarea prin pulverizare să înceapă a fi aplicată şi la noi pe scară industrială nu numai experimentală. S-ar realiza economii foarte însemnate, chiar dacă luăm în considerare dintre multiplele ei aplicaţii, numai protecţia contra coroziunii dată de metalizarea prin pulverizare.

Primită la redacţie la 7 februarie 1958.

ПРОТИВОКОРРОЗИОННАЯ ЗАЩИТА СЛОЯМИ РАСПЫЛЕННОГО МЕТАЛЛА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей статье рассматривается прежде всего огромный ущерб, наносимый коррозией металлов народному хозяйству и вызывающий необходимость постоянной борьбы с ней многочисленными средствами, среди которых имеет место и металлизация распылением.

Затем авторы излагают результаты проведенных исследований по поведению слоев, образованных распыленной сталью, с целью выяснения возможности экономии цветных металлов.

Исследовано также поведение металлизированных сталью и неметаллизированных образцов в условиях электрохимической и атмосферной коррозий.

Установлено, что образцы, обработанные распыленной сталью, имеют удовлетворительное сопротивление полусухой коррозии, а необработанные — атмосферной коррозии.

Далее в статье излагается практическое применение противокоррозионной защиты для головок высоковольтных изоляторов, для двигательных клапанов, а также для крупноразмерного сушильного барабана. Приводится также и способ, примененный при металлизации медью статуи из искусственного камня.

LA PROTECTION CONTRE LA CORROSION ASSURÉE PAR DES COUCHES DE MÉTAL PULVÉRISÉ

RÉSUMÉ

L'article commence par attirer l'attention sur la gravité du phénomène de la corrosion des métaux et sur les possibilités de la métallisation par projection pour lutter contre ce phénomène.

On expose ensuite les résultats des recherches effectuées sur des couches d'acier pulvérisé en ce qui concerne la résistance à la corrosion électro-chimique et atmosphérique.

On a constaté que les échantillons métallisés et ensuite polis résistent assez bien à la corrosion en atmosphère peu humide, tandis que si l'humidité est importante, ce sont les couches de métal projeté, à l'état brut qui sont moins sensibles à la corrosion.

En continuant, l'article expose les résultats des applications pratiques effectuées pour protéger contre la corrosion des accessoires des lignes à haute tension, des soupapes de moteurs et un grand four rotatif. A la fin, on décrit la métallisation par projection de cuivre d'une statue en ciment.

BIBLIOGRAFIE

1. M. CAUCHETIER, *La métallisation dans la lutte contre la corrosion*. Rev. Corrosion et anticorrosion (1954).
2. M. MORRISOT, *Sommes-nous armés contre la corrosion?* Rev. Corrosion et anticorrosion (1954).
3. R. E. MANSFORD, *Sprayed aluminium and zinc in corrosion environment*. Rev. Corrosion Technology (1956).
4. G. BOMBARA, F. GIANNI, *Comportarea diferiților inhibitori la coroziunea galvanică*. Caiet selectiv chimie I.D.T., *10* (1955).
5. UHLICK EVANS, *Metallic corrosion passivity and protection*. London (1948).
6. B. V. NEKRASOV, *Curs de chimie generală*. Ed. tehnică, București (1955).
7. N. D. TOMASOV, *Teoria electrochimică a căilor de mărire a rezistenței la coroziune a aliajelor metalice*. Caiet selectiv chimie I.D.T., *11* (1955).
8. — *Steel protection by sprayed aluminium*. Rev. Engineering *4540* (1953).
9. M. E. BALLARD, *Die Entwicklung der Metallspritztechnik und deren Hauptanwendungsgebiete in Grossbritanien*. (Referate zur 1 Internationalen Metallspritzkonferenz 1956 Halle-Saale). Rev. Schweisstechnik, *4* (1957).
10. F. HEDDE, *Die Entwicklung des Metallspritzens in Frankreich*. Rev. Schweisstechnik, *4* (1957).
11. Н. Н. КАТЦ, Е. М. ЛИННИК, *Электрометаллизация*. Селхозгиз, Москва (1953).
12. I. LAPINSKI, *Die Entwicklung des Metallspritzverfahren in der Volksrepublik Polen*. Rev. Schweisstechnik, *4* (1957).
13. HANS VON HOFE, *Stand der Anwendung des Metallspritzens in der Deutschen Bundesrepublik*. Rev. Schweisstechnik, *4* (1957).
14. W. E. STANTON, *The Trend of Protective Metal Spraying Practice*. Rev. Corrosion Technology (1956).

GRINZI PE REAZEME ELASTICE DE LUNGIME DATĂ

DE

GH. BUZDUGAN

1. Formularea problemei

Reazemele rigide, fără denivelări, sînt schematizări ale reazemelor reale, în scopul de a simplifica relaţiile de calcul. În numeroase cazuri, aceste schematizări sînt satisfăcătoare, iar calculele bazate pe ele duc la erori destul de mici.

Practica a arătat că atunci cînd denivelările reazemelor sînt destul de mari, ele nu mai pot fi neglijate, iar reazemele rigide se înlocuiesc prin cele elastice. Literatura tehnică cunoaşte diverse probleme în care se ţine seama de elasticitatea reazemelor:

— grinda de lungime finită, aşezată pe teren elastic (fig. 1);

— grinda cu două reazeme, din care unul este elastic, iar celălalt încastrat (fig. 2)

— grinda continuă pe reazeme elastice (fig. 3);

— încastrarea elastică (fig. 4).

Ne punem problema de a studia grinzile cu două sau mai multe reazeme elastice, ţinînd seama că reazemele nu sînt punctiforme, ci au o lungime dată a. Exemple de acest fel pot fi:

— grinda pe două reazeme, cu sarcină concentrată (fig. 5) sau cu sarcină distribuită (fig. 6) (bolţul pistonului);

— grinda continuă cu reazeme elastice (fig. 7);

— grinda dublu încastrată.

Este interesant de studiat efectul pe care elasticitatea reazemului şi lungimea sa îl au asupra deformaţiilor şi eforturilor din grindă.

Pentru moment, în articolul de faţă, se va studia grinda cu două reazeme, simetric încărcată (fig. 5).

2. Rezolvarea problemei

Se consideră grinda din figura 8, de lungime l, cu două reazeme de lungime a. Reazemele au coeficientul de tasare (sau modulul terenului) k. Prin urmare, reacţiunea reazemului, pe unitatea de lungime este kv, dacă v este săgeata în punctul considerat.

Se va examina efectul pe care elasticitatea şi lungimea reazemului îl au asupra deformaţiilor de încovoiere. Din motive de simetrie, studiul se face numai pe jumătatea lungimii grinzii.

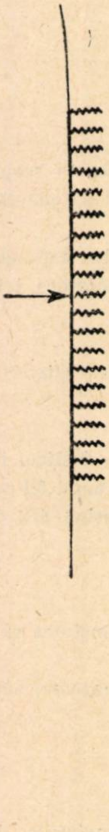


Fig. 1

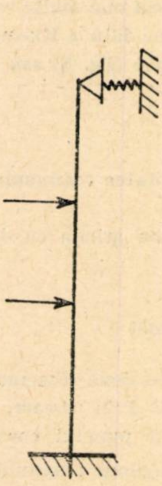


Fig. 2

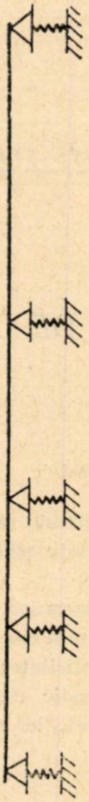


Fig. 3

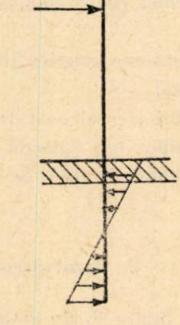


Fig. 4

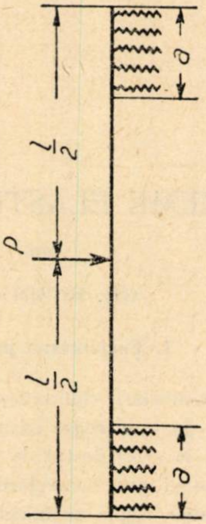


Fig. 5

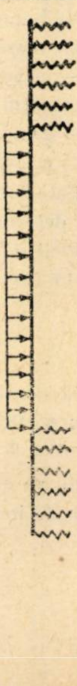
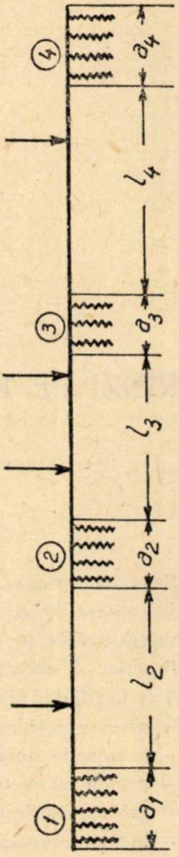


Fig. 6



①
②
③
④
a_1
a_2
a_3
a_4
l_2
l_3
l_4

Fig. 7

a. În dreptul reazemului, se aplică ecuaţia diferenţială a deformaţiei grinzii pe teren elastic, bazată pe ipoteza simplificatoare a lui Winkler [1])

$$EI_z \frac{d^4v}{dx^4} + kv = 0\,;\; 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{1}$$

Făcînd notaţia

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4\,EI_z}} \tag{2}$$

se obţine integrala ecuaţiei, de forma

$$v = e^{\beta x}(A \sin \beta x + B \cos \beta x) + e^{-\beta x}(C \sin \beta x + D \cos \beta x). \tag{3}$$

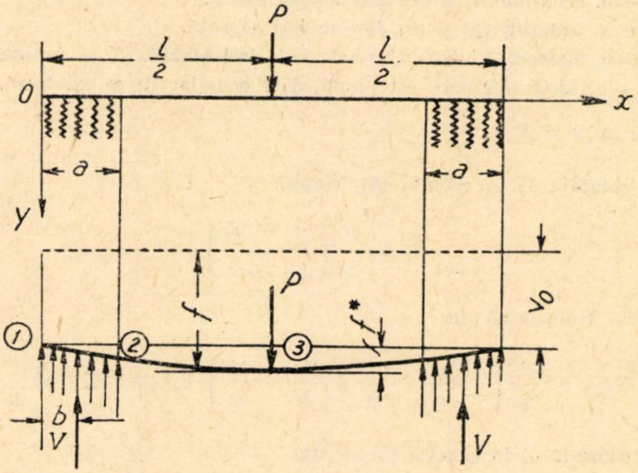


Fig. 8

Derivatele succesive ale acestei ecuaţii sînt

$$\frac{dv}{dx} = \beta e^{\beta x}(A \sin \beta x + B \cos \beta x + A \cos \beta x - B \sin \beta x) + \beta e^{-\beta x}(- C \sin \beta x - D \cos\beta x + + C \cos \beta x - D \sin \beta x), \tag{4}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2\,\beta^2\,[e^{\beta x}(A \cos \beta x - B \sin \beta x) + e^{-\beta x}(- C \cos \beta x + D \sin \beta x)], \tag{5}$$

$$\frac{d^3v}{dx^3} = 2\,\beta^3\,[e^{\beta x}(A \cos \beta x - B \sin \beta x - A \sin \beta x - B \cos \beta x) + e^{-\beta x}(C \cos \beta x - D \sin \beta x + + C \sin \beta x + D \cos \beta x)]. \tag{6}$$

b. În intervalul *2—3* se aplică ecuaţia diferenţială a grinzii cu reazeme punctiforme

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = - M = - V\,(x - b) = - \frac{P}{2}\,(x - b)\,;\; a \leqslant x \leqslant \frac{l}{2} \tag{7}$$

cota *b* fiind arătată în figura 8.

---

[1]) Reacţiunea terenului într-un punct este proporţională cu săgeata din acel punct.

Integrînd această ecuaţie, rezultă

$$EI_z \frac{dv}{dx} = \frac{P}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + bx\right) + C_1, \tag{8}$$

$$EI_z v = \frac{P}{2}\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{bx^2}{2}\right) + C_1 x + C_2. \tag{9}$$

Constantele A, B, C, D, C_1, C_2 se determină prin următoarele condiţii la limită :

1) În ecuaţia (8), la $x = \frac{l}{2}$, $\frac{dv}{dx} = 0$.

2) La $x = a$, ecuaţiile (4) şi (8) dau aceeaşi pantă.

3) La $x = a$, ecuaţiile (3) şi (9) dau aceeaşi săgeată.

4) La $x = 0$, momentul încovoietor este nul, deci ecuaţia (5) se anulează.

5) La $x = 0$, forţa tăietoare este nulă, deci ecuaţia (6) se anulează.

6) La $x = a$, $T = V = \frac{P}{2}$.

Aplicînd condiţia 1) în ecuaţia (8), rezultă

$$C_1 = \frac{P}{2}\left(\frac{l^2}{8} - \frac{bl}{2}\right), \tag{10}$$

iar ecuaţia (9) se transformă în

$$EI_z v = \frac{P}{2}\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + \frac{l^2 x}{8} - \frac{blx}{2}\right) + C_2 ; \; a \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}. \tag{11}$$

Aplicînd condiţia 4) în ecuaţia (5) se află

$$A = C. \tag{12}$$

Condiţia 5), folosită în ecuaţia (6), dă

$$A - B + C + D = 0$$

respectiv, ţinînd seama de (12)

$$2A - B + D = 0. \tag{13}$$

Condiţia 3) dă

$$e^{\beta a}(A \sin \beta a + B \cos \beta a) + e^{-\beta a}(A \sin \beta a + D \cos \beta a) = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{P}{2}\left(-\frac{a^3}{6} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{ba^2}{2} + \frac{l^2 a}{8} - \frac{bla}{2}\right) + C_2\right]. \tag{14}$$

Condiţia 2) dă

$$\beta e^{\beta\alpha}(A \sin \beta a + B \cos \beta a + A \cos \beta a - B \sin \beta a) + \beta e^{-\beta a}(- A \sin \beta a - D \cos \beta a + $$
$$+ A \cos \beta a - D \sin \beta a) = \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{P}{2}\left(-\frac{a^2}{2} + ba + \frac{l^2}{8} - \frac{bl}{2}\right). \tag{15}$$

Condiţia 6) dă

$$EI_z \left(\frac{d^3 v}{d x^3}\right)_{x=a} = - T = - \frac{P}{2}$$

$$- \frac{P}{2EI_z \beta^3} = e^{\beta a} (A \cos \beta a - B \sin \beta a - A \sin \beta a - B \cos \beta a) + e^{-\beta a} (A \cos \beta a - D \sin \beta a +$$
$$+ A \sin \beta a + D \cos \beta a) \tag{16}$$

În acest fel, s-au aflat constantele C_1 şi $C = A$, iar pentru celelalte patru am obţinut sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{(I)} & 2A - B + D = 0, \\
\text{(II)} & \left\{\begin{array}{l} A(e^{\beta a} \sin \beta a + e^{\beta a} \cos \beta a - e^{-\beta a} \sin \beta a + e^{-\beta a} \cos \beta a) + B(e^{\beta a} \cos \beta a - e^{\beta a} \sin \beta a) + \\ \quad + D(e^{-\beta a} \cos \beta a - e^{-\beta a} \sin \beta a) = \frac{P}{2EI_z \beta} \left(- \frac{a^2}{2} + ba + \frac{l^2}{8} - \frac{bl}{2}, \right. \end{array}\right. \\
\text{(III)} & \left\{\begin{array}{l} A(e^{\beta a} \cos \beta a - e^{\beta a} \sin \beta a + e^{\beta a} \cos \beta a + e^{-\beta a} \sin \beta a) + B(-e^{\beta a} \sin \beta a - e^{\beta a} \cos \beta a) + \\ \quad + D(e^{-\beta a} \cos \beta a - e^{-\beta a} \sin \beta a) = - \frac{P}{2EI_z \cdot 2\beta^3}, \end{array}\right. \\
\text{(IV)} & \left\{\begin{array}{l} A(e^{\beta a} \sin \beta a + e^{-\beta a} \sin \beta a) + Be^{\beta a} \cos \beta a + De^{-\beta a} \cos \beta a - \\ \quad - \frac{1}{EI_z} C_2 = \frac{P}{2 EI_z} \left(- \frac{a^3}{6} + \frac{ba^2}{2} + \frac{l^2 a}{8} - \frac{bla}{2} \right). \end{array}\right.
\end{array}\right\} \tag{17}$$

În ce priveşte poziţia b a reacţiunii V, ea se poate determina scriind o ecuaţie de momente faţă de punctul *1*, la forţele de pe intervalul *1—2* din figura 8

$$b \cdot V = \int_0^a k v x \, dx.$$

Înlocuind pe kv prin expresia (1) şi pe $V = \frac{P}{2}$, se ajunge la expresia

$$b = \frac{2EI_z}{P} \left[\left(\frac{d^3 v}{dx^3}\right) \times a - \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)_{x=a} \right],$$

care poate fi explicitată în funcţie de constantele de mai sus.

Soluţionarea problemei este funcţie de rezolvarea sistemului de ecuaţii (17). Se observă că primele trei ecuaţii formează un sistem ce dă pe A, B, D, iar ecuaţia (IV) determină pe C_2. Problema va fi continuată printr-o aplicaţie numerică.

3. Aplicaţie numerică

Se vor studia deformaţiile unei grinzi cu

$$l = 100 \text{ cm}; \quad \beta = \frac{1}{100} \text{ cm}^{-1}$$

pentru diverse lungimi de reazeme

$$a = 2;\ 5;\ 10;\ 20;\ 35;\ 50 \text{ cm}$$

Funcţiile trigonometrice şi exponenţiale care intră în sistemul (17) au valorile din tabela 1.

Tabela 1

a cm	2	5	10	20	35	50
βa	0,02	0,05	0,10	0,20	0,35	0,50
$e^{\beta a}$	1,02020	1,05125	1,10517	1,22140	1,41907	1,64872
$e^{-\beta a}$	0,98020	0,95123	0,90484	0,81873	0,70469	0,60653
$\sin \beta a$	0,02000	0,04998	0,09983	0,19867	0,34290	0,47943
$\cos \beta a$	0,99980	0,99875	0,99500	0,98007	0,93937	0,87758
$e^{\beta a} \sin \beta a$	0,02040	0,05254	0,11033	0,24266	0,48660	0,79045
$e^{\beta a} \cos \beta a$	1,02000	1,04994	1,09964	1,19705	1,33303	1,44688
$e^{-\beta a} \sin \beta a$	0,01960	0,04754	0,09033	0,16266	0,24164	0,29079
$e^{-\beta a} \cos \beta a$	0,98000	0,95004	0,90032	0,80241	0,66196	0,53228

În cazul problemei de faţă — aşa cum se va verifica — terenul are rigiditate foarte mică, iar tasarea sa este mult mai mare decît deformaţia grinzii. Ca urmare, se poate considera că pe intervalul *1—2* din figura 8 săgeţile v sînt practic constante, ceea ce duce la

$$b \approx \frac{a}{2} \tag{18}$$

Un alt caz extrem este al reazemului de mare rigiditate (material de aceeaşi natură cu grinda sau mai rigid decît grinda). Acest caz duce la situaţia că în capătul grinzii săgeata v este practic nulă, iar curba presiunilor pe lungimea a poate fi asimilată unui triunghi ceea ce dă $b = \frac{2}{3} a$.

Primele trei ecuaţii ale sistemului (17) pot fi scrise, simbolic, sub forma

$$\left.\begin{aligned} a_1 A + b_1 B + d_1 D &= l_1, \\ a_2 A + b_2 B + d_2 D &= l_2, \\ a_3 A + b_3 B + d_3 D &= l_3. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Coeficienţii respectivi se calculează pe baza relaţiilor (17), (18) şi a tabelei 1, iar valorile lor sînt date în tabela 2.

Tabela 2

a cm	Coeficienţii lui *A*			Coeficienţii lui *B*			Coeficienţii lui *D*			Termenii liberi		
	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	d_1	d_2	d_3	l_1	l_2	l_3
2	2	2,00080	1,99920	−1	0,99960	−1,04040	1	−0,99960	0,96040	0	$60000 \frac{P}{EI_z}$	$250000 \frac{P}{EI_z}$
5	2	2,00498	1,99498	−1	0,99740	−1,10248	1	−0,99758	0,90250	0	$56250 \frac{P}{EI_z}$	,,
10	2	2,01996	1,97996	−1	0,98931	−1,20997	1	−0,99065	0,80999	0	$50000 \frac{P}{EI_z}$	,,
20	2	2,07946	1,91946	−1	0,95439	−1,43971	1	−0,96507	0,63975	0	$37500 \frac{P}{EI_z}$	,,
35	2	2,23995	1,75003	−1	0,84643	−1,81963	1	−0,90360	0,42032	0	$18750 \frac{P}{EI_z}$	,,
50	2	2,47882	1,47950	−1	0,65643	−1,23733	1	−0,82307	0,24149	0	0	,,

Cu aceste valori se face rezolvarea numerică a sistemului de ecuaţii (17), obţinînd valorile constantelor arătate în tabela 3. În acest fel, ecuaţiile deformaţiilor sînt complet determinate.

Tabela 3

a cm	*A*	*B*	*D*	C_2
2	$15001 \frac{P}{EI_z}$	$3\,139\,896 \frac{P}{EI_z}$	$3\,109\,894 \frac{P}{EI_z}$	$6\,249\,790\ P$
5	$14119 \frac{P}{EI_z}$	$1\,263\,528 \frac{P}{EI_z}$	$1\,235\,290 \frac{P}{EI_z}$	$2\,498\,800\ P$
10	$12709 \frac{P}{EI_z}$	$636\,470 \frac{P}{EI_z}$	$611\,052 \frac{P}{EI_z}$	$1\,247\,538\ P$
20	$10207 \frac{P}{EI_z}$	$320\,681 \frac{P}{EI_z}$	$300\,267 \frac{P}{EI_z}$	$621\,122\ P$
35	$7223 \frac{P}{EI_z}$	$183\,354 \frac{P}{EI_z}$	$168\,908 \frac{P}{EI_z}$	$353\,137\ P$
50	$5164 \frac{P}{EI_z}$	$127\,839 \frac{P}{EI_z}$	$117\,510 \frac{P}{EI_z}$	$247\,891\ P$

Se poate face acum o examinare a valorilor săgeţii maxime. În acest scop, în ecuaţia (11), se înlocuiesc $x = \frac{l}{2}$ şi $b = \frac{a}{2}$ şi rezultă

$$f = \frac{P}{2\,EI_z}\left(-\frac{l^3}{48} + \frac{a}{2}\cdot\frac{l^2}{8} + \frac{l^2}{8}\cdot\frac{l}{2} - \frac{a}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\right) + \frac{C_2}{EI_z}$$

$$f = \frac{Pl^3}{48\,EI_z}\left(1 - \frac{3a}{2l}\right) + \frac{C_2}{EI_z} \tag{20}$$

Pe de altă parte, se poate calcula săgeata v_0 în capătul grinzii (v. fig. 8) făcînd $x = 0$ în ecuaţia (3)

$$v_0 = B + D. \tag{21}$$

Cu ajutorul relaţiilor (20), (21) se întocmeşte tabela 4, care dă săgeţile f şi v_0, pentru diverse valori a.

Tabela 4

a, cm	2	5	10	20	35	50
$f = \frac{P}{EI_z}x$	6 269 998	2 518 175	1 265 246	635 695	363 137	253 099
$v_0 = \frac{P}{EI_z}x$	6 249 790	2 498 818	1 247 522	620 948	352 262	245 349
$f^* = \frac{P}{EI_z}x$	20 208	19 357	17 724	14 747	10 875	7 750

Se poate determina acum şi săgeata propriu-zisă a grinzii (fără denivelarea terenului)

$$f^* = f - v_0 \tag{22}$$

avînd valorile trecute în tabela 4.

Este interesant de comparat această săgeată cu alte trei săgeţi convenţionale :

— $f_1^\star$, calculată ca şi cum grinda s-ar rezema numai în punctele *1* din figura 8

$$f_1^\star = \frac{Pl^3}{48\,EI_z} = \frac{100^3}{48}\cdot\frac{P}{EI_z} = 20\,833\,\frac{P}{EI_z}, \tag{23}$$

— $f_2^\star$, calculată ca şi cum grinda s-ar rezema numai în punctele *2* din figura 8

$$f_2^\star = \frac{P\,(l - 2\,a)^3}{48\,EI}, \tag{24}$$

— $f_3^\star$, calculată ca şi cum grinda s-ar rezema în mijlocul lungimii reazimelor

$$f_3^\star = \frac{P\,(l - a)^3}{48\,EI}. \tag{25}$$

Valorile tuturor acestor săgeţi sînt date în tabela 5.

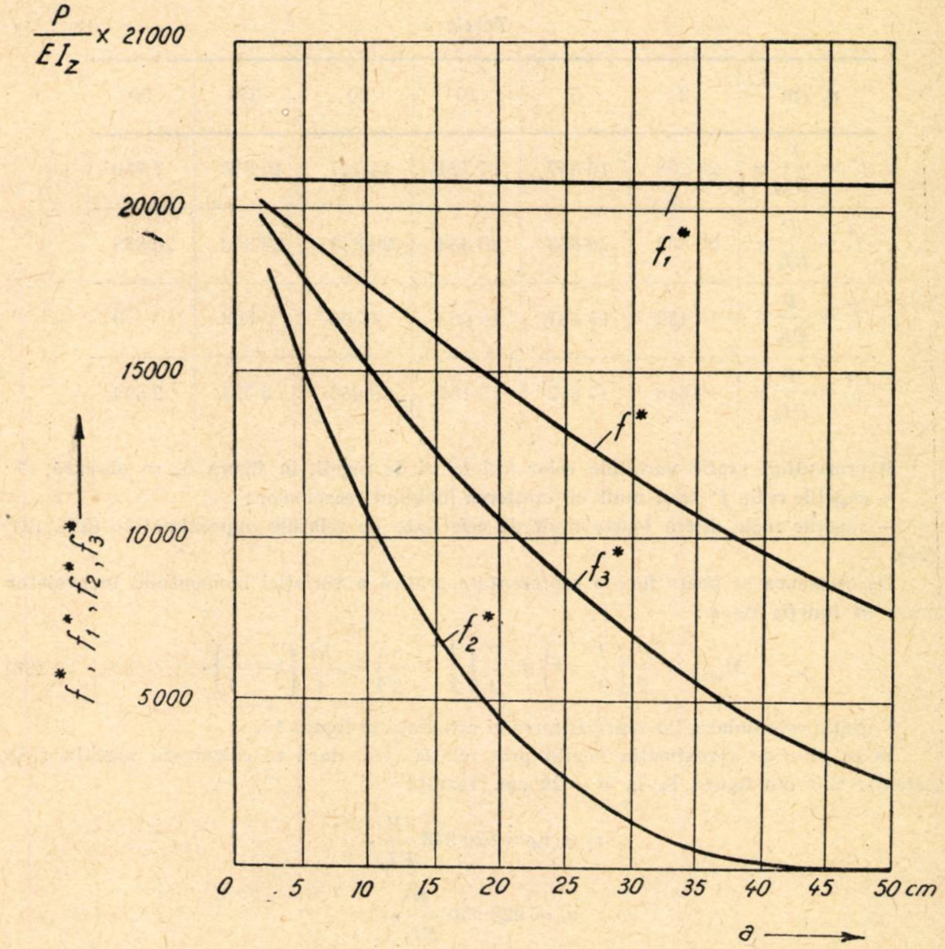

$\frac{P}{EI_z}$ × 21000
20000
15000
10000
5000
f^*, f_1^*, f_2^*, f_3^*
f_1^*
f^*
f_3^*
f_2^*
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50 cm
a

Fig. 9

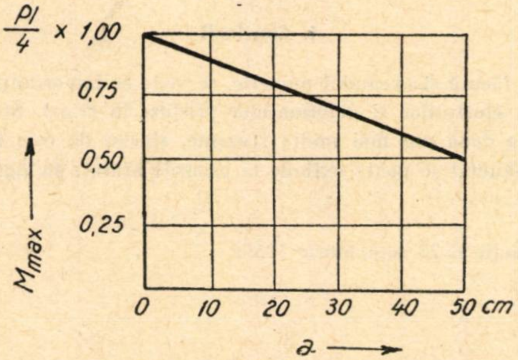

$\frac{pl}{4}$ × 1,00
0,75
0,50
0,25
M_{max}
0
10
20
30
40
50 cm
a

Fig. 10

Tabela 5

a, cm	2	5	10	20	35	50
$f^* = \frac{P}{EI_z}x$	20 208	19 357	17 724	14 747	10 875	7 750
$\overset{*}{f}_1 = \frac{P}{EI_z}x$	20 833	20 833	20 833	20 833	20 833	20 833
$\overset{*}{f}_2 = \frac{P}{EI_z}x$	18 432	15 187	10 667	4 500	562	0
$\overset{*}{f}_3 = \frac{P}{EI_z}x$	19 618	17 862	15 187	10 666	5 721	2 604

Reprezentînd grafic variaţiile celor trei feluri de săgeţi, în figura 9, se observă că:

— săgeţile reale f^* scad mult cu creşterea lungimii reazemelor;

— săgeţile reale diferă foarte mult de cele date de relaţiile axproximative (23), (24) şi (25).

De asemenea se poate face o reprezentare grafică a variaţiei momentului încovoietor maxim, în funcţie de a:

$$M_{\max} = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - b\right) = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{2}\right) = \frac{Pl}{4}\left(1 - \frac{a}{l}\right). \tag{26}$$

Variaţia este liniară, iar reprezentarea ei este dată în figura 10.

În ce priveşte aproximaţia făcută prin relaţia (18), dacă se calculează săgeata v în punctele *1* şi *2* din figura 8, la $a = 20$ cm, rezultă

$$v_1 = v_0 = 620\,948\,\frac{P}{EI_z},$$

$$v_z = 628\,950\,\frac{P}{EI_z}.$$

Se vede că variaţia săgeţii totale este neînsemnată, deci relaţia (18) este valabilă.

4. Concluzii

Din expunerea făcută şi exemplul numeric, se vede ce importanţă are lungimea reazemelor elastice asupra eforturilor şi deformaţiilor produse în grinzi. Studiul se poate aplica arborilor de maşini ca două sau mai multe reazeme, şinelor de cale ferată etc.

De asemenea, studiul se poate extinde la cazurile arătate în figurile 6 şi 7 sau altele similare.

Primită la redacţie la 23 septembrie 1957.

NOTE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

UNELE PROBLEME ASUPRA ZBORULUI ÎN SPIRALĂ LA PLANOARE

DE

T. HACKER şi M. PALOŞ

Notaţii utilizate

G — greutatea aparatului;
S — aria suprafeţei portante;
ρ — densitatea aerului la altitudinea de zbor;
g — acceleraţia gravitaţională;
θ — unghiul format de viteza C.G. cu orizontala;
γ — unghiul format de planul de simetrie al aparatului cu planul vertical ce trece prin dreapta tangentă în G la traiectoria C.G.;
V — viteza C.G. a aparatului;
v_v — viteza de coborîre, componenta verticală a lui V;
r — raza spiralei, raza cilindrului ipotetic pe suprafaţa căruia are loc mişcarea C.G.;
P — portanţa întregului aparat;
R — rezistenţa la înaintare a aparatului;

$$c_z = \frac{P}{\rho \frac{V^2}{2} S}$$ — coeficientul adimensional al portanţei;

$$c_x = \frac{R}{\rho \frac{V^2}{2} S}$$ — coeficientul adimensional al rezistenţei la înaintare.

Diversitatea condiţiilor de zbor, impuse de tactica de pilotaj al planorului, reclamă o gamă foarte extinsă de calităţi diferite, unele dintre ele chiar contradictorii.

Cerinţele diferă mult, nu numai cînd este vorba de destinaţii diferite (zbor de distanţă, zbor de durată, de acrobaţie etc.) ci, şi în cazul unuia şi aceluiaşi planor cu o anumită destinaţie unică, ce necesită însă evoluţii variate.

Astfel, unui planor de performanţe modern, destinat zborului de distanţă, constructorul trebuie să-i asigure o pantă de planare cît mai mică pentru zborul în linie dreaptă, şi în acelaşi timp, o rază a spiralei cît mai mică, menţinînd viteza de coborîre în limite acceptabile, pentru zborul în curenţi ascendenţi. Panta mică înseamnă fineţe cît mai bună; diminuarea razei de curbură, în schimb, cere mărirea coeficientului de portanţă maxim. Realizarea constructivă a acestor două cerinţe presupune un compromis.

Cerinţa unei raze a spiralei cît mai mică, pe de o parte, şi aceea a unei viteze cît mai mari în zborul planat între două zone de ascendenţă, pe de alta, impun de asemenea condiţii contradictorii, de astă dată în ceea ce priveşte încărcarea pe metru pătrat de aripă.

Pentru uşurarea realizării acestor compromisuri, în nota de faţă se preconizează utilizarea hipersustentaţiei la zborul în spirală, în vederea obţinerii unei raze cît mai mici.

Se arată că, înzestrarea planorului cu anumite dispozitive hipersustentatoare permite realizarea unei raze mici de spiralare fără o mărire prohibitivă a vitezei de coborîre precum şi lăsarea neatinsă a fineţei*) pentru evoluţiile în care hipersustentaţia nu este utilă (în special în cazul zborului planat rectiliniu).

★

Pentru a putea utiliza ascendenţele de secţiune mică şi pentru a se uşura utilizarea, în vederea cîştigării de înălţime, a curenţilor cu componente orizontale instabile este necesară reducerea cît mai simţitoare a razei spiralei. Se arată uşor că în cazul unui zbor în spirală în regim permanent, aceasta depinde de coeficientul de portanţă şi fineţea aparatului, de încărcarea pe metru pătrat de aripă, de unghiul γ şi de densitatea aerului la altitudinea de zbor, pe baza relaţiei

$$r = \frac{G}{S}\,\frac{2}{\rho g}\cdot\frac{1}{c_z}\,\frac{\cos^2\theta}{\sin\gamma}, \tag{1}$$

care se mai poate pune sub forma

$$r = \frac{G}{S}\,\frac{2}{\rho\cdot g}\cdot\frac{1}{c_z}\cdot\frac{\cos^2\gamma}{\sin\gamma\left[\cos^2\gamma + \left(\frac{c_x}{c_z}\right)^2\right]}. \tag{2}$$

Într-adevăr, considerînd o coborîre pe spirală în regim staţionar, din figura 1 se vede imediat că ecuaţiile de echilibru ale forţelor pe direcţiile axelor de coordonate intriseci $O\tau\nu\beta$ vor fi

$$\left.\begin{aligned} &-R + G\sin\theta = 0,\\ &\frac{G}{g}\,\frac{(V\cos\theta)^2}{r} - P\sin\gamma = 0,\\ &P\cos\gamma - G\cos\theta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

De unde, trecîndu-se la coeficienţi adimensionali, relaţiile (1) şi (2) se deduc imediat.

Din aceste relaţii se poate conclude că, practic, există trei modalităţi pentru micşorarea razei spiralei: prin micşorarea încărcării pe metru pătrat de aripă, prin mărirea unghiului γ sau prin mărirea coeficientului de portanţă.

---

*) În această apreciere, evident, se face abstracţie de eventuala stricare a suprafeţei aripii de către dispozitivul hipersustentator în poziţie nebracată.

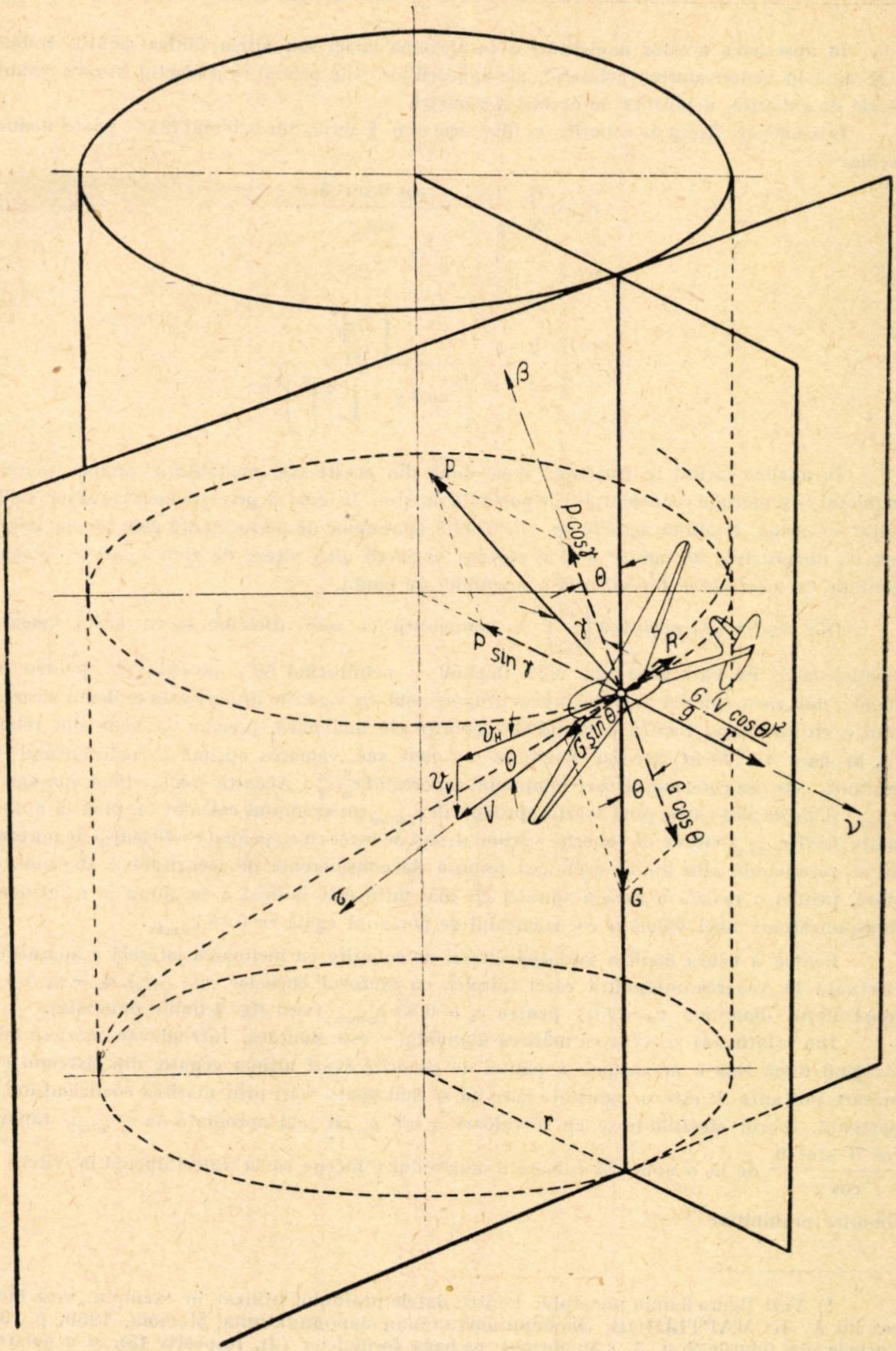

β
P
P cos γ
θ
γ
P sin γ
R
$\frac{G}{g}\frac{(V\cos\theta)^2}{r}$
v_H
θ
$G \sin\theta$
v_V
V
θ
$G\cos\theta$
ν
τ
G
r

Fig. 1

În aprecierea acestor modalităţi şi la alegerea uneia sau alteia dintre soluţii, trebuie să se aibă în vedere efectele colaterale ale aplicării lor, şi în primul rînd efectul asupra valorii vitezei de coborîre, depinzînd de aceiaşi parametri.

Într-adevăr viteza de coborîre v_v fiind egală cu $V \sin\theta$, din sistemul (3) se poate deduce imediat

$$v_v^2 = \frac{G}{S}\,\frac{2}{\rho}\,\frac{1}{c_z}\cdot\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{\cos\gamma}, \tag{4}$$

sau

$$v_v^2 = \frac{G}{S}\,\frac{2}{\rho}\,\frac{1}{c_z}\,\frac{\left(\dfrac{c_x}{c_z}\right)^2}{\left[\cos^2\gamma + \left(\dfrac{c_x}{c_z}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{5}$$

În analiza făcută se consideră doar două din aceste trei modalităţi, anume, mărirea unghiului γ şi mărirea coeficientului de portanţă maxim. În ceea ce priveşte încărcarea pe metru pătrat de aripă, tendinţa actuală în construcţia aparatelor de performanţă este nu de micşorare ci, dimpotrivă, de mărire a ei în vederea obţinerii unei viteze de zbor mari în planare rectilinie cu menţinerea fineţii, deci a unghiului de pantă.

Din relaţia (2), neglijînd $\left(\dfrac{c_x}{c_z}\right)^2$ în comparaţie cu $\cos^2\gamma$ (precum se va arăta valoarea funcţiei $\cos^2\gamma$ nu va scădea sub 0,25, unghiul γ neîntrecînd 60°), se vede că, pentru un unghi γ dat, raza spiralei variază invers proporţional cu c_z. Prin urmare este indicată alegerea unui c_z cît mai mare. Pentru o viteză de coborîre cît mai mică, precum se vede din relaţia (5), în care s-a făcut aceeaşi neglijare ca mai sus, valoarea optimă a coeficientului de portanţă este cea corespunzătoare minimului raportului c_x^2/c_z^3. Această valoare fiind aproape de $c_{z\,\max}$ şi, pe de altă parte, pînă foarte aproape de $c_{z\,\max}$ (în exemplul calculat *), pînă la aproximativ 0,95 $c_{z\,\max}$) viteza de coborîre variind destul de încet cu c_z, pentru coeficientul de portanţă nu se recomandă altă limită decît cea impusă de considerente de securitate a zborului. Ca atare, pentru a realiza o rază a spiralei cît mai mică este indicat a se zbura la o incidenţă corespunzătoare unei valori a coeficientului de portanţă egală cu 0,85 $c_{z\,\max}$.

Pentru a uşura analiza variaţiei vitezei de coborîre cu înclinarea laterală a aparatului, efectuată în vederea micşorării razei spiralei, cu ajutorul curbelor $r = r(c_z)$, $v_v = v_v(c_z)$ se construieşte diagrama $v_v = f(r)$ pentru $c_z = 0{,}85\, c_{z\,\max}$ (vezi fig. 4 liniile punctate).

Din relaţia (4) se vede că mărirea unghiului γ este limitată. Într-adevăr, mărirea lui γ atrăgînd după sine o accentuare a pantei de coborîre (vezi ultima ecuaţie din sistemul (3), în care portanţa P este o cantitate care nu se mai poate mări prin mărirea coeficientului de portanţă, zborul efectuîndu-se cu o valoare a lui c_z cît mai apropiată de $c_{z\,\max}$), raportul $\dfrac{\cos\theta\cdot\sin^2\theta}{\cos\gamma}$ de la o anumită valoare a unghiului γ începe să ia valori ducînd la viteze de coborîre prohibitive.

---

*) Vezi figura 3 linia punctată. Pentru datele profilului utilizat în exemplu, vezi lucrarea lui А. К. МАРТЫНОВ, Экспериментальная аэродинамика, Москва, 1950, p. 306. Curbele din figurile 2 şi 3 s-au obţinut pe baza formulelor (2), respectiv (5), şi a polarelor construite pentru o alungire a aripei de $\lambda = 16$.

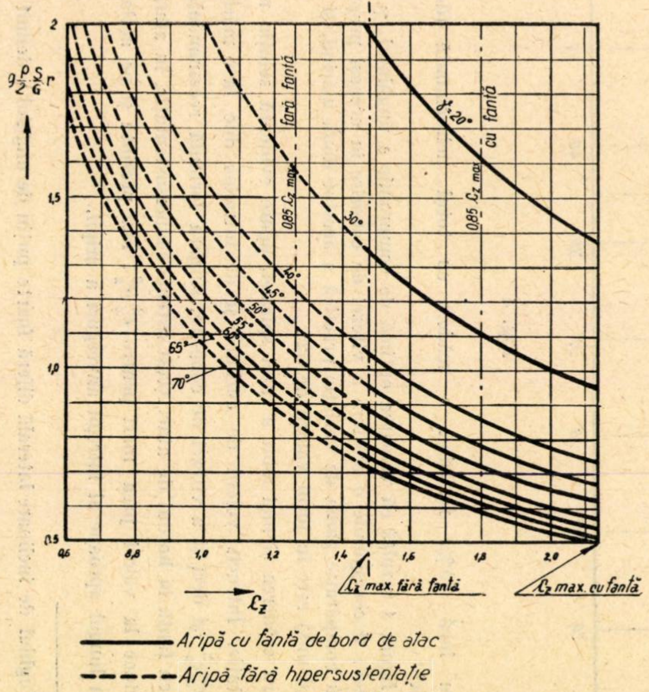

$g\frac{\rho}{2}\frac{S}{G}r$
2
1,5
1,0
0,5
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
C_z
C_z max. fără fantă
C_z max. cu fantă
0,85 C_z max. fără fantă
0,85 C_z max. cu fantă
γ=20°
30°
40°
45°
50°
55°
60°
65°
70°
Aripă cu fantă de bord de atac
Aripă fără hipersustentație

Fig. 2

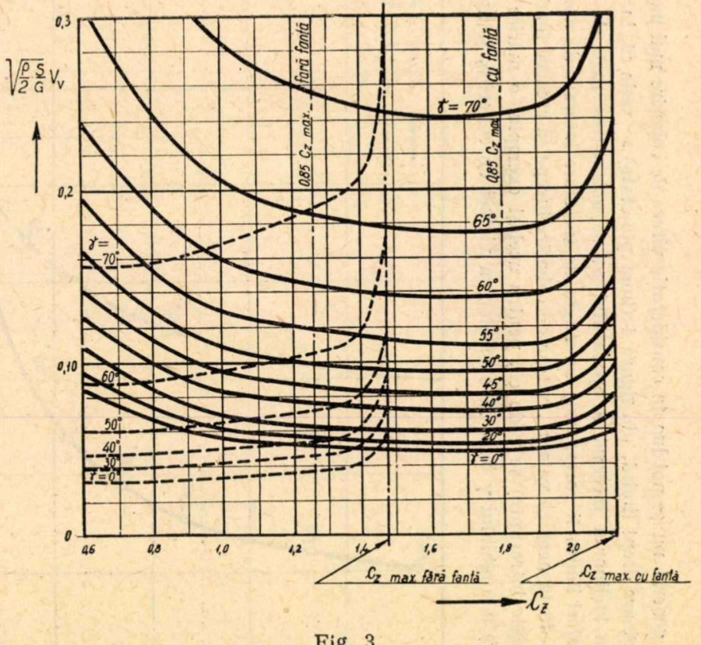

$\sqrt{\frac{\rho}{2}\frac{S}{G}}V_v$
0,3
0,2
0,10
0
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
C_z
C_z max. fără fantă
C_z max. cu fantă
0,85 C_z max. fără fantă
0,85 C_z max. cu fantă
γ = 70°
65°
60°
55°
50°
45°
40°
30°
20°
γ = 0°
γ = 70°
60°
50°
40°
30°
γ = 0°

Fig. 3

În general nu se pot lua în consideraţie viteze de coborîre mai mari decît 2 m/s. Luînd această valoare drept limită, din figura 4 (linia punctată) se vede că, în cazul exemplului calculat, prin înclinarea laterală a aparatului nu se pot obţine raze ale spiralei sub 29,5 m. Acestei valori limită îi corespunde un unghi de înclinare laterală de aproximativ 60°—62° *). De altfel, de la această valoare, viteza de coborîre începe să crească foarte repede. Pe figurile 2 şi 3 (liniile întrerupte) se vede că, pentru acelaşi exemplu, o mărire de numai 10° (de la 60° la 70°) a unghiului γ duce la o creştere a vitezei de coborîre, şi aşa mari (de aproape 2 m/s), cu încă 80 %, realizînd o scădere cu totul neînsemnată (de sub 9 %) a razei spiralei.

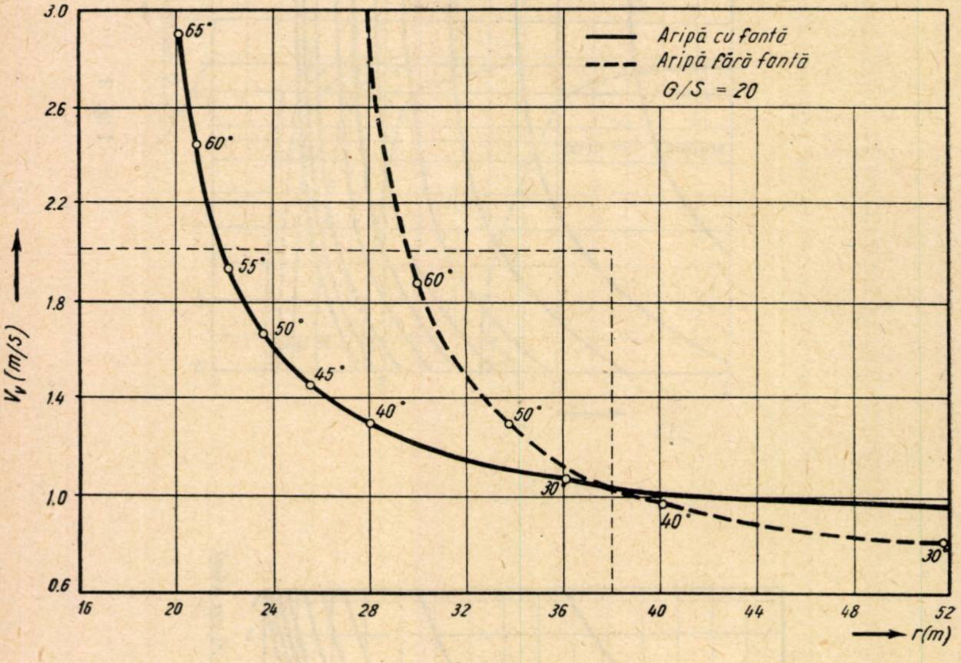


Fig. 4

Din figura 4 rezultă că valoarea optimă de compromis a unghiului γ, pentru care scăderii razei r îi corespunde o creştere a vitezei de coborîre în aceeaşi proporţie (luînd ca bază pentru comparaţie gama de variaţie practică a acestor două mărimi, şi anume, 10 m, respectiv 1,0 m/s) este în jurul valorii de 52°.

Pentru scăderea şi mai mult a razei spiralei, apare evidentă soluţia măririi lui $c_{z\,max}$ hipersustentaţie. Întrucît voleţii de curbură şi de intrados duc la o mărire simţitoare a raportului c_x^2/c_z^3 şi deci şi a vitezei de coborîre, singura formulă recomandabilă este aceea a voleţilor cu fantă la bordul de atac. Acest sistem de hipersustentaţie, în afară de avantajul de a nu duce la valori prea mari pentru c_x^2/c_z^3, mai prezintă şi pe acela de a putea fi aplicat de-a lungul aproape al întregii anverguri a aripii.

---

*) Unghiul de înclinare laterală diferă foarte puţin de unghiul γ definit mai sus.

Trasînd pe aceeaşi diagramă curbele $v_v f(r)$, pentru cazul cînd se utilizează hipersustentaţia şi pentru cazul cînd micşorarea razei se obţine numai prin înclinarea laterală a aparatului, se determină grafic limita pînă la care prima formulă este mai convenabilă decît a doua sub raportul vitezei de coborîre. Această limită, evident, se găseşte la intersecţia celor două curbe.

Formula cu hipersustentaţie admite şi ea o zonă optimă de valori ale unghiului γ care realizează un compromis între variaţia razei spiralei şi a valorii vitezei de coborîre, în sensul arătat mai sus. Faţă de cazul aripii fără hipersustentaţie valorile optime ale lui γ sînt inferioare, realizîndu-se raze ale spiralei şi viteze de coborîre mai bune. Astfel, în exemplul calculat zona optimă de compromis respectivă, pentru cazul hipersustentaţiei de tip Handley-Page, se plasează în jurul lui $\gamma = 41°$. Acestei valori îi corespunde o rază a spiralei cu 2 m mai mică decît limita inferioară practică ce se poate obţine fără hipersustentaţie (27,5 m, faţă de 29,5 m) şi o viteză de coborîre cu 35% mai mică decît viteza limită de 2 m/s, corespunzătoare minimului practic a valorii razei r în cazul aripii fără hipersustentaţie adică de 1,3 m/s.

Limita inferioară practică a valorii lui r în cazul hipersustentaţiei propuse, evident va fi mult mai mică decît pentru aripa fără hipersustentaţie (în exemplul calculat 21,5 m faţă de 29,5 m corespunzătoare vitezei de coborîre de 2 m/s).

În concluzie, formula propusă cu hipersustentaţie este interesantă ori de cîte ori este nevoie de raze mici în zborul în spirală.

Această necesitate apare, în special, în cazul zonelor de curenţi verticali puţin întinse, sau a ascendenţelor de mică viteză la margine şi cu nuclee de mare viteză pe o secţiune redusă. În aceste cazuri, creşterea uşoară a vitezei de coborîre este compensată cu prisosinţă de cîştigul ce rezultă din utilizarea zonei celei mai active a ascendenţelor.

De asemenea, posibilitatea creată cu ajutorul hipersustentaţiei, de a realiza spiralări mai strînse cu înclinări laterale mai mici ale aparatului, este deosebit de preţioasă în zborurile fără vizibilitate (în nori), prin îndepărtarea condiţiilor de angajare în vrie.

Primită la redacţie la 22 decembrie 1957.

RECENZII

RAYMOND BISPLINGHOFF, HOLT ASHLEY, ROBERT HALFMAN, *Aeroelasticity* (Aeroelasticitatea). Addison-Wesley, Publ. Comp. Inc., Cambridge Mass., 1955, 860 pag.

După cum se știe, *Aeroelasticitatea*, în sensul restrîns al cuvîntului, se ocupă de totalitatea fenomenelor care se produc prin interferențele între efectele sarcinilor aerodinamice și cele elastice asupra construcțiilor aeronautice, cu sau fără participarea sarcinilor de inerție.

Tratatul de *Aeroelasticitate* elaborat de Raymond Bisplinghoff, Holt Ashley și Robert Halfman este, după cunoștințele noastre, cea mai completă lucrare asupra acestui subiect.

Lucrarea se adresează în egală măsură oamenilor de știință și inginerilor proiectanți. Introducerea cuprinde noțiunile de bază, atît în privința structurii de rezistență cît și de aerodinamică. Anexa matematică cuprinde calculul matricial, care este utilizat din plin în lucrare, sisteme liniare și metoda de integrare aproximativă, completînd astfel această introducere.

În capitolele introductive, privind comportarea structurii de rezistență sub efectul unei sarcini statice sau dinamice, se arată metodele cele mai adecvate de calcul ale deformațiilor, frecvențelor proprii și ale modurilor de vibrații.

Calculul deformațiilor, atît pentru sarcini statice cît și pentru sarcini dinamice, este prezentat în mod progresiv de la structurile cele mai simple pînă la aripa în săgeată și la aripa de foarte mică alungire, avînd condiții de fixare date. Se utilizează, în afară de metodele energetice curente, metode bazate pe funcții de influență și metode aproximative de calcul (Rayleigh-Ritz). Pentru deformațiile sub sarcini dinamice se prezintă în plus, soluționări ale problemei pornind de la ecuația diferențială de mișcare, de la ecuația integrală de mișcare, precum și prin metode aproximative.

În stabilirea frecvențelor proprii și a modurilor de vibrații ale unei structuri, pentru diferite solicitări și condiții de prindere, se utilizează aceleași metode.

Introducerea în calcul aerodinamic este elaborată complet, pornind de la conceptul de scurgere nestaționară. Calculul aerodinamic nestaționar este prezentat pentru viteze subsonice, transonice și supersonice, pentru profile și aripi, ținînd seama, la acestea din urmă, de efectul săgeții și al micii alungiri.

Partea de aeroelasticitate propriu-zisă tratează fenomenele aeroelastice statice, fenomenele de fluturare și fenomenele tranzitorii ce se produc în structură sub o solicitare dinamică. O parte experimentală, conținînd teoria modelelor, proiectarea și construcția modelelor și tehnica de încercare, completează posibilitățile de inițiere în studiul efectelor aeroelastice. Fenomenele statice, cum sînt anularea sau inversarea efectului aripioarelor, precum și fenomenele de divergență, sînt tratate atît în două cît și în trei dimensiuni, ținînd seama de alungirea mică precum și de săgeata aripii. În cazul aripii în săgeată, problema este prezentată în detaliu, dîndu-se și exemple de schimbări de distribuție de sarcină datorită manevrei. Rezultatele obținute sînt date și sub formă de curbe, prezentînd efectul diferiților parametri asupra vitezelor critice și a variațiilor de sarcină.

Fenomenul de fluturare este tratat atît în două cît și în trei dimensiuni. Pentru fluturarea cu două grade de libertate, este prezentată o metodă pentru aripa uniformă în consolă. Se prezintă de asemenea calculul modurilor de vibrație, precum și metode bazate pe un mod de vibrație presupus inițial cunoscut.

Se prezintă apoi efectul anvergurii finite, efectul compresibilității, efectul săgeții și al alungirii mici asupra acestui fenomen.

La sfîrșitul acestei părți sînt arătate și alte fenomene aeroelastice vibratorii, cum sînt „buffeting"-ul, oscilațiile datorită vîrtejurilor alternante Kármán, fluturarea panourilor la viteze supersonice, precum și fenomene similare ce intervin în alte construcții decît cele aeronautice.

Metodele de bază date sînt însoțite de numeroase grafice prezentînd efectul diferiților parametrii asupra fenomenului de fluturare.

Dintre fenomenele tranzitorii sînt prezentate cele produse de o variație cunoscută în timp a sarcinilor exterioare, sarcinile în aterizare, fenomenele ce se produc cînd forțele exterioare depind de deformație, efectul rafalelor și efectul unei turbulențe continue a atmosferei.

Urmează partea experimentală extrem de importantă și oarecum dificilă în aceste probleme. Se prezintă astfel detaliat, teoria modelelor pentru soluționarea problemelor de aeroelasticitate, precum și modul de proiectare și construcție ale acestora.

Tehnica experimentării constituie ultimul capitol al lucrării și este prezentată atît pentru încercări de structuri la scară naturală, cît și pentru încercări pe modele. Această tehnică este prezentată atît pentru încercări fără curenți de aer cît și în prezența acestora, în regim staționar sau nestaționar.

Lucrarea, în general, prin modul de prezentare, prin extindere, profunzime și claritate, reprezintă un tratat de bază asupra fenomenelor aeroelastice cunoscute pînă acum.

Pornind de la simplu la complex, lucrarea este ușor accesibilă și de recomandat celor care doresc a se iniția și a aprofunda totodată aceste probleme.

Augustin Petre

H. SCHLICHTING, *Grenzschicht-Theorie* (Teoria stratului limită). Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1951, 483 pag.

Cartea lui H. Schlichting, cunoscut specialist în problemele stratului limită, și-a cucerit un loc binemeritat printre cele mai bune lucrări din domeniul mecanicii fluidelor vîscoase. Conținutul ei bogat, prezentarea sistematică și clară a principalelor rezultate, abundența datelor experimentale destinate să ilustreze teoria, bogăția documentării, precum și numeroasele incursiuni în teoria generală a mișcării fluidelor vîscoase, fac din această carte un sprijin cît se poate de prețios al acelora care întreprind cercetări de acest fel și, totodată, un excelent manual de studiu.

Într-un răstimp foarte scurt — numai o jumătate de veac — teoria stratului limită a devenit unul din principalele capitole ale mecanicii fluidelor vîscoase, atît prin importanța sa ca instrument de investigație, cît și prin numeroasele sale aplicații practice. Ideea de a întruni într-un singur volum rezultatele principale ale numeroaselor și importantelor cercetări de pînă acum, a fost binevenită, întrucît abundența lucrărilor publicate în revistele de specialitate punea probleme destul de complicate acelora care doreau să-și formeze o privire de ansamblu și totodată temeinică asupra acestei teorii. Prof. Schlichting s-a achitat de această sarcină cu o mare competență, dînd la iveală un tratat, care va rămîne multă vreme cel mai complet.

Ar fi fost greu de separat teoria stratului limită de problema generală a scurgerii fluidelor vîscoase, deoarece origina acestei teorii ar fi rămas, astfel, obscură cititorilor neavertizați. Ținînd seama de această dificultate, autorul și-a început tratatul printr-o expunere destul de amplă asupra mecanicii fluidelor vîscoase. Primele două capitole sînt destinate prezentării noțiunilor fundamentale care intervin în studiul scurgerii fluidelor cu frecare interioară și a bazelor teoriei stratului limită. Trebuie observat de la început deosebita grije a autorului de a aprofunda aspectul fizic al fenomenelor și de a confrunta rezultatele teoretice cu experiențele. De altfel, stratul limită este înfățișat aici ca fenomen fizic cu o bogată ilustrare experimentală.

Capitolele trei și patru sînt destinate deducerii ecuațiilor Navier-Stokes și examinării proprietăților lor generale. Capitolul următor cuprinde cîteva soluții exacte ale acestor ecuații; este vorba doar de unele probleme clasice, de cele mai simple, și de alte cîteva soluții importante, întrucît scurgerile corespunzătoare prezintă caracterele fundamentale ale stratului limită. Ultimul capitol al acestei părți introductive este destinat soluțiilor aproximative ale ecuațiilor Navier-Stokes, ce se pot găsi în ipoteza că scurgerile sînt foarte lente, ceea ce duce la simplificările binecunoscute.

A doua parte a cărții are ca obiect teoria stratului limită laminar, cea mai bine dezvoltată pînă acum, ceea ce justifică faptul că mai mult de o treime din volumul cărții îi este acordată. Primul capitol cuprinde o deducție simplă a ecuațiilor stratului limită, cîteva considerații generale asupra proprietăților fizice ale acestui strat și soluția clasică pentru placa plană fără gradient de presiune. Capitolul următor este consacrat studiului proprietăților generale ale ecuațiilor stratului limită. Între altele, autorul expune soluțiile numite ,,afine'', transformarea ecuațiilor stratului limită în ecuația căldurii și teoremele impulsului și ale energiei. Soluțiile exacte, adică cele obținute fără nici o simplificare a ecuațiilor, fac obiectul unui alt capitol. Printre acestea, trebuie semnalată scurgerea într-un canal convergent, scurgerea în jurul unui cilindru și vîna laminară plană. Autorul studiază apoi stratul limită cu simetrie axială și tridimensional. Semnalăm, în treacăt, problema vînei axial-simetrice și aceea a stratului limită pe un corp de rotație. În ceea ce privește stratul limită tridimensional, cartea conține unele considerații interesante. Într-un alt capitol, autorul se ocupă de probleme privitoare la stratul limită nestaționar. Printre exemplele analizate, menționăm formarea stratului limită în timpul începerii bruște a unei scurgeri și stratul limită periodic. Procedeele de aproximare, a căror deosebită importanță nu poate fi pusă la îndoială, sînt prezentate în capitolul următor. Este vorba, mai ales, de metoda Kármán-Pohlhausen și de numeroasele sale aplicații. Desprinderea stratului, limită, ca fenomen dăunător în multe aplicații practice, poate fi evitată prin folosirea procedeelor de asiprare și suflare a stratului. H. Schlichting, ale cărui lucrări în acest domeniu sînt binecunoscute, face în cartea sa o interesantă expunere a problemei. Un domeniu, diferit întrucîtva, este acela al stratului limită termic, al cărui studiu face obiectul unui alt capitol. După cîteva aprecieri generale cu privire la ecuația energiei, găsim în acest capitol un studiu al cîtorva scurgeri laminare cu transfer de căldură și considerații privitoare la stratul limită termic în scurgerile forțate și libere. Ceva mai puțin dezvoltat decît s-ar fi cuvenit, dat fiind volumul tratatului, este capitolul privitor la stratul limită compresibil. Se găsesc aici observații asupra rezultatelor teoretice și experimentale.

A treia parte a cărții este consacrată studiului trecerii de la regimul laminar la regimul turbulent de scurgere. În două capitole, autorul expune teoriile privind stabilitatea scurgerii și nașterea turbulenței și le însoțește cu un mare număr de cercetări experimentale.

În sfîrșit, ultima parte a lucrării se ocupă cu stratul limită turbulent. În această parte se găsesc mai multe capitole introductive, care tratează probleme destul de generale, printre care bazele teoriei scurgerilor turbulente, metodele teoretice de studiu ale acestor scurgeri şi aplicarea lor la problema scurgerii turbulente în tuburi. Urmează consideraţii asupra scurgerii turbulente în jurul unei plăci plane, netede şi rugoase şi în jurul unui disc în rotaţie, totul fiind însoţit de prezentarea rezultatelor experimentale respective. Ultimile trei capitole sînt consacrate stratului limită turbulent propriu-zis; sînt expuse aici mai multe procedee de calcul privind turbulenţa liberă şi determinarea rezistenţei profilelor.

Am trecut în revistă, foarte sumar, conţinutul acestei cărţi remarcabile. Fireşte, ar fi de discutat asupra aranjamentului materiei şi asupra importanţei acordate asupra anumitor probleme în detrimentul altora. Oricum, în ansamblul ei, cartea este bine echilibrată şi, după cît se pare, autorul intenţionează să-şi continue eforturile în acelaşi sens, în noua ediţie pe care o pregăteşte. Trebuie să semnalăm încă o dată grija permanentă a lui H. Schlichting de a păstra pretutindeni în cartea sa o legătură constantă între teorie şi experienţă, fapt care face să crească valoarea tratatului. Inginerul şi cercetătorul ştiinţific vor găsi aici tot ce le trebuie, atît pentru aplicaţii practice, cît şi pentru noi investigaţii.

T. Oroveanu

W. BLASCHKE, H. R. MÜLLER, *Ebene Kinematik* (Cinematica plană). Verlag von R. Oldenburg, München, 1956, 271 pag.

Lucrarea cuprinde patru capitole, în care se tratează cu multă amănunţime o serie întreagă de probleme ale cinematicii plane, începînd cu cele clasice în capitolele I şi II, asupra parametrilor cinematici şi trecînd, în capitolele III şi IV, la studiul unor probleme deosebite. Metoda întrebuinţată este aproape exclusiv analitică şi în mică măsură grafică. Demonstraţiile sînt riguroase şi amănunţite.

Se găsesc în lucrare problemele privind traiectoriile, vitezele, acceleraţiile, polul vitezelor şi polul acceleraţiilor, înfăşurători şi curburi, acceleraţii de diferite ordine. Se studiază diverse curbe cicloide, conchoide etc. Apoi se cercetează diferite mecanisme ca : patrulatere articulate, inversorul Peaucellier - Hart, mecanisme cu ghidare dreaptă, angrenaje etc., adică se tratează problemele de bază ale teoriei mecanismelor plane. Se arată metoda de studiu în planul complex şi la sfîrşitul capitolului I se indică mecanismul articulat pentru descrierea unei cubre algebrice oarecare.

În capitolul II se trece la cercetarea ariilor închise de traiectoriile diverselor puncte ale mecanismelor plane, la planimetre, lungimile şi centrele de greutate ale traiectoriilor înfăşurătorilor etc.

În capitolele III şi IV, se trece la unele generalizări care ridică lucrarea la un nivel superior. Se pleacă de la formulele lui Pfaff, se cercetează mişcări în axe polare, traiectorii limite, reprezentarea mişcării plane cu ajutorul cuaternionilor, despre cvasidistanţă, cvasiunghiuri, teoria cvasieliptică a curbelor şi a planului.

În aceste ultime capitole se găsesc în special problemele de mare fineţe ale cinematicii plane, şi constituie în principal partea lucrării care o situează deasupra altora similare. În primele capitole după cum am arătat se găsesc problemele de bază, care fiind date de asemenea sub o formă extrem de clară şi precisă, ridică mult calitatea lucrării. Lucrarea este completată cu probleme şi teoreme la sfîrşitul fiecărui capitol şi are o bogată bibliografie. Este o lucrare foarte bună şi cuprinzătoare de cinematică plană avînd şi numeroase aplicaţii la studiul mecanismelor plane. Constituie o sinteză a cursurilor ţinute de W. Blaschke la Universitatea din Hamburg şi, aşa cum se anunţă în prefaţă, va fi urmată de volumul II — *Cinematica în spaţiu.*

R. Bogdan şi *Cr. Pelecudi*

WILLY JAHR, PAUL KNECHTEL, *Grundzüge der Getriebelehre* (Bazele teoriei mecanismelor). Fachbuchverlag, Leipzig, 1955, vol. I, 333 pag.; 1956, vol. II, 230 pag.

Lucrarea, împărțită în două volume, este un manual de inițiere în disciplina mecanismelor și este introdusă în învățămîntul de specialitate din R.D.G.

După un prim capitol în care se expun noțiunile și principiile de bază, în restul cărții se examinează șase mecanisme elementare care se întîlnesc în ultimă analiză în orice mecanism complex: mecanismele cu șurub, cu pîrghii, cu roți, cu scripeți, cu came și cu mișcare intermitentă.

Tratarea acestor mecanisme este în primul rînd descriptivă, partea teoretică rezumîndu-se la principiile generale de transformare a mecanismelor și la expunerea metodelor grafice de determinare a parametrilor cinematici și de construire a profilelor de camă. Problema forțelor nu este atinsă decît tangențial pentru explicarea importanței unghiurilor de transmitere la came, iar aspectul dinamic nu intră în cuprinsul manualului (unica excepție întîlnită la came, unde se tratează izolat echilibrarea și determinarea forțelor de inerție pentru calculul unui arc, nu schimbă această constatare).

Referindu-ne deci la aspectul descriptiv și de calcul grafic al studierii mecanismelor de bază menționate, manualul este deosebit de interesant, atît prin claritatea expunerii și prezentarea sugestivă a explicațiilor, cît mai ales prin caracterul său exclusiv practic. În acest scop, fiecare capitol privind cîte un tip de mecanisme elementare descrie aproape toate variantele întîlnite uzual în tehnică (legate între ele prin metodele de transformare) și pentru fiecare caz se scot în evidență problemele specifice care se pun, tratîndu-le elementar, însă foarte sugestiv. În acest sens trebuie relevat faptul că pentru fiecare mecanism (unde este necesar, bineînțeles) se dau curbele de variație a parametrilor cinematici pentru punctul condus interesant, că nu se întîlnesc exemple rar utilizate și că se scot în evidență proprietățile caracteristice ale fiecărui mecanism, pentru a le da o imagine cît mai completă și utilă.

Așa se explică că deși nu se urmărește decît obiectivul cinematic, s-au atins probleme de forță la came și, mai mult, un paragraf special se ocupă cu descrierea modului de execuție a profilelor de came. Acestea de altfel nu sînt singurele exemple care ar ilustra caracterul practic al manualului.

De asemenea ținem să remarcăm că la fiecare tip de mecanisme s-au introdus cazurile cu elemente fluide (denumite „*Flude*" — rezistente la compresiune) și flexibile („*Tracke*" — rezistente la tracțiune).

La fel de izbitoare, ca și caracterul practic și descriptiv, este și evitarea, pe cît posibil, a relațiilor matematice și chiar a cunoștințelor anterioare de mecanică pe care trebuie să le aibă cititorul. S-a mers pînă acolo încît operațiile cu scările grafice sînt explicate numeric. Astfel, a fost necesar ca pentru unele probleme (în special determinarea vitezelor și accelerațiilor), să fie necesare explicații prea lungi. Cîteva relații simple și referiri la cunoștințe anterioare ar fi adus, credem, un însemnat cîștig de volum și ar fi ușurat sistematizarea și reținerea cunoștințelor căpătate, legînd mai mult noua disciplină de celelalte.

De asemenea și faptul că analiza structurală din primul capitol se mărginește la minimul necesar înțelegerii mecanismelor tratate mai departe, restrînge caracterul de generalitate și de perspectivă a lucrării. Nefolosind relațiile structurale (cu excepția celei de desmodromie — dată sub forma lui Grübler), pentru întocmirea unei clasificări structurale (din care se putea extrage clasificarea funcțională luată ca bază), cititorul nu întrevede posibilitatea de descompunere și amplificare sistematică a mecanismelor. Următor constatării că în toate mecanismele se găsesc unele din cele șase tipuri de bază, sîntem în fața descrierii unei extrem de bogate colecții de variante pe care căutăm să le combinăm (sau să le extragem după caz), fără să se pună la îndemînă teoria grupelor de elemente care conduce sistematic încercările.

Astfel, afirmația din introducere că prin această disciplină se pune la dispoziția oricărui constructor posibilitatea creării de mecanisme noi, nu ni se pare suficient sprijinită în tratarea manualului.

Pentru restrîngerea volumului explicațiilor și evitarea folosirii cunoștințelor anterior căpătate (în special de matematică și mecanică), multe metode se enunță fără justificări, care le-ar ușura înțelegerea. Aceasta se întîmplă mai ales la stabilirea ecuațiilor vectoriale ale vitezelor și accelerațiilor. De asemenea la tratarea acestora, exemplele sînt rezolvate grafic, complicat prin folosirea unor construcții ajutătoare care încarcă figura. La mecanismele cu pîrghii unde se dau cu mult folos curbele de variație a parametrilor cinematici, nu se determină nici un punct, ci se arată numai că s-a aplicat metoda expusă în primul capitol, ceea ce nu găsim potrivit pentru un manual de inițiere.

În concluzie, manualul de față, prin excelență practic, este accesibil cu minimum de cunoștințe matematice și pune la îndemîna cititorului un bogat material de tipuri de mecanisme. Tratarea foarte intuitivă și mai ales atacarea problemelor cheie ale fiecărui caz, dă o imagine reală mecanismului și domeniului său de folosire, permițînd aplicarea imediată a cunoștințelor date în practica uzuală. Problemele de concepție și chiar de analiză a cazurilor complexe, privirea de ansamblu și sistematizarea procedeelor de lucru sînt însă insuficient cuprinse. Manualul este deosebit de interesant pentru cei cu cunoștințele teoretice căpătate, care aici, prin exemplele reale și conturarea specificului, găsesc o prețioasă îndrumare către problemele practicii.

Pentru a pune la îndemîna celor interesați o privire de ansamblu asupra conținutului, fără a reda tabla de materii, menționăm:

Vol. I

Capitolul I, constituind partea generală, cuprinde: noțiunile de bază, metodele de transformare, relația de desmodromie și folosirea ei în amplificare, simbolizarea mecanismelor, metode grafice de determinare a vitezelor și accelerațiilor.

Capitolul II conține descrierea și clasificarea mecanismelor cu șurub cu relația deplasărilor.

Capitolul III tratează mecanismul patrulater în următoarea ordine: variantele plane obținute prin transformare, mecanismele pentru obținerea mișcării rectilinii, variantele patrulaterului spațial și mecanismele „capsulate” (cu elemente fluide).

Vol. II

Capitolul I tratează mecanismele cu roți circulare, necirculare, cu pîrghii rostogolitoare, mecanisme complexe — cu roți și alte elemente —, cele cu roți spațiale și cu elemente fluide (pompe cu roți dințate). Nu este cuprinsă teoria angrenării. Se dau tablouri interesante privind raportul de transmisie la diferite tipuri.

Capitolul II descrie mecanismele cu scripeți, ordonate după elementul fix (baza, banda, rola).

Capitolul III tratează mecanismele cu came astfel: elemente caracteristice, trasarea curbelor cinematice pentru legile uzuale, problema respectării unghiului de transmisie, trasarea profilului camelor plane, profilele uzuale ale camelor spațiale, trasarea camelor plane prin arce și drepte și procedeele de executare a profilelor de came.

Capitolul IV expune descriptiv mecanismele cu mișcare intermitentă (clicheți, cruce de Malta, roți stelate etc.).

Capitolul V extrem de restrîns (o pagină), dă considerații generale asupra mecanismelor în electrotehnică.

E. Bugaievski

N. TIPEI, *Hidroaerodinamica lubrificației*. Ed. Academiei R.P.R., București, 1957, 695 pag.

De curînd a apărut în librării cartea *Hidro-aerodinamica lubrificației* de N. Tipei, lucrare cu caracter teoretic, conținînd un amplu studiu asupra regimului hidrodinamic de lubrificație, cu aplicație la calculul și studiul funcționării lagărelor.

Lucrarea începe cu un capitol privind considerații generale asupra frecării între corpurile solide și în fluide. Pentru început se analizează frecarea uscată dintre corpurile solide, punîndu-se în evidență diferiții factori care o influențează, frecarea de rostogolire a corpurilor solide, iar apoi fenomenele principale care intervin în mișcarea a două suprafețe de frecare. În legătură cu această ultimă problemă se definesc tipurile de frecare ce pot interveni: frecarea semiuscată și frecarea hidrodinamică și se dau ecuațiile generale de mișcare a fluidelor vîscoase compresibile.

Capitolul II al lucrării este consacrat trecerii în revistă a principalelor proprietăți ale lubrifianților utilizați în tehnică: lubrifianții lichizi, plastici (unsorile consistente) și gazele.

În capitolul III, se începe tratarea propriu-zisă a subiectului lucrării. După unele probleme introductive ca: fenomenele principale care influențează funcționarea lagărelor, regimuri de ungere, influența deformațiilor și a temperaturilor, variația viscozității cu punctul, se prezintă ecuațiile generale ale lubrificației hidrodinamice. Pentru aceasta se transformă ecuațiile generale de mișcare, ținîndu-se seama de simplificările care decurg din faptul că mișcarea se efectuează în straturi subțiri. Ca rezultat, se dau ecuațiile diferențiale ale distribuției vitezelor și presiunilor pentru lubrificația cu lichide și cu gaze. Aceste ecuații sînt scrise în coordonate carteziene și în coordonate curbilinii ortogonale. În continuare se dau unele expresii integrale generale, ca rezultanta presiunilor, rezultanta forțelor de frecare, debitul de lubrifiant, și se fac unele considerații privind condițiile la limită ale problemei lubrificației hidrodinamice.

Capitolul IV este consacrat studiului lagărelor cu forțe și viteze constante. Autorul începe prin a studia cazul mai simplu al mișcării bidimensionale în stratul de lubrifiant (lagăre de alungire infinită). Astfel, după unele considerații generale privind ecuațiile problemei, se studiază lagărele plane considerîndu-se viscozitatea constantă și variabilă cu punctul. În continuare, se tratează cazul suprafețelor cilindrice circulare și lagăre circulare cu cuzinet incomplet. Apoi se prezintă unele metode mai exacte pentru studiul mișcării plane, metode în care se ține seama de variația presiunii după normala la stratul de lubrifiant, și anume, metoda Sommerfeld și metoda Korovcinski. Cu ajutorul metodei Sommerfeld, autorul arată că în condiții uzuale, variația presiunii după normală la stratul de lubrifiant este în raportul $\frac{\delta}{x_1} \sim 10^{-3}$,($\delta$ fiind grosimea stratului de lubrifiant), mai mică decît variația presiunii în direcția x_1 a mișcării relative dintre suprafețe. Mai departe se prezintă studiul tridimensional al lubrificației (lagăre de alungire finită). Autorul începe prin a prezenta diferitele metode de rezolvare utilizate. Astfel, începe prin a prezenta metoda lui Michell pentru lagăre plane, care reprezintă prima soluție matematic exactă dată în problema tridimensională a lubrificației (1905), apoi cazul lagărelor de alungire foarte redusă, caz în care ecuația presiunilor se poate scrie sub o formă simplă. În paragraful următor se tratează un caz de asemenea simplu și pentru care ecuația diferențială a presiunilor se poate integra în mod riguros, și anume, cazul suprafețelor paralelei cu viscozitate variabilă, după care, în paragrafele care urmează, se prezintă, pentru cazul suprafețelor curbe, metoda lui Duffing, metode variaționale pentru rezolvarea aproximativă a problemei tridimensionale etc. În continuare autorul prezintă metoda sa de studiu pe care o intitulează: rezolvarea problemei tridimensionale cu ajutorul ecuaţiilor cu diferenţe finite. Autorul aplică mai întîi această metodă pentru lagăre circulare, obţinînd o formulă simplă pentru distribuţia presiunilor în anumite condiţii la limită uzuale. În continuare se discută condiţiile la limită mai generale pentru lagărele circulare şi se prezintă o comparaţie între aceste rezultate şi unele rezultate experimentale obţinute de autor, reliefîndu-se buna concordanţă ce există între acestea. Apoi se calculează caracteristicile globale ale lagărelor circulare, dîndu-se coeficienţi adimensionali sub formă de formule şi de diagrame şi dă indicaţii pentru proiectarea lagărelor circulare, iar apoi relevă buna concordanţă cu experienţele autorului şi cu rezultatele obţinute de Kingsbury prin analogii electrice. După aceasta se fac unele consideraţii privind utilizarea seriilor de puteri pentru rezolvarea problemei, cu aplicaţii la lagărele circulare şi în special la lagărele plane. Pentru lagărele plane se dă şi soluţia obţinută cu ajutorul dezvoltărilor în serii trigonometrice, arătîndu-se însă că seriile de puteri sînt în acest caz preferabile, conducînd la calcule mai puţin laborioase.

Capitolul V este consacrat studiului lagărelor circulare cu cuzinet parţial fără joc radial, pentru care autorul, cu aceeaşi metodă de studiu, obţine o soluţie matematic exactă pentru distribuţia presiunilor. Această soluţie este obţinută şi în condiţii mai generale cînd fusul este plasat dezaxat faţă de cuzinet. Soluţia este apoi studiată, făcîndu-se anumite simplificări şi aproximaţii pentru uşurarea calculelor, şi se prezintă formule şi diagrame pentru determinarea caracteristicilor globale ale acestui tip de lagăre.

În capitolul VI autorul extinde metoda sa de rezolvare la studiul lagărelor cu elemente geometrice variabile în direcţia perpendiculară pe direcţia vitezei relative dintre suprafeţe. Astfel, după unele consideraţii generale privind condiţiile în care este posibilă extinderea metodei de studiu, se prezintă cazurile lagărelor circulare cu rază constantă şi joc variabil, cu rază variabilă, lagăre conice, lagăre cu raza variind exponenţial etc. Pentru toate aceste cazuri se calculează distribuţia presiunilor şi caracteristicile globale. Apoi se tratează cazul lagărelor cu axe neparalele. În paragraful următor se studiază lagărele cu grosimea stratului de lubrifiant, variabilă în direcţia vitezei relative şi prezentînd discontinuităţi ordinare (puncte unghiulare şi salturi finite), lagăre lămîie, lagăre în trepte etc. Apoi se tratează lubrificaţia suprafeţelor sferice cu cuzinet complet şi cu cuzinet parţial.

Capitolul următor (cap. VII) este consacrat studiului lubrificaţiei în regim nepermanent (lagăre cu forţe şi viteze variabile în timp). După unele consideraţii generale, se tratează cazul lagărelor plane, şi cazul lagărelor circulare, aplicîndu-se rezultatele la calculul lagărelor de motoare şi pentru cazul general cînd se cunoaşte variaţia sarcinii şi a vitezei relative în funcţie de timp.

În capitolul VIII se prezintă studiul stabilităţii mişcării corpurilor lubrificate, aplicîndu-se rezultatele obţinute în capitolul precedent. Se studiază mai întîi stabilitatea mişcării în lagărele plane, cu exemplificări la lagărele de motoare şi se deduc condiţiile şi criteriile de stabilitate dinamică. În continuare, se studiază pe larg probleme pentru lagăre circulare şi diferite cazuri: încărcare constantă, centrifugală etc. Se deduc criterii generale simple şi uşor de aplicat, care sînt confirmate de observaţiile experimentale.

Capitolul IX începe cu prezentarea unei soluţii generale a lubrificaţiei hidrodinamice, rezultată ca o sinteză a diferitelor cazuri tratate. Soluţia este presupusă dezvoltată în serie de puteri sau în serie trigonometrică, iar ecuaţiile cu diferenţe finite care rezultă, sînt rezolvate după o metodă a lui O. Onicescu. În continuare, se examinează cazul cînd viscozitatea variază cu presiunea, arătîndu-se că această ipoteză nu introduce dificultăţi de calcul, deoarece printr-o anumită substituţie simplă, problema se reduce la cea studiată pînă în prezent. În paragraful următor se renunţă la unele simplificări care se introduc de obicei în studiu, ceea ce corespunde cazului cînd lubrificaţia se face în straturi groase de lubrifiant sau în straturi de grosime mijlocie.

Rezultatele sînt aplicate la cazul suprafeţelor paralele, apoi circulare, şi în sfîrşit la cazul lubrificaţiei suprafeţelor cu mişcare de rostogolire. În ultimele două paragrafe ale acestui capitol, autorul reia şi studiază pe larg două probleme foarte discutate astăzi în literatura de specialitate, şi anume problema condiţiilor la limită şi a calculului debitelor de lubrifiant. Astfel, autorul expune diferitele puncte de vedere actuale şi punctul său de vedere, justificînd pe acesta din urmă prin confruntarea cu experienţe proprii şi cu experienţele efectuate de Cole şi Hugues.

Ultimul capitol (cap. X) al lucrării este consacrat lubrificaţiei cu gaze. După unele consideraţii introductive, se tratează pe larg problema lagărelor de alungire infinită lubrificate cu gaze. Astfel, se prezintă studiul lagărelor plane şi soluţii pentru lagăre cu elemente geometrice variabile. Apoi se prezintă o metodă pentru calculul lagărelor plane şi ipoteza unei evoluţii politrope oarecare a gazului lubrifiant. În continuare, se studiază lagărele circulare cu diferite grade de aproximaţie şi în paragraful următor, calculul lagărelor hidrostatice. Pentru problema tridimensională se studiază mai întîi lagărele alimentate sub presiune (lubrificaţia hidrostatică), iar apoi se prezintă o metodă generală de rezolvare, bazată pe dezvoltări în serie. În încheierea capitolului se prezintă unele probleme în legătură cu regimurile nepermanente ale lubrificaţiei cu gaze.

★

După cum rezultă şi din prezentarea cuprinsului lucrării, se remarcă de la început bogăţia materialului şi caracterul original al ei, prezentîndu-se rezultatele şcolii romîneşti de lubrificaţie şi în special rezultatele obţinute de autor în aceste probleme. Astfel, lucrarea tratează la un nivel înalt toate aspectele principale în legătură cu regimul hidrodinamic de lubrificaţie al lagărelor, chiar şi probleme dificile, care în lucrări similare apărute în alte ţări nu sînt tratate, ca de exemplu lubrificaţia suprafeţelor cu mişcare de rostogolire. Lucrarea este concepută în mod unitar, problemele sînt prezentate într-o ordine logică şi cu o pondere adecvată.

Caracterul unitar al lucrării este datorit în primul rînd caracterului original al problemelor tratate. Într-adevăr, după cum rezultă şi din prezentarea conţinutului lucrării făcută mai sus, se remarcă faptul că majoritatea problemelor prezentate sînt rezultatul unor cercetări proprii ale autorului. Astfel începînd de la capitolul IV, capitolele sînt în întregime originale sau aproape în întregime originale.

Problemele prezentate au un interes teoretic şi aplicativ deosebit. Astfel, remarcăm metoda autorului pentru studiul lubrificaţiei tridimensionale, prezentată în cap. IV, § 4.5.6, care constituie ideea de bază a lucrării. Această metodă se dovedeşte a fi deosebit de fecundă, permiţînd obţinerea de rezultate simple şi uşor de utilizat în aplicaţii, ca de exemplu pentru lagărele circulare. Extinderea metodei pentru studiul lagărelor fără joc radial este deosebit de interesantă, permiţînd obţinerea unei soluţii riguroase, a doua soluţie de acest gen, după cea dată de Michell în 1905. Aceeaşi metodă se dovedeşte a fi fructuoasă şi pentru studiul lagărelor cu elemente geometrice variabile (cap. VI) ca şi pentru lagărele cu forţe şi viteze variabile (cap. VII), cazuri care prezintă un interes deosebit. Se remarcă în acelaşi timp că deşi dezvoltările devin de multe ori complexe datorită dificultăţilor problemelor tratate, aceste dezvoltări sînt împinse de autor, în majoritatea cazurilor pînă la capăt, obţinîndu-se formule destul de simple, uşor de aplicat, sau diagrame care permit aplicarea rezultatelor fără dificultăţi. În acest sens, sînt remarcabile, prin simplicitatea lor, anumite rezultate, ca de exemplu, formula distribuţiei presiunilor pentru lagărele circulare, metoda de calcul a lagărelor de motoare supuse la forţe şi viteze variabile etc.

Studiul original al stabilităţii mişcării lagărelor prezentat de autor în capitolul VIII este de asemenea deosebit de interesant şi de util în aplicaţii, cu atît mai mult cu cît rezultatele prezentate depășesc din punct de vedere teoretic stadiul atins de alți cercetători.

Cel mai mare interes din punct de vedere științific îl prezintă, credem, capitolul IX, studiul mai general al lubrificației și care reprezintă o sinteză și o generalizare a lucrărilor autorului întreprinse în problema lubrificației. Astfel, se prezintă o soluție generală a problemei și se discută problema condițiilor la limită, problema debitelor de lubrifiant etc. De asemenea, se atacă și se rezolvă în multe privințe problema lubrificației rulmenților, problemă deosebit de dificilă din punct de vedere teoretic.

Dintre problemele prezentate în capitolul X, studiul lubrificației cu gaze, se remarcă în același sens metoda de studiu a problemei plane în ipoteza unei evoluții politrope oarecare a gazului lubrifiant și metoda de determinare a distribuției presiunilor în cazul mișcărilor tridimensionale prin utilizarea dezvoltărilor în serie.

Remarcăm de asemenea aportul personal adus de autor, cu ocazia prezentării rezultatelor altor cercetători, ca de exemplu metodele Sommerfeld, Korovcinski, Michell, Duffing, Weber, Wannier, unele probleme privind lubrificația cu gaze etc., autorul nemulțumindu-se să transcrie direct aceste rezultate, ci le-a dezvoltat, le-a pus la punct unele aspecte, adaptîndu-le totodată formei de prezentare a celorlalte probleme expuse.

Multe dintre contribuțiile prezentate de autor apar pentru prima oară în această lucrare, nemaifiind publicate, fapt care sporește interesul științific al lucrării.

Lucrarea este în întregime teoretică. Totuși, autorul a căutat, de cîte ori a fost posibil, să compare rezultatele obținute, cu cercetări experimentale proprii, sau ale altor autori, relevîndu-se întotdeauna o bună concordanță. În acest sens remarcăm spectaculoasa concordanță obținută în unele cazuri, ca de exemplu : distribuția presiunilor în lagărele circulare (§4.5.6.3, § 4.5.6.5), sau în ceea ce privește debitul de lubrifiant (§9.7).

Datorită acestor calități, lucrarea se anunță a fi deosebit de utilă în primul rînd pentru cercetătorii care se ocupă cu problemele lubrificației, fiind poate cel mai dezvoltat tratat apărut pînă în prezent în această direcție. În același timp cititorul găsește în această lucrare numeroase probleme care constituie puncte de plecare pentru alte cercetări, ceea ce sporește și din acest punct de vedere interesul pe care îl prezintă lucrarea. De asemenea, dat fiind amploarea și nivelul problemelor studiate, lucrarea depășește cadrul problemelor lubrificației, și reprezintă în multe locuri un studiu asupra clasei de mișcări a fluidelor vîscoase în straturi subțiri, constituind subiecte interesante și pentru cercetătorii care se ocupă cu mecanica fluidelor vîscoase sau cu hidraulica, îndeosebi pentru problemele de strat limită. În sfîrșit, datorită consecvenței autorului de a conduce rezultatele pînă la stadiul aplicațiilor, lucrarea se prezintă ca fiind utilă și pentru ingineri și pentru studenții din ultimii ani din institutele tehnice de învățămînt superior, care găsesc în paginile acestei cărți, metode, formule și diagrame pentru calculul și proiectarea diferitelor tipuri de lagăre utilizate în tehnică.

V. N. Constantinescu

GUSTAV DOETSCH, *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation*, (Îndrumări pentru folosirea în practică a transformării Laplace), R. Oldenburg, München, 1956, 198 pag.

Această carte face parte dintr-un ciclu de lucrări ale profesorului G. Doetsch, binecunoscute specialiștilor :

— *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* (Teoria și aplicarea transformării Laplace), Berlin, 1937 ;

— *Handbuch der Laplace-Transformation* (Manual al transformării Laplace), Basel;
vol. I: *Theorie der Laplace-Transformation* (Teoria transformării Laplace), 1950;
vol. II: *Anwendungen der Laplace-Transformation* (Aplicaţiile transformării Laplace) partea I, 1955;
vol. III: *Anwendungen der Laplace-Transformation*, partea a II-a, 1956.

În aceste lucrări, transformarea Laplace este studiată în mod aprofundat, predominînd punctul de vedere matematic. Cartea de faţă fiind un „îndrumar pentru utilizarea în practică a transformării Laplace", completează foarte bine lucrările precedente. Autorul se adresează în special inginerilor şi fizicienilor, care găsesc în această carte, într-o formă simplă şi concisă, ceea ce le trebuie pentru a putea aplica transformarea Laplace în problemele în care ea este indicată.

Pe cît este posibil, se face abstracţie de demonstraţii teoretice, dat fiind că cititorul găseşte fundamentarea matematică a problemelor respective în lucrările precedente ale autorului. Se dau numeroase exemple luate din probleme tehnice, în care calculele sînt duse pînă la capăt, astfel încît cititorul să-şi poată însuşi metoda de lucru. În cursul expunerii, în cazul unor probleme mai delicate, autorul atrage în mod special atenţia cititorului prin indicaţii puse pe marginea paginii, în dreptul aliniatului respectiv.

Lucrarea are un capitol introductiv, în care se dă definiţia şi proprietăţile generale ale transformării Laplace, precum şi regulile de calcul privitoare la această transformare.

În capitolele următoare sînt expuse metodele de calcul cu transformarea Laplace, utilizate pentru găsirea soluţiilor în cazul ecuaţiilor diferenţiale ordinare, a sistemelor de ecuaţii diferenţiale, a ecuaţiilor cu diferenţe finite, a ecuaţiilor cu derivate parţiale şi a ecuaţiilor integrale.

Autorul se ocupă, mai departe, de problema determinării funcţiei originale, fiind cunoscută funcţia imagine, cu ajutorul integralei inverse complexe şi dezvoltării în serie. De asemenea, se studiază comportarea asimptotică a funcţiilor, precum şi problema stabilităţii.

În anexă, cartea cuprinde tabele de corespondenţă, redactate de Rudolf Herschel. Cu ajutorul acestor tabele este mult înlesnită munca acelora care aplică în mod curent transformarea Laplace.

Lucrarea de faţă constituie astfel un „instrument" foarte util, pus la îndemîna inginerilor şi tehnicienilor.

Béatrice Horovitz

JOHANNES KÖRTING, *Bau und Betrieb brennstoffbeheizter Industrieöfen* (Construcţia şi exploatarea cuptoarelor industriale încălzite cu combustibil). Verlag und Druck G. Braun, Karlsruhe, 1949, 144 pag.

Această lucrare este editată sub auspiciile Institutului de gaze de pe lîngă Şcoala tehnică superioară din Karlsruhe, la care există o catedră de tehnologia cuptoarelor industriale.

În introducere, autorul defineşte diferitele categorii de cuptoare industriale şi domeniile lor de utilizare, după care în capitolul I, intitulat *Construcţia cuptoarelor industriale*, tratează despre principii generale, mijloace de încălzire şi teoria combustiei, cu relaţiile fundamentale, calcule de temperaturi şi randamente, economizoare, instalaţii pentru preîncălzirea aerului etc. Urmează expunerea principiilor fizice ale transportului de căldură, radiaţia, convecţia, conductibilitatea termică, precum şi principiile termotehnice referitoare la transmisia căldurii prin pereţi, păstrarea căldurii, viteza de încălzire a unui cuptor etc.

În continuare, capitolul I tratează despre dinamica gazelor, energia cinetică a combustibililor, variații de volum, temperatură și presiune, acțiunea suflantelor. Autorul trece apoi la tehnologia cuptoarelor, tratînd despre alegerea combustibililor și a arzătoarelor, procesul de ardere și construcția elementelor cuptoarelor. Capitolul I se încheie cu circuitul gazelor în cuptoare.

În capitolul II, intitulat *Exploatarea cuptoarelor*, autorul tratează despre cele trei grupe de deficiențe și anume : neglijențe de întreținere, greșeli de conducere a cuptoarelor și greșeli în procedee de utilizare. Urmează un paragraf referitor la tehnica măsurătorilor diferiților parametri ca : puterea calorifică, consumul combustibililor, debite, temperaturi, presiuni etc. Capitolul II continuă cu paragraful referitor la conducerea și reglarea cuptoarelor, după care se încheie cu indicații și date pentru determinarea bilanțului termic și al randamentului cuptoarelor.

★

Autorul lucrării, care este profesor la Școala tehnică superioară din Karlsruhe, a izbutit să prezinte în 144 de pagini un tratat concis, clar și fără speculații teoretice, în care sînt cuprinse toate problemele esențiale pe care un tehnician trebuie să le cunoască în domeniul construcției și exploatării cuptoarelor industriale încălzite cu combustibil.

Majoritatea paragrafelor conțin exemple de calcule numerice, din cele care se întîlnesc mai curent, care fac lucrarea deosebit de utilă, atît pentru studenți cît și pentru proiectanți.

Volumul se încheie cu tabele de parametri necesari în calcule, cu o bibliografie și un index alfabetic.

În concluzie, se poate afirma că lucrarea recenzată are o incontestabilă valoare de utilitate practică în domeniul termotehnicii.

V. Marcu

KURT SATTELBERG, *Anzeigende Frequenzmesssser* (Frecvențmetre cu citire directă), Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1956, 168 pag.

Deși tratate pînă acum în cadrul unui capitol al cărților și cursurilor de măsuri, principiile de funcționare și bogăție de soluții tehnice în construirea frecvențmetrelor cu citire directă justifică apariția cărții lui Kurt Sattelberg.

Lucrarea tratează în special frecvențmetrele cu citire directă industriale destinate a fi folosite în tehnica curenților tari de joasă frecvență. Prin aceasta, cartea constituie un ghid deosebit de prețios în diversitatea mare de variante constructive ale acestor aparate, pentru tehnicienii și inginerii care le exploatează. În primele 8 capitole sînt tratate frecvențmetrele electromecanice și electrice de toate tipurile. Într-o mai mică măsură (2 capitole) sînt descrise frecvențmetrele electronice. Un scurt capitol (cap. 9), cuprinde cîteva pagini dedicate frecvențmetrelor care au la bază circuitele bistabile.

Într-un ultim capitol sînt trecute în revistă alte cîteva sisteme de frecvențmetre electrice mai rar întîlnite.

Cartea are un pronunțat caracter descriptiv, este bogat ilustrată prin fotografii și figuri (circa 180), cuprinzînd și considerații teoretice elementare, care precizează și înlesnesc înțelegerea expunerii. La sfîrșitul volumului, autorul prezintă o bogată și prețioasă bibliografie.

E. Procopovici

EDOUARD BLANPAIN, *Théorie et pratique des outils de coupe* (Teoria şi practica sculelor aşchietoare). Editions Eyrolles, 1955, 642 pag.

Lucrarea *Teoria şi practica sculelor aşchietoare* constituie un amplu tratat de 642 pagini, cu caracter atît teoretic cît şi experimental. O trecere în revistă rapidă a celor 20 de capitole ale tablei de materii ne poate da o idee generală asupra domeniilor studiate în lucrare.

În capitolul I — generalităţi — se arată modul de lucru al sculelor aşchietoare, a căror geometrie şi elemente constitutive urmează în capitolul II.

Problemele referitoare la materialele din care se confecţionează sculele şi tratamentele termice ale acestora, fac obiectul capitolelor III şi IV, urmate de capitolul V, care tratează despre pregătirea sculelor aşchietoare armate cu plăcuţe dure.

După aceasta, autorul abordează cîteva din problemele-cheie ale aşchierii şi anume: în capitolul VI, despre formarea aşchiei, metode pentru studiul aşchierii şi dinamica aşchierii, iar în capitolul VII, despre prelucrabilitatea metalelor, factori determinaţi, uzura sculelor aşchietoare, relaţii între uzură şi diverse fenomene termoelectrice şi termochimice. Capitolul VIII tratează despre valorile curente ale geometriei sculelor şi influenţa lor asupra rezultatelor aşchierii, iar în capitolul IX se descriu detaliat sfărîmătorii de aşchii, construcţia, modul de acţiune şi avantajele lor, probleme cărora în alte tratate li se acordă o foarte mică atenţie.

Capitolul X tratează cîteva probleme foarte importante despre viteza de tăiere, elementele care o condiţionează, viteza critică şi viteza optimă, randament, precum şi metode pentru determinarea condiţiilor optime de aşchiere. Se indică tabele şi abace, precum şi date din lucrările lui Taylor, Schlesinger, Hébért şi alţii, încheind cu aşchierea rapidă.

Autorul descrie, în capitolele XI—XX, diversele tipuri de scule, după specificul operaţiilor de aşchiere; strungire, filetare, rabotare, mortezare, găurire, alezare, frezare, tarodare, răzuire şi broşare.

Capitolul XVIII este rezervat fluidelor de răcire, iar capitolul XIX ascuţirii sculelor. În capitolul XX se expun cîteva probleme importante referitoare la exploatarea sculelor, arătîndu-se deficienţele care se pot produce în pregătirea şi ascuţirea sculelor şi mijloacelor de evitare.

★

Blanpain, profesor la institute tehnice superioare din Franţa şi Belgia, expune cu o deosebită competenţă, atît teoriile clasice cît şi cele mai recente progrese şi metode avansate, ca de exemplu utilizarea ca materiale pentru scule, a diamantului şi plăcuţelor mineralo-ceramice, sulfinizarea sculelor, studiul aşchierii prin metoda cinematică, găurirea prin ultra sunete, etc.

Majoritatea capitolelor au numeroase diagrame, abace şi tabele, precum şi calcule numerice, deosebit de utile în practică.

Lucrarea recenzată a fost considerată ca deosebit de valoroasă în Franţa şi a fost distinsă cu Premiul cărţii tehnice de mecanică pe anul 1955.

Apreciem că tratatul *Teoria şi practica sculelor aşchietoare* este deosebit de interesant, atît în sectorul didactic, cît şi de cercetări, precum şi în industrie, constituind o adevărată enciclopedie şi un ghid preţios în problemele aşchierii.

Credem că ar fi util ca această lucrare să fie tradusă în limba romînă, ea cuprinzînd un bogat şi recent material privitor la domeniul sculelor aşchietoare.

V. Marcu

A. SCHÄFER, *Hydraulik und Wasserbau auf neuen Grundlagen* (Hidraulica şi construcţii hidrotehnice pe baze noi), Verlag Frank, Stuttgart, 1950, 187 pag.

Această lucrare a fost fără îndoială scrisă cu intenţia de a fi nu numai o călăuză utilă dar şi agreabilă inginerului practician. În acest scop autorul îşi propune ca deviză: „Simplitatea este claritate !" deviză pe care o subscriem bucuros şi noi. De aceea, cu toate obiecţiile ce se vor face mai departe, sînt de acord cu tendinţa manifestată de autor de a prezenta hidraulica inginerească sub forma cea mai simplă, păstrîndu-se contactul permanent cu fenomenul fizic. Este o reacţie binevenită faţă de unele lucrări prea matematizate, cu lungi demonstraţii pe căi prea ocolite, pentru a ajunge la unele formule ce sînt imediat părăsite pentru a fi înlocuite cu alte formule empirice, exprimînd mai bine fenomenul în baza unor experienţe minuţioase.

Autorul nu tratează problema ca în alte lucrări, în care hidraulica apare ca o disciplină strict experimentală, plină de formule empirice, o adevărată junglă a coeficienţilor de tot felul. Dimpotrivă, expunerea problemelor este raţională, teoretică, cu folosirea mai mult a ecuaţiilor integrate (ecuaţia energiei şi ecuaţiile cantităţilor de mişcare), decît a ecuaţiilor diferenţiale, ceea ce dă unitate întregii lucrări. O inovaţie este folosirea pe o scară mai largă decît se face de obicei, în ecuaţia Bernoulli, a termenului de pierdere de sarcină la variaţia bruscă de secţiune $\frac{(V_0 - V_1)^2}{2g}$. Deşi nu în toate cazurile tratate de autor introducerea acestui termen este justificată, considerăm, de acord cu autorul, că acest fenomen de şoc este fundamental şi foarte frecvent în mişcările fluidelor şi ar putea fi folosit mult mai amplu decît se obişnuieşte la explicarea mişcărilor cu secţiuni variabile.

Cu tot interesul pe care-l trezeşte metoda de tratare a autorului, să ne fie totuşi îngăduit a releva unele exagerări sau lipsuri. Astfel, dorind a simplifica cu orice preţ, autorul caută uneori înlocuirea unor formule destul de simple şi teoretic bine fundate cu altele şi mai simple, dar mai inexacte. De exemplu, autorul propune a nu se mai calcula adîncimile conjugate ale saltului hidraulic cu formula clasică $t_u = -\frac{t_0}{2} + \sqrt{4\,h_0\,t_0 + t_0^2/4}$ ci cu o formulă mai simplă $t_u = \sqrt{2h_0\,t_0}$. Calculînd raportul t_u/t_0 în funcţie de h_0/t_0 pentru valori ale acestuia cuprinse între 100 şi 9, am găsit că t_u/t_0 ia valori conform formulei simplificate de numai 0,72—0,77 din valorile date de formula clasică, deci aproximaţia ce s-ar face astfel ar fi destul de mare. Un alt exemplu este propunerea autorului ca, în formula lui Chézy, pentru calculul vitezei medii a curenţilor uniformi, coeficientul c să fie exprimat ca un monom în funcţie de $R^{1/4}$. Or, de multă vreme sînt cunoscute asemenea formule monome (Gauckler, Manning, Strickler, Pavlovski), în care exponentul lui R ia diferite valori, după autorul formulei respective. De altfel, exponentul de 1/4 propus de A. Schäfer nu este justificat faţă de marele număr de experienţe şi verificări făcute cu formulele analoage mai vechi şi mai exacte.

Într-un spaţiu relativ restrîns, autorul nu a putut da o dezvoltare proporţională celor 45 de paragrafe în care este împărţită cartea. După cîteva pagini, în care se tratează mişcările uniforme, urmează paragrafele consacrate mişcărilor permanente variate: vîna sub apă, saltul, tubul de aspiraţie, îngustarea la poduri, deversorul de fund, curgerea printre epiuri; altă serie de articole cuprind mişcările permanente în rîuri şi canale cu determinarea remuului şi în care se tratează şi problema interesantă a mişcării într-o albie în care se află o serie de obstacole.

Urmează probleme de mişcarea aluviunilor şi regularizări de rîuri, teoria turbinelor, teoria pompelor centrifuge, castele de echilibru, conducte forţate, problemele hidraulice ale ecluzelor, mişcările nepermanente în canale şi rîuri (unde de translaţie), mişcarea navelor, probleme de infiltrație și ape subterane, distrugători de energie, acumulatoare, retențiuni, deversorul lateral, oscilațiile stavilelor, forțele care acționează stavilele, stavile automate. Cu excepția cîtorva paragrafe, toate sînt tratate sumar, dar cu exemplificări interesante.

În ultimele paragrafe se tratează cîteva probleme de hidrotehnică : etanșeizări, bolta circulară ca formă de echilibru hidrostatic, betoane hidrotehnice, protecția contra ruginii și modelarea hidraulică. La paragraful 43 autorul studiază ce economie s-ar obține admițînd tensiuni de întindere pînă la 2 kg/cm², în beton. Paragraful cu privire la modeluri este prea redus (3 pag.) față de importanța pe care a căpătat-o astăzi metoda modelării mecanice.

Lucrarea cuprinde 100 exemple valoroase din practica inginerească și 400 figuri de o excuție ireproșabilă ; stilul este vioi, bogat în sugestii interesante și străbătut adeseori de o ironie fină la adresa acelor care ar fi în dezacord cu ideile și metodele autorului.

Cristea Mateescu

FRITZ LEONHARDT, *Spannbeton für die Praxis* (Betonul precomprimat și folosirea lui în practică). Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1955, 478 pag.

Autorul Fritz Leonhardt este cunoscut în R.P.R. prin lucrarea sa asupra calculului grinzilor de la platelajul podurilor „Vereinfachte Trägerrostberechnung", care s-a dovedit foarte utilă proiectanților noștri de specialitate. Cartea de față, *Spannbeton für die praxis* apărută în 1955, este o lucrare fundamentală.

Pentru mulți constructori, betonul precomprimat este încă un material nou, care cere să fie prezentat sub toate aspectele teoretice și practice, lămuririle trebuind să fie însă foarte clare și destul de convingătoare, scrise de inginer pentru inginer. Fritz Leonhardt reușește în noua sa lucrare să dea încredere în utilizarea betonului precomprimat, lămurind cu aceeași promptitudine ideile fundamentale, principiile de calcul, ca și diverse detalii (care nu sînt de loc secundare), în privința dispozitivelor de ancorare a aparatelor de pretensionare, a înădirii armăturii, influența monolitizării ș.a.

Cuprinsul împărțit în 20 de capitole este precedat de o introducere, o tabelă cu 10 reguli pentru inginerul care lucrează în domeniul betonului precomprimat și o listă de patente pentru diferitele procedee existente.

Lucrarea este încheiată printr-o listă bibliografică completă.

Din cuprins în mod special trebuie remarcat capitolul 3, pentru clasificarea și detaliile precise date în legătură cu dispozitivele de ancorare.

Autorul expune procedeul său original de ancorare *Leoba* care s-a dovedit foarte practic.

Capitolul 4, referitor la aparatele de preîntins, este interesant mai ales prin detaliile în legătură cu sistemele *Leoba* de punere sub efort la solicitări mari (400 t).

Capitolele 6 și 7 cuprind un bogat material documentar în legătură cu alunecarea cablelor, influența frecării și rolul monolitizării ; sînt arătate rezultatele experiențelor proprii.

Capitolul 9 prezintă interes pentru aspectul de principiu al modului cum apar și se dezvoltă efoturile de precomprimare.

Trebuie făcută o mențiune specială asupra capitolului 11, referitor la calculul elementelor de beton precomprimat. Concepția germană pentru calculul elementelor de beton armat, care s-a remarcat prin claritate și simplitate este extinsă și în domeniul betonului precomprimat. Se dau numeroase tabele și exemple de calcul, astfel încît proiectarea să fie mult ușurată.

În sfîrșit, trebuie remarcat capitolul 16, în care se expun domeniile de aplicație ale betonului precomprimat, insistînd asupra podurilor, rezervoarelor, invelitorilor subțiri și a stîlpilor de înaltă tensiune.

Cartea este frumos ilustrată, cu figuri executate impecabil, bine proporționate și utile pentru înțelegerea textului.

Prin metoda și claritatea expunerii precum și prin amploarea problemelor tratate, cartea lui Leonhardt apare o continuare firească a frumosului ciclu de volume referitoare la betonul armat scrise de marele său profesor Mörsch.

Mircea Mihailescu

F. BÖHM, N. LABUTIN, *Schalung und Rüstung.* Moderne schaltechnik (Cintre și cofraje). Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1957, 211 pag.

Tehnica cofrării a înregistrat în ultimii 14 ani, datorită creșterii prețului lemnului și raționalizării consumului lui, mari progrese prin introducerea cofrajelor standardizate, care permit realizarea unei economii de timp, precum și prin utilizarea altor materiale pentru confecționarea cofrajelor.

Autorii prezintă o sinteză a tehnicii actuale a cofrării și schelăriei, necesare pentru executarea construcțiilor din beton armat.

Dintre materialele utilizate în mod curent pentru cofraje este analizat, în special, lemnul (folosit atît direct sub formă de scînduri, dulapi etc., cît și sub formă de placaje și plăci din fibre aglomerate și, mai puțin, oțelul.

Pe lîngă proprietățile acestor materiale mai sînt expuse și influența reciprocă dintre lemn (oțel) și beton, precum și criteriile care stau la baza alegerii materialului pentru cofraje.

Descrierea elementelor de cofraj pentru diverse tipuri de construcție, cuprinzînd cofrajele propriu-zise, sprijinirile, rigidizările și îmbinările, apare însoțită de multe detalii de execuție moderne.

Sînt prezentate astfel diverse tipuri de podine, plăci de cofraj din mai multe elemente, grinzi de cofraj telescopice, grinzi de cofraj flexibile (utilizate la cofrarea suprafețelor curbe), cofraje de stîlpi, de ziduri de sprijin, apoi sprijiniri din lemn, metal etc.

Mai sînt expuse elemente constructive ca : îmbinările, apoi rigidizările realizate cu scînduri, lemn rotund, oțel, fier profilat etc.

O serie de principii constructive pentru cofrajele întregi, precum și problemele ca cea a reutilizării cofrajelor, cea a cofrajelor mobile și a decofrării, completează conținutul acestui volum, alături de capitolul dedicat schelăriei.

Lucrarea se încheie prin expunerea unei serii de exemple din practica recentă a construcțiilor.

Tratînd problema organizării lucrărilor de construcții, a normării și tipizării diverselor elemente de bază pe date experimentale, precum și problemele reale ale transportului și aspectul economic al întregii probleme, lucrarea reprezintă un îndreptar pentru cei ce lucrează în domeniul construcțiilor.

Yvonne Mihailescu

Grundbau-Taschenbuch (Îndreptar tehnic pentru fundații). Întocmit de către un colectiv de autori sub redacția lui H. Schröder. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1955, Berlin, vol. I, 847 pag.; vol. II, 264 pag.

După cum rezultă din prefața scrisă de H. Schröder, principalul scop al îndreptarului tehnic pentru fundații este ca el să prezinte cele mai importante elemente din teoria și practica construcţiilor de fundaţii, astfel încît să constituie un ajutor sigur şi accesibil pentru proiectarea şi executarea diferitelor tipuri de lucrări de fundaţii.

Scopul propus de grupa de autori ai îndreptarului tehnic se reflectă în stabilirea cuprinsului lui. Îndreptarul cuprinde un material extrem de vast şi variat. În cele 28 de capitole ale volumului I este atinsă aproape întreaga gamă de probleme care se referă la lucrările de fundaţii. Materialul prezentat este împărţit în trei mari subdiviziuni: prima subdiviziune, intitulată *Noţiuni de bază*, se referă la principalele noţiuni de geotehnică; cea de a doua, *Materiale şi forme de construcţie*, cuprinde date cu privire la materialele utilizate în fundaţii şi la diferite tipuri de elemente de construcţie legate de executarea fundaţiilor (palplanşe, batardouri) sau la tipurile de fundaţii (fundaţii directe, piloţi, chesoane, fundaţii de maşini). În aceeaşi subdiviziune sînt incluse şi zidurile de sprijin. Ultima subdiviziune este *Metodele de execuţie* şi cuprinde problema sprijinilor gropilor de fundaţie, a evacuării apei din săpături, a hidroizolării, a metodelor îmbunătăţirii pămînturilor, consolidării fundaţiilor. Un capitol special se ocupă cu fundaţii în regiuni seismice.

În îndreptar se acordă o deosebită atenţie unora dintre problemele menţionate mai sus. Astfel, în cadrul noţiunilor de bază este examinată în detaliu problema împingerii active şi a împingerii pasive; sînt de asemenea prezentate cîteva cazuri deosebite de împingerea pămîntului. Problema este reluată pentru completare în cadrul capitolului de ziduri de sprijin.

O deosebită dezvoltare o are capitolul dedicat palplanşelor: el reprezintă aproximativ 1/10 parte din primul volum.

Fundaţiile pe piloţi este a treia problemă căreia îndreptarul tehnic pentru fundaţii îi acordă o deosebită importanţă, judecînd după volumul materialului prezentat. Problemele legate de fundaţiile pe piloţi sînt prezentate în trei capitole distincte (fundaţii pe piloţi, calculul şi studiul radierului fundaţiilor pe piloţi, metode de înfigere şi extragere).

Deşi efortul depus de autori pentru prezentarea unei game cît mai largi de probleme este evident, trebuie totuşi menţionat faptul că mai sînt cîteva aspecte importante din tehnica fundaţiilor care nu au fost pomenite de loc sau au fost doar amintite. Ne referim, de exemplu, la utilizarea vacuumării pentru coborîrea nivelului apelor subterane, la utilizarea vibraţiilor pentru înfigerea palplanşelor şi piloţilor, la fundaţiile prefabricate. De asemenea, pare curios că problema argilei coloidale, a constituţiei specifice a miceliilor particulelor coloidale de argilă şi consecinţele care decurg din prezenţa lor în pămînt asupra proprietăţilor pămîntului, nu sînt menţionate.

Modul de alegere şi de prezentare a materialului dovedesc preocuparea autorilor, pe de o parte, pentru o expunere clară şi concisă a principalelor elemente legate de lucrările de fundaţii, iar pe de altă parte pentru prezentarea a cît mai multe date absolut necesare nemijlocit calculului proiectării şi execuţiei acestor lucrări. Îndreptarul cuprinde numeroase abace şi tabele care uşurează calculul.

Foarte utile sînt numeroasele exemple de calcul care însoţesc prezentarea metodelor de calcul, la unele capitole. Materialul ilustrativ este bogat, foarte clar şi explicit prezentat. Numeroasele fotografii şi exemple concrete de lucrări executate contribuie la buna urmărire şi înţelegere a materialului.

De un real ajutor pentru cei care consultă îndreptarul este prezentarea grupată a normelor privitoare la lucrările de pămînturi în construcţii.

Comparînd însă materialele prezentate în diferitele capitole ale îndreptarului, rezultă o neuniformitate nu numai în ceea ce priveşte volumul lor, fapt menţionat mai sus, dar şi în privinţa conţinutului. Astfel, pentru calculul fundaţiilor continui se prezintă principiul a mai multe metode de calcul; pentru unele dintre ele se dau şi scurte exemple de calcul. Nu au fost însă de loc prevăzute tabele de calcul, foarte necesare pentru ușurarea calculelor de obicei deosebit de laborioase ale fundațiilor continui.

În îndreptar este un capitol special care menționează mai toate metodele de îmbunătățire a pămînturilor. Prezentarea lor este însă extrem de succintă. Ea se reduce, în general, la enunțarea principiului metodei și la cîteva indicații foarte sumare cu privire la metoda de aplicare și a efectelor de îmbunătățire. Dacă pentru unele dintre metode acest mod de prezentare este justificat, avînd în vedere faptul că ele sînt în studiu (de exemplu metodele electrice sau cele prin încălzire), la altele, cum ar fi injectările cu ciment, bitum, silicatarea sau metoda înghețării, datele prezentate sînt evident insuficiente față de bogatul material și experiența acumulată în aplicarea lor.

În prefața lucrării se menționează că materialul prezentat va informa cititorii asupra stadiului actual al problemelor din domeniul lucrărilor de pămînturi în construcții, fără însă să intre în discutarea acelor chestiuni, care sînt încă în studiu. Această intenție se reflectă în modul de tratare a multora dintre problemele examinate în îndreptar.

Sînt însă unele teorii și rezultate obținute în cadrul cercetărilor recente, în domeniul pămînturilor și al lucrărilor de fundații, care au fost omise la întocmirea manualului. În primul rînd, trebuie menționată concepția modernă asupra alcătuirii pămînturilor argiloase și a factorilor care determină comportarea lor caracteristică. Nu sînt menționate dezvoltările recente ale teoriei mediilor disperse necoezive care reprezintă soluționarea completă a teoriei bazate pe criteriul de rupere Mohr-Rakine și dezvoltarea mai departe a problemei prin introducerea noțiunii de stare de eforturi mixtă. Un domeniu complet omis este cel al pămînturilor caracteristice pentru anumite regiuni, cum ar fi loessurile sau argilele susceptibile de mari deformații de volum. Despre unele metode și tipuri moderne de fundare care au fost omise, sau foarte sumar tratate, s-a amintit mai sus. Unele dintre aceste probleme sînt încă în studiu și ar fi fost indicată menționarea lor, așa cum s-au menționat și alte probleme sau studii încă incomplet dezvoltate. Alte probleme ar fi putut căpăta o dezvoltare mai largă în cadrul îndreptarului.

De sigur, obiecțiile cu privire la materialele care nu sînt incluse în îndreptar, trebuie privite cu oarecare rezervă. Este posibil ca autorii îndreptarului să fi avut în vedere în mod deosebit acele probleme de fundații care preocupă în momentul de față pe specialiștii din Germania și, în consecință, să lase deoparte pe celelalte, chiar dacă au o mare răspîndire în alte țări. Spre o astfel de presupunere conduce și examinarea materialului bibliografic utilizat la întocmirea îndreptarului și care se referă în marea majoritate a cazurilor la lucrări ale unor autori germani. De altfel, numai în acest fel s-ar putea explica totala omitere a lucrărilor cercetătorilor sovietici în acest domeniu, lucrări care constituie o contribuție cu totul deosebită la dezvoltarea geotehnicii și științei fundațiilor.

Încheind analiza îndreptarului tehnic pentru fundații, credem că el poate fi caracterizat ca o lucrare valoroasă, cuprinzînd un material vast și variat, de mare utilitate pentru constructori, atît prin conținutul lui cît și prin forma de prezentare. Îndreptarul ar avea încă de cîștigat prin completarea lui cu unele probleme omise sau insuficient dezvoltate în actuala ediție, ținînd seama de noile și importantele realizări obținute în numeroase țări.

R.J. Bally

F 2557

VIII

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

3

ANUL IX
1958

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII SI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

3

ANUL IX

1958

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI;
A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie Bucureşti;
N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti;
M. ARCAN, conferenţiar la Institutul de construcţii, Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE PATRU ORI PE AN

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul IX, nr. 3 1958

SUMAR

STUDII ŞI CERCETĂRI

MECANICA SOLIDULUI Pag.

O. ONICESCU, Mecanica solidului rigid 519

AEROMECANICĂ

N. N. PATRAULEA, Asupra rezolvării problemei lui Prandtl generalizată. Nota I 525
LUCIAN DUMITRESCU şi TRAIAN COMĂNESCU, Influenţa regimului de tracţiune asupra performanţelor unei rachete lansate tangenţial de pe un satelit artificial 537
M. M. PALOŞ, Calculul analitic al unei clase de efuzoare supersonice plane, cu panta mică în vecinătatea colului sonic 545

HIDROMECANICĂ

L. ESCANDE, Transformarea condiţiilor de funcţionare a marilor lucrări hidrotehnice prin aspirarea stratului limită 559
D. DUMITRESCU, V. IONESCU şi C. IANCU, Contribuţii teoretice şi experimentale la studiul mişcării peste deversoare 595
T. OROVEANU şi H. PASCAL, Asupra propagării undelor de presiune într-un lichid care curge printr-un mediu poros 625
D. DUMITRESCU, G. OLĂNESCU, C. IAMANDI şi M. STREJA, Un nou tip de cisto-sfincterometru 631

UNGERE

D.PAVELESCU şi I. ILIUC, Studiul prin metode radioactive a influenţei viscozităţii asupra grosimii filmului de lubrifiant 641
V. N. CONSTANTINESCU, Lubrificaţia lagărelor în regim turbulent supuse la forţe şi viteze variabile 657

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE

D. ISĂCESCU şi V. CALCAN, Studiul contracţiei unor materiale plastice pe bază de răşină furfurol-fenolică 679

Pag.

N. S. PÎRVULESCU, Rezistenţa îmbinării filetate cu conicitate pronunţată a ţevilor solicitate la tracţiune 695
A. PETRE, Calculul de rezistenţă a palelor de elicopter de secţiune constantă sub o sarcină dată 711
PETRE P. TEODORESCU, Asupra calculului de rezistenţă al plăcilor plane groase 721
FL. DINCĂ şi N. BOICU, Asupra torsiunii unor bare cilindrice cu secţiune dublu conexă 733

VIBRAŢII

MIHAIL IFRIM, Delimitarea intervalului de existenţă a frecvenţelor fundamentale de oscilaţie la clădirile înalte supuse acţiunii seismice 741

MECANICA PĂMÎNTURILOR

R. J. BALLY şi I. ANTONESCU, Aspecte caracteristice ale dezvoltării procesului de electro-osmoză în pămînturile compresibile 759

NOTE

LIVIU LIBRESCU, Asupra analogiei sarcinilor termice în problema termoelastică a învelitorilor subţiri 777

RECENZII 783

CĂRŢI PRIMITE LA REDACŢIE 797

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

REVISTA „STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ"

cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviaţie, mecanica fluidelor, ventilaţie, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacţie, construcţii de avioane, utilizarea energiei eoliene).

— Construcţii de maşini (rezistenţa materialelor, cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul ale diferitelor maşini, automatizare, studiul suprafeţelor, tratamente mecanice şi prelucrarea mediilor solide continue).

— Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

— Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de executarea lucrărilor de construcţii).

— Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 de pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, „Traian Vuia", Bucureşti, str. C. Mille, nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE « TRAIAN VUIA »

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome IX, n° 3 1958

SOMMAIRE

ÉTUDES ET RECHERCHES

MÉCANIQUE DES SOLIDES

Page

O. ONICESCU, La mécanique du solide rigide 519

AÉROMÉCANIQUE

N. N. PATRAULEA, Sur la solution du problème de Prandtl généralisé Note I 525
LUCIAN DUMITRESCU et TRAIAN COMĂNESCU, Influence of the thrust regime on the performances of a space-ship taking-off tangentially from an artificial satellite 537
M. M. PALOŞ, Calcul analytique d'une classe d'effuseurs supersoniques plans, à pente réduite à proximité du col sonique 545

HYDROMÉCANIQUE

L. ESCANDE, On some possibilities of changing the flow characteristics in hydraulic structures by boundary layer suction 559
D. DUMITRESCU, V. IONESCU et C. IANCU, Contribution théorique et expérimentale à l'étude du mouvement par-dessus les déversoirs 595
T. OROVEANU et H. PASCAL, Sur la propagation des ondes de pression dans un liquide qui s'écoule à travers un milieu poreux 625
D. DUMITRESCU, G. OLĂNESCU, C. IAMANDI et M. STREJA, Un nouveau type de cysto-sphinctéromètre 631

LUBRIFICATION

D. PAVELESCU et I. ILIUC, Radioactive tracer for determining the influence of viscosity upon the oil-film thickness 641
V. N. CONSTANTINESCU, La lubrification en régime turbulent des paliers soumis à des charges et vitesses variables 657

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX – ÉLASTICITÉ

D. ISĂCESCU et V. CALCAN, Etude de la contraction de certains matériaux plastiques, à base de résine furfurol-phénolique 679

Page

N. S. PÎRVULESCU, Résistance de l'assemblage fileté, à conicité marquée, des tiges sollicitées à la traction 695

A. PETRE, Calcul de la résistance des pales d'hélicoptère, à section constante, sous une charge donnée 711

P. P. TEODORESCU, Sur le calcul de résistance des plaques planes épaisses 721

FL. DINCĂ et N. BOICU, Sur la torsion des barres cylindriques à section doublement connexe 733

VIBRATIONS

M. IFRIM, Délimitation de l'intervalle d'existence des fréquences fondamentales d'oscillation pour les bâtiments élevés, soumis à l'action des séismes . . 741

MÉCANIQUE DES SOLS

R. J. BALLY et I. ANTONESCU, Aspects caractéristiques de la marche du phénomène d'électro-osmose dans les terres compressibles 759

NOTES

L. LIBRESCU, Sur l'analogie des charges thermiques dans le problème thermo-élastique des voiles minces 777

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 783

LIVRES REÇUES DERNIÈREMENT À LA RÉDACTION 797

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

La revue de l'Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la R. P. Roumaine

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

comprend des études de mécanique appliqée, notamment :

— Mécanique générale (élasticiteé, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques).

— Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction, construction des avions, utilisation de l'énergie éolienne).

— Constructions mécaniques (résistance des matériaux, cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des différentes machines, automation, étude des surface, traitements mécaniques et travail des milieux solides continus).

— Technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radio-actifs en technique).

— Statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction).

— Hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux meritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés dactylographiés, en trois exemplaires ; les formules seron écrites à l'encre et d'une manière lisible.

Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliographiques seront mentionnées spécialement à la fin de l'article. Elles doivent être aussi complètes que possible, comprenant, pour les périodiques par exemple, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers seront rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia» de l'Académie de la République Populaire Romaine, Bucarest, 15, rue Constantin Mille.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ « ТРАЯН ВУЯ »

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том IX, № 3 1958

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ И ИССЛЕДОВАНИЯ

МЕХАНИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ Стр.

О. ОНИЧЕСКУ, Механика жесткого твердого тела 519

АЭРОМЕХАНИКА

Н. Н. ПАТРАУЛЯ, О решении обобщенной задачи Прандля. Сообщение I 525
ЛУЧИАН ДУМИТРЕСКУ и ТРАЯН КОМЭНЕСКУ, Влияние тягового режима на качества полета ракеты, запущенной по касательной с искусственного спутника 537
М. М. ПАЛОШ, Аналитический расчет одного класса плоских сверхзвуковых расширяющихся сопел с небольшим уклоном вблизи их звуковой сужающейся части 545

ГИДРОМЕХАНИКА

Л. ЭСКАНД, Улучшение условий работы крупных гидравлических установок путем всасывания пограничного слоя 559
Д. ДУМИТРЕСКУ, В. ИОНЕСКУ и К. ЯНКУ, Теоретические и экспериментальные исследования движения через водосливы 595
Т. ОРОВЯНУ и Х. ПАСКАЛ, О распространении волн давления в протекающей через пористую среду жидкости 625
Д. ДУМИТРЕСКУ, Г. ОЛЭНЕСКУ, К. ЯМАНДИ и М. СТРЕЖА, Новый тип цистосфинктерометра 631

СМАЗКА

Д. ПАВЕЛЕСКУ и И. ИЛЮК, Исследование влияния вязкости на толщину пленки смазочного вещества радиоактивными методами 641
В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Смазка подшипников в турбулентном режиме при переменных нагрузках и скоростях 657

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — УПРУГОСТЬ

Д. ИСЭЧЕСКУ и В. КАЛКАН, Исследование усадки некоторых пластмасс из фурфурол-феноловой смолы 679

стр.

Н. С. ПЫРВУЛЕСКУ, Прочность резьбового соединения с повышенной конусностью работающих на растяжение труб 695

А. ПЕТРЕ, Расчет прочности лопастей вертолетных несущих винтов постоянного сечения под заданной нагрузкой 711

П. П. ТЕОДОРЕСКУ, О расчете прочности толстых плоских пластин . 721

Ф. ДИНКА и Н. БОЙКУ, О кручении цилиндрического бруса двусвязного сечения 733

ВИБРАЦИИ

М. ИФРИМ, Определение диапазона существования основных частот колебания в подвергающихся сейсмическим влияниям высотных зданиях 741

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

Р. Ж. БАЛЛИ и И. АНТОНЕСКУ, Характерные аспекты развития процесса электроосмоса в сжимаемых грунтах 759

ЗАМЕТКИ

Л. ЛИБРЕСКУ, Об аналогии термических нагрузок в проблеме термоупругости тонких оболочек 777

РЕЦЕНЗИИ 783

КНИГИ, ПОСТУПИВШИЕ В РЕДАКЦИЮ 797

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ЖУРНАЛ « ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ »

содержит нижеследующие разделы прикладной механики:

— Общую механику (упругость, пластичность, вибрации и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).

— Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, реактивные двигатели, самолетостроение, использование энергии ветра).

— Машиностроение (сопротивление материалов, кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механическая обработка сплошных твердых сред).

— Технику измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

— Статику и динамику сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, геотехника, устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).

— Гидромеханику (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных и зарубежных сотрудников.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным данным проблемы.

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указывать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском и, если возможно, на русском и французском языке. Резюме должно в среднем составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных авторов, редактированным на русском, английском, французском или немецком языке.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики имени Траяна Вуя, Бухарест, ул. Константин Милле № 15, район Г. Георгиу-Деж.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM

MECANICA SOLIDULUI RIGID

DE

O. ONICESCU

1. MECANICA INERŢIALĂ A SOLIDULUI

Urmînd regulelor mecanicii noastre construim mai întîi mecanica rigidului inerțial, caracterizat, din punct de vedere al localizării în spațiu, printr-un punct P (centrul său de masă) și trei unghiuri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. După cum vom vedea, caracteristicele sale dinamice sînt masa relativistă m considerată a fi atașată punctului P și un tensor simetric l_{jk} depinzînd de extensiunea spațială a corpului și de repartiția masei în el. Poziția punctului P poate fi definită de vectorul poziție $\overline{r}$, cu ajutorul celor trei coordonate carteziene x^1, x^2, x^3. Impulsurile respective p_1, p_2, p_3 pot fi considerate drept componentele unui vector $\overline{\pi}$. Să notăm cu $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ impulsurile corespunzătoare celor trei unghiuri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Invarianții euclidieni ai sistemului acestor impulsuri sînt

$$\begin{gathered} \omega = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2), \\ \omega_1 = \frac{1}{2}\theta_1^2, \ \omega_2 = \frac{1}{2}\theta_2^2, \ \omega_3 = \frac{1}{2}\omega_3^2 \end{gathered} \tag{1}$$

precum și cele trei mărimi anolonome $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ cărora le definim doar variațiile

$$\begin{aligned} \delta\varphi_1 &= \theta_2\,\delta\theta_3 - \theta_3\,\delta\theta_2, \\ \delta\varphi_2 &= \theta_3\,\delta\theta_1 - \theta_1\,\delta\theta_3, \\ \delta\varphi_3 &= \theta_1\,\delta\theta_2 - \theta_2\delta\theta_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Potrivit principiilor noastre funcția de stare este o funcție de acești invarianți, $H = H(\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, iar forma inerțială a corpului este, ținînd seama de cele de mai sus,

$$\Omega_\delta^{(i)} = \overline{\pi}\,\delta\overline{r} + \sum_j \theta_j\,\delta\alpha_j - H\,\delta t. \tag{3}$$

Ecuațiile mișcării exprimă, după principiile noastre, că derivata exterioară a formei $\Omega_\delta^{(i)}$ este nulă

$$d\,\Omega_\delta^{(i)} - \delta\,\Omega_d^{(i)} = \theta, \tag{4}$$

oricare ar fi δx^j, $\delta \alpha_j$, δp_j, $\delta\theta_j$, δt.
Primul grup al ecuațiilor canonice care rezultă privește mișcarea punctului P

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial \omega}\, p_j \tag{5}$$

și evoluția unghiurilor

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_1 &= \frac{\partial H}{\partial \omega_1}\theta_1 - \frac{\partial H}{\partial \varphi_3}\theta_2 + \frac{\partial H}{\partial \varphi_2}\theta_3, \\
\dot{\alpha}_2 &= \frac{\partial H}{\partial \varphi_3}\theta_1 + \frac{\partial H}{\partial \omega_2}\theta_2 - \frac{\partial H}{\partial \varphi_1}\theta_3, \\
\dot{\alpha}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_2}\theta_1 + \frac{\partial H}{\partial \varphi_1}\theta_2 + \frac{\partial H}{\partial \omega_3}\theta_3.
\end{aligned} \tag{6}$$

Aceste ecuații ne vor servi la definirea impulsurilor θ_1, θ_2, θ_3 și la precizarea formei lui H.

Găsim un sprijin pentru calculul valorii coeficienților sistemului (6) folosind modelul spațial al solidului și postulînd principiul că partea spațială a formei $\Omega_\delta^{(i)}$ este dată de suma părților spațiale ale formelor inerțiale corespunzătoare particulelor elementare care compun corpul

$$\pi_\delta = \int_C (\dot{\xi}^1 \delta \xi^1 + \dot{\xi}^2 \delta \xi^2 + \dot{\xi}^3 \delta \xi^3)\, dm.$$

Variațiile $\delta \xi^j$ $(j = 1, 2, 3)$ corespund deplasărilor euclidiene ale corpului C

$$\begin{aligned}
\delta \xi^1 &= \delta x^1 + (\xi^2 - x^2)\,\delta\alpha_3 - (\xi^3 - x^3)\,\delta\alpha_2, \\
\delta \xi^2 &= \delta x^2 + (\xi^3 - x^3)\,\delta\alpha_1 - (\xi^1 - x^1)\,\delta\alpha_3, \\
\delta \xi^3 &= \delta x^3 + (\xi^1 - x^1)\,\delta\alpha_2 - (\xi^2 - x^2)\,\delta\alpha_1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Aceste expresii pun în relief modul cum intervin unghiurile α_1, α_2, α_3 pentru fixarea poziției corpului.
Folosindu-le găsim expresia lui π_δ în funcție de variațiile ireductibile δx^j, $\delta \alpha_j$

$$\begin{aligned}
\pi_\delta = \sum_j m\, \dot{x}^j\, \delta x^j + [(l_{22} + l_{33})\, \dot{\alpha}_1 - l_{12}\, \dot{\alpha}_2 + l_{13}\, \dot{\alpha}_3]\, \delta\alpha_1 + [l_{21}\, \dot{\alpha}_1 + \\
+ (l_{33} + l_{22})\, \dot{\alpha}_2 - l_{33}\, \dot{\alpha}_3]\, \delta\alpha_2 + [-l_{31}\, \dot{\alpha}_1 + l_3{}^2\, \dot{\alpha}_2 + (l_{11} + l_{22})\, \dot{\alpha}_3]\, \delta\alpha_3,
\end{aligned}$$

unde

$$m = \int_C dm\,; \quad l_{jk} = \int_C (\xi^j - x^j)\,(\xi^k - x^k)\, dm.$$

Asimilînd această expresie cu partea spațială din $\Omega_\delta^{(i)}$ găsim mai întîi $\bar{\pi} = m\dot{\bar{r}}$ și apoi expresiile impulsurilor unghiulare

$$\begin{aligned}\theta_1 &= (l_{22} + l_{33})\,\dot{\alpha}_1 - l_{12}\,\dot{\alpha}_2 + l_{13}\,\dot{\alpha}_3,\\ \theta_2 &= l_{21}\,\dot{\alpha}_1 + (l_{33} + l_{11})\,\dot{\alpha}_2 - l_{23}\,\dot{\alpha}_3,\\ \theta_3 &= -\,l_{31}\,\dot{\alpha}_1 + l_{32}\,\dot{\alpha}_2 + (l_{11} + l_{22})\,\dot{\alpha}_3,\end{aligned} \tag{8}$$

de unde, prin inversiune, totdeauna posibilă, cum se vede calculînd valoarea determinantului transformării,

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= \varkappa\,\theta_1 - \lambda_3\,\theta_2 + \lambda_2\,\theta_3,\\ \dot{\alpha}_2 &= \lambda_3\,\theta_1 + \varkappa_2\,\theta_2 - \lambda_1\,\theta_3,\\ \dot{\alpha}_3 &= -\,\lambda_2\,\theta_1 + \lambda_1\,\theta_2 + \varkappa_3\,\theta_3.\end{aligned} \tag{9}$$

Componentele $\varkappa$ și λ se exprimă rațional prin l_{jk}. Comparînd (6) și (9) obținem

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_j} = \varkappa_j\,; \quad \frac{\partial H}{\partial \varphi_j} = \lambda_j\,; \quad j = 1,\ 2,\ 3. \tag{10}$$

Introducem acum, *principial*, *ipoteza* că l_{jk}, deci componentele $\varkappa$ și λ nu depind decît de unghiurile α_1, α_2, α_3 prin urmare numai de poziția corpului, în jurul centrului de greutate, și nu de viteza lui de translație sau de rotație. Aceasta are, între altele, consecința de a separa în expresia energiei corpului partea ce depinde de rotație de cea care depinde de translație.

În aceste condiții, egalitățile (10) ne arată că H este liniară în ω_j și θ_j, deci

$$H = \sum_j (\varkappa_j\,\omega_j + \lambda_j\,\varphi_j) + L\,(\omega), \tag{11}$$

unde $L\,(\omega)$ nu depinde de ω_j și φ_j $(j = 1,\ 2,\ 3)$.

Relațiile (8) ne arată că, dacă $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$, $\dot{\alpha}_3$ sînt nule la momentul inițial, rămîn nule tot timpul, mișcării, deci corpul nu are rotație, se comportă ca un punct material. În acest caz $H = mc^2$ cu $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\dot{r}^2}{c_2}}}$.

Dar după (11) avem în același timp $H = L\,(\omega)$. Rezultă $L\,(\omega) = mc^2$. Deci

$$H = \sum_j (\varkappa_j\,\omega_j + \lambda_j\,\varphi_j) + L\,(\omega).$$

2. MECANICA SOLIDULUI ÎNTR-UN CÎMP

Forma potențială a corpului C corespunde celei inerțiale, ținînd seama că trebuie să fie o expresie liniară în δx^j, $\delta\alpha_j$, δt

$$\Omega_\delta^{(p)} = \bar{A}\ \delta\bar{r} + \sum_j B_j\ \delta\alpha_j + A_0\ \delta t.$$

Pe de altă parte avem, principial,

$$\Omega_\delta^{(p)} = \int_C (\bar{a}\,\delta\bar{\rho} + a_0\,\delta t)\,d\nu,$$

unde $\bar{a}\,(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ este potențialul vector relativ la unitatea de sarcină în punctul $\bar{\rho}\,(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ și la momentul t, iar a_0 este potențialul scalar în același punct și la același moment. Integrarea se efectuează relativ la repartiția de sarcină la un moment dat și poate fi înțeleasă astfel

$$\Omega_\delta^{(p)} = \int_{C_0} [\bar{a}\,(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)\,\delta\bar{\rho} + a_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)\,\delta t]\,d\nu,$$

presupunînd că ξ^1, ξ^2, ξ^3 sînt exprimate ca funcții de ξ_0^1, ξ_0^2, ξ_0^3 și bineînțeles de t, potrivit legilor mișcării, observînd că $d\nu$ ca și volumul respectiv nu variază cu timpul.
Rezultă atunci că

$$d\,\Omega_\delta^{(p)} - \delta\,\Omega_d^{(p)} = \int_{C_0} [d\bar{a}\,\delta\bar{\rho} - d\bar{\rho}\,\delta\bar{a} + da_0\,\delta t - \delta a_0\,dt]\,d\nu.$$

Dar paranteza de sub integrală valorează

$$\left[\left(\dot{\bar{\rho}} \times \operatorname{rot}\bar{a} + \frac{\partial\bar{a}}{\partial t} - \operatorname{grad} a_0\right)\delta\bar{\rho} + \dot{\bar{\rho}}\left(\operatorname{grad} a_0 - \frac{\partial\bar{a}}{\partial t}\right)\right] dt.$$

Dacă punem, pentru a simplifica scrisul,

$$\bar{f} = -\operatorname{grad} a_0 + \frac{\partial\bar{a}}{\partial t} + \dot{\bar{\rho}} \times \operatorname{rot}\bar{a}$$

și dacă amintim (4) vom avea

$$d\,\Omega_\delta^{(p)} - \delta\,\Omega_d^{(p)} = \int_{C_0}\left[\bar{f}\,\delta\bar{r} + (\overline{PM} \times \bar{f})\,\delta\bar{\alpha} + \dot{\bar{\rho}}\left(\operatorname{grad} a_0 - \frac{\partial\bar{a}}{\partial t}\right)\delta t\right] dt\,d\nu,$$

sau încă, dacă punem

$$\overline{\mathcal{F}} = \int_{C_0} \bar{f}\,d\nu\,;\ \overline{\Theta} = \int_{C_0} \overline{(\overline{PM} \times \bar{f})}\,d\nu,\ \mathcal{F}_0 = \int_{C_0} \dot{\bar{\rho}}\left(\operatorname{grad} a_0 - \frac{\partial\bar{a}}{\partial t}\right) d\nu,$$

rezultă

$$d\,\Omega_\delta^{(p)} - \delta\,\Omega_d^{(p)} = [\overline{\mathcal{F}}\,\delta\bar{r} + \overline{\Theta}\,\delta\bar{\alpha} + \mathcal{F}_0\,\delta t]\,dt.$$

Avem în același timp

$$d\,\Omega_\delta^{(i)} - \delta\,\Omega_d^{(i)} = \left[\frac{d}{dt}(m\dot{\bar{r}})\,\delta\bar{r} + \frac{d\overline{\theta}}{dt}\,\delta\bar{\alpha} - \frac{dH}{dt}\,\delta t\right] dt.$$

Dacă presupunem că aceste două derivate exterioare sînt egale pentru orice $\delta\bar{r}$, $\delta\bar{\alpha}$ și δt, se vor obține ecuațiile de mișcare

$$\frac{d(m\dot{\bar{r}})}{dt} = \bar{\mathcal{F}},$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \bar{\Theta}.$$

Ecuația care se obține egalînd coeficienții lui δt este o consecință a primelor două grupuri de ecuații și corespunde, dacă cîmpul este conservativ, principiului conservării energiei, deoarece în acest caz special $\mathcal{F}_0 = \frac{d}{dt}\int_{C_0} a_0 d\nu$ și energia constantă este reprezentată prin expresia

$$H - \int_{C_0} a_0\, d\nu = \text{const}.$$

Dacă presupunem că potențialul vector este nul, se obțin ecuațiile clasice de mișcare ale unui solid (rigid) într-un cîmp care derivă dintr-un potențial $-a_0$. Ecuațiile se reduc la următoarele :

$$\frac{d(m\dot{\bar{r}})}{dt} = -\int_C \operatorname{grad} a_0\, d\nu,$$

pentru mișcarea centrului de gravitate și

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \int_C (\overline{PM} \times \bar{f})\, d\nu,$$

care, ținînd seama de (8), sînt ecuațiile bine cunoscute ale mișcării în jurul centrului de gravitate.

Forțe care nu sînt de forma celor deduse mai sus din cîmp, pot fi introduse cu ajutorul legăturilor de forma

$$\int_C \bar{g}\, \delta\bar{\rho}\, d\nu = 0,$$

adică

$$\left(\int_C \bar{g}\, d\nu\right)\delta\bar{r} + \left(\int_C (\overline{PM} \times \bar{g})\, d\nu\right)\delta\bar{\alpha} = 0.$$

Aceasta ne va da ecuațiile

$$\frac{d(m\dot{\bar{r}})}{dt} = \bar{\mathcal{F}} + \int_C \bar{g}\, d\nu,$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \Theta + \int_C (\overline{PM} \times \bar{g})\, d\nu.$$

Primit la redacție la 6 mai 1958.

МЕХАНИКА ЖЕСТКОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе рассматривается, в рамках введенных автором принципов, прежде всего механика жесткого инерционного тела и определяются инерционные импульсы и энергия H, являющаяся суммой инерционных энергий mr^2 (m — относительная масса) центра массы с энергией вращения.

Затем рассматривается определенное одним скалярным и одним векторным потенциалом поле, устанавливается контур движения. В случае, если векторный потенциал равен нулю, уравнения приводятся к уравнениям классической механики (если и скорость поступательного движения является малой).

Прочие силы вводятся путем связей.

LA MÉCANIQUE DU SOLIDE RIGIDE

RÉSUMÉ

Dans l'ensemble des principes introduits par l'auteur, on examine d'abord la Mécanique du rigide d'inertie et l'on détermine les impulsions d'inertie et l'énergie H, qui est la somme de l'énergie d'inertie mr^2 (m = masse relativiste) du centre de masse et de l'énergie de rotation.

On considère ensuite le champ déterminé par un potentiel scalaire et un potentiel vecteur; on détermine les équations du mouvement. Dans le cas où le potentiel vecteur est nul, les équations se réduisent à celles de la Mécanique classique (lorsque la vitesse de translation aussi est petite).

D'autres forces sont introduites par des relations de liaison.

AEROMECANICĂ

ASUPRA REZOLVĂRII PROBLEMEI LUI PRANDTL GENERALIZATĂ

NOTA I

DE

N. N. PATRAULEA

1. Problema lui Prandtl, pe care o expunem mai jos sub o formă mai generală, a fost considerată în special în legătură cu aripile de avion de anvergură finită. Ea a făcut obiectul a numeroase cercetări [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7].

Condiții la limită similare se întîlnesc însă și în alte domenii ale fizicii matematice ca de pildă scurgerile lichidelor prin medii poroase [8] și recent în teoria liniarizată elaborată în același timp de noi și de L. Malavard [9], [10] pentru profilele de aripă cu volet fluid.

În această lucrare, după ce vom aminti parametrii care intervin în problema profilului de aripă cu volet fluid (sau cu jet de bord de fugă) și în problema aripii de avion de anvergură finită, vom defini problema lui Prandtl generalizată pe care o reducem la rezolvarea unei ecuații integrale Fredholm.

După studiul proprietăților principale ale nucleului vom indica posibilitatea construirii lui pe baza analogiei electrice și diferite metode de rezolvare.

2. În teoria liniarizată a lui Prandtl, pentru aripa de avion de anvergură finită, din considerații aerodinamice cunoscute, se ajunge la următoarele condiții pe care trebuie să le satisfacă funcția armonică φ, care este potențialul vitezelor de perturbație față de un curent paralel, pe o tăietură rectilinie a planului lui Treftz (urma aripii la infinit aval) :

$$\varphi^+ - \varphi^- = \frac{Kcv_\infty}{2}\left(2\alpha + \frac{1}{v_\infty}\frac{d\varphi}{dn}\right), \tag{2.1}$$

$$\frac{d\varphi^+}{dn} = \frac{d\varphi^-}{dn}, \tag{2.2}$$

unde prin + și — s-au indicat cele două fețe ale liniei MN, urma aripii (fig. 1). K este o constantă aproximativ egală cu 0,85 π, c coarda aripii, α incidența și v_∞ viteza de la infinit.

Fiind vorba de un potențial de perturbație se poate considera că φ se anulează la infinit.

Dacă se pune

$$\varphi^- - \varphi^+ = \Gamma(x)$$

și se exprimă $\frac{d\varphi}{dn}$ cu ajutorul formulei lui Biot-Savart, ca viteza indusă de vîrtejurile $d\Gamma$, se ajunge la cunoscuta ecuație integro-diferențială a lui Prandtl. Nu vom scrie această ecuație deoarece nu în felul acesta avem intenția să indicăm soluția pentru problema lui Prandtl generalizată.

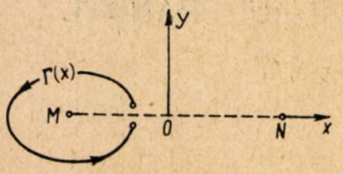


Fig. 1

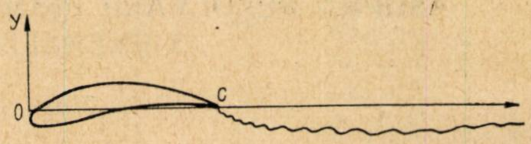


Fig. 2

3. În teoria liniarizată a profilului de aripă cu volet fluid, [11] se ajunge la următoarele condiții, pe semidreapta Ox, convenabil de apropiată de profil și de linia de jet (fig. 2) :

$$\varphi^+ - \varphi^- = \frac{K_j v_\infty . c}{2}\left(\frac{1}{v_\infty}\cdot\frac{d\varphi}{dn} - \frac{v^*}{v_\infty}\right), \tag{3.1}$$

pe proiecția liniei de jet pe axa Ox și

$$\frac{d\varphi}{dn} = \text{dat}, \tag{3.2}$$

pe proiecția profilului Oc.

4. Se vede că (3.1) este similară condiției (2.1), amîndouă fiind de forma,

$$\varphi^+ - \varphi^- = \varkappa\left(A + \frac{1}{v_\infty}\cdot\frac{d\varphi}{dn}\right), \tag{4.1}$$

unde

$$\varkappa = \frac{K c v_\infty}{2}, \tag{4.2}$$

$$A = 2\alpha,$$

pentru problema aripii de anvergură finită, şi

$$\varkappa = \frac{K_j \cdot cv_\infty}{2}, \qquad A = -\frac{v^*}{v_\infty}, \tag{4.3}$$

pentru problema profilului de aripă cu jet.

Să observăm că în cazul profilului de aripă cu jet, A este o constantă egală cu bracajul iniţial al jetului în timp ce incidenţa $A/2$ este în general variabilă în cazul aripii de anvergură finită. De asemenea, $\varkappa$ este în general constant în cazul profilului cu jet în timp ce la aripa de anvergură finită el este variabil afară de cazul particular al aripii dreptunghiulare.

Cu toate acestea problema lui Prandtl în cazul jetului este mai dificilă deoarece, pe de o parte, mai trebuie să fie satisfăcută condiţia (3.2), iar pe de altă parte, prin faptul că domeniul pe care trebuie să fie satisfăcută condiţia lui Prandtl este infinit (ceea ce vom vedea că dă naştere la o ecuaţie integrală singulară în acest sens).

Condiţia la limită (3.2) apare şi la problema aripii de avion de anvergură finită în cazul că se consideră şi prezenţa fuzelajului sau a altor frontiere.

În ipoteza fuzelajului infinit lung, în planul lui Treftz potenţialul vitezelor de perturbaţie trebuie să aibă derivata normală nulă pe conturul secţiunii drepte a fuzelajului, [12]. De asemenea, dacă aripa este în prezenţa solului va trebui ca $\frac{d\varphi}{dn}$ să fie nulă şi pe linia orizontală din planul lui Treftz care reprezintă solul.

Din relaţiile (4.1), (4.2), (4.3), se vede că *problema profilului de aripă, rectiliniu, fără incidenţă este analogă problemei unei aripi dreptunghiulare semiinfinite, cu incidenţă constantă, avînd la un capăt o placă fără incidenţă, de lungime infinită şi avînd lăţimea egală cu coada profilului de la prima problemă.*

5. Noi vom numi în general, problemă Prandtl, determinare unei funcţii armonice φ în plan sau în spaţiu, regulată în exteriorul unor frontiere $D + D_1$ şi la infinit*) care să satisfacă următoarele condiţii :

— Pe frontiera D, care este o porţiune dintr-o suprafaţă regulată, deschisă, pentru problema în spaţiu şi o linie deschisă pentru problema plană, derivata normală $\frac{d\varphi}{dn}$ să fie continuă la traversarea ei (se consideră versorul normalei îndreptat de la faţa — la faţa + a frontierei D),

$$\frac{d\varphi^+}{dn} = \frac{d\varphi^-}{dn}. \tag{5.1}$$

---

*) În cazul problemei plane, φ poate să prezinte anumite constante ciclice la ocolirea obstacolelor de mai sus, dacă necesităţi fizice cer acest lucru.

— Pe acest domeniu să fie satisfăcută și condiția lui Prandtl

$$\varphi(P^+) - \varphi(P^-) = F(P) + G(P)\frac{d\varphi}{dn}, \tag{5.2}$$

$F(P)$ și $G(P)$, fiind două funcții date.

— Pe frontierele D_1, derivata normală să aibă valori date,

$$\frac{d\varphi}{dn} = F_1(P),\ P \in D, \tag{5.3}$$

dar compatibile cu problema Neumann pentru domeniul considerat. Aceste domenii D_1, pot sau nu să fie conexe cu domeniul D.

Rezolvarea problemei spațiale ar putea să se aplice la o teorie liniarizată a aripii de anvergură finită cu jeturi de bord de fugă [13].

— Pentru concretizare vom considera aici problema spațială. Toate rezultatele vor putea fi aplicate problemei plane cu ușoare modificări.

Domeniul D va putea fi mărginit de domenii D sau de linii (muchii) care fac separația între cele două fețe ale lui.

6. Din faptul că am admis că φ este regulată în exteriorul frontierelor rezultă că dacă funcția armonică φ este potențialul vitezelor unei mișcări hidrodinamice, fluidul ocolește muchiile de mai sus, așa cum se admite în teoria profilelor subțiri că bordurile de atac pot fi ocolite de către fluid.

În aceste ipoteze vom reduce problema lui Prandtl la rezolvarea unei ecuații liniare cu nucleu Fredholm.

Pentru aceasta fie $N_0(P, Q)$ funcția lui Neumann pentru problema lui Neumann referitoare la funcția φ, și la domeniul limitat de ansamblul frontierelor D^+, D^- și D_1. Dacă P și Q sînt puncte pe frontierele menționate, potențialul φ va fi dat de formula

$$\varphi(P) = \int_{D^+ + D^- + D_1} N_0(P, Q)\frac{d\varphi(Q)}{dn_0}\,dQ. \tag{6.1}$$

În această formulă am considerat, peste tot, normala n_0 îndreptată către interiorul domeniului de definiție a funcție φ. Prin dQ s-a însemnat elementul de suprafață corespunzător punctului Q.

Avem mai departe pentru $P \in D$,

$$\left.\begin{aligned}\varphi(P^+) = \int_{D^+} N_0(P^+, Q^+)\frac{d\varphi(Q)}{dn_0}\,dQ - \\ -\int_{D^-} N_0(P^+, Q^-)\frac{d\varphi(Q^-)}{dn_0}\,dQ + \mathcal{F}(P^+),\end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

unde

$$\mathcal{F}(P^+) = \int_{D_1} N_0(P^+, Q)\frac{d\varphi(Q)}{dn_0}\,dQ.$$

Această ultimă funcție este cunoscută deoarece, prin ipoteză, derivata normală este dată pe D.

În mod analog, avem:

$$\varphi(P^-) = -\int_{D^+} N_0(P^-, Q^+)\frac{d\varphi(Q)}{dn}dQ + $$

$$+\int_{D^+} N_0(P^-, Q^+)\frac{d\varphi(Q)}{dn}dQ + \mathcal{F}(P^-), \tag{6.2'}$$

$$\mathcal{F}(P^-) = \int_{D_1} N_0(P^-, Q)\cdot\frac{d\varphi(Q)}{dn}\cdot dQ.$$

Cum prin definiția problemei Prandtl (5.2),

$$\frac{d\varphi(Q^+)}{dn} = \frac{d\varphi(Q^-)}{dn},$$

din (6.2) și (6.2'), se obține mai departe,

$$\left.\begin{aligned}\varphi(P^+) - \varphi(P^-) = \int_D N_0(P^+, Q^+) - N_0(P^-, Q^+) + \\ + N_0(P^+, Q^+) - N_0(P^-, Q^-) + \mathcal{F}(P^+) - \mathcal{F}(P^-),\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

sau punînd,

$$\mathcal{F}(P^+) - \mathcal{F}(P^-) = \mathcal{F}(P) \tag{6.4}$$

și

$$N(P,Q) = N_0(P^+,Q^+) - N_0(P^-,Q^+) + N_0(P^+,Q^-) - N_0(P^-,Q^-), \tag{6.5}$$

avem

$$\varphi(P^+) - \varphi(P^-) = \int_D N(P,Q)\frac{d\varphi(Q)}{dn}dQ + \mathcal{F}(P). \tag{6.6}$$

Este evident că

$$N(P,Q) = N(Q,P),$$

deoarece și $N_0(P, Q)$ se bucură de cunoscuta proprietate de simetrie a funcției Neumann.

Ținînd seama de relația (6.6), condiția (5.2), devine

$$G(P)\frac{d\varphi(P)}{dn} = \int_D N(P,Q)\frac{d\varphi(Q)}{dn}dQ + \mathcal{F}(P) - F(P), \tag{6.7}$$

adică ecuația integrală căutată, din care se poate determina derivata normală $\frac{d\varphi(P)}{dn}$ pe D și prin urmare φ se va putea determina rezolvînd o problemă Neumann pentru ansamblul frontierelor $D^+ + D^- + D_1$ (relația (6.1)).

7. Din examinarea relației (6.6), rezultă următoarea interpretare simplă pentru nucleul $N(P, Q)$: valoarea funcție $N(P, Q)$ este diferența de potențial $\varphi(P^+) - \varphi(P^-)$ indusă în P de către o sursă pozitivă unitate situată în Q^+ şi o sursă negativă unitate situată în Q^-, *suprafeţele* $D + D_1$ *fiind considerate suprafeţe de curent*. Mişcarea fluidă corespunzătoare problemei Prandtl va rezulta din suprapunerea mişcărilor induse de sistemul de izvoare-puţuri, întins pe suprafaţa D, în condiţiile arătate. Ecuaţia integrală (6.7) ne va furniza densitatea $\frac{d\varphi}{dn}$ a acestor singularităţi.

Vom arăta acum că acest *nucleu* $N\ (P,\ Q)$ *este negativ definit*. În adevăr, fie o densitate

$$h = \frac{d\varphi}{dn}$$

oarecare a singularităţilor de pe D, adică o repartiţie oarecare a derivatei normale pe D (pe celelalte frontiere D_1, derivata normală fiind nulă). Saltul de potenţial indus în P va fi dat de relaţia

$$\varphi^+ - \varphi^- = \int N\,(P,Q)\,h.\,(Q)\,dQ. \tag{7.1}$$

Aplicînd acum funcţiei φ o cunoscută formulă a lui Green, avem

$$\int_D \varphi^+ \frac{d\varphi}{dn} dP - \int_D \varphi^- \frac{d\varphi}{dn} dP = -\int \mathrm{grad}^2\,\varphi d\tau, \tag{7.2}$$

unde integrala de volum se face pe întregul domeniu de definiţie a funcţiei φ.

Deoarece $\frac{d\varphi}{dn}$ este continuă la traversarea suprafeţei D, relaţia (7.2) va putea fi scrisă,

$$\int_D [\varphi\,(P^+) - \varphi\,(P^-)]\ h(P)dP < 0$$

şi deci conform relaţiei (7.1)

$$\int_D \int_D N\,(P,\ Q)\,h\,(P)\,h\,(Q)\,dP\,dQ < 0, \tag{7.3}$$

adică ceea ce trebuia arătat.

Acest fapt este important deoarece în problemele Prandtl izvorîte din considerarea anumitor fenomene fizice, ca cele menţionate la început, $G\,(P)$ are acelaşi semn şi deci *nucleul ecuaţiei integrale* (6.7) *este definit.*

Un caz important pentru problemele Prandtl este acela al domeniilor $D + D_1$ coplanare (pentru problemele spaţiale) sau coliniare (pentru problemele Prandtl plane). În felul acesta s-au scris condiţiile la limită, de exemplu, în cazul profilului *subţire* cu jet de bord de fugă.

Pentru astfel de domenii $D + D_1$ *plane sau rectilinii, nucleul* $N\ (P,\ Q)$ *este negativ în toate punctele interioare domeniului* D.

În adevăr, toate particulele fluide care izvorăsc din Q^+, ajung în Q^- iar liniile de curent de pe fața $+$ coincid cu liniile de curent de pe fața $-$, din motive de simetrie. În aceste condiții este evident că

$$\varphi(P^-) - \varphi(P^+) > 0,$$

adică,

$$N(P, Q) < 0. \tag{7.4}$$

Pentru a încheia cu descrierea proprietăților principale ale nucleului $N(P, Q)$, să remarcăm că din comportarea funcției Neumann pentru problema Neumann, inițial considerată, se deduce că $N(P, Q)$ tinde către infinit cînd P tinde către Q, ca $1/PQ$ în problema spațială și ca $\ln PQ$ în problema plană.

8. Vom scrie mai departe ecuația integrală (6.7), sub forma

$$v(P) = g(P) \int_D N(P, Q)\, v(Q)\, dQ + f(P), \tag{8.1}$$

cu următoarele notații

$$\left.\begin{aligned} g(P) &= \frac{1}{G(P)}, \\ f(P) = \frac{F(P) - \mathcal{F}(P)}{G(P)} &= g(P) \int_{D_1} N_0(P, Q) \frac{d\varphi}{dn}\, dQ + \frac{F(P)}{G(P)}. \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

În problemele fizice, menționate la începutul acestei lucrări, funcția $g(P)$ este astfel încît (8.1) *este o ecuație Fredholm cu nucleu cvasi-regulat.* În problema plană a profilului de aripă cu jet sau în problema aripii dreptunghiulare, $g(P)$ este constant.

Să remarcăm, în sfîrșit, că nucleul ecuației (8.1) este simetrizabil, ecuația putînd fi înlocuită cu o ecuație de forma

$$v_1(P) = \lambda \int \sqrt{g(P)\, g(Q)}\, N(P, Q)\, v_1(Q)\, dQ + f_1(P),$$

unde,

$$v_1(P) = v(P) \sqrt{G(P)}\ ; \quad f_1(P) = f(P) \sqrt{G(P)}. \tag{8.3}$$

Nucleul acestei ecuații fiind definit, *valorile proprii se vor găsi pe aceeași semiaxă reală a planului complex* λ. De aici *rezultă existența și unicitatea soluțiilor pentru problemele fizice la care* $\lambda > 0$, ceea ce este cazul pentru problemele de care ne-am ocupat.

9. Ecuația integrală obținută, prezintă următoarele avantaje:

a) Nucleul este simetric, de tip Fredholm.

b) *Domeniul ecuației integrale este numai D, condițiile de pe D_1 fiind satisfăcute de la sine, și reprezentate prin funcția cunoscută,* $f_1(P)$. Acest fapt simplifică considerabil rezolvările concrete.

c) S-a putut da nucleului o interpretare simplă cu ajutorul unei mişcări fluide standard (mişcarea corespunzătoare sistemului izvor-puţ) ceea ce între altele face posibilă determinarea nucleului prin analogie electrică.

10. Pentru obţinerea nucleului pe cale electrică, se poate proceda astfel : se aşază în cuva electrică un model din material izolant de forma frontierelor $D + D_1$. Se plasează apoi un electrod într-un punct $Q^+ \in D$ şi celălalt electrod în Q^-. Măsurîndu-se curentul care trece de la Q^+ la Q^-, pe de o parte, iar pe de alta diferenţele de potenţial care au lat naştere în aceste condiţii în celelalte puncte $P \in D$, se poate întabela $N(P, Q)$. Se schimbă punctul Q şi se reîncep măsurătorile. Numărul măsurătorilor este redus aproximativ la jumătate datorită simetriei nucleului.

Deoarece $N(Q, Q) = \infty$, pentru trasări de diagrame, interpolări şi alte calcule privitoare la nucleu este indicat să se pună

$$N(P, Q) = N_1(P, Q) - \frac{1}{\pi PQ}, \tag{10.1}$$

în cazul domeniului D bidimensional, şi

$$N(P, Q) = N_1(P, Q) + \frac{2}{\pi} \ln PQ, \tag{10.2}$$

în cazul domeniului D unidimensional. Nucleul $N(P, Q)$ va fi acum mărginit în toate punctele interioare domeniul D. Ultimii termeni din partea dreaptă ai relaţiilor de mai sus reprezintă părţile singulare ale nucleelor N. Aceste părţi sînt predominante, în general, în regiuni destul de însemnate ale punctelor Q, astfel că întreg nucleul se poate aproxima în aceste vecinătăţi prin $-\frac{1}{\pi PQ}$ respectiv $\frac{2}{\pi} \ln PQ$.

11. Am semnalat deja dificultatea care apare în problema plană a profilului de aripă cu jet de bord de fugă din faptul că domeniul D este infinit. Vom încerca aici să justificăm folosirea ecuaţiei integrale regulate (pe domeniu finit) pentru rezolvarea acestei probleme.

Ecuaţia (8.1) în cazul profilului subţire cu jet a fost obţinută de noi în lucrarea citată [9]. Ea este de forma

$$v(x) = \lambda \int_1^\infty N(x, s)\, v(s) ds + f(x) + v^*, \tag{11.1}$$

unde

$$\lambda = \frac{2}{K_j}\ ; \quad f(x) = \lambda \int_0^1 N(x, s)\, v(s)\, ds + C,$$
$$N = \frac{2}{\pi} \ln \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{s}|}{\sqrt{x} + \sqrt{s}}. \tag{11.2}$$

Prin v^* s-a notat bracajul iniţial al jetului, iar prin C o constantă necunoscută dinainte. Coarda profilului s-a considerat egală cu unitatea.

Este natural să se încerce aproximarea acestei ecuații integrale cu o ecuație integrală regulată mulțumindu-ne ca condiția lui Prandtl să fie satisfăcută numai pe o porțiune finită a jetului. Admitem prin aceasta că acțiunea vîrtejurilor din jet, care se găsesc la distanțe mari în aval, asupra cîmpului de viteze din vecinătatea profilului este mică. Aceasta s-ar datora în primul rînd distanței mari de profil și în al doilea rînd densității de vîrtej din ce în ce mai slabe pe măsură ce ele se îndepărtează de profil.

De altfel, în calculele ce se fac cu ajutorul analogiei electrice, este evident că condiția lui Prandtl nu se verifică decît pe o porțiune finită de jet.

Vom indica două moduri de regularizare aproximativă a ecuației integrale, adică două moduri de a înlocui ecuația integrală cu domeniu D infinit cu o ecuație integrală cu domeniu D finit.

Prima cale constă în neglijarea vîrtejurilor libere începînd de la o anumită distanță de bordul de atac al profilului, $x = m$. Pe baza acestei ipoteze, în tot domeniul exterior tăieturii Om, mișcarea este irotațională. În acest caz însă, funcția φ nu mai poate fi reprezentată numai prin ceea ce induc perechile de izvoare-puțuri, deoarece circulația în jurul tăieturii este în general diferită de zero. Potențialul φ va putea fi însă întotdeauna considerat ca indus de sistemul de izvoare-puțuri de mai sus (nucleul N) la care se suprapune un potențial corespunzător *mișcării cu circulație* în jurul plăcii rectilinii Om. Circulația K în jurul plăcii nu este cunoscută dinainte și pentru determinarea ei se va folosi condiția lui Jukovski la bordul de fugă m, adică se impune condiția ca fluidul să nu ocolească bordul de fugă.

Cu cele admise mai sus, ecuația integrală se va putea scrie pe intervalul finit Om, în felul următor:

$$v(x) = \lambda \int_1^m N(x, s)\, v(s)\, ds + f(x) - \lambda K \Gamma_0(x), \qquad (11.3)$$

unde funcția $\Gamma_0(x)$ reprezintă potențialul mișcării în jurul plăcii Om, fără incidență, circulația totală fiind egală cu unitatea.

În analogia cu problema aripii de anvergură semiinfinită, această metodă ar corespunde înlocuirii aripii semiinfinite cu o aripă finită, dar admițînd în planul lui Treftz, o circulație K în jurul sistemului de vîrtejuri libere și legate, ceea ce este, aparent în contrazicere cu teoria aripii de anvergură finită unde se arăta că circulația totală este nulă.

Să remarcăm că nucleul $N(x, s)$ nu mai are aceeași expresie analitică ca în cazul domeniului infinit deoarece mișcările standard corespunzătoare sistemului de izvoare-puțuri, se referă la placa finită Om iar nu la semiaxa Ox. Expresia nucleului este de altfel ușor de calculat fie rezolvînd o problemă simplă Voltera [7]*), pentru semiplan, fie transformînd conform exteriorul plăcii Om pe exteriorul unui cerc dintr-un plan auxiliar. În acest plan, sistemul izvor-puț se transformă tot într-un sistem de izvor-puț, singularitățile fiind dispuse simetric față de un diametru al cercului. Calculele sînt simple și expresia nucleului N, în funcție de variabilele x, s din planul fizic, este următoarea :

---

*) p. 77.

$$N(x, s) = \frac{2}{\pi} ln \left| \frac{\sqrt{\frac{m-x}{x}} - \sqrt{\frac{m-s}{s}}}{\sqrt{\frac{m-x}{x}} + \sqrt{\frac{m-s}{s}}} \right| . \tag{11.4}$$

Se poate da o interpretare fizică a acestei metode de regularizare aproximativă, în cazul profilului de aripă cu jet. În adevăr, ecuația (11.3) ar corespunde unui jet care ar forma o pînză compactă numai pe intervalul $(1, m)$, iar mai departe s-ar destrăma în multe șuvițe. Dacă neglijăm efectul de antrenare prin viscozitate este clar că dincolo de $x = m$, jetul nu mai este capabil să suporte diferențe de presiune între cele două fețe ale lui, ceea ce are ca urmare dispariția vîrtejurilor libere.

O a doua metodă de aproximare a ecuației integrale cu o ecuație integrală pe un interval finit este următoarea : Scriem ecuația integrală (11.1) astfel

$$v(x) = \lambda \int_1^m N(x, s)\, v(s)\, ds + f_1(x) + f(x) + v^\star , \tag{11.5}$$

unde $f_1(x)$ este funcția

$$f_1(x) = \lambda \int_m^\infty N(x, s)\, v(s)\, ds, \tag{11.6}$$

necunoscută apriori. Dar, deoarece se știe că $v(x)$ tinde către zero cînd x tinde către infinit, ca $1/x$, vom admite că dacă m este suficient de mare, se poate aproxima funcția $f_1(x)$ prin funcția,

$$f_1(x) = \lambda \int_m^\infty N(x, s) \frac{K_1}{s} ds. \tag{11.7}$$

Constanta K_1 va putea fi determinată prin condiția ca să avem racordare în m a funcției k_1/x cu soluția ecuației integrale. Intervalul $(1, m)$ pe care am putea să-l denumim *lungime eficace a jetului* poate fi ales mai mic pentru jeturi slabe (K_j mic) și va trebui să fie ales suficient de mare în cazul jeturilor intense.

Oricare ar fi modul de aproximare a ecuației integrale prin o ecuație integrală pe interval finit, se vor calcula forțele pe profil, direct cu ajutorul cîmpului de viteze de pe profil și nu cu aplicarea unor teoreme generale ca de exemplu teorema impulsului la jetul infinit.

Primit la redacție la 25 aprilie 1958.

О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ПРАНДЛЯ

Сообщение I

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Под обобщенной задачей Прандля понимается определение гармонической функции регулярной вне границ $D + D_1$ и в бесконечности, удовлетворяющей на D (граница D есть часть открытой поверхности для функции трех переменных φ или дуга кривой для аналогичной плоской задачи) условиям (5.1) и (5.2). Требуется, чтобы нормальная производная приняла заданные величины на границах D.

Отмечаются частные применения задачи Прандля и указыается аналогия между задачей профиля со струей задней кромки и задачей крыла полубесконечного размаха.

Общая задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма только в области D. Рассматриваются свойства ядра и указываются методы численного решения или методы, основанные на электрической аналогии. Методы решения в конкретных случаях будут подвергнуты подробному исследованию в ближайшем номере этого журнала.

SUR LA SOLUTION DU PROBLÈME DE PRANDTL GÉNÉRALISÉ

Note I

RÉSUMÉ

On entend par problème de Prandtl généralisé la détermination d'une fonction harmonique φ, régulière à l'extérieur des frontières $D + D_1$ et à l'infini et satisfaisant sur D (la frontière D étant une portion d'une surface ouverte, dans le cas de la fonction φ de trois variables, et, un arc de courbe, dans le cas de la fonction φ de deux variables) aux conditions (5.1) et (5.2). Sur les frontières D, la dérivée normale doit prendre des valeurs données.

On cite des applications particulières du problème de Prandtl et l'on montre une analogie entre le problème du profil à jet de bord de fuite et le problème de l'aile d'envergure semi-infinie.

Le problème général est réduit à la solution d'une équation intégrale de Fredholm, *sur le domaine D, seulement*. On étudie les propriétés du noyau et on indique les méthodes de solution, numériques ou basées sur l'analogie électrique. Des cas concrets seront étudiés en détail dans le prochain numéro de cette publication.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Trefftz, *Prandtlsche Tragflächen und Propellentheorie*. *Z.A.M.M.* (1921).
2. H. Glauert, *The elements of Airfoil and Airscrew Theory*. Cambridge, 1930.
3. E. Carafoli, *Théorie des ailes monoplanes d'envergure finie*. Memoriile Academiei Romîne, Imprimeria Națională, București, 1945.

4. E. CARAFOLI, *Aerodinamica.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1951.
5. V. V. GOLUBEV, *Teoria aeroplanului de anvergură finită.* I.S.R.S., Bucureşti.
6. N. VECUA, *Asupra ecuaţiei integro-diferenţiale a lui Prandtl.* P.M.I.M., **9**, *2*, 143 (1945).
7. CAIUS IACOB, *Introducere matematică în mecanica fluidelor.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1953.
8. E. CARAFOLI, N. PATRAULEA, *Scurgerea prin medii poroase în jurul plăcilor permeabile.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe tehnice şi chimice, **4**, *1—2* (1952)
9. N. PATRAULEA, *Profile aerodinamice cu voleţi fluizi.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, *2* (1957).
10. L. MALAVARD, *Sur une théorie linéaire du soufflage au bord de fuite d'un profil d'aile.* C.R. Acad. Sci. Paris, 14 mai (1956).
11. N. N. PATRAULEA, *Contributions théoriques à l'étude des profils à volets fluides* (*Jet-Flap*). IXe Congrès International de Mécanique Appliquée, Bruxelles, **I**, 457 (1956).
12. E. CARAFOLI, N. PATRAULEA, *Ecuaţia circulaţiei în jurul unei aripi cu fuzelaj central.* Comunicările Acad. R.P.R., **II**, *3—4* (1952).
13. N. N. PATRAULEA, *Aripi de anvergură finită cu jeturi de bord de fugă.* Comunicările Acad. R.P.R., **VII**, *1* (1957).

AEROMECANICĂ

INFLUENȚA REGIMULUI DE TRACȚIUNE ASUPRA PERFORMANȚELOR UNEI RACHETE LANSATE TANGENȚIAL DE PE UN SATELIT ARTIFICIAL

DE

LUCIAN DUMITRESCU și TRAIAN COMĂNESCU

1. INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [1], s-a studiat influența regimului de funcționare al motorului-rachetă, asupra performanțelor unei rachete de explorare a spațiului extra-terestru, presupunînd că forța de tracțiune este îndreptată radial față de centrul pămîntului, în două cazuri: cînd racheta constituie ultimul etaj al unui tren de rachete, și cînd este lansată de pe un satelit artificial.

În lucrarea de față, vom analiza aceeași problemă, în ipoteza că tracțiunea este de data aceasta îndreptată *tangențial*, la orbita satelitului artificial de pe care este lansată racheta.

Interesul studierii acestui caz rezultă din constatarea că prin acest mod de lansare se pot obține, cu același consum de combustibil, performanțe mai bune decît în cazul tracțiunii radiale.

2. PUNEREA PROBLEMEI

Ca și în lucrarea citată [1], vom presupune că viteza de evacuare a gazelor arse, W, este constantă în timpul combustiei rachetei; această mărime depinde de natura combustibilului utilizat și are actualmente, valori cuprinse între 2 500—3 000 m/s.

Datorită felului cum se pune problema, este evident că se poate neglija rezistența aerului în ecuațiile de mișcare.

În ceea ce privește forța de tracțiune a motorului rachetă, care are valoarea

$$T = W \frac{dm}{dt} \tag{1}$$

s-a presupus că este constantă, ceea ce corespunde și realității practice, întrucît realizarea unui motor rachetă cu tracțiune variabilă este foarte dificilă. Ipoteza noastră este în orice caz mai justificată decît aceea a accelerației constante, folosită de H. Tsien [2], care implică o tracțiune variabilă în timp.

În consecință, masa m a rachetei va avea o variație liniară în timp

$$m = m_0\,(1-\alpha t). \tag{2}$$

Aici m_0 este masa inițială a rachetei, iar α debitul unitar de masă, care iese cu viteza W din camera de combustie. Prin ipoteză, direcția forței de tracțiune va fi luată tot timpul perpendiculară pe raza vectoare, iar mișcarea rachetei va fi plană.

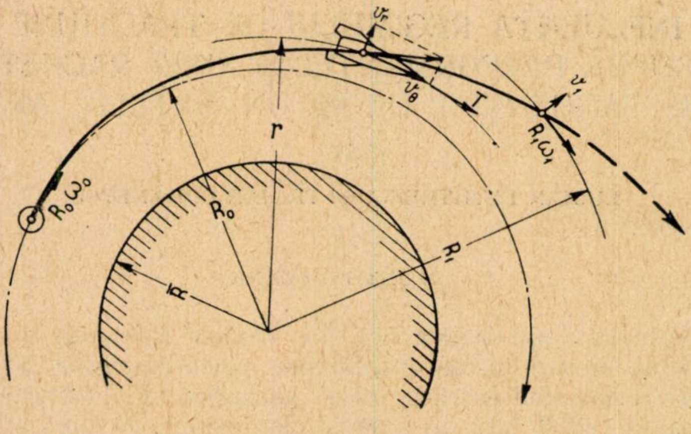


Fig. 1

În figura 1 este reprezentată schematic traectoria unei rachete după desprinderea ei de pe un satelit artificial. Am notat cu

$\bar{R}$, $\bar{g}$ — raza pămîntului ($6{,}37 \times 10^6$m) și accelerația gravității la sol ($9{,}81$ m/s^2);
R_0, g_0 — raza orbitei satelitului, respectiv accelerația gravității la această distanță;
r — raza vectoare într-un moment oarecare;
R_1 — raza vectoare, la sfîrșitul combustiei;
t_1 — durata combustiei;
v_r, v_θ — vitezele radială și tangențială ale rachetei;
ω_0 — viteza unghiulară a satelitului;
$v_1 = v_{r1}$ — viteza radială la sfîrșitul combustiei;
ω_1 — viteza unghiulară la sfîrșitul combustiei;
$z = r - R_0$ — distanța radială parcursă de rachetă de la începutul combustiei, pînă la un moment oarecare t.

Mai introducem și raportul de mase al rachetei

$$\mu = \frac{m_1}{m_0}, \tag{3}$$

unde m_1 este masa rachetei la finele combustiei. Parametrul μ este reprezentativ pentru tehnica rachetelor într-o anumită perioadă de timp; actualmente s-au atins valori minimale de 0,2...0,15.

Avînd în vedere că tracțiunea lucrează tangențial, variația lui z este suficient de redusă pentru ca în calculele următoare, să putem neglija patratele raportului z/R_0 față de unitate.

Acest lucru este valabil în special pentru valori ale parametrului α suficient de mari ($\alpha > 10^{-3}$) pentru ca accelerațiile atinse să fie normale (mai mari decît 0,1 g); acest caz este de altfel și cel practic, după cum se va vedea mai jos.

Cu ipotezele și notațiile introduse mai sus, ecuațiile de mișcare ale rachetei se scriu

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 + \frac{\bar{g}\widetilde{R}^2}{r^2} = 0, \tag{4}$$

$$2\,\omega\frac{dr}{dt} + r\,\frac{d\omega}{dt} + \frac{W}{m}\frac{dm}{dt} = 0. \tag{5}$$

3. INTEGRAREA ECUAŢIILOR DE MIŞCARE

Rezolvarea problemei se face prin aproximații succesive. Analiza ordinelor de mărime ale termenilor care figurează în ecuațiile (4) și (5) arată că se poate neglija, în prima aproximație termenul $2\omega\frac{dr}{dt}$ în ecuația (5); de asemenea, se consideră mai întîi $r = R_0$. Rezultă imediat

$$\omega(t) = -\frac{W}{R_0}\log(1 - \alpha t) + \omega_0. \tag{6}$$

Înlocuind această expresie în ecuația (4), și neglijînd și acum variația lui r, se poate integra această ecuație.

Dacă notăm

$$y = 1 - \alpha t, \tag{7}$$

se obține succesiv

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2W}{\alpha}\left(\omega_0 + \frac{W}{R_0}\right) - \frac{2W\omega_0}{\alpha}y(1 - \log y) - \frac{W^2}{R_0\alpha}y(\log^2 y - 2\log y + 2) \tag{8}$$

și

$$r = R_0 + \frac{2W}{\alpha}\left(\omega_0 + \frac{W}{R_0}\right)\frac{1-y}{\alpha} - \frac{W\omega_0}{2\alpha^2}[3 - y^2(3 - 2\log y)] - \\ - \frac{W^2}{4R_0\alpha^2}[7 - y^2(2\log^2 y - 6\log y + 7)]. \tag{9}$$

Pentru a doua aproximaţie, se înlocuiesc $\frac{dr}{dt}$ şi r din (8) şi (9), în ecuaţia (5), făcînd, conform ipotezelor iniţiale, linearizarea permisă $\frac{1}{r} \cong \frac{1}{R_0}\left(1 - \frac{z}{R_0}\right)$; de asemenea se introduce valoarea lui ω dată de prima aproximaţie (6). Rezultă o ecuaţie de forma

$$R_0 \frac{d\omega}{dt} = (a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^2 \log y + a_5 y^2 \log^2 y) \times (A_1 + A_2 y + \\ + A_3 \frac{1}{y} + A_4 \log y + A_5 y \log y + A_6 y \log^2 y + A_7 y \log^3 y), \qquad (10)$$

unde coeficienţii a_i, A_j depind de R_0, ω_0, W şi α.

Prin integrare se găseşte de aici viteza unghiulară $\omega(t)$ în a doua aproximaţie, cu o expresie de forma

$$\begin{aligned} R_0\, \omega(t) = B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + B_3 y^3 + B_4 y^4 + B_5 \log y + \\ + B_6 y \log y + B_7 y^2 \log y + B_8 y^3 \log y + B_9 y^4 \log y + \\ + B_{10} y^2 \log^2 y + B_{11} y^3 \log^2 y + B_{12} y^4 \log^2 y + B_{13} y^2 \log^3 y + \\ + B_{14} y^3 \log^3 y + B_{15} y^4 \log^3 y + B_{16} y^4 \log^4 y + B_{17} y^4 \log^5 y, \end{aligned} \qquad (11)$$

unde de asemenea coeficienţii B_i sînt funcţii de W, R_0, ω_0 şi α.

În continuare, ar urma să se introducă din nou această expresie a lui ω, precum şi expresia razei r din (9), în ecuaţia (4), şi să se reia calculele.

Se constată însă, că pentru un studiu preliminar calitativ, ca cel propus în această lucrare, nu mai este necesar să se continue procedeul, precizia obţinută fiind suficientă.

4. DETERMINAREA INDICELUI DE PERFORMANŢĂ AL RACHETEI

După cum am arătat anterior [1], performanţa unei rachete poate fi analizată cu ajutorul indicelui următor:

$$h = \frac{R_1\left(v_1^2 + R_1^2\, \omega_1^2\right)}{2g\, R^2} \gtreqless 1. \qquad (12)$$

Valoarea indicelui h determină genul curbei conice descrise de rachetă după terminarea combustiei, cînd ascultă de legile lui Kepler: $h > 1$ corespunde la o hiperbolă, $h = 1$ la o parabolă, iar $h < 1$ la o elipsă, avînd pămîntul într-unul din focare.

Valorile vitezei radiale v_1, razei vectoare R_1 şi vitezei unghiulare ω_1 la sfîrşitul combustiei, se pot calcula, înlocuind $t = t_1$, care corespunde la $y = \mu$, în expresiile vitezei radiale, razei şi vitezei unghiulare, care au fost determinate aşa cum s-a arătat mai sus (8), (9) şi (11). Pînă la urmă, rezultă o expresie pentru indicele de performanţă, de forma

$$h = h\,(W,\, R_0,\, \omega_0,\, \mu,\, \alpha), \tag{13}$$

pe care n-o mai transcriem.

5. REGIMUL DE TRACŢIUNE OPTIM. EXEMPLE NUMERICE

Se constată, din cele de mai sus că, în condiţii iniţiale date (R_0, ω_0, cunoscute) şi pentru o rachetă de o anumită construcţie (viteza de combustie W şi raportul de mase μ, date) indicele de performanţă h depinde de regimul de funcţionare al motorului (prin intermediul parametrului α).

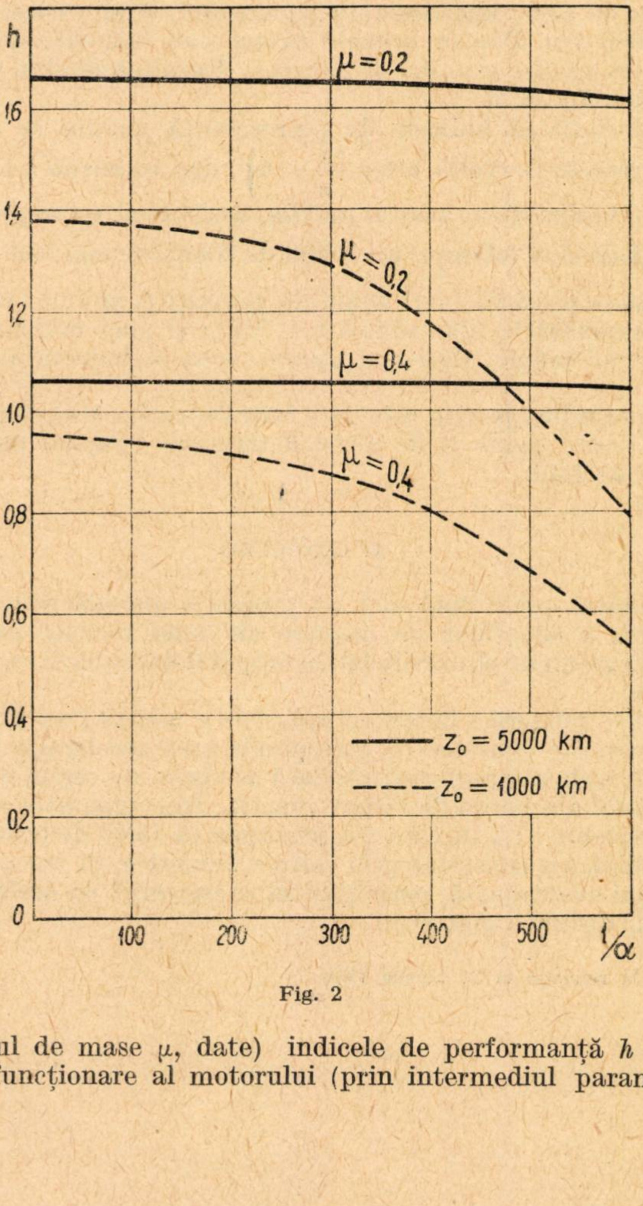


Fig. 2

Ca și în lucrarea anterioară [1], ne-am pus problema existenței eventuale a unui regim de tracțiune care să producă performanțe optime. În consecință, am reprezentat grafic, prin calcule numerice, variația indicelui h ca funcție de debitul de masă specific α, ca exemplu de calcul, pentru cîteva cazuri particulare susceptibile de a fi întîlnite în realitate.

Conducerea calculelor a fost făcută determinînd numeric valorile lui v_1, R_1 și ω_1 pentru diferite valori ale parametrului α (mărimile W, R_0, ω_0 și μ fiind menținute constante), și apoi calculînd valoarea indicelui h pentru fiecare α.

S-au considerat două orbite inițiale : aceea a unui satelit zburînd la înălțimea de 1 000 km deasupra pămîntului, și alta corespunzînd înălțimii de 5 000 km. Pentru ambele cazuri s-au luat cîte două valori ale raportului de masă : $\mu = 0{,}2$ și $\mu = 0{,}4$. Rezultatele sînt prezentate în diagrama din figura 2.

Se constată că indicele de performanță maxim se atinge atunci cînd tracțiunea se dezvoltă brusc $\left(\frac{1}{\alpha} = 0\right)$, dar că curba h (α) este destul de plată în vecinătatea acestui maxim, astfel încît nu se pierde mult din performanță dacă se folosește un regim de tracțiune mai lent $\left(\frac{1}{\alpha} \cong 100\ldots\ldots300\right)$, ceea ce prezintă mari avantaje practice și anume : în primul rînd, accelerații suportabile (de ordinul 1...5 g) ; și apoi motoare rachetă de dimensiuni mai reduse, deci mai ușoare, ceea ce îmbunătățește raportul de mase.

Este posibil ca pentru alte date inițiale, curba $h(\alpha)$ să prezinte chiar un maxim, care poate fi de altfel determinat folosind metoda expusă în lucrarea de față.

6. CONCLUZII

În lucrarea prezentată aici s-a propus o metodă pentru integrarea aproximativă a ecuațiilor de mișcare ale unei rachete care decolează tangențial de pe un satelit artificial, în scopul determinării regimului optim de tracțiune.

Calculele numerice făcute ca aplicație a metodei au arătat că acest regim, în cazurile considerate, corespunde unor accelarații mari, dar că nu se pierde mult din performanțe dacă se alege un regim de funcționare mai convenabil din punct de vedere practic. În comparație cu rezultatele lucrării anterioare [1], în care s-a presupus că forța de tracțiune este îndreptată radial, s-a constatat prin calcule numerice, că tracțiunea tangențială este mai avantajoasă, permițînd să se parcurgă cu același consum de combustibil, distanțe mai mari.

Primit la redacție la 21 aprilie 1958.

ВЛИЯНИЕ ТЯГОВОГО РЕЖИМА НА КАЧЕСТВА ПОЛЕТА РАКЕТЫ, ЗАПУЩЕННОЙ ПО КАСАТЕЛЬНОЙ С ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В статье рассматривается движение ракеты, запущенной с искусственного спутника, при следующей гипотезе: величина тяговой силы остается постоянной во время сгорания топлива (что ближе к действительности, чем другие гипотезы, например, гипотеза постоянного ускорения [2]), причем направление ее остается тангенциальным по отношению к орбите спутника (рис. 1). Уравнения движения (4), (5) интегрируются путем последовательных приближений. Равнодействующие выражения для радиальных и угловых скоростей и для радиуса (8), (9), (11) вводятся в соотношение (12), определяющее показатель качества полета h [1]. Указывается, что последний является функцией отношения масс μ и величины тяговой силы (через посредство удельного дебита массы α).

Представленные числовые примеры указывают, что оптимальные качества полета при данном расходе топлива получаются путем мгновенного сгорания $\left(\frac{1}{\alpha} = 0\right)$, однако ухудшение качеств полета, получающееся в результате принятия тягового режима, несколько отклоняющегося от оптимального (то есть при меньших ускорениях), незначительно по сравнению с практическими преимуществами такого способа.

В сравнении с ранее рассмотренным случаем [1] ракеты с радиальной работой движущей силы, вытекает, что в данном случае получаются лучшие качества полета.

INFLUENCE OF THE THRUST REGIME ON THE PERFORMANCES OF A SPACE-SHIP TAKING-OFF TANGENTIALLY FROM AN ARTIFICIAL SATELLITE

ABSTRACT

The paper deals with the motion of a space rocket, taking-off from an artificial satellite, under the following assumptions : the thrust magnitude remains constant throughout the combustion time (which is more likely to be realized in practice than other hypotheses, such as that of constant acceleration [2]), and its direction remains tangential to the satellite orbit (fig. 1). The differential equations of the motion, (4), (5), are solved approximatively by an iteration process. The resulting expressions for the radial and angular velocities v_r, ω and for the radius r, (8), (9), (11), are then inserted into the formula (12) which defines the performance index h.

It is seen that h is a function of the mass ratio μ and the thrust magnitude (by means of the specific mass flow rate α). The numerical examples presented show that the best performances, with a given fuel consumption, are obtained when the burning-out is instantaneous ($\alpha = \infty$), but that the loss of performance following the adoption of a more convenient thrust regime (giving smaller accelerations), is not severe in comparison with the practical advantages of such a procedure.

Numerical comparison with the case previously treated [1], of a rocket whose thrust is acting radially, indicates that the better performances are obtained when the thrust has a tangential direction.

BIBLIOGRAFIE

1. LUCIAN DUMITRESCU, *Asupra regimului optim de funcționare al rachetelor.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *2* (1958).
2. H. S. TSIEN, *The take-off of a space-ship from the orbit of an artificial satellite.* Journal of the Amenien Rocket Society, **23**, *4*, 233–236 (1953).

CALCULUL ANALITIC AL UNEI CLASE DE EFUZOARE SUPERSONICE PLANE, CU PANTA MICĂ ÎN VECINĂTATEA COLULUI SONIC*)

DE

M. M. PALOŞ

După cum se ştie, obţinerea curenţilor supersonici în conducte necesită o porţiune convergent-divergentă, în care curentul se accelerează continuu de la o viteză subsonică la intrarea în convergent, pînă la o viteză supersonică la sfîrşitul divergentului, atingînd viteza critică în vecinătatea secţiunii minime (colul sonic). Ansamblul părţii de conductă descris mai sus constituie cunoscutul ajutaj Laval.

În unele cazuri, mai ales la instalaţiile pentru experimentări în curenţi supersonici, este absolut necesar ca la sfîrşitul ajutajului scurgerea să fie permanentă, iar curentul uniform paralel.

Condiţia de scurgere permanentă este satisfăcută automat de colul sonic, căci, din condiţia de continuitate a mişcării reiese că debitul masic este constant.

Condiţia de uniformitate a curentului la sfîrşitul ajutajului, impune o trasare corectă pe baza unui studiu riguros asupra întregului ajutaj, cu deosebire a zonei sonice şi a divergentului supersonic.

În lucrarea de faţă ne ocupăm numai de divergentul — efuzorul — supersonic, în care sens am căutat să determinăm analitic conturul său, presupunînd cunoscută metoda de trasare a porţiunii de ajutaj anterioare. De altfel, la sfîrşitul lucrării, se discută şi se dau indicaţiile necesare şi asupra acestei porţiuni de ajutaj.

Determinarea conturului sub forma unei curbe analitice prezintă interes, deoarece construcţia geometrică datorită lui Prandtl-Busemann [1], deşi simplă este foarte laborioasă, din care cauză se introduc erori inevitabile, în mod obişnuit, ca la orice construcţie geometrică. Operaţiile devin cu atît mai laborioase şi erorile cu atît mai mari, cu cît numărul Mach de la sfîrşitul ajutajului, M_1, este mai mare, iar linia sonică diferă de o dreaptă.

---

*) Comunicare prezentată la sesiunea Ştiinţifică a Academiei R.P.R., Filiala Timişoara, din 30 ianuarie—2 februarie 1958.

În principiu, metoda de lucru constă în a transforma un curent supersonic definit de o funcţie de curent $\psi = \psi(V,\theta)$, în cazul de faţă $\psi = \frac{\text{const.}}{V}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\varkappa}\sin\theta$, într-un curent supersonic uniform şi paralel.

De altfel, această idee a fost folosită şi de A. O. L. Atkin [2]*) pentru calculul analitic al efuzoarelor cu pantă unică. În acest caz însă, pentru numere Mach M_1 mari, panta este considerabilă şi influenţează defavorabil scurgerea reală din efuzor.

1. ECUAŢIILE FUNDAMENTALE. MIŞCAREA DEFINITĂ DE

$$\psi = \frac{k}{V}(\rho/\rho_0)^{\varkappa}\sin\theta.$$

Ipotezele de calcul sînt cele în general admise, anume că mişcarea este plană, permanentă, irotaţională şi izentropică.

În aceste condiţii ecuaţiile de bază sînt

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \text{ (ec. de continuitate)}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ (vîrtej peste tot nul)}, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}\right\} \text{ (ec. lui Euler)}, \tag{3}$$

$$\frac{p}{\rho^{\varkappa}} = \frac{p_0}{\rho_0^{\varkappa}} = \text{const. (ec. caracteristică a transformărilor izentropice)}, \tag{4}$$

u şi v fiind componentele vitezei $\overline{V}$, p — presiunea, ρ — densitatea şi $\varkappa$ — raportul căldurilor specifice la presiune şi respectiv volum constant. Mărimile de indici zero corespund condiţiilor de impact ($V = 0$).

Ecuaţia (2) scoate în evidenţă existenţa unui potenţial al vitezelor, $\varphi(x, y)$, iar ecuaţia de continuitate (1) o funcţie de curent, $\psi(x, y)$, liniile de curent fiind definite de

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}.$$

---

*) A se vedea şi [3], p. 427.

De aici,

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{5}$$

care arată că liniile echipotențiale taie ortogonal liniile de curent.

Vom trece acum la planul hodografic, înlocuind variabilele independente x și y prin V (modulul vitezei) și θ (unghiul pe care-l face aceasta cu axa Ox), exprimînd la rîndul lor pe x, y, φ și ψ în funcție de noile variabile.

Pentru aceasta, punînd $z = x + iy$ și luînd în considerație relațiile (5), ecuațiile

$$dz = dx + idy,$$

$$d\varphi = udx + vdy,$$

$$d\psi = \frac{\rho_0}{\rho}(-vdx + udy),$$

conduc, prin eliminarea lui dx și dy și prin înlocuirile $u = V\cos\theta$ și $v = V\sin\theta$, la relația

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{V}\left(d\varphi + i\frac{\rho_0}{\rho}d\psi\right). \tag{6}$$

Pentru integrarea lui dz, trebuie ca membrul al doilea să fie o diferențială totală exactă. Această condiție, necesară și suficientă, conduce la sistemul lui S. A. Ciaplîghin *)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\rho_0}{\rho}V\frac{\partial\psi}{\partial V}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial V} = V\left(\frac{\rho_0}{\rho}\frac{1}{V}\right)'_V\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\rho_0}{\rho}\left(\frac{V^2}{c^2} - 1\right)\frac{1}{V}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \tag{7}$$

presupunînd în același timp că

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(V,\theta)} = \frac{\rho_0}{\rho}V\left[\frac{1}{V^2}\left(\frac{V^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial V}\right)^2\right] \neq 0. \tag{8}$$

Este evident că determinantul funcțional (8) se anulează numai pentru viteze $V > c$, c fiind viteza locală a sunetului, deci în domeniul supersonic $(\frac{V}{c} = M > 1)$. În acest caz, mișcarea este fizic posibilă numai între limitele impuse de iacobianul **)

$$J = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(V,\theta)} = 0. \tag{9}$$

---

*) [4] p. 523.

**) Pentru detalii vezi [4], p. 526.

Mai departe, eliminînd pe φ din ecuațiile (7), se ajunge la ecuația cu derivate parțiale a lui Molenbroek-Ciaplîghin

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\rho_0}{\rho} V \frac{\partial\psi}{\partial V}\right) - \frac{\rho_0}{\rho V}\left(\frac{V^2}{c^2} - 1\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0, \tag{10}$$

care mai poate fi scrisă sub forma

$$V^2\frac{\partial^2\psi}{\partial V^2} + V\left(\frac{V^2}{c^2} + 1\right)\frac{\partial\psi}{\partial V} - \left(\frac{V^2}{c^2} - 1\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0. \tag{10'}$$

Admitem, pentru studiul ce urmează, funcția de curent

$$\psi = \frac{k}{V}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\varkappa} \sin\theta, \tag{11}$$

care satisface ecuația (10), k fiind o constantă deocamdată arbitrară. Ea a fost aleasă astfel încît pentru $\theta = 0$, $\psi = 0$ să fie o dreaptă pe care o vom lua ca axă de simetrie a mișcării sau ca perete inferior.

Trecerea la planul fizic se face cu ajutorul relației (6), pe care o vom scrie, cu ajutorul lui (7), sub forma

$$\begin{aligned} dz &= \frac{e^{i\theta}}{V}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)d\theta + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial V} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial V}\right)dV\right] = \\ &= \frac{e^{i\theta}}{V}\frac{\rho_0}{\rho}\left\{\left(V\frac{\partial\psi}{\partial V} + i\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)d\theta + \left[\left(\frac{V^2}{c^2} - 1\right)\frac{1}{V}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + i\frac{\partial\psi}{\partial V}\right]dV\right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Înlocuindu-se derivatele parțiale ale lui ψ în raport cu θ și V, deduse din (11)

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{k}{V}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\varkappa}\cos\theta = \frac{k}{V}\left(1 - \frac{\varkappa-1}{2}\frac{V^2}{c_0^2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa+1}}\cos\theta,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial V} = -\frac{k}{V^2}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\left(1 + \frac{\varkappa+1}{2}\frac{V^2}{c_0^2}\right)\sin\theta,$$

relația (12) devine

$$dz = \frac{k}{V^2}\frac{i}{2}\left[\left(2 + \frac{V^2}{c_0^2}\right)e^{2i\theta} - \varkappa\frac{V^2}{c_0^2}\right]d\theta - \frac{k}{V^3}\left[e^{2i\theta} - \frac{\varkappa+1}{2}\frac{V^2}{c_0^2}\right]dV.$$

Prin integrare se obține

$$z - z_0 = \frac{k}{4V^2}\left(2 + \frac{V^2}{c_0^2}\right)e^{2i\theta} - i\frac{k}{2}\frac{\varkappa}{c_0^2}\theta + \frac{k}{c_0^2}\frac{\varkappa+1}{2}\ln\frac{V}{c_0}. \tag{13}$$

Luînd originea în z_0 și trecînd la variabilele x, y și M, cu ajutorul relației

$$1 - \frac{x-1}{2}\frac{V^2}{c_0^2} = \left(1 + \frac{\varkappa-1}{2}M^2\right)^{-1}, \tag{14}$$

ecuația (13) capătă forma

$$\begin{aligned} x &= \frac{k}{2c_0^2}\left[\left(\frac{1}{M^2}+\frac{\varkappa}{2}\right)\cos 2\theta - \frac{\varkappa+1}{2}\ln\left(\frac{1}{M^2}+\frac{\varkappa-1}{2}\right)\right], \\ y &= \frac{k}{2c_0^2}\left[\left(\frac{1}{M^2}+\frac{\varkappa}{2}\right)\sin 2\theta - \varkappa\theta\right]. \end{aligned} \qquad (15)$$

Repetînd operațiile pentru relația (11),

$$\psi = \frac{k}{c_0}\frac{1}{M}\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}}\cdot\sin\theta. \qquad (16)$$

Să observăm că, de-a lungul unei linii de curent, $\psi = \text{const.}$, dacă se ia ca referință un punct oarecare pe ea definit prin M_0 și θ_0, există egalitatea

$$\frac{k}{c_0}\frac{1}{M}\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}}\sin\theta =$$

$$\frac{k}{c_0}\frac{1}{M_0}\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}M_0^2\right)^{-\frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}}\sin\theta_0 = \text{const.},$$

care, dacă se notează

$$\sigma(M) = M\left(\frac{2}{\varkappa+1}+\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}M^2\right)^{-\frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}}, \qquad (17)$$

se poate scrie sub o formă mai simplă

$$\frac{\sigma(M)}{M^2}\sin\theta = \frac{\sigma(M_0)}{M_0^2}\sin\theta_0 = \alpha = \text{const.} \qquad (18)$$

Această relație arată dependența dintre θ și M de-a lungul unei linii de curent.

Deci, în cazul cînd relația de dependență dintre θ și M este dată de (18), ecuațiile parametrice (15) definesc liniile de curent în planul $x\,O\,y$ (planul fizic).

Menționăm că derivatele lor se anulează pentru

$$\operatorname{tg}\theta_{j.0} = \frac{\sqrt{M_{j.0}^2-1}}{1+\varkappa M_{j.0}^2}, \qquad (19)$$

ceea ce înseamnă că $x(M, \theta)$ și $y(M, \theta)$ admit valori extreme în punctele respective. Acest lucru era evident de la început, întrucît determinantul funcțional (8) se anulează pentru aceeași valoare găsită (19). Concludem de aici că, fizic, scurgerea este posibilă într-un domeniu limitat de curba iacobiniană.

În figura 1 se poate vedea aspectul mişcării şi frontierele sale. După cum se vede, curba iacobiniană este formată din două ramuri ce se unesc în punctul C, la o valoare a numărului Mach, $M_j \sim 1{,}175$.

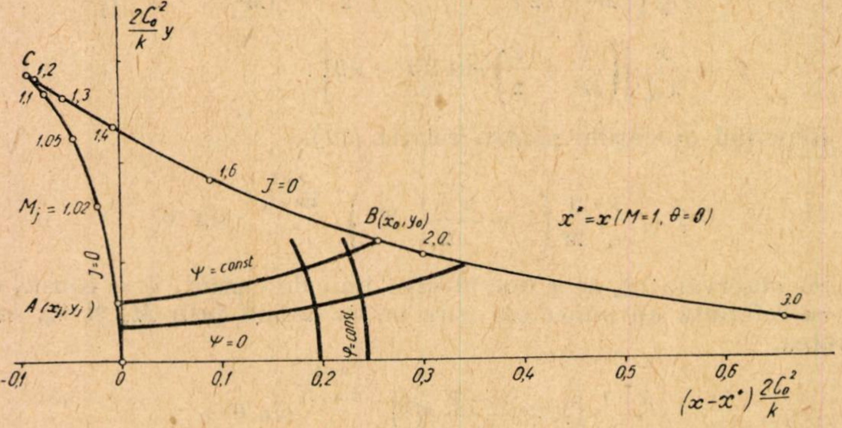


Fig. 1

În cele ce vor urma, vom nota parametrii şi mărimile cu indici j, pentru prima ramură (OAC), şi cu indici 0 pentru a doua ramură (CBB').

2. CONTURUL EFUZORULUI

După cum am arătat la început, pentru prima parte a efuzorului, adică din vecinătatea colului sonic pînă la linia BPD, pe care o vom determina mai jos, folosim mişcarea definită de (11) studiată anterior. În acest sens, conturul AB este cunoscut, fiind o linie de curent definită între limitele impuse de $J = 0$ (fig. 2). Rămîne de determinat şi conturul BQC, în aşa fel încît la sfîrşitul efuzorului curentul să fie uniform paralel:

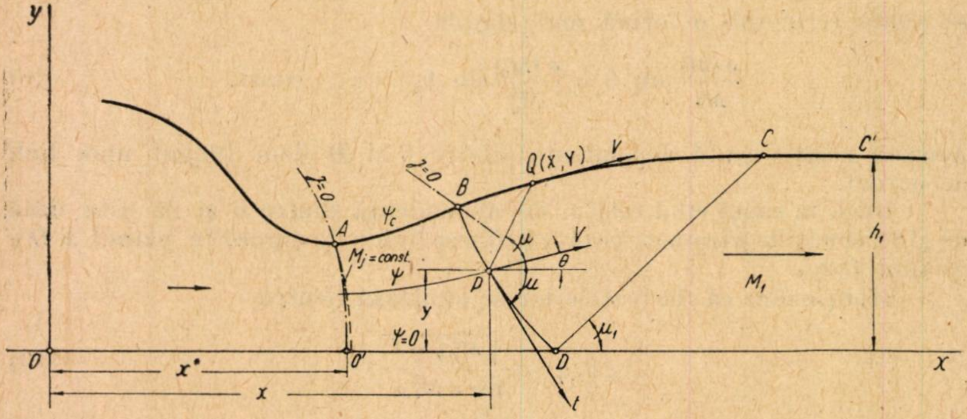


Fig. 2

Pentru aceasta să observăm că, începînd din punctul B, panta se micşorează continuu pînă în punctul C unde devine zero. Din această cauză, începînd din B pînă în C, din fiecare punct Q porneşte cîte o undă QP, de-a lungul căreia viteza este paralelă cu tangenta la perete şi cu tangenta la ψ în punctul P. Prin punctul P trec două caracteristice: prima este chiar unda Mach PQ, care face unghiul $+\mu$ cu direcţia vitezei şi aparţine familiei C_+, iar a doua este curba BPD, a cărei tangentă în P face unghiul $-\mu$ cu direcţia vitezei şi aparţine familiei C_-.

Deci BPD este o curbă caracteristică. Cele două familii de caracteristice sînt definite de

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta \mp \mu)\,{}^{*}), \tag{20}$$

μ fiind unghiul Mach;

$$\sin\mu = \frac{1}{M}. \tag{21}$$

Diferenţialele ecuaţiilor (15) introduse în (20), după efectuarea unor calcule simple, conduc la

$$\pm\, d\theta = \frac{\sqrt{M^2-1}\cdot dM}{M\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}M^2\right)}. \tag{22}$$

Pentru integrare vom pune

$$\zeta = \sqrt{M^2-1},\quad d\zeta = \frac{M\,dM}{\sqrt{M^2-1}},$$

de unde

$$\pm\, d\theta = \frac{d\zeta}{1+\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\zeta^2} - \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}.$$

Integrîndu-se şi trecînd la vechea variabila M se obţine în cele din urmă, după cum era de aşteptat, relaţia binecunoscută din teoria caracteristicelor [1]

$$\pm\,\theta = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\sqrt{M^2-1}\right) - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{M^2-1} + C, \tag{23}$$

C fiind o constantă ce se determină din condiţia $\theta = 0$ pentru $M = M_1$ (M_1 este numărul Mach al curentului uniform de la sfîrşitul efuzorului).

Curba caracteristică BPD fiind determinată prin ecuaţiile (15) şi (23), putem determina conturul BQC ca loc geometric al punctelor Q

$$\begin{aligned} X &= x + \overline{PQ}\cos(\mu+\theta),\\ Y &= y + \overline{PQ}\sin(\mu+\theta). \end{aligned} \tag{24}$$

---

*) [3], p. 400.

Din ecuația de continuitate obținem

$$\overline{PQ} \cdot \rho \cdot V \sin \mu = Q, \tag{25}$$

Q fiind debitul masic al scurgerii dintre ψ și ψ_c (fig. 2)

$$Q = \rho_0 (\psi_c - \psi)\ ^{*)}. \tag{26}$$

Utilizînd (16), (17), (18) și relațiile

$$V = \frac{Mc_0}{\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M^2\right)^{1/2}}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}},$$

se obține după cîteva calcule elementare

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \frac{k}{c_0^2} \frac{1}{M} \left[\frac{M^2}{M_0^2} \frac{\sigma(M_0)}{\sigma(M)} \sin \theta_0 - \sin \theta\right] = \\ &= \frac{k}{c_0^2} \frac{1}{M} \left[\frac{M^2}{\sigma(M)} \alpha - \sin \theta\right]. \end{aligned} \tag{27}$$

Înlocuind în (24) pe x, y și $\overline{PQ}$ prin expresiile lor, obținem în cele din urmă ecuațiile parametrice ale conturului BQC

$$\begin{aligned} X &= \frac{k}{2c_0^2} \left\{\left(\frac{1}{M^2} + \frac{\varkappa}{2}\right) \cos 2\theta - \frac{\varkappa + 1}{2} \ln \left(\frac{1}{M^2} + \frac{\varkappa - 1}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{M} \left[\frac{M^2}{\sigma(M)} \alpha - \sin \theta\right] \cos(\mu + \theta)\right\}, \\ Y &= \frac{k}{2c_0^2} \left\{\left(\frac{1}{M^2} + \frac{\varkappa}{2}\right) \sin \theta - \varkappa \theta + \frac{2}{M} \left[\frac{M^2}{\sigma(M)} \alpha - \sin \theta\right] \sin(\mu + \theta)\right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Pînă acum constanta k a fost considerată arbitrară. Ea determină însă mărimea zonei experimentale, adică înălțimea h_1 de la sfîrșitul efuzorului.

Într-adevăr, cînd $\theta = 0$, $M = M_1$ și $Y = h_1$; deci

$$h_1 = \frac{k}{2c_0^2} \cdot \frac{2}{M_1} \frac{M_1^2}{\sigma(M_1)} \alpha \sin \mu_1 = \frac{k}{c_0^2} \frac{\alpha}{\sigma(M_1)},$$

de unde

$$\frac{k}{c_0^2} = \frac{\sigma(M_1)}{\alpha} h_1. \tag{29}$$

Cu ajutorul relațiilor deduse pînă aici se poate face trasarea efuzorului în întregime.

---

*) ρ_0 este densitatea în punctul de impact. A nu se confunda cu punctul B de pe $J = 0$. Idem pentru c_0.

3. CONSIDERAŢII ASUPRA COLULUI SONIC

Să revenim asupra scurgerii de la intrarea în efuzor. Pentru aceasta vom considera ecuațiile (15), mutînd originea sistemului de referință în centrul ajutajului ($M = 1$, $\theta = 0$):

$$
\begin{aligned}
x &= \mathrm{K}\left[\left(\frac{1}{M^2} + \frac{\varkappa}{2}\right)\cos 2\theta - \frac{\varkappa + 1}{2}\ln\left(\frac{2}{\varkappa + 1}\frac{1}{M^2} + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\right) - 1 - \frac{\varkappa}{2}\right],\\
y &= \mathrm{K}\left[\left(\frac{1}{M^2} + \frac{\varkappa}{2}\right)\sin\,2\theta - \varkappa\theta\right],
\end{aligned}
\tag{30}
$$

unde

$$\mathrm{K} = \frac{k}{2c_0^2}.$$

În această zonă numărul Mach este foarte aproape de unitate, iar θ suficient de mic, astfel că putem pune $M = 1 + \varepsilon$, $\sin\,\theta \sim \theta$ și $\cos\,\theta \sim 1$; luînd $\varepsilon \leqslant 0{,}1$,

$$-\frac{\varkappa + 1}{2}\ln\left(\frac{2}{\varkappa + 1}\frac{1}{M^2} + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\right) \simeq 2\varepsilon - \frac{3\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\varepsilon^2.$$

Cu aceste aproximații făcute, ce nu depășesc 1%, ecuațiile (30), prin eliminarea parametrului θ, conduc la

$$\frac{x}{K} = \frac{4}{\varkappa + 1}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\varkappa}{2} - 2(\varkappa + 1)\varepsilon + 2\varkappa\varepsilon^2\right]\left(\frac{y}{K}\right)^2. \tag{31}$$

De aici reiese că, în regiunea colului sonic, liniile $M =$ const., respectiv $\varepsilon =$ const. pot fi asimilate cu niște parabole.

Acest lucru este valabil pentru numere Mach mai mari decît M_i; căci, după cum se știe, transformata iacobinei J în planul xOy, frontiera mișcării, este o caracteristică a lui Cauchy pentru care problema la limită a lui Cauchy nu este rezolvabilă. Fizic, aceasta revine a admite că în afara frontierei mișcarea încetează să mai aibă caracterul irotațional pe care i l-am atribuit, sau că o undă de șoc se va produce în masa fluidă. Întrucît această porțiune a ajutajului este precedată de convergent, posibilitatea unei scurgeri rotaționale este exclusă. De asemenea, prezența convergentului și valoarea foarte apropiată de unitate a lui M_i îndepărtează posibilitatea apariției unei unde de șoc în masa fluidului în afara frontierei.

Să observăm mai departe cu ajutorul ecuației (31) că, dacă $M \to 1$ ($\varepsilon \to 0$), ceea ce este foarte apropiat de cazul $M = M_i$, ecuația

$$y^2 = -\frac{4\,\mathrm{K}}{2 + \varkappa}x \tag{32}$$

reprezintă cu destulă exactitate linia sonică.

Acest rezultat este asemănător cu cel găsit de R. Sauer [5]

$$y^2 = -\frac{2x}{(\varkappa + 1)m}, \tag{33}$$

unde m, în cazul nostru, ar corespunde valorii

$$m = \frac{\varkappa + 2}{2K(\varkappa + 1)}.$$

Rezultatul acesta este important prin aceea că, urmînd raţionamentul lui Sauer, putem construi şi porţiunea de ajutaj corespunzătoare colului sonic.

4. MODUL PRACTIC DE CALCUL. APLICAŢIE

Fie M_1 numărul Mach de la sfîrşitul efuzorului — zona experimentală — pentru care dorim a construi ajutajul.

Dacă se cunosc valorile M_0 şi θ_0 corespunzătoare punctului B (fig. 1 şi 2), cu ajutorul relaţiilor (18) şi (19) se determină α, θ_j şi M_j. Folosind ecuaţiile (15) împreună cu ecuaţia (18) conturul AB este determinat. Cu ajutorul ecuaţiilor (28) şi (23) se determină mai departe şi conturul BC. Mărimea efuzorului este precizată cu (29), pentru o înălţime a zonei experimentale, h_1, dată.

Punctul B îl vom determina ca intersecţie a curbei caracteristice BPD cu curba iacobiană $J = 0$.

Pentru aceasta vom scrie ecuaţia (23), care defineşte un punct de pe caracteristica BPD, sub forma simbolică

$$-\theta = \theta\,(M) + C_1,$$

constanta C_1 determinîndu-se din condiţiile la limită arătate anterior, $\theta = 0$, $M = M_1$. Astfel că ecuaţia de mai sus, în punctul B, devine

$$-\theta_0 = \theta\,(M_0) - \theta\,(M_1). \tag{34}$$

B, ca punct pe curba iacobiană J este definit de ecuaţia (19); astfel că el este precis determinat.

Calculele sînt relativ simple şi elementare. Totuşi, pentru a le uşura cît mai mult, s-a întocmit tabela de la sfîrşitul lucrării şi diagramele din figura 3. Figura 4 reprezintă la o scară mai mare, o porţiune din aceeaşi diagramă.

În diagrama menţionată sînt reprezentate grafic funcţiile $\alpha = \alpha\,(M_{j,0})$ şi $\theta_{j,0} = \theta\,(M_{j,0})$, cu ajutorul relaţiilor (18) şi (19). Cu ajutorul ecuaţiilor (19) şi (34) s-a trasat curba $M_1 = f(M_0)$, care determină punctul B. Curba $M_1 = f'(M_0)$ corespunde cazului

$$\theta\,(M_0) = \frac{1}{2}\,\theta\,(M_1), \tag{35}$$

ceea ce revine la a considera expansiunea fluidului de la M_0 la M_1 jumătate din expansiunea totală (de la $M = 1$ la M_1). Din diagramă se vede că

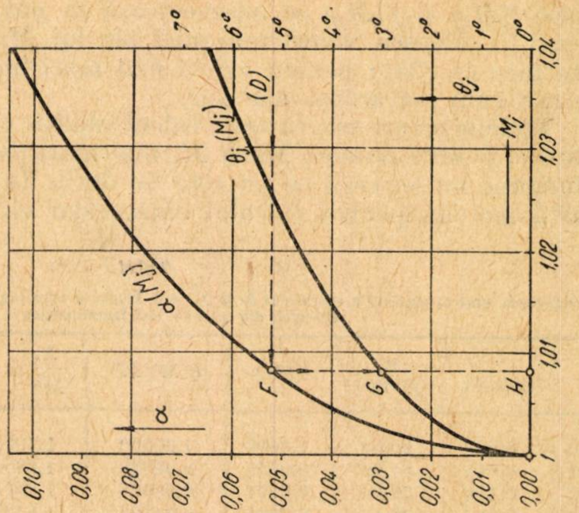

α
0,10
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0,00
1
1,01
1,02
1,03
1,04
Mj
θj
0°
1°
2°
3°
4°
5°
6°
7°
α(Mj)
θj(Mj)
(D)
F
G
H

Fig. 4

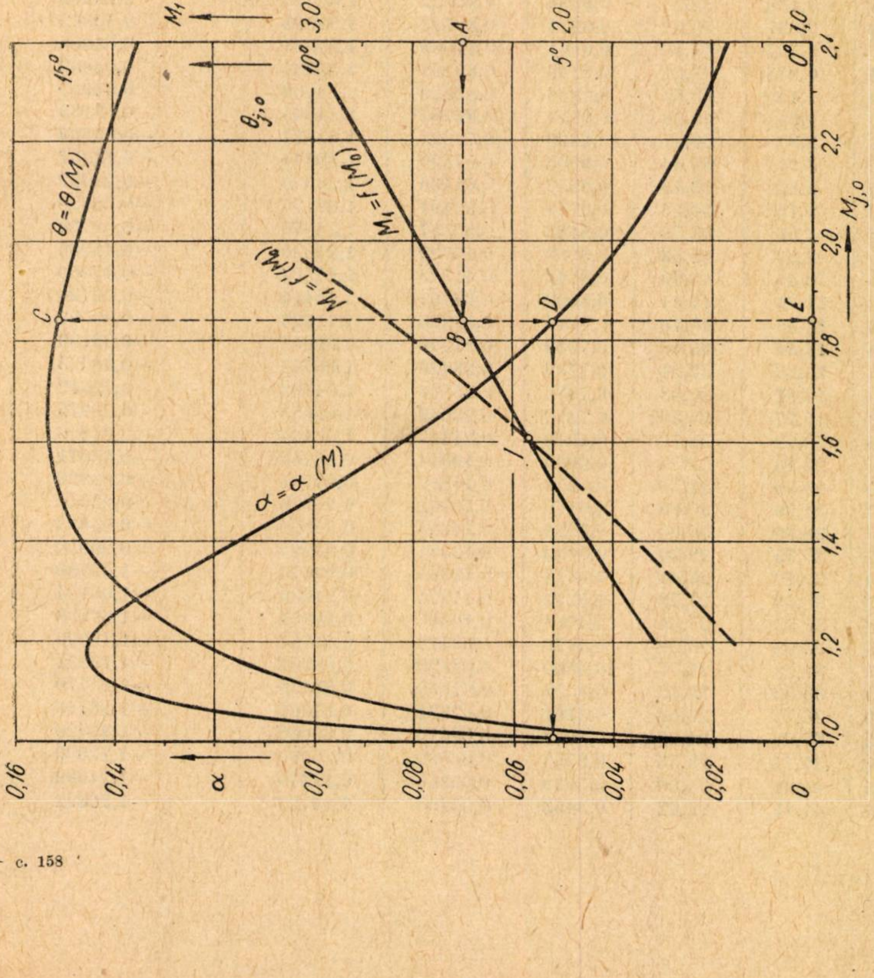

0,16
0,14
α
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
2,4
Mj,o
θj,o
0°
5°
10°
15°
M1
1,0
2,0
3,0
θ = θ(M)
α = α(M)
M1 = f(M0)
M1 = f(Mj)
A
B
C
D
E
I

Fig. 3

curbele $f(M_0)$ şi $f'(M_0)$ se intersectează în punctul I, pentru o valoare $M_1 = 2{,}15$. Pentru valori mai mici ale lui M_1, determinarea lui B se poate face cu (35); pentru valori mai mari însă determinarea lui B se face aşa cum s-a arătat mai sus.

Trebuie menţionat că acest calcul analitic este în mod practic limitat, deoarece, pentru numere Mach M_1 mai mari de 2,6, conduce la efuzoare de lungime mare, ceea ce nu este de dorit. În consecinţă, recomandăm această metodă pentru calculul efuzoarelor cu $M_1 \leqslant 2{,}6$.

Tabel

ν corespunde unei expansiuni a curentului de la $M = 1$. Pentru o expansiune de la M_0 la M_1 se are: $\theta = \nu_1 - \nu_0$
Calculele din tabel au fost făcute pentru $\varkappa = 1{,}4$

M	ν (grade)	μ (grade)	$\sigma(M)$	$\sigma(M)/M^2$	$\frac{1}{M^2} + \frac{\varkappa}{2}$	$\frac{\varkappa+1}{2} \ln\left(\frac{1}{M^2} + \frac{\varkappa-1}{2}\right)$
1,00	0,000	90,00	1,0000	1,00000	1,70000	1,21878
1,01	0,045	81,93	0,9999	0,98020	1,68030	0,19892
1,02	0,126	78,64	0,9997	0,96088	1,66117	0,17930
1,03	0,230	76,14	0,9993	0,94194	1,64259	0,15996
1,04	0,351	74,06	0,9987	0,92335	1,62456	0,14086
1,05	0,488	72,25	0,9980	0,90522	1,60703	0,12202
1,06	0,637	70,63	0,9971	0,88742	1,58999	0,10342
1,07	0,797	69,16	0,9961	0,87003	1,57344	0,08505
1,08	0,968	67,81	0,9949	0,85297	1,55734	0,06689
1,09	1,15	66,55	0,9936	0,83629	1,54168	0,04902
1,10	1,34	65,38	0,9921	0,81992	1,52645	0,03133
1,15	2,38	60,41	0,9829	0,74321	1,45614	−0,05380
1,20	3,56	56,44	0,9705	0,67396	1,39444	−0,13387
1,25	4,83	53,13	0,9553	0,61139	1,34000	−0,20922
1,30	6,16	50,28	0,9378	0,55491	1,29172	−0,28026
1,35	7,56	47,79	0,9183	0,50387	1,24870	−0,34730
1,40	8,99	45,58	0,8969	0,45760	1,21020	−0,41066
1,45	10,44	43,60	0,8742	0,41579	1,17562	−0,47056
1,50	11,91	41,81	0,8502	0,37787	1,14444	−0,52726
1,55	13,39	40,18	0,8254	0,34356	1,11623	−0,58097
1,60	14,86	38,68	0,7999	0,31246	1,09063	−0,63190
1,65	16,33	37,31	0,7739	0,28426	1,06731	−0,68023
1,70	17,81	36,03	0,7476	0,25868	1,04602	−0,72612
1,75	19,27	34,85	0,7212	0,23549	1,02653	−0,76975
1,80	20,72	33,75	0,6949	0,21447	1,00864	−0,81126
1,85	22,16	32,72	0,6689	0,19544	0,99218	−0,85071
1,90	23,59	31,76	0,6430	0,17812	0,97701	−0,88826
1,95	24,99	30,85	0,6176	0,16242	0,96298	−0,92410
2,00	26,38	30,00	0,5926	0,14815	0,95000	−0,95823
2,05	27,75	29,20	0,5682	0,13521	0,93795	−0,99080
2,10	29,10	28,44	0,5444	0,12345	0,92676	−1,02186
2,15	30,43	27,72	0,5212	0,11275	0,91633	−1,05154
2,20	31,73	27,04	0,4988	0,10306	0,90661	−1,07989
2,25	33,02	26,39	0,4770	0,09422	0,89753	−1,10699
2,30	34,28	25,77	0,4560	0,08620	0,88904	−1,13291
2,35	35,53	25,18	0,4357	0,07889	0,88108	−1,15770
2,40	36,75	24,62	0,4161	0,07224	0,87361	−1,18146
2,45	37,95	24,09	0,3973	0,06619	0,86660	−1,20420
2,50	39,12	23,58	0,3793	0,06069	0,86000	−1,22600
2,55	40,28	23,09	0,3619	0,05566	0,85379	−1,24689
2,60	41,41	22,62	0,3453	0,05108	0,84793	−1,26692

Citirea şi folosirea diagramelor se face aşa cum se arată în figurile 3 şi 4. Cunoscînd numărul Mach M_1 se fixează valoarea sa în A. Mergînd în sensul săgeții pînă în B se determină M_0. Acesta fiind cunoscut se citeşte valoarea lui θ_0 în C şi valoarea lui α în D. De-a lungul conturului efuzoerului, care este linie de curent, $\alpha = \text{const}$. Deci, din punctul D mergem pînă în F, apoi în G unde citim valoarea lui θ_f; în H citim valoarea lui M_f.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ОДНОГО КЛАССА ПЛОСКИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ РАСШИРАЮЩИХСЯ СОПЕЛ С НЕБОЛЬШИМ УКЛОНОМ ВБЛИЗИ ИХ ЗВУКОВОЙ СУЖАЮЩЕЙСЯ ЧАСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе автор дает уравнения контура, в параметрической форме, одного класса плоских сверхзвуковых расширяющихся сопел с небольшим уклоном вблизи их звуковой сужающейся части.

Работа состоит из трех частей: в первой части исследуется движение, определяемое функцией тока (11), как решение уравнения Маленброка — Чаплыгина; во второй части выводятся уравнения контура расширяющегося сопла; в третьей части приводятся некоторые замечания относительно звуковой сужающейся части сопла с указанием на методы трассировки и для этой части. В конце работы указывается практический метод расчета, для чего были вычерчены диаграммы, приведенные на рис. 3, 4, и составлена прилагаемая таблица.

Основная идея этого метода состоит из преображения сверхзвукового потока, определяемого функцией тока (11) в области между звуковой сужающейся частью сопла ($M \sim 1$) и последней принятой характеристикой (BPD, рис. 2), в сверхзвуковом, равномерном и параллельном потоке, за последней линией Маха (DC) (экспериментальная камера), в которой достигнута соответствующая заданному числу Маха ($M_1 > 1$) скорость. Это преобразование потока становится возможным в результате присоединения движений обеих областей к третьей, промежуточной, где движение происходит в виде простых волн.

Принципиально эта идея применялась и Аткиным (2) к расчету расширяющихся сопел с единым уклоном. Но в этом случае, от определенных величин M_1, уклон становится значительным и оказывает неблагоприятное влияние на действительное течение в расширяющемся сопле.

Поведение решения (11) ограничивает максимальный уклон и ведет к соплам большой длины по определенным величинам M_1. Эти причины приводят к ограничению области практического применения указанного метода, который может быть использован лишь для расчета расширяющихся сопел с $M_1 \leqslant 2{,}6$.

CALCUL ANALYTIQUE D'UNE CLASSE D'EFFUSEURS SUPERSONIQUES PLANS, À PENTE RÉDUITE À PROXIMITÉ DU COL SONIQUE

RÉSUMÉ

L'auteur donne dans ce travail les équations du contour, sous une forme paramétrique, d'une classe d'effuseurs supersoniques plans, à pente réduite à proximité du col sonique.

Le travail comporte trois parties. Dans la première partie, on étudie le mouvement défini par la fonction de courant (11), comme solution de l'équation Molenbroek-Tchaplyguine ; dans la deuxième partie, on déduit les équations du contour de l'effuseur ; la troisième partie comprend quelques remarques sur le col sonique et l'on y indique la méthode de tracer cette partie également. A la fin du travail, on indique le mode pratique de calcul, et l'on établit dans ce sens les diagrammes des figures 3 et 4 et le tableau ci-joint.

La méthode repose sur la transformation d'un courant supersonique, défini par la fonction du courant (11) dans le domaine délimité par le col sonique ($M \sim 1$) et la dernière caractéristique considérée (*BPD* — fig. 2), en un courant supersonique, uniforme et parallèle, suivant la dernière ligne *Mach* (*DC*) (chambre d'expériences) où est atteinte la vitesse correspondant au nombre *Mach* désiré ($M_1 > 1$). Cette transformation du courant est rendue possible par le raccordement des mouvements des deux domaines à un troisième, intermédiaire, où le mouvement a lieu sous forme d'ondes simples.

En principe, cette idée a servi à Atkin [2] pour les effuseurs à pente unique. Toutefois, dans ce cas, à partir de certaines valeurs M_1, la pente devient considérable et a une influence défavorable sur l'écoulement réel de l'effuseur.

Le comportement de la solution (11) limite la pente maximum et conduit à des effuseurs de grande longueur, d'après certaines valeurs de M_1. Pour ces raisons, l'auteur est amené à limiter le domaine des applications pratiques et recommande l'application de cette méthode pour le seul calcul des effuseurs où $M_1 \leqslant 2{,}6$.

BIBLIOGRAFIE

1. A. FERRI, *Elements of Aerodynamics of Supersonic Flows.* The Mac Millan Company, New York, 1949.
2. A. O. L. ATKIN, *Two—Dimensional Supersonic Channel,* R. and. M. 2174, partea I.
3. E. CARAFOLI, *Aerodinamica vitezelor mari.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1957.
4. C. IACOB, *Introducere matematică în mecanica fluidelor.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952.
5. R. SAUER, *General Characteristics of the Flow Through Nozzles in the Neighbourhood of the Critical Velocity.* Rep. Aero. Res. Coun., 1947, nr. 9.

HIDROMECANICĂ

TRANSFORMAREA CONDIŢIILOR DE FUNCŢIONARE A MARILOR LUCRĂRI HIDROTEHNICE PRIN ASPIRAREA STRATULUI LIMITĂ*)

DE

L. ESCANDE
MEMBRU AL ACADEMIEI DE ŞTIINŢE DIN PARIS
DIRECTOR AL ŞCOLII NAŢIONALE SUPERIOARE DE ELECTROTEHNICĂ ŞI HIDRAULICĂ DIN TOULOUSE

1. INTRODUCERE

În cursul cercetărilor noastre asupra barajelor deversoare ne-am gîndit pentru prima oară la posibilitatea aplicării la marile lucrări hidrotehnice, a procedeelor, de altfel clasice, constînd în evitarea desprinderilor, prin aspirarea stratului limită.

În expunerea de faţă vom recapitula, pe scurt, mersul raţionamentelor noastre, care au evoluat pe măsura tehnicii barajelor deversoare, şi vom arăta cum această evoluţie ne-a îndemnat, în mod natural, să folosim proprietăţile deosebit de importante ale eliminării stratului limită.

După ce vom expune, succint, principalele avantaje obţinute cu ajutorul acestei metode în cazul deversoarelor, vom rezuma un ansamblu de experienţe foarte diferite, din care vor rezulta numeroasele ei aplicaţii, susceptibile să creeze condiţii de funcţionare mult mai bune la foarte multe şi mari lucrări hidrotehnice.

2. EVOLUŢIA TEHNICII BARAJELOR DEVERSOARE. PRAGURI CU FANTĂ

Vom arăta, mai întîi, că toate aceste cercetări au fost făcute în Laboratoarele de hidraulică ale Şcolii Naţionale Superioare de Electrotehnică şi Hidraulică de la Toulouse (fig. 1) şi ale anexei sale de la Banlève.

---

*) Comunicare ţinută la Academia R.P.R. la data de 24 aprilie 1958.

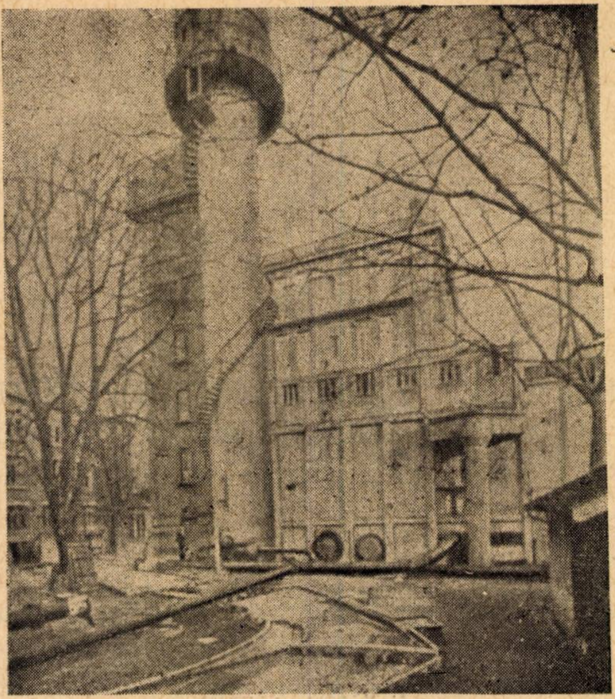


Fig. 1

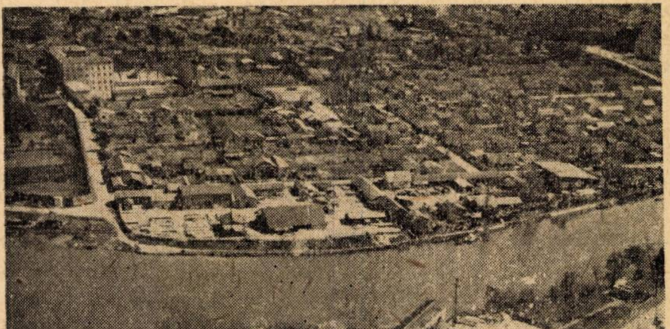


Fig. 2

Laboratorul de la Banlève (pe care îl vedem din avion în fig. 2) se află situat între cele două brațe ale rîului Garonne, între care există o cădere de 3,80 m, și este înzestrat cu o suflerie aerodinamică (fig. 3), cu un vast laborator de modele reduse, care se vede parțial în figura 4 și cu două canale mari, care printr-o simplă manevrare de vane în amonte și în aval, lasă să treacă debite ce depășesc 25 m³/s, datorită diferenței de nivel dintre cele două brațe ale Garonnei. Unul dintre aceste canale, cu o lățime de 4 m și o adîncime de 4,20 m, comportă o porțiune rectilinie de 117 m lungime (fig. 5, 6, 7 și 8). Cînd vanele sînt închise în amonte și în aval, acest canal constituie un bazin de tarare a moriștelor, sau de încercare a carenelor. Pe el circulă un cărucior (fig. 9), pus în mișcare de un motor de 50 CP, cu ajutorul unui dispozitiv Hele Shaww, care dă posibilitatea să se obțină toate vitezele de translație cuprinse între 0,10 m/s și 6,50 m/s, cu o precizie verificată de cel puțin 1%.

Praguri Creager normale. Primele noastre cercetări asupra pragurilor deversante (fig. 10), întreprinse cu prilejul construirii barajului de la Pinet pe Tarn și a barajului de la Puéchabon pe Hérault, lucrări efectuate între anii 1925—1929, ne-au arătat existența unor depresiuni însemnate pe paramentul aval al barajelor deversoare cu profil necorespunzător (fig. 11).

În unele cazuri, aceste depresiuni pot face ca scurgerea să devină instabilă, datorită aspirațiilor și antrenărilor alternative ale aerului exterior, fenomen susceptibil de a da naștere unor vibrații periculoase. Am ajuns atunci la concluzia că ar fi mai prudent să utilizăm praguri deversante, eliminînd la aceștia orice depresiune de pe parament.

Pe de altă parte, confirmîndu-ne previziunile teoretice, experiența ne-a arătat că coeficientul de debit la un baraj deversor scade atunci cînd crește presiunea care acționează asupra pragului, deci și în interiorul lamei deversante. Prin urmare avem tot interesul să reducem presiunea asupra pragului și, dacă nu vrem să avem depresiune, să adoptăm forma de prag deversant supus unei presiuni aproape nulă în toate punctele ei.

Am ajuns în felul acesta sa examinăm profilul Creager, care reprezintă profilul optim de baraj deversor. Într-adevăr, se știe că acest profil este dedus din suprafața liberă inferioară a unei lame care deversează peste un deversor cu muchie ascuțită, bine aerat pe dedesubt (fig. 12); din această cauză, presiunea, în toate punctele profilului Creager, este în mod simțitor egală cu presiunea atmosferică, adică nulă, dacă considerăm, așa cum se obișnuiește, că această presiune este egală cu zero. În realitate, profilul Creager pătrunde întrucîtva în lama deversantă a deversorului de tip Bazin, cu muchie ascuțită și vînă aerată, astfel încît există o ușoară presiune pozitivă în toate punctele sale (fig. 13).

Profilul Creager dă un coeficient de debit aproape egal cu 0,50. Pe un profil Creager normal, adică stabilit pentru sarcina maximă H' și funcționînd sub sarcini h egale sau inferioare lui H', scurgerea este perfect stabilă, fie că pragul este prevăzut sau nu cu vane mobile (vane sectoare, sau vane Stoney mai mult sau mai puțin ușor manevrabile).

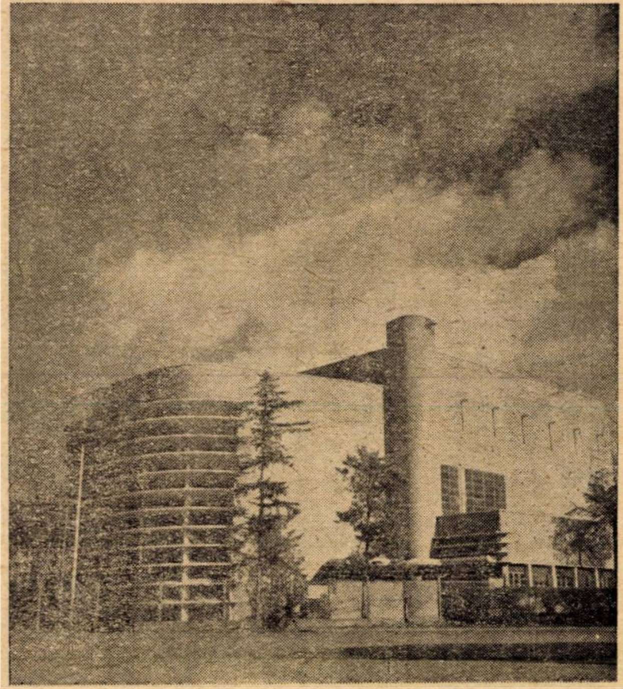


Fig. 3

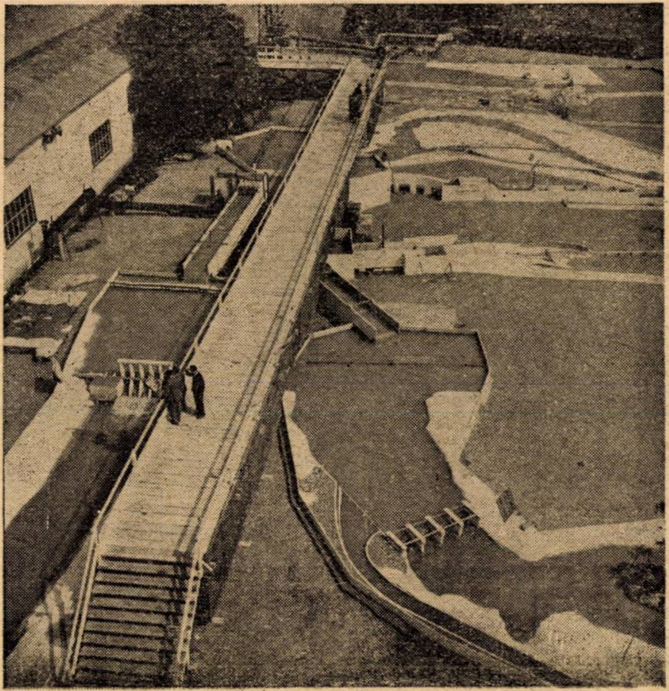


Fig. 4

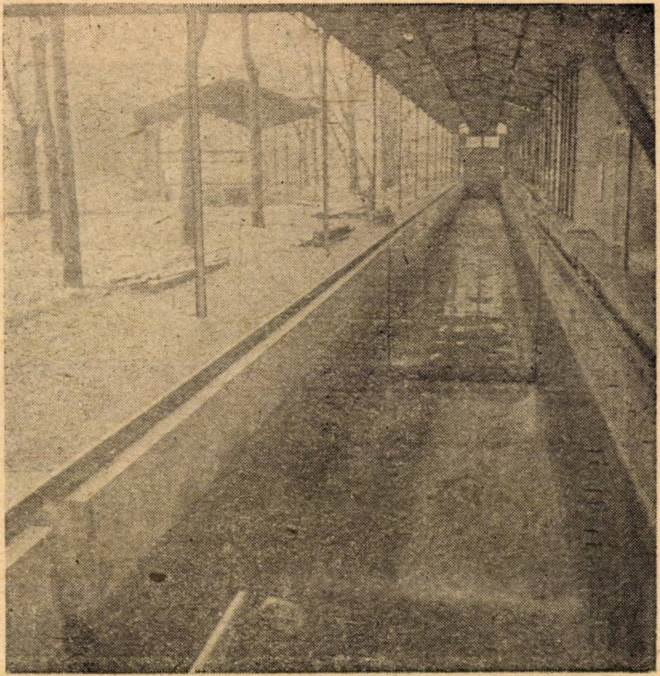


Fig. 5

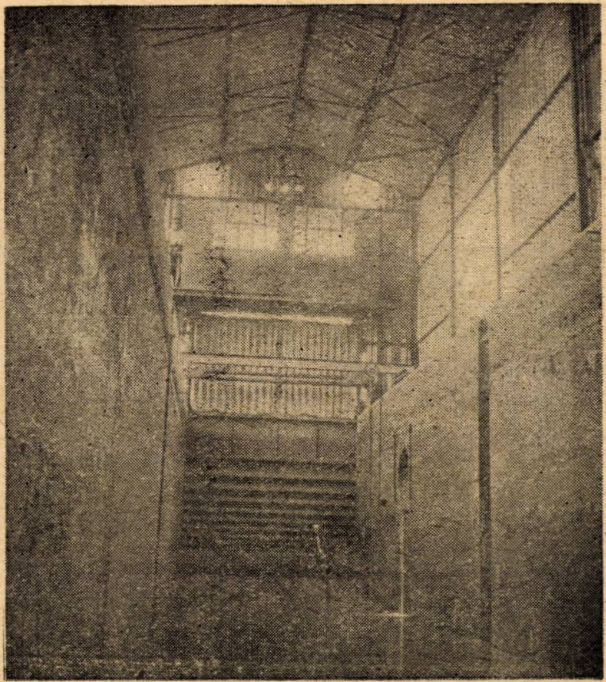


Fig. 6

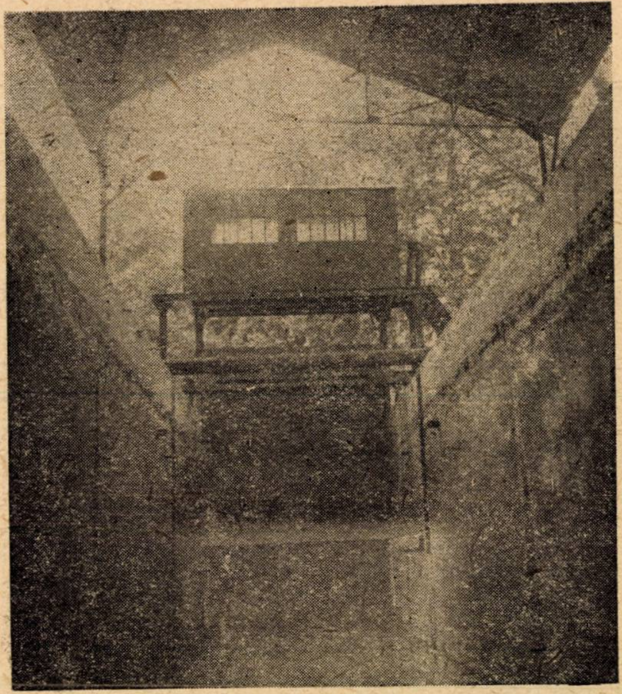


Fig. 7

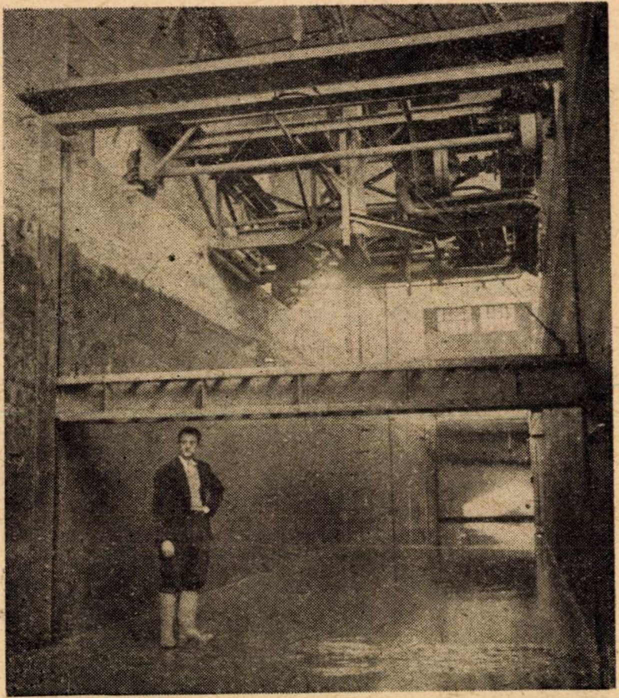


Fig. 8

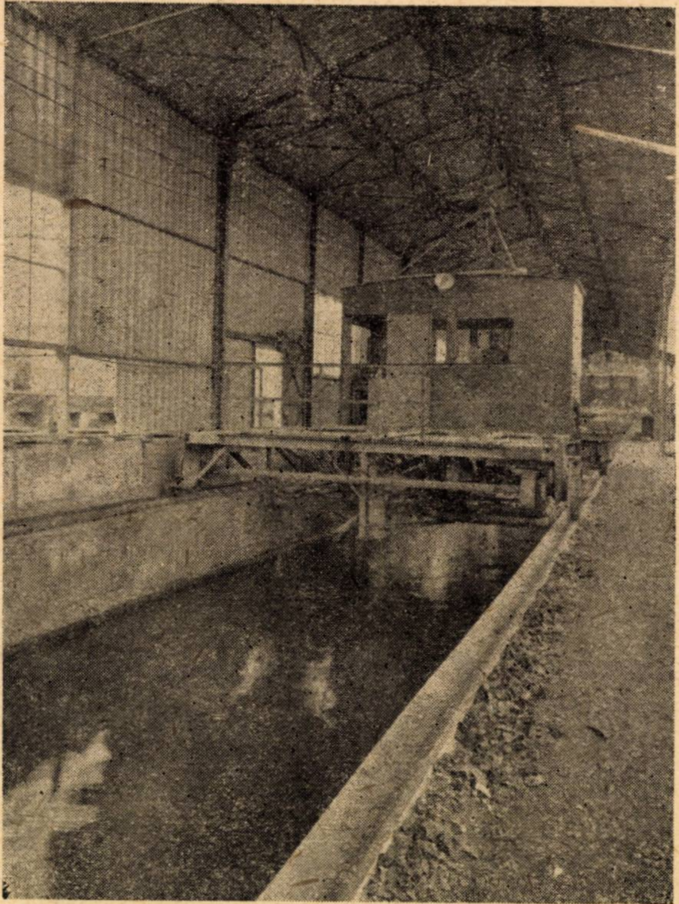


Fig. 9

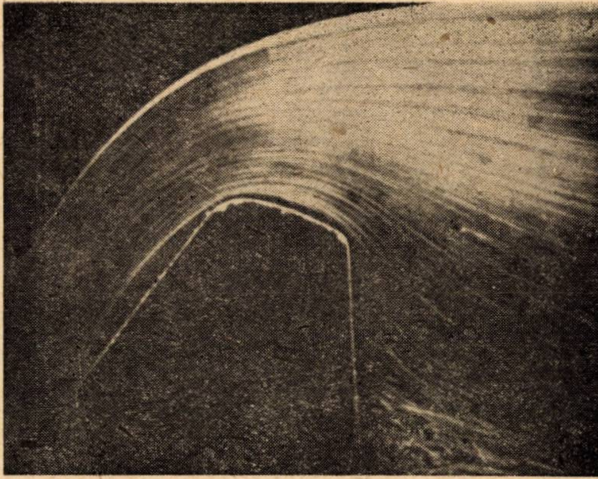


Fig. 10

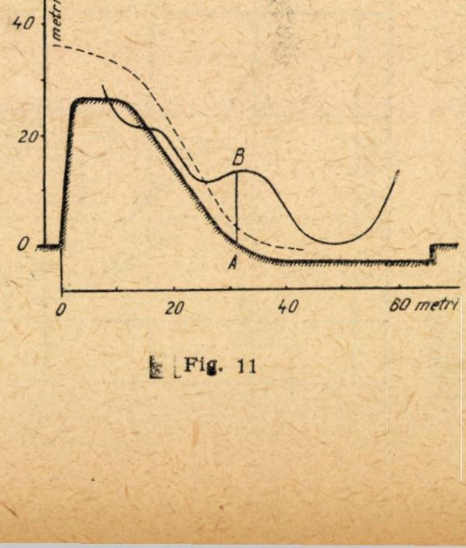
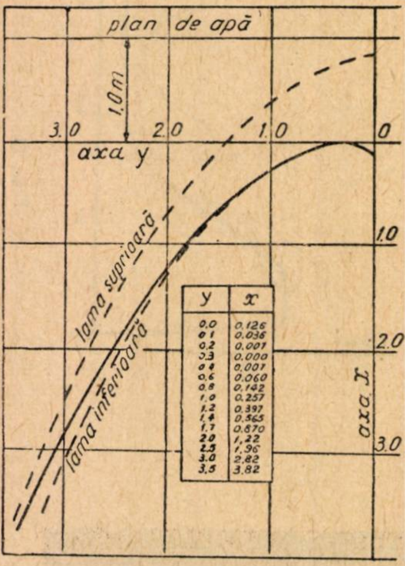


Fig. 11

Praguri Creager turtite. Preocuparea de a face tot mai multă economie în construcția lucrărilor, i-a îndemnat pe hidraulicieni să caute praguri deversante care să corespundă unor coeficienți de debit mai ridicați.



y	x
0.0	0.126
0.1	0.036
0.2	0.007
0.3	0.000
0.4	0.007
0.6	0.060
0.8	0.142
1.0	0.257
1.2	0.397
1.4	0.565
1.7	0.870
2.0	1,22
2.5	1.96
3.0	2.82
3.5	3.82

Fig. 12

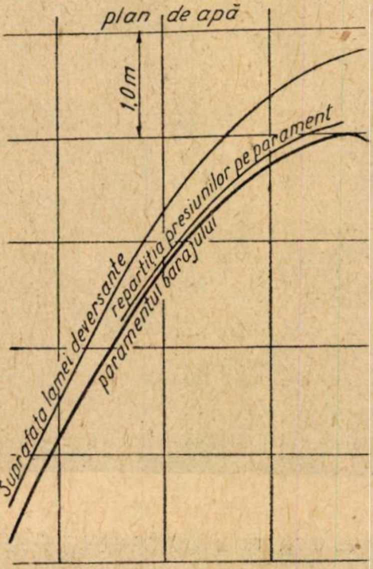

plan de apă
1,0 m
Suprafața lamei deversante
repartiția presiunilor pe parament
paramentul barajului

Fig. 13

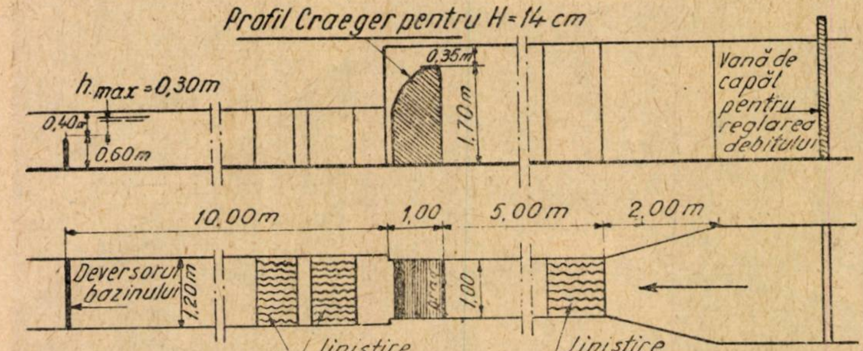

Profil Craeger pentru H=14 cm
0,35m
h max =0,30m
0,40m
0,60m
1,70m
Vană de capăt pentru reglarea debitului
10,00m
1,00
5,00m
2,00m
Deversorul bazinului
1,20m
1,00
liniștire
liniștire

Fig. 14

În acest sens am efectuat o serie de studii asupra ceea ce am numit *praguri Creager turtite*, adică praguri Creager care funcționează sub o sarcină maximă H deasupra pragului, superioară sarcinei H' pentru care a fost stabilit profilul.

Aceste studii au fost făcute într-un canal de încercări ale cărui dimensiuni principale sînt arătate în figura 14.

Figura 15 reprezintă curbele de repartiție a presiunii, obținute pe un prag Creager, corespunzător unei sarcini $H' = 0{,}14$ m. Se vede că presiunea pozitivă în toate punctele pentru valorile sarcinii h egală sau inferioară lui H', devine negativă pe o porțiune a pragului din ce în ce mai întinsă, atunci cînd h depășește 0,141 m, iar valoarea absolută a depresiunilor crește și ea cu h.

Figurile 16 și 17 arată construcția grafică a lui Prasil aplicată la deversarea asupra acestui prag, pentru sarcini h respectiv egale cu 0,141 m și cu 0,210 m ; în ambele cazuri curbele de presiuni deduse prin construcția grafică indică în ansamblu o bună concordanță cu curbele de presiune experimentală.

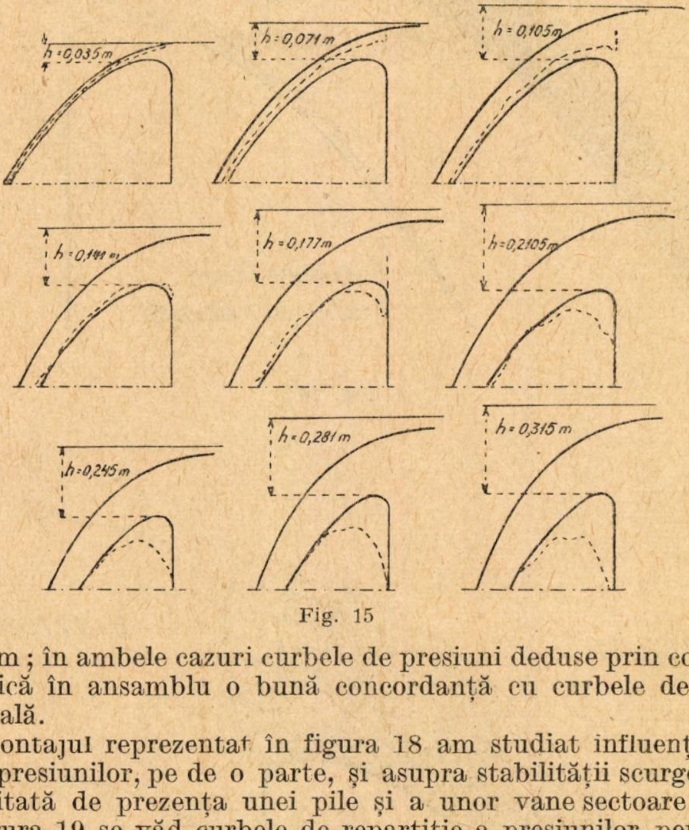


Fig. 15

Cu montajul reprezentat în figura 18 am studiat influența asupra repartiției presiunilor, pe de o parte, și asupra stabilității scurgerii, pe de alta, exercitată de prezența unei pile și a unor vane sectoare pe prag.

În figura 19 se văd curbele de repartiție a presiunilor pentru diferite valori ale ridicării A a muchiei inferioare a vanei și la diferitele sarcini în amonte h. Din examinarea curbelor reiese că depresiunea este cu atît mai mare cu cît ridicarea vanei este mai mare și nivelul în amonte mai ridicat.

Am constatat că pentru toate pragurile Creager turtite, care funcționează sub sarcina maximă H și al căror profil corespunde unei sarcini H' cel puțin egală cu $0{,}60\ H$, depresiunile care se nasc pe peretele aval, îmbunătățesc coeficientul de debit fără să influențeze stabilitatea scurgerii.

Tot astfel, în cazul deversorului simplu, ca și în acela al pragului prevăzut cu vane mobile, scurgerea rămîne foarte stabilă, fără vibrații,

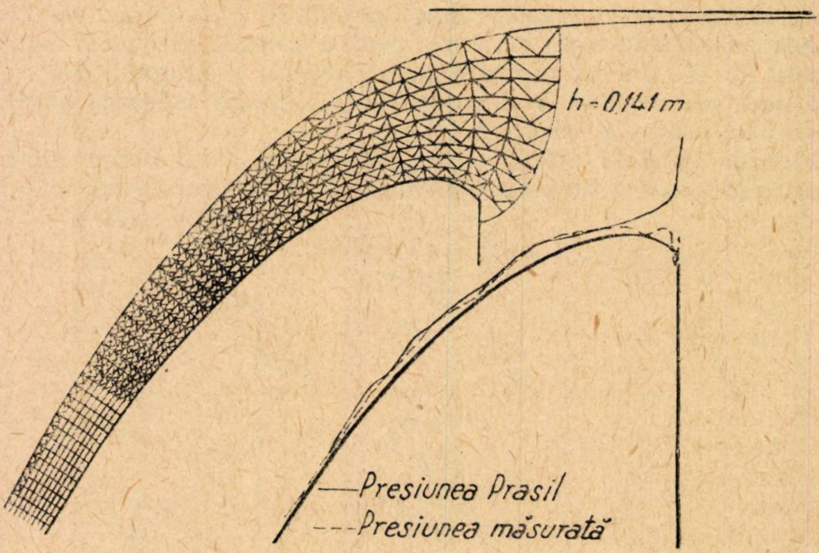

h=0,141m
—Presiunea Prasil
---Presiunea măsurată

Fig. 16

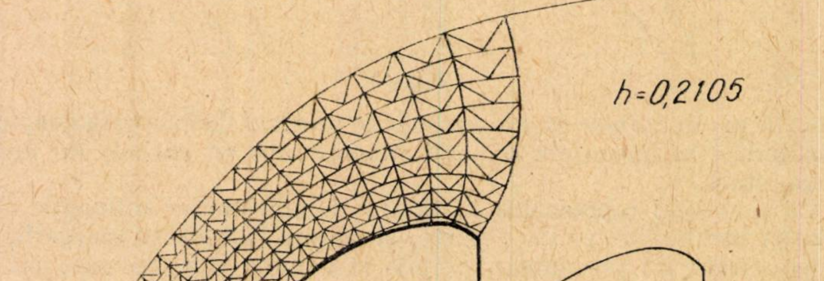

h=0,2105
— Presiunea Prasil
---Presiunea măsurată

Fig. 17

fără desprinderi sau pătrunderi de aer, atîta timp cît sarcina h deasupra pragului rămîne inferioară sau egală cu sarcina maximă H.

La limită, pentru $h = H$ şi $H' = 0{,}60\ H$, coeficientul de debit atinge valoarea $m = 0{,}54$, realizîndu-se o creştere de 8% a capacităţii de evacuare a lucrării, în raport cu cea corespunzătoare profilului Creager normal. În aceste condiţii, depresiunea pe prag, fie că vanele sînt sau nu mobile deasupra acestuia, nu depăşeşte H.

În teorie, astfel de praguri sînt, deci, utilizabile fără riscuri de cavitaţie pentru sarcini H, care ajung pînă la 10 m. Ca măsură de siguranţă pare preferabil să ne limităm la sarcini H, între 8 şi 9 m, cel puţin în primele etape ale realizărilor.

Desprindere şi strat limită. În cursul cercetărilor noastre asupra barajelor deversoare, am constatat că mărind simţitor sarcina deasupra valorii care dă naştere depresiunilor, coeficientul debitului creşte din ce în ce mai încet şi sfîrşeşte prin a tinde spre o valoare sensibil constantă pentru un prag dat (fig. 20).

Observarea cronofotografică a scurgerii dă explicaţia acestui fapt. Liniile de curent, după ce au luat forma paramentului aval, se menţin pînă la o anumită valoare a sarcinii, după care se desprind de prag, mai mult sau mai puţin progresiv : curbura liniilor de curent devine atunci mult mai mică decît aceea a paramentului, curentul la mare viteză fiind separat de baraj printr-o zonă turbionară (fig. 21).

Această reducere a curburii liniilor de curent împiedică creşterea depresiunii, cu toată sporirea vitezei, şi face ca coeficientul debitului să devină constant. Pentru a-l mări, trebuie să mărim depresiunea şi, în consecinţă, să împiedicăm desprinderea.

În această situaţie ne-am gîndit să recurgem la proprietăţile fundamentale ale stratului limită. Se ştie că atunci cînd un fluid cu viscozitate slabă se scurge de-a lungul unui perete solid (fig. 22 *a*), frecările se localizează într-un strat foarte subţire denumit strat limită. Curenţii de întoarcere, care iau naştere în interiorul stratului limită, în cazul unui perete cu o curbură foarte accentuată, dau naştere unor fenomene de desprindere şi provoacă formarea de dîre. În interiorul acestora, fluidul este animat de o mişcare agitată turbionară, care nu participă la scurgere în ansamblul ei.

Dacă de-a lungul unei fante F, printr-un sistem oarecare, aspirăm stratul limită, suprimăm totodată dîrele, iar liniile de curent rămîn lipite de perete (fig. 22 *b*).

Această proprietate a aspirării stratului limită este bine cunoscută şi a avut multe aplicaţii în aerodinamică, pentru aripile de avion (aripi cu fantă) şi pentru suflerii (difuzoare cu fantă).

Ne-am gîndit că s-ar putea obţine rezultate tot atît de interesante, aplicînd această metodă la lucrările hidrotehnice în general, şi în special la barajele deversoare de care ne ocupăm.

Praguri cu fantă aspiratoare. Pentru a suprima desprinderea de pe faţa aval a unui baraj deversor, este suficient să aspirăm stratul limită în porţiunea superioară a feţei. În acest scop, trebuie ca pe toată lăţimea

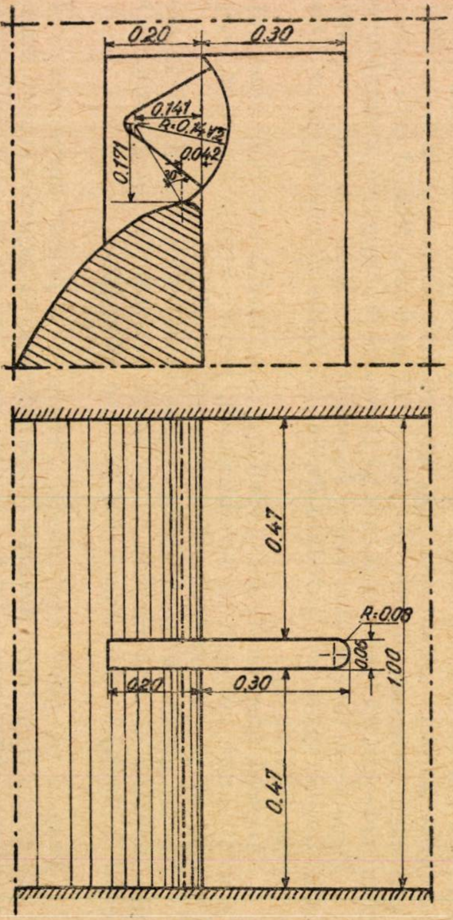

0.20
0.30
0.141
R=0.14√2
0.042
0.171
30°
R:0.08
0.06
1.00
0.47
0.47
0.20
0.30

Fig. 18

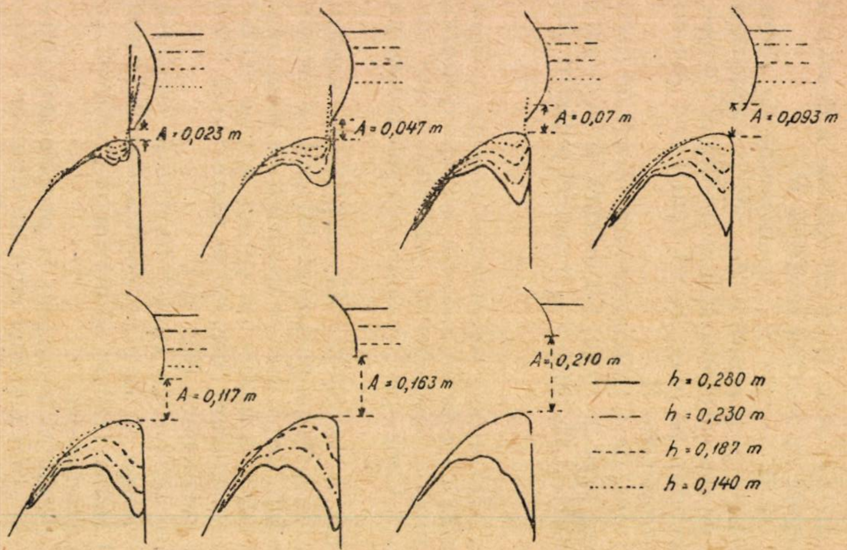

A = 0,023 m
A = 0,047 m
A = 0,07 m
A = 0,093 m
A = 0,117 m
A = 0,163 m
A = 0,210 m
h = 0,280 m
h = 0,230 m
h = 0,187 m
h = 0,140 m

Fig. 19

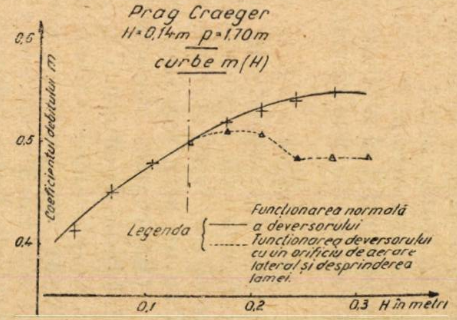


Fig. 20

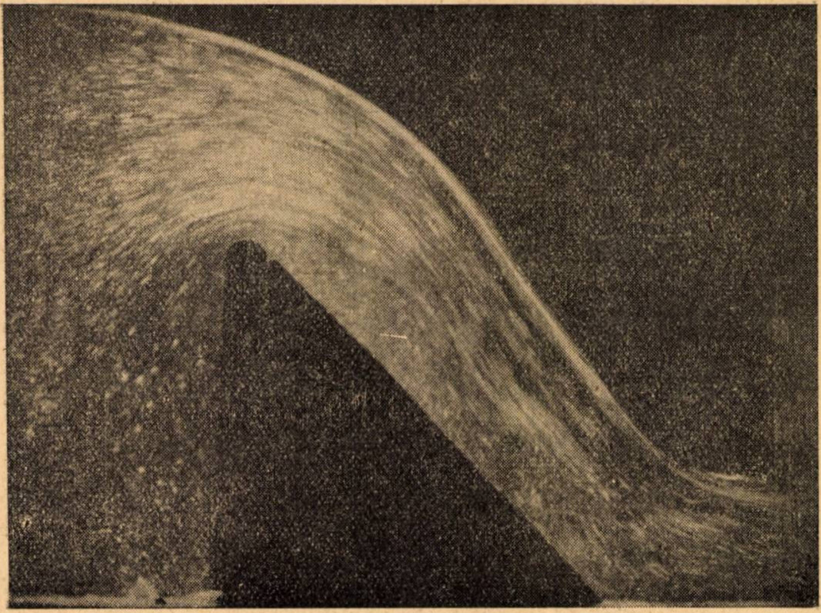


Fig. 21

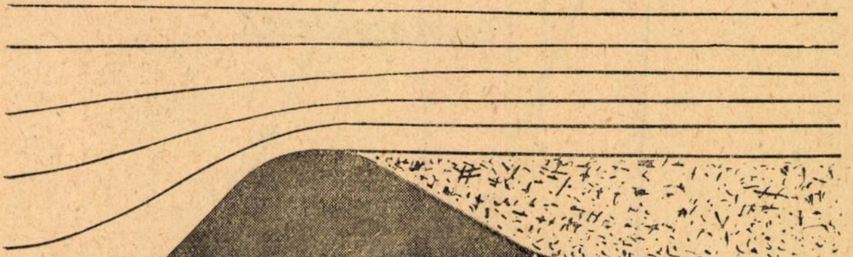


Fig. 22

pragului (fig. 23) să facem o fantă *F*, legată cu un colector *C*, destinat să colecteze apa aspirată.

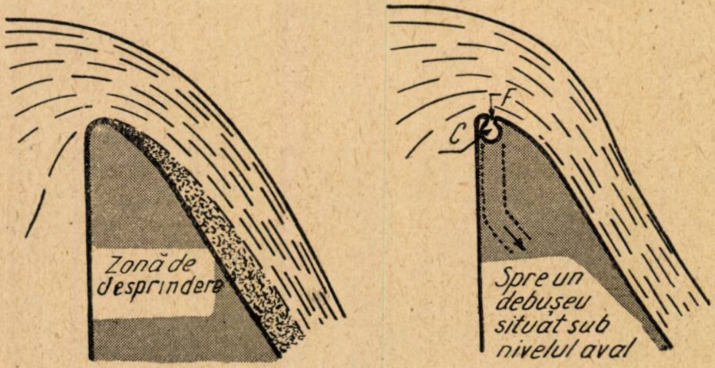

Zonă de desprindere
F
C
Spre un debușeu situat sub nivelul aval

Fig. 23

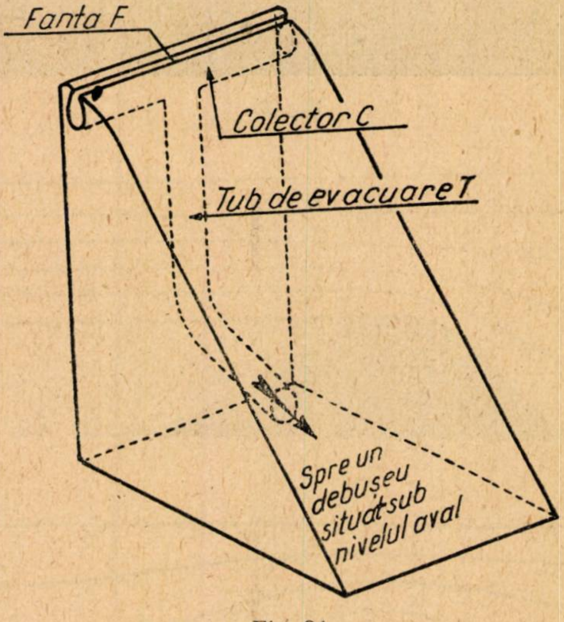

Fanta F
Colector C
Tub de evacuare T
Spre un debușeu situat sub nivelul aval

Fig. 24

În experiențele noastre de laborator am realizat în unele cazuri aspirarea cu ajutorul unei pompe. În practică este inutil să recurgem la o sursă exterioară de energie, putînd utiliza scurgerea datorită greutății proprii. După cum arată figura 24, este de ajuns să punem în legătură colectorul *C* cu bieful aval, folosind în acest scop un tub de evacuare *T* a cărui extremitate se află deasupra planului apei din aval. Apa care trece

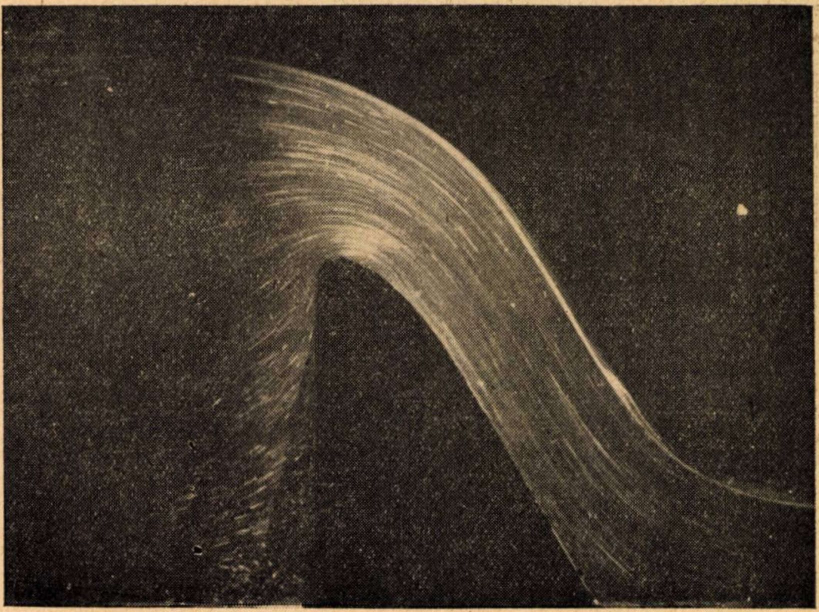


Fig. 25

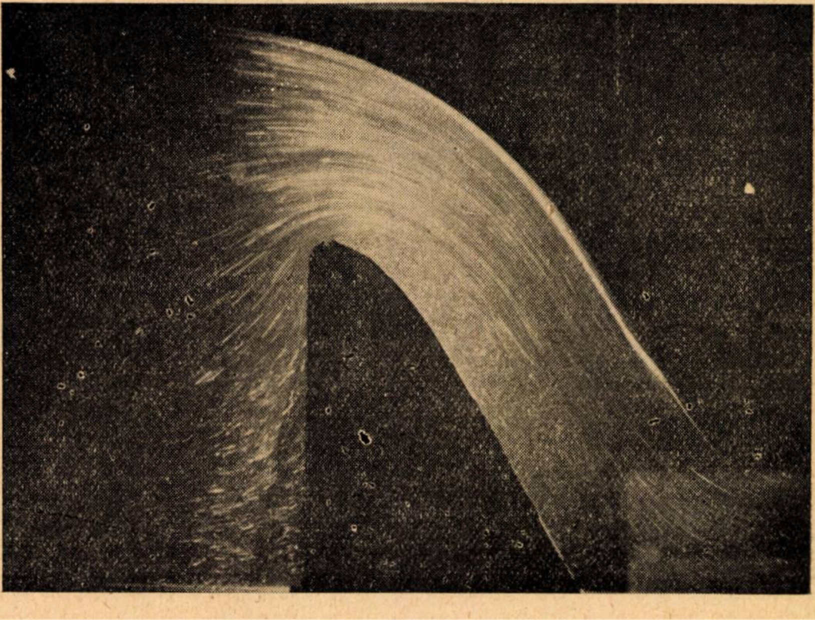


Fig. 26

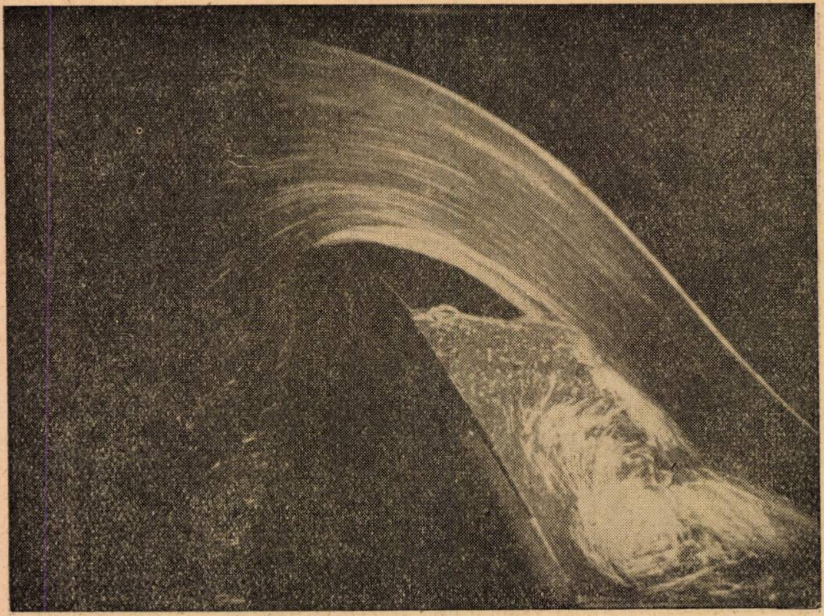


Fig. 27

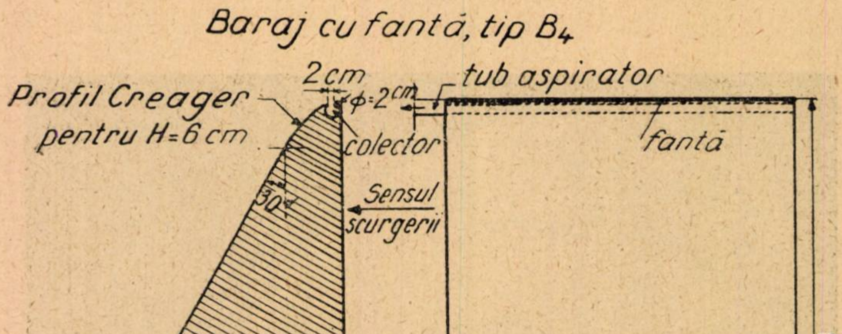

Baraj cu fantă, tip B_4
2 cm
tub aspirator
Profil Creager pentru H=6 cm
φ=2 cm
colector
fantă
30
Sensul scurgerii
160 cm
100 cm

Fig. 28

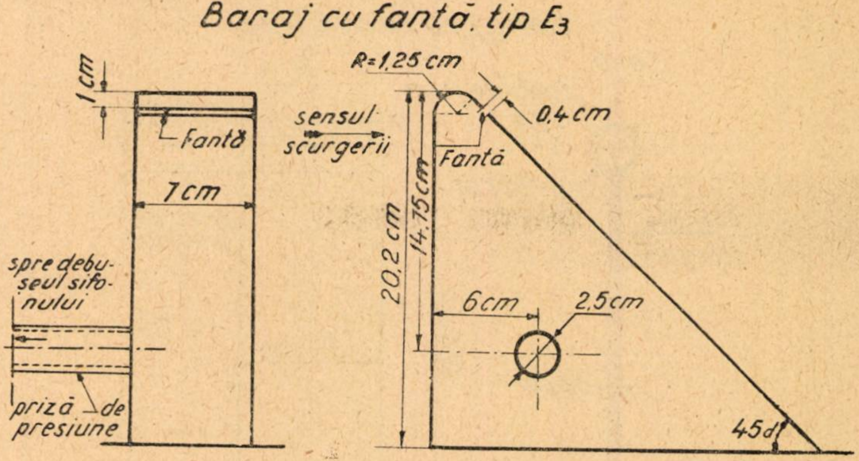

Baraj cu fantă. tip E_3
1 cm
Fantă
7 cm
spre debușeul sifonului
priză de presiune
sensul scurgerii
R=1,25 cm
0,4 cm
Fantă
20,2 cm
14,75 cm
6 cm
2,5 cm
45d

Fig. 29

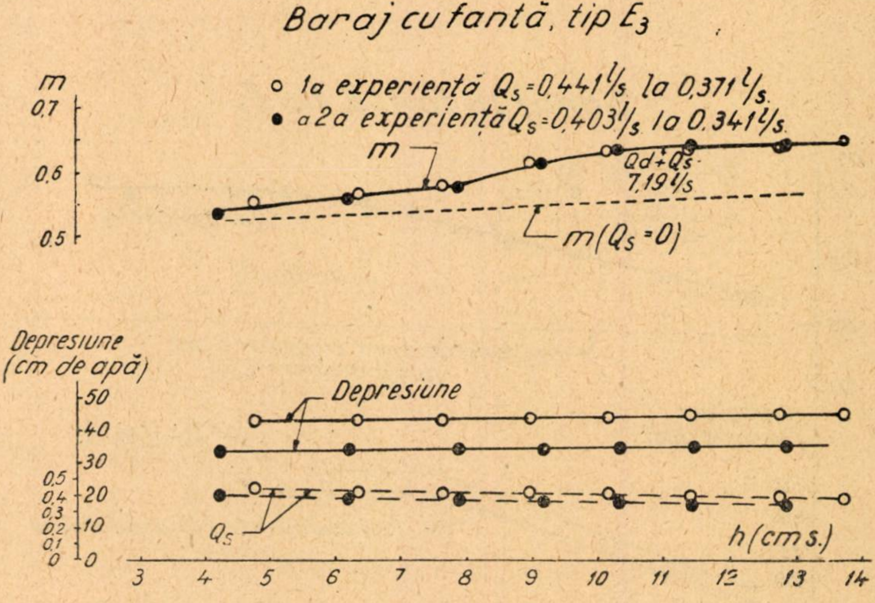

Baraj cu fantă, tip E_3
m
0,7
0,6
0,5
○ 1a experiență Q_s=0,441 l/s la 0,371 l/s
● a 2a experiență Q_s=0,403 l/s la 0,341 l/s
m
Qd+Qs
7,19 l/s
m(Q_s=0)
Depresiune (cm de apă)
50
40
30
20
10
0
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
Depresiune
Q_s
h(cm s.)
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14

Fig. 30

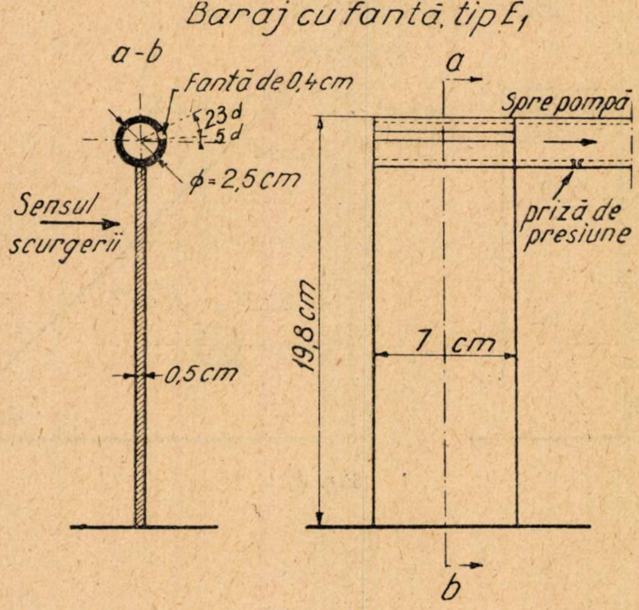

Baraj cu fantă, tip E1
a-b
Fantă de 0,4cm
23d
5d
φ=2,5cm
Sensul scurgerii
0,5cm
a
Spre pompă
priză de presiune
19,8cm
7 cm
b

Fig. 31

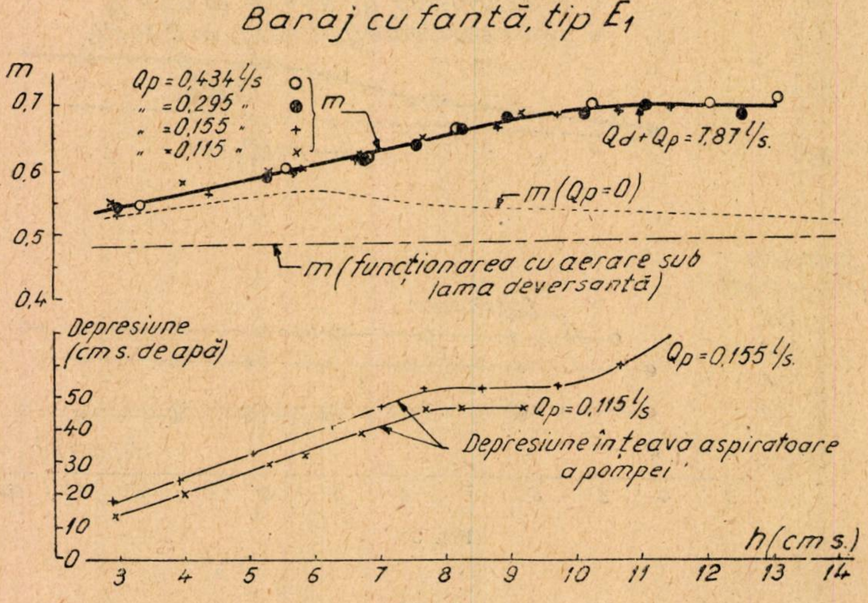

Baraj cu fantă, tip E1
m
0,7
0,6
0,5
0,4
Qp = 0,434 l/s ○
" = 0,295 " ●
" = 0,155 " +
" = 0,115 " ×
m
Qd + Qp = 7,87 l/s.
m (Qp = 0)
m (funcționarea cu aerare sub lama deversantă)
Depresiune (cm s. de apă)
50
40
30
20
10
0
Qp = 0,155 l/s.
Qp = 0,115 l/s
Depresiune în țeava aspiratoare a pompei
h (cm s.)
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14

Fig. 32

peste prag pătrunde în fantă, umple colectorul *C* şi tubul de evacuare *T*, astfel încît ansamblul funcţionează ca un sifon şi aspiră debitul dorit.

În figurile 25 şi 26 avem cele două aspecte ale scurgerii pe un baraj cu fantă; în cazul reprezentat de figura 25, sistemul de aspirare este obturat, aşa că există o deslipire însemnată, spre deosebire de ceea ce se întîmplă atunci cînd fanta *F* aspiră stratul limită (fig. 26).

Principiul barajului cu fantă fiind astfel expus, vom arăta calităţile esenţiale cerute pragului optim corespunzător, şi anume: un coeficient de debit cît mai mare posibil şi o scurgere stabilă. Pentru a evita fenomenele de cavitaţie, depresiunea maximă ne obligă să nu utilizăm deversorul decît pentru sarcini inferioare unei valori date, care este cu atît mai mare cu cît depresiunea este mai mică, în valoare relativă.

Pe de altă parte, este esenţial să avem o scurgere stabilă, fără antrenare de aer, care ar putea crea vibraţii şi desamorsarea sistemului de aspiratori. În ce priveşte acest ultim punct, am putut constata, la unele praguri pe care le-am studiat, că introducerea pe cale artificială a aerului sub lama deversantă creează desprinderea acesteia şi deci scoaterea din funcţiune a fantei, obţinîndu-se amorsarea din nou a sistemului după un timp oarecare, fără o intervenţie exterioară; apa deversantă atrage progresiv aerul, apoi alimentează aspiraţia cu debit în creştere, pînă ce acoperirea integrală a acestuia fiind realizată, lama deversantă vine din nou în contact direct cu barajul.

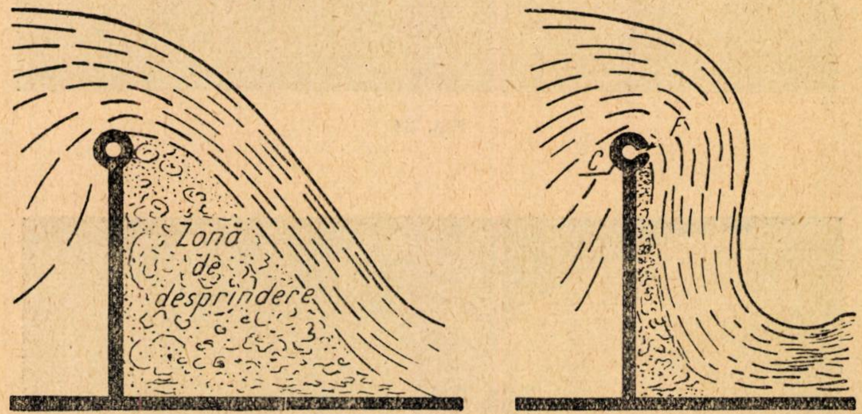


Fig. 33

Cu astfel de praguri ale căror profile corespund acelora din figurile 28, 29 şi 30, am putut atinge un coeficient de debit de 0,59, superior cu 18 % aceluia al pragului Creager normal; valoarea ridicată a depresiunii duce la limitarea utilizării unor astfel de praguri pentru sarcini în amonte avînd mai puţin de 4 m.

Cu un prag subţire de tipul corespunzător figurilor 31, 32, 33, 34 şi 35, coeficientul debitului atinge o valoare de 0,70, superioară cu 40%

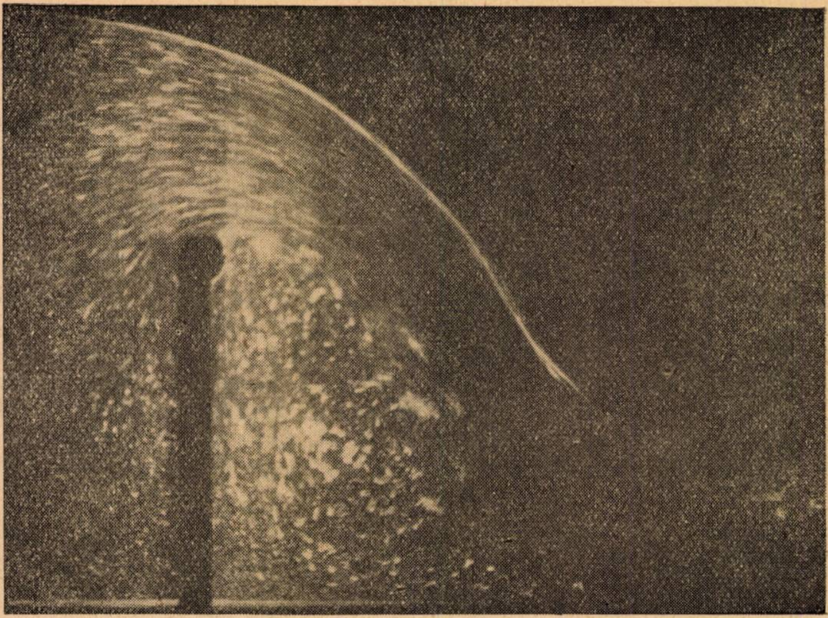


Fig. 34

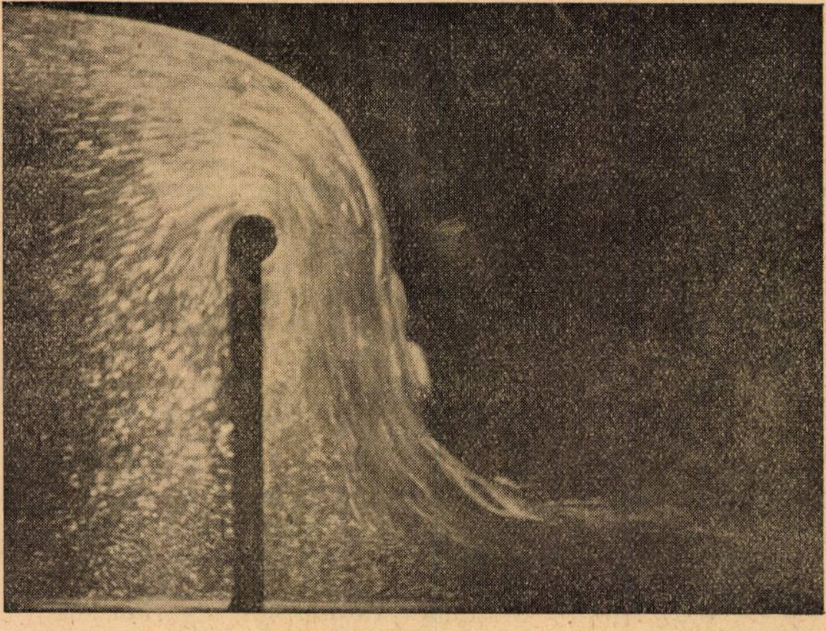


Fig. 35

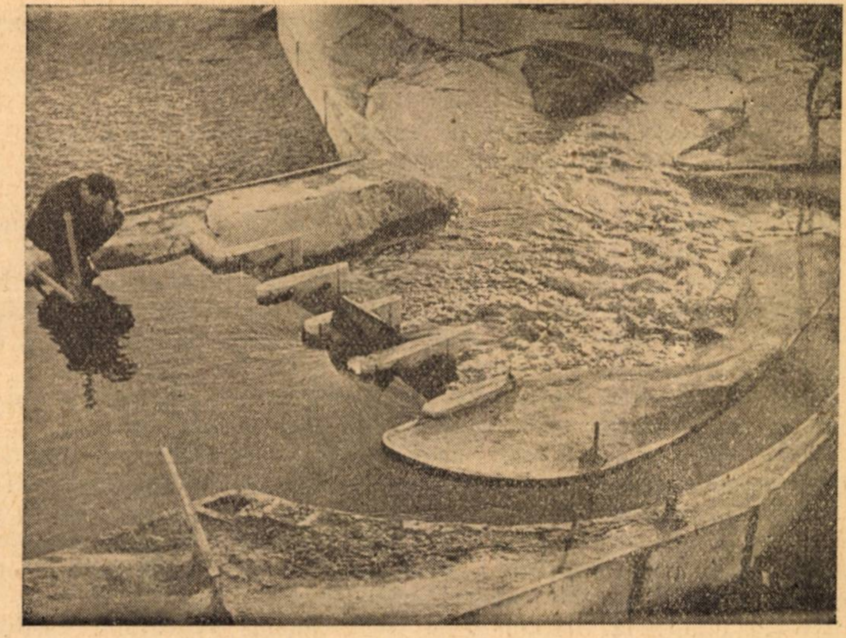


Fig. 36

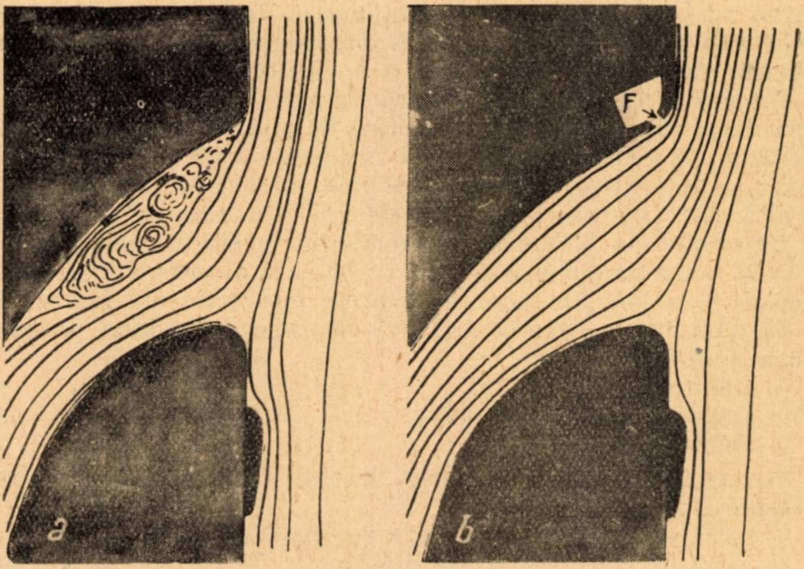


Fig. 37

aceleia a pragului Creager normal : în această situație introducerea aerului sub lama deversantă creează o deslipire permanentă a acesteia.

3. APLICAREA PROCEDEULUI DE ASPIRARE A STRATULUI LIMITĂ LA DIFERITE LUCRĂRI HIDROTEHNICE

Prize de apă. Să luăm în considerare o priză de apă situată pe un curs de apă în amonte de un baraj mobil (fig. 36).

Este relativ ușor să proiectăm o priză de apă de dimensiuni reduse, asigurînd intrarea normală a apei în priza și în canalul de aducțiune, în cazul debitelor reduse pe rîu, cînd vanele barajului sînt închise și cînd tot debitul este absorbit de uzină.

Dimpotrivă, cînd debitele pe rîu cresc, vanele sînt ridicate și cea mai mare parte din debitul cursului de apă este evacuat în aval.

Viteza de intrare în priză provoacă la extremitatea ei amonte o deslipire și formarea unei zone turbionare, adesea foarte întinsă (fig. 37 *a*).

Pentru a evita acest inconvenient sîntem siliți, în general, să prevedem o racordare foarte progresivă a extremității în amonte a prizei de apă cu malul corespunzător; acest lucru atrage după sine o mare extindere a lucrărilor spre amonte.

Ne-am gîndit să evităm acest inconvenient suprimînd deslipirea cu ajutorul unei fante aspiratoare, plasate în loc potrivit (fig. 37 *b*).

Această fantă este în legătură cu un puț, care la rîndul lui comunică cu bieful aval printr-o conductă inferioară care trece pe sub radierul prizei (fig. 38).

În cazul nivelelor reduse, o vană plasată pe conductă împiedică pierderea apei, iar sistemul nu funcționează decît în momentul creșterii nivelului sub acțiunea greutății, fără intervenția vreunei surse de energie exterioară, absorbind o mică parte a apelor excedentare.

Fotografia din figura 39 arată curgerea obținută în timpul unei creșteri de nivel, la intrarea unei prize de apă, cînd se obturează fanta aspiratoare; se vede mărimea zonei turbionare care are un dublu inconvenient : pe de o parte, ea dă naștere unei pierderi de sarcină importantă, pe de altă parte, provoacă formarea de depozite deoarece apele au un conținut important de aluviuni, în momentul creșterii debitelor.

Cînd fanta funcționează, zona turbionară dispare și liniile de curent iau forma peretelui, așa cum se vede pe fotografia din figura 40.

Să dăm cîteva cifre în legătură cu exemplul studiat pe un model, la scara 1/40 :

— Debitul prizei . . . . 120 m³/s,
— Debitul cursului de apă . . . . 2 000 m³/s,
— Debitul fantei. . . . . 12 m³/s.

Semnalăm că prin utilizarea acestui dispozitiv au fost realizate pînă acum două prize de apă :

— priza de irigație de la Vest de Massa, în Maroc,

— priza de apă de la uzina din Soueix, în Pirinei, pentru un debit de 25 m³/s.

Difuzoare. Se știe că în lipsa unor dispozitive speciale, un difuzor își pierde întreaga lui eficacitate atunci cînd are un unghi la centru mai mare de zece grade; într-adevăr, liniile de curent se deslipesc în acest caz, de pereți.

În cazul unui difuzor plan, am putut, cu ajutorul a două fante aspiratoare, așezate de o parte și de alta a gîtului, așa cum arată figura 41, să evităm deslipirea pentru difuzoare al căror unghi atinge la vîrf 60°.

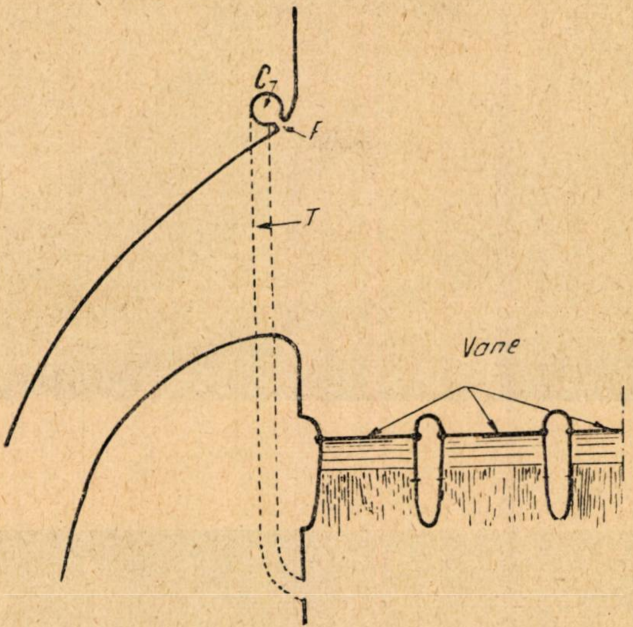


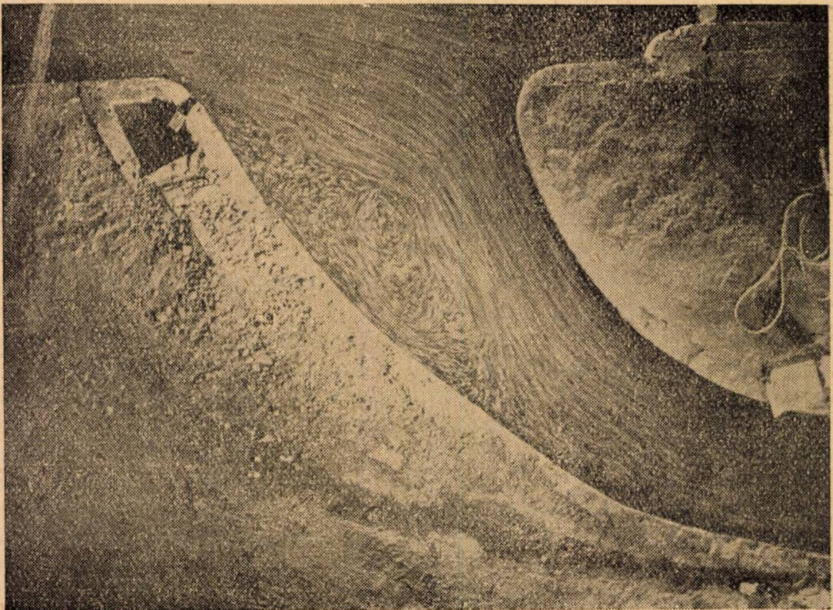
Fig. 38

În cazul unui difuzor avînd un unghi la centru de 30°, figura 42 arată funcționarea obținută cînd fanta inferioară funcționează singură, vîna rămînînd lipită de peretele corespunzător.

În cazul figurii 43 se obține un rezultat oarecum simetric, în timpul funcționării numai a fantei superioare.

În figura 44 se vede scurgerea corespunzătoare funcționării simultane a celor două fante, adică în cazul difuzării regulate a jetului.

Avem de semnalat un fenomen destul de ciudat, care se observă atunci cînd, o singură fantă aspiratoare fiind în acțiune, se golește bieful aval, lichidul fiind evacuat în aer liber. În cazul cînd fanta inferioară aspiră, aspectul jetului (fig. 45) nu prezintă nici o particularitate; dimpotrivă, cînd funcționează numai fanta superioară (schema din figura 46), jetul evacuat rămîne lipit de peretele difuzorului, urmînd să cadă din nou sub acțiunea greutății proprii (figura 47 pentru un difuzor de 30°, respectiv figura 48 pentru difuzorul de 60°).



Fig, 39

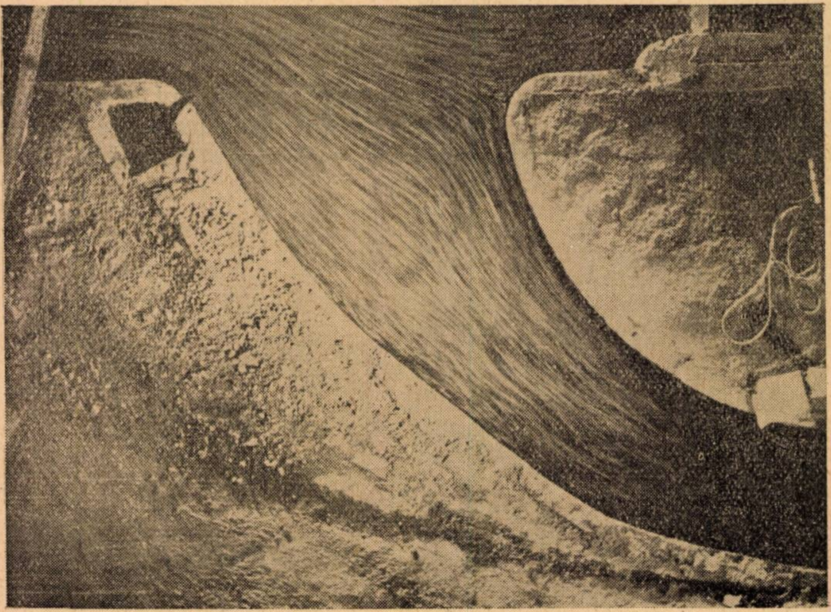


Fig. 40

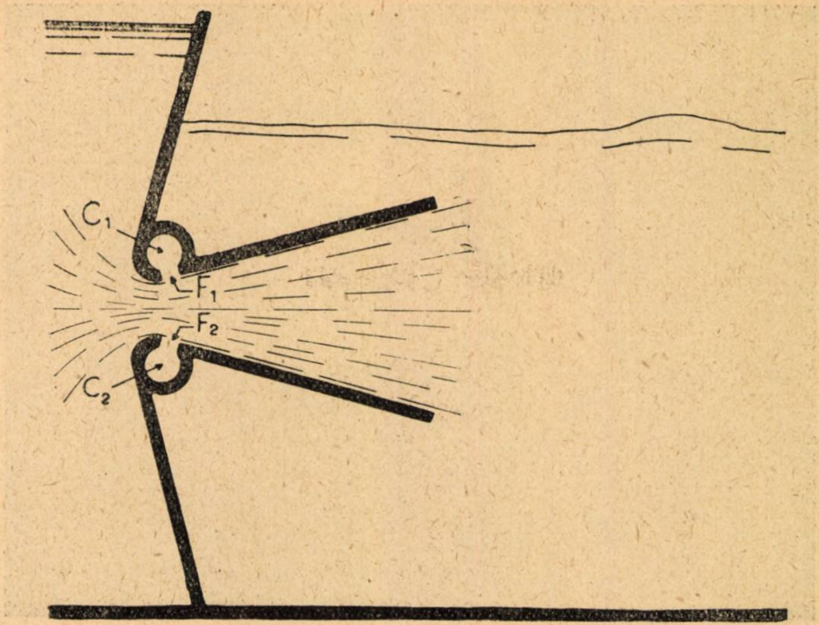


Fig. 41

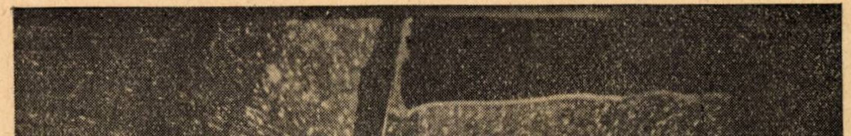


Fig. 42

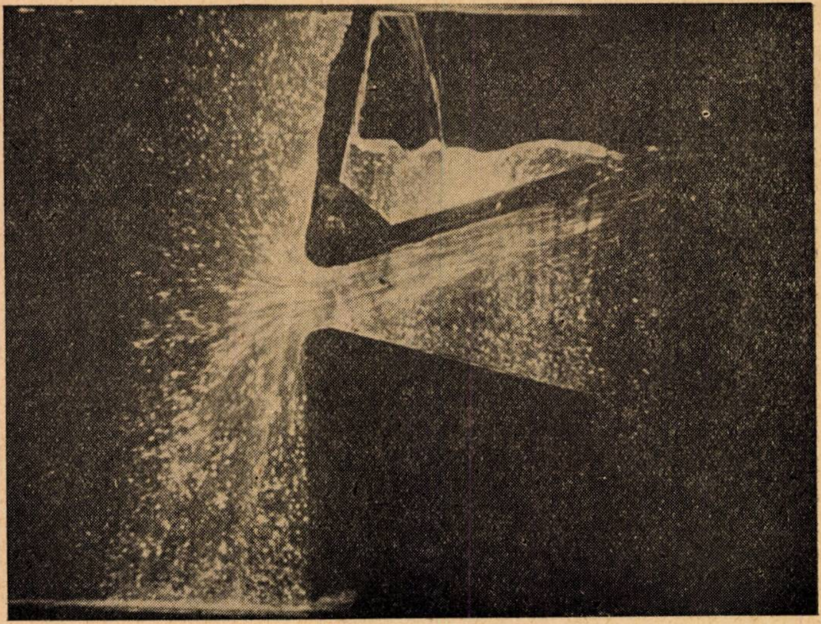


Fig. 43

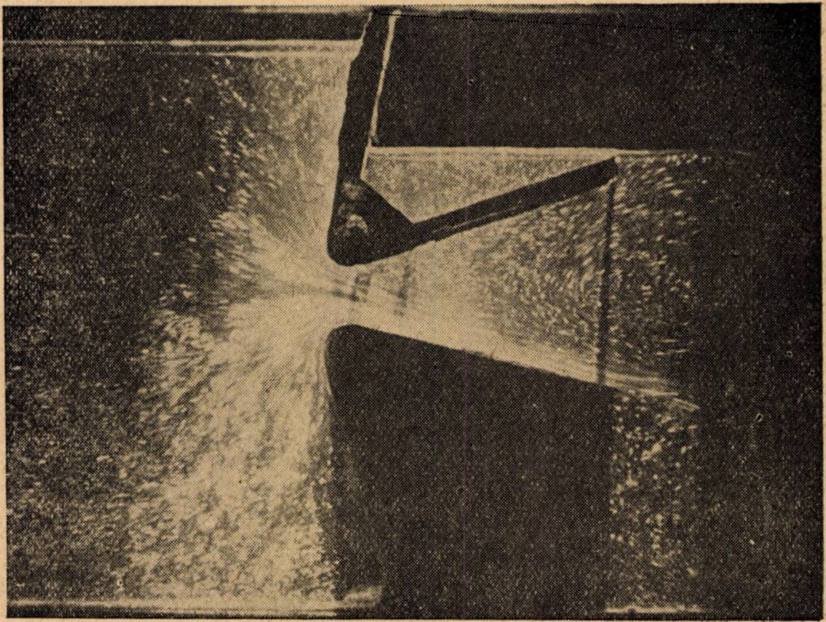


Fig. 44

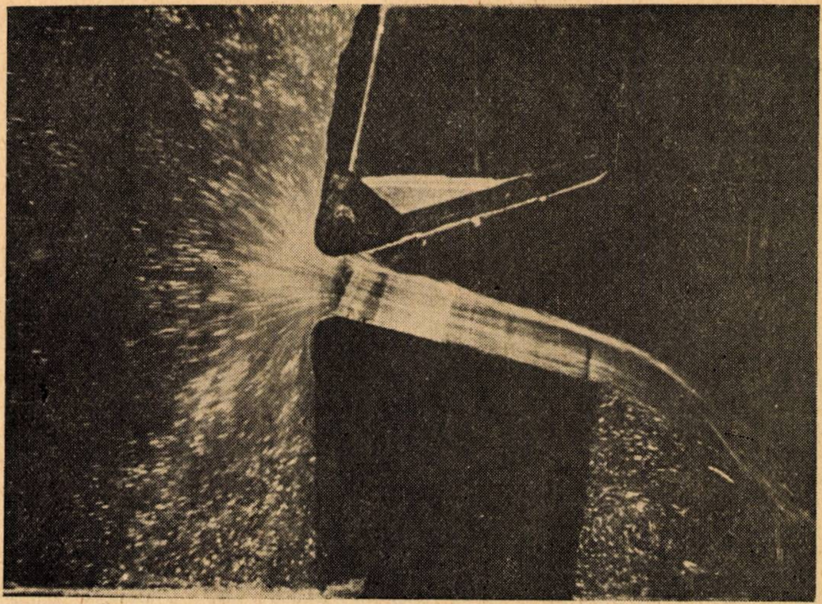


Fig. 45

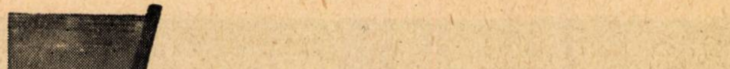


Fig. 46

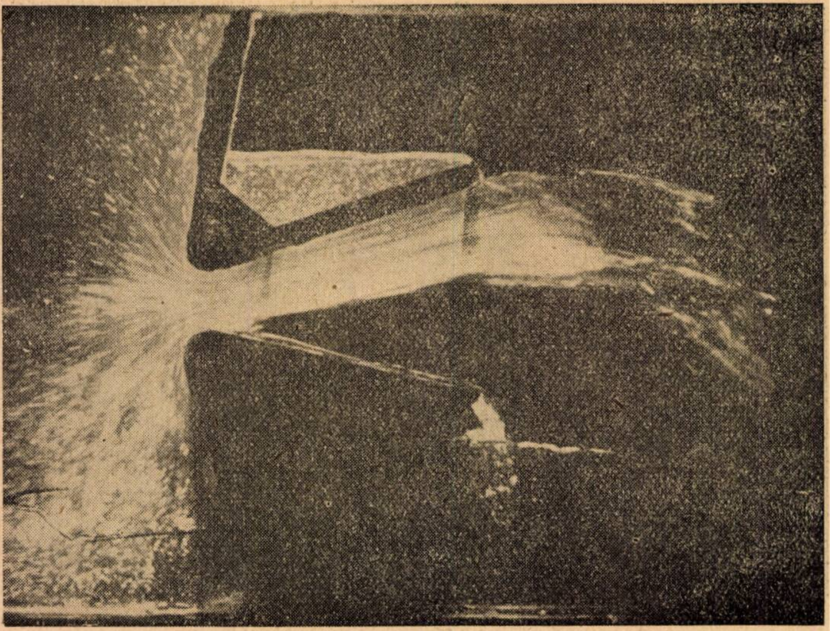


Fig. 47

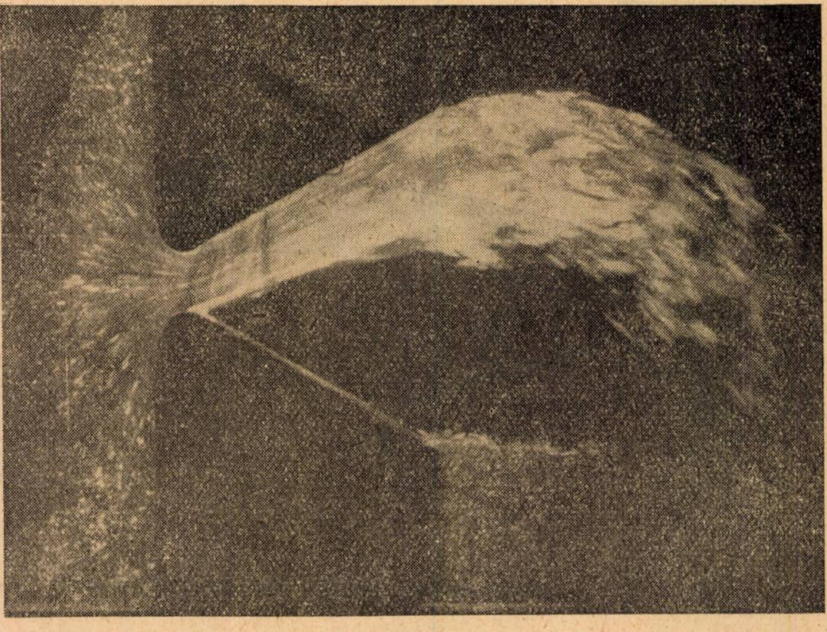


Fig. 48

Pile de pod sau de baraj mobil. Cînd o pilă nu este îndeajuns de profilată, vîrtejurile alternate ale lui Benard-Karman se formează în dîra din spatele acesteia, afară numai dacă, prin acțiunea a două fante aspiratoare se suprimă desprinderea (fig. 49, 50, 51).

Coturi în unghi drept la canale descoperite. La capătul interior al unui cot în unghi drept al unui canal descoperit, dîrele se desprind

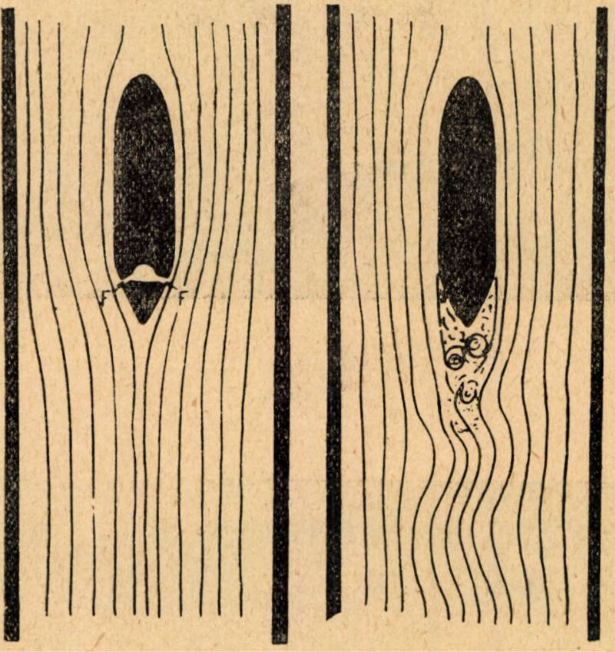


Fig. 49

și se produce o zonă turbionară importantă, generatoare de pierderi de sarcină și de depozite, afară numai dacă, prin acțiunea unei fante aspiratoare, se provoacă realipirea dîrelor (fig. 52).

Figura 53 înfățișează fotografia primului fenomen, iar figura 54, scurgerea obținută cu ajutorul aspirației prin fantă.

Devierea caracteristică a unei vîne. Să luăm un canal funcționînd sub presiune, care este în legătură cu un bazin al cărui fund orizontal se găsește în continuarea fundului canalului (fig. 55).

Jetul înecat rămîne, în mod normal, lipit de fund, iar deasupra lui, o zonă turbionară îl izolează de suprafața liberă, așa cum se vede în figura 56, care reprezintă o secțiune longitudinală a curgerii.

Cu ajutorul unei fante aspiratoare, plasată la locul cuvenit, se poate provoca devierea jetului, care la ieșirea din canal părăsește fundul,

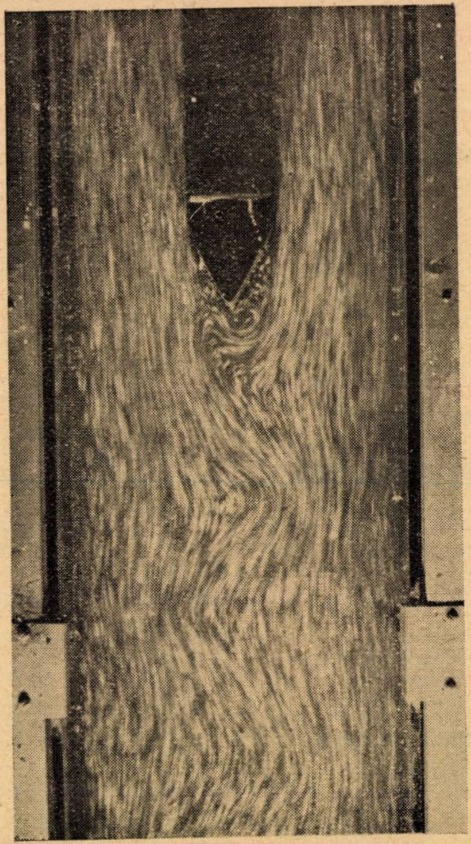


Fig. 50

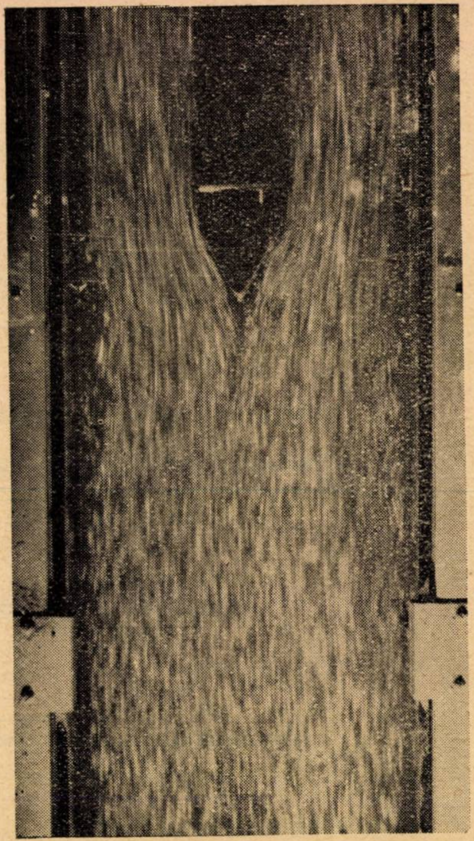


Fig. 51

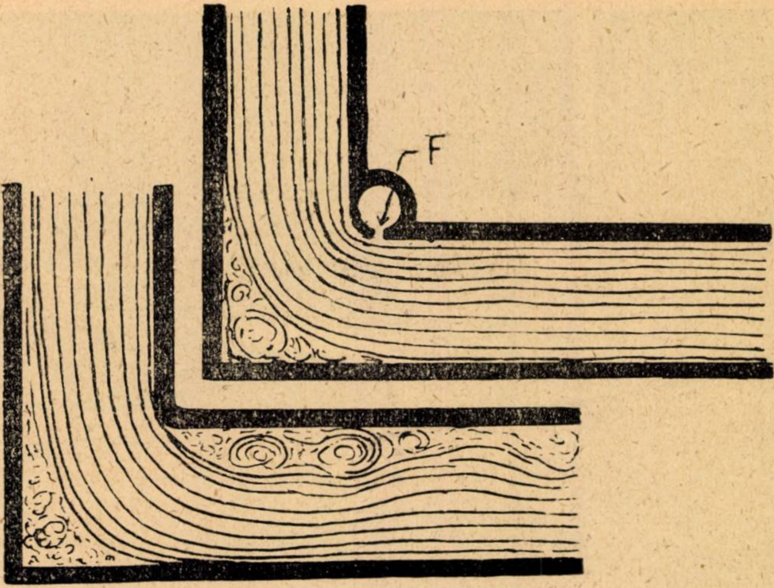


Fig. 52

Fig. 53

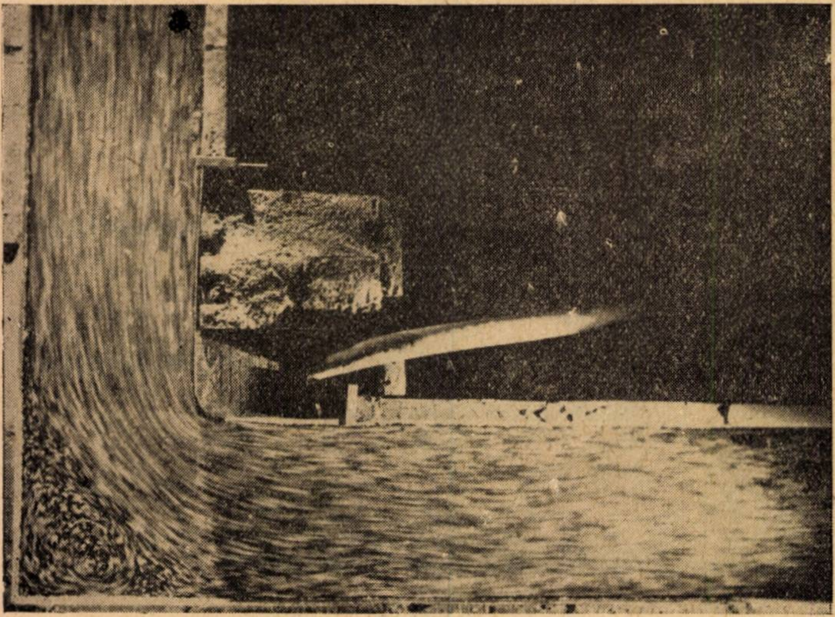


Fig. 54

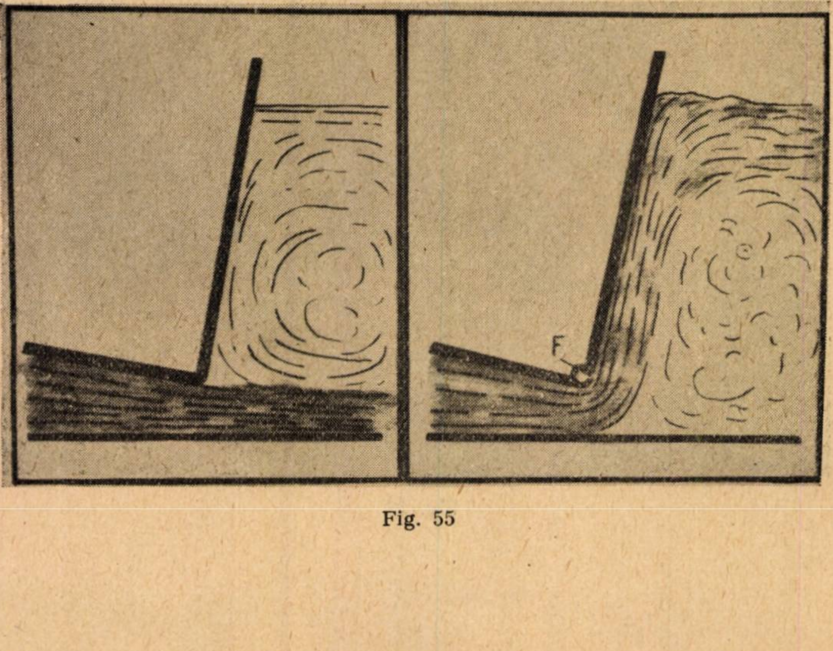


Fig. 55

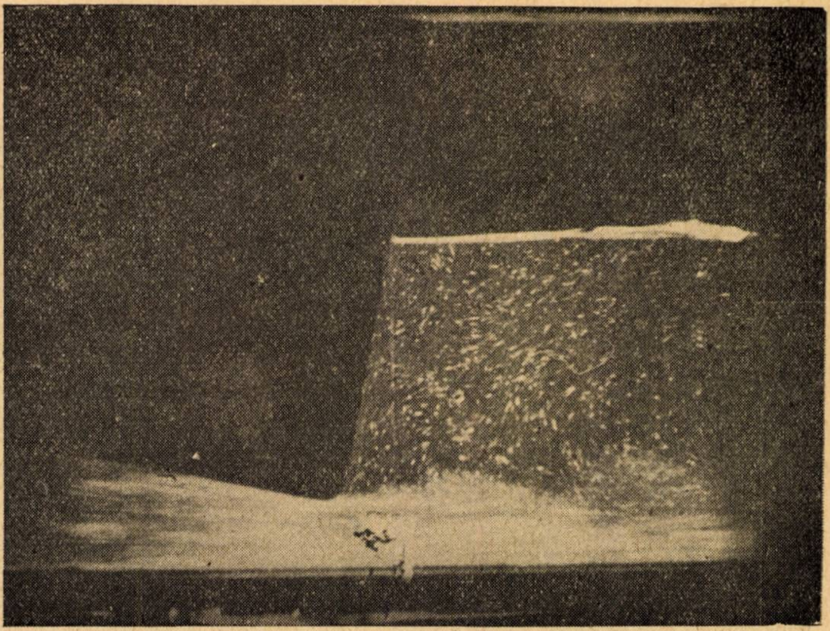


Fig. 56

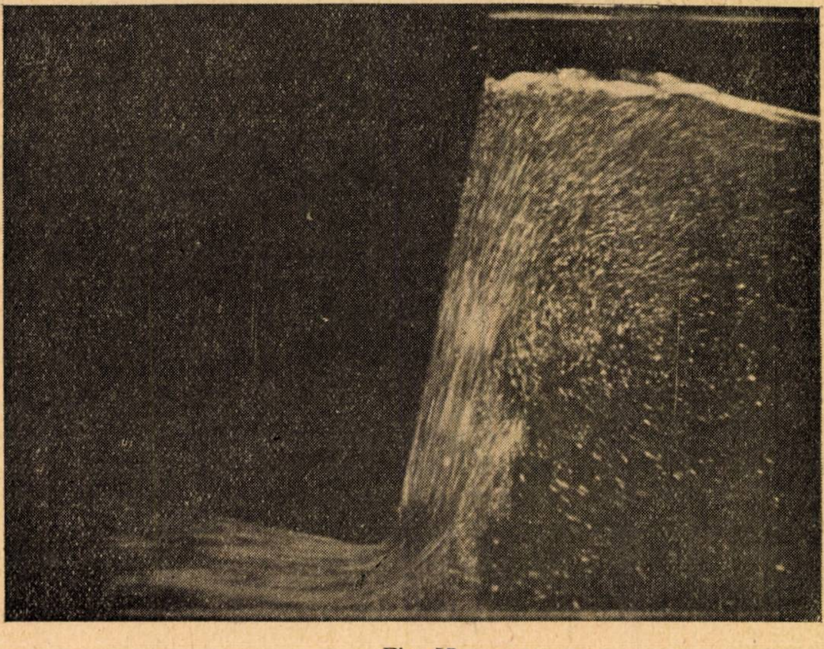


Fig. 57

se lipește de peretele bazinului și apoi urmărește suprafața liberă, așa cum arată figura 57.

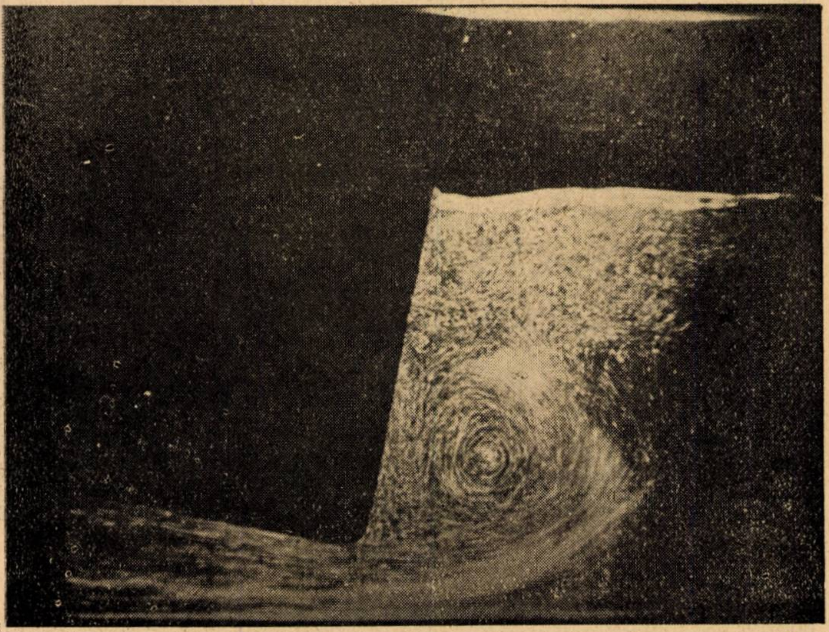


Fig. 58

În figura 58 se vede vîrtejul de regim transitoriu care se formează atunci cînd suprimăm aspirarea cu ajutorul fantei *F* ; jetul părăsește poziția aproape verticală și se plasează pe fundul canalului.

4. CONCLUZII

Cele cîteva exemple pe care le-am expus în această lucrare, ne îngăduie să apreciem numeroasele posibilități de aplicare a procedeului de eliminare a desprinderilor, prin aspirarea stratului limită.

Unele dispozitive sînt în mod sigur rentabile (baraje, prize de apă), altele nu vor fi rentabile decît în cazuri foarte speciale.

Oricum, folosirea acestor procedee deschide un orizont foarte vast și desigur rodnic, în tehnica marilor lucrări hidrotehnice.

Primit la redacție la 24 aprilie 1958.

УЛУЧШЕНИЕ УСЛОВИЙ РАБОТЫ КРУПНЫХ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ УСТАНОВОК ПУТЕМ ВСАСЫВАНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Отрывные течения, встречающиеся при эксплуатации различных гидротехнических установок, вызывают, обычно, понижение коэффициента расхода и изменение распределения давлений.

В этой работе рассматривается несколько случаев таких отрывных течений, причем для устранения создающихся неблагоприятных эффектов даются эффективные решения, заключающиеся во всасывании пограничного слоя в соответствующих зонах.

Таким образом, в случае водосливной плотины рекомендуется создать всасывающие щели с водосборником и водосбросом вниз по течению. Эти приспособления, расположенные на гребне водосливов, значительно улучшают условия течения.

Далее в работе рассматривается применение вышеуказанного метода и в случае водозабора в точке изменения течения реки, а также и в случаях течения через диффузор, течения со свободной поверхностью на изгибах и обтекания быков.

Приведенные в работе примеры позволяют оценить многочисленные возможности применения способа устранения отрывов путем всасывания пограничного слоя.

Представленные исследования проводились в гидравлических лабораториях в Тулузе и в подведомственных им лабораториях в Банлеве.

ON SOME POSSIBILITIES OF CHANGING THE FLOW CHARACTERISTICS IN HYDRAULIC STRUCTURES BY BOUNDARY LAYER SUCTION

ABSTRACT

Separation of streams, which may take place in various hydraulic structures, generally produces a decreasing of the discharge coefficient and a modification of the pressure distribution.

This paper discusses some cases of such separations and presents effective solutions for avoiding the resulting negative effects. These solutions consist in the boundary layer suction within the regions where the phenomenon occurs.

Thus, in the case of spillways, the author recommends the use of collecting and evacuating suction slots. Such arrangements of the spillway crest essentially contribute to the improvement of flow conditions.

Further on, the paper deals with the application of the same method in the case of a take-off situated at the point of deviation and in other cases, e.g., flow through diffusers, flow with free-surface through bends and flow around pillars.

Some examples the author gives show various possibilities of boundary layer suctions for avoiding the separation of streams.

Experimental research works were carried out at the Toulouse and Banlève hydraulic laboratories.

CONTRIBUȚII TEORETICE ȘI EXPERIMENTALE LA STUDIUL MIȘCĂRII PESTE DEVERSOARE

DE

D. DUMITRESCU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.
V. IONESCU și C. IANCU

INTRODUCERE

Problema mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă este una dintre cele mai studiate din hidraulică și a constituit în permanență obiectul principal al cercetătorilor. Din anul 1915 de cînd a fost abordată în forma sa cea mai generală de H. Villat [1] a fost reluată în repetate rînduri sub diferite forme, în cazuri generale sau particulare, fără a fi cu toate acestea complet rezolvată. Dificultățile care se ivesc în studiul acestor probleme constau în special în aplicarea rezultatelor teoretice la cazuri concrete de scurgere. Rezultatele teoretice de o deosebită importanță obținute de H. Villat în lucrarea menționată mai sus, care trebuie considerată ca fundamentală în teoria scurgerii fluidelor grele cu suprafață liberă, de F. Aimond [2], H. Poncin [3] și R. Gerbert [4], în tezele lor de doctorat, pentru a nu cita decît pe cele mai importante și mai vaste în același timp, nu sînt de natură să satisfacă în întregime necesitățile practice curente.

Soluții complete, capabile să fie verificate experimental, au fost obținute numai în cazuri particulare. Printre primele lucrări în această direcție menționăm teza de doctorat a prof. D. Dumitrescu [5].

Pentru studiul mișcării unui fluid greu cu suprafață liberă, care are aspectul general din figura 1, problema matematică revine la determinarea în domeniul (D) a potențialului complex al mișcării $f(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y)$ care să satisfacă următoarele condiții pe contur:

1. Suprafața (L) să fi o linie de curent și pe ea să fie satisfăcută relația lui Bernoulli

$$V^2 + 2gy = \text{const.} \tag{1}$$

2. Suprafața (S) să fie o linie de curent a mișcării.

Exprimînd lucrurile în alt mod, problema matematică revine la determinarea unei funcţii armonice $\psi(x, y)$ în aşa fel, încît pentru $\psi(x, y) = Q$ (Q fiind debitul) să avem satisfăcută relaţia

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + 2gy = \text{const.}$$

Sub această formă problema este foarte dificilă şi nu a fost rezolvată pînă acum decît aproximativ [5].

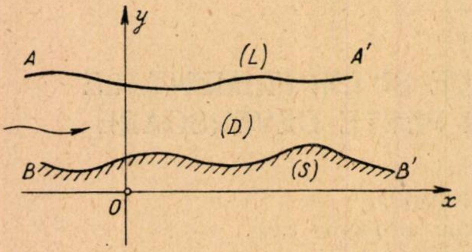


Fig. 1

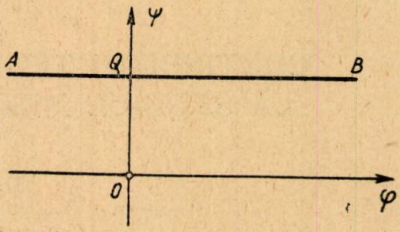


Fig. 2

H. Villat reduce problema mişcării fluidelor grele cu suprafaţă liberă la determinarea funcţiei $F(\alpha)$ din ecuaţia

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\alpha)}{\operatorname{ch}\frac{x-\alpha}{2}}\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{'G(\beta)}{\operatorname{sh}\frac{\beta-x}{2}}\,d\beta + \arccos\frac{e^{3G(\varphi)}\,G'(\varphi)}{g},$$

dacă se dă funcţia $G(\beta)$. A se da însă funcţia $G(\beta)$ înseamnă, dacă se ţine seamă de notaţiile făcute de autor pentru stabilirea formulei de mai sus, a se da într-un anumit fel suprafaţa liberă şi a se deduce apoi forma pereţilor solizi. Se vede imediat că soluţia propusă prezintă numeroase dificultăţi. În primul rînd punctul de la infinit care intră ca limită în integralele formulei, cere o analiză specială, destul de dificilă. Datorită formei complicate a formulei se pot ivi dificultăţi de calcul care nu pot fi rezolvate decît aproximativ, chiar pentru mişcările care se întîlnesc în mod obişnuit în practică. În sfîrşit, pentru determinarea cît mai exactă a pereţilor solizi este necesar un număr mare de încercări destul de dificile. Se poate spune, aşadar, că soluţia propusă nu poate fi folosită în mod curent în rezolvarea problemelor puse de practică.

Alţi autori, dintre care citâm numai pe F. John [6] şi H. Lewy [7], studiază problema în planul funcţiei $f = \varphi + i\,\psi$ unde mişcarea este reprezentată în figura 2. Axa $O\varphi$ reprezintă suprafaţa de scurgere (S) iar dreapta AB suprafaţa liberă (L).

Relaţia lui Bernoulli, care trebuie să fie satisfăcută pe dreapta AB, se obţine din formula (1) în modul arătat mai jos. Se diferenţiază formula (1) şi se obţine:

$$VdV + g\,dy = 0. \tag{2}$$

Ținînd seama de relația generală, valabilă pe o linie de curent,

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i\,\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{e^{i\theta(\varphi)}}{V(\varphi)} \tag{3}$$

deducem

$$V\,dy = \sin\theta\,(\varphi)\,d\varphi, \qquad (4$$

unde $\theta(\varphi)$ este înclinarea vitezei pe suprafața liberă față de orizontală. Introducînd (4) în (2) obținem formula căutată pe linia AB

$$V^2\,dV + g\sin\theta\,(\varphi)\,d\varphi = 0. \tag{5}$$

Acestea fiind stabilite, problema revine la determinarea unei funcții analitice în banda infinită din planul f care să satisfacă pe linia AB relația (5) și să reprezinte axa $O\varphi$ pe suprafața de scurgere (S) din planul z.

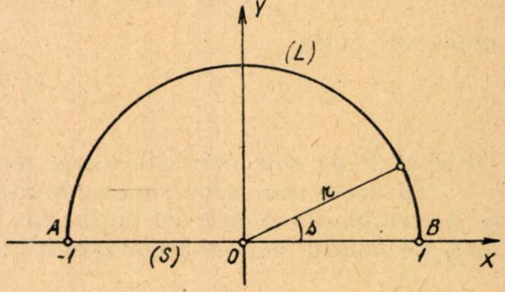


Fig. 3

Acest mod de rezolvare a problemei presupune, ca și cel anterior, cunoscută înclinarea vitezei pe suprafața liberă și cere de asemenea atenție specială pentru punctul de la infinit al benzii din planul f.

Pentru a evita această dificultate H. Poncin [3] și M. Haimovici [8] reprezintă conform, banda din planul f pe semicercul unitar superior dintr-un plan auxiliar $Z = X + iY$ (fig 3).

Funcția de transformare a celor două domenii este

$$f = -\,i\,\frac{q}{2} + \frac{2q}{\pi}\,\log\,\frac{1+Z}{1-Z}\,. \tag{6}$$

Corespondența frontierelor este arătată în figurile 2 și 3 ; diametrul real corespunde suprafeței de scurgere (S) iar semicircumferința corespunde suprafeței libere (L). Pentru rezolvarea problemei, se exprimă viteza cu ajutorul funcției auxiliare definită de relația

$$\omega\,(Z) = i\log\frac{V}{V\,(A)} = f\,(r, s) + i\,g\,(r, s), \tag{7}$$

unde am notat cu r și s coordonatele polare ale unui punct din planul Z. Din (7) rezultă imediat prin separarea părții reale și imaginare

$$V\,(1, s) = V(A)\,e^{g(1,s)} \tag{8}$$

și

$$\theta\,(1, s) = f\,(1, s), \tag{9}$$

unde $V\,(1,\ s)$ și $\theta\,(1,\ s)$ reprezintă modulul vitezei, respectiv înclinarea ei față de orizontală pe suprafața liberă. Din formula de transformare (6) se deduce ușor expresia părții reale pe semicircumferință, care va fi folosită în cele ce urmează

$$\varphi = \frac{2q}{\pi} \log \operatorname{ctg} \frac{s}{2} . \tag{10}$$

Dacă se introduc expresiile (8), (9) și (10) în formula (5) se deduce relația lui Bernoulli care trebuie satisfăcută pe semicircumferința (L) (fig. 3)

$$g'(1, s) \sin s = \mu\, e^{-3g(1,s)} \sin f(1, s), \tag{11}$$

unde am notat

$$\mu = \frac{2q}{\pi} \frac{H(A)}{V(A)^2},$$

$H(A)$ și $V(A)$ sînt mărimile cotei respectiv a vitezei la infinit amonte.

În acest caz, problema la limită se enunță în modul următor: să se determine în semicercul unitar din figura 3 funcția $\omega(Z)$ care să satisfacă pe contur următoarele condiții:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \omega(A) = 0, \\ &\text{b)}\quad f(X, 0) = \theta(X), \\ &\text{c)}\quad g'(1, s) \sin s = \mu \sin f(1, s)\, e^{-3g(1,s)}, \end{aligned} \tag{12}$$

$\theta(X)$ este o funcție presupusă cunoscută, cel puțin calitativ.

Sub această formă, problema nu poate fi rezolvată exact și de aceea se recurge la sistemul de aproximații succesive arătat mai jos. Dacă se notează cu n ordinul unei aproximații oarecare a soluției, atunci aproximația de ordin n trebuie să satisfacă condițiile la limită.

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \omega_n(A) = 0, \\ &\text{b)}\quad f_n(X, 0) = \theta(X) \\ &\text{c)}\quad g'_n(1, s) \sin s = \mu \sin f_{n-1}(1, s)\, e^{-3g_{n-1}(1,s)} \end{aligned} \tag{12'}$$

iar aproximația întîia satisface condițiile

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \omega_1(A) = 0, \\ &\text{b)}\quad f_1(X, 0) = \theta(X), \\ &\text{c)}\quad g'_1(1, s) = 0. \end{aligned} \tag{12''}$$

În foarte multe cazuri de mișcări care se întîlnesc în practică calculul acestor aproximații este foarte dificil și de multe ori este nevoie să se calculeze aproximația unei aproximații a soluției. Acest mod de rezolvare a problemei cere în plus cunoașterea cel puțin calitativă a înclinării vitezei pe suprafața de scurgere, care de multe ori este destul de greu de exprimat.

Cele expuse mai sus arată că toate soluțiile propuse cer date suplimentare pentru rezolvarea problemei, care echivalează cu o cunoaștere apriori a mişcării. În cazul cînd aceste elemente sînt cunoscute din datele problemei, calculele pe care le necesită rezolvarea lor sînt de multe ori impracticabile, aşa încît, se simte nevoia unui procedeu cît mai simplu de rezolvare a problemei.

În lucrarea de faţă, se studiază mişcarea fluidelor grele peste deversoare în diferite condiţii de scurgere folosind metoda diferenţelor finite, cu scopul principal de a arăta procedeul general de calcul, eficacitatea acestei metode şi de a compara rezultatele obţinute cu date experimentale.

În studiul teoretic şi în verificările experimentale făcute, s-a urmărit să se cerceteze în de aproape, tipuri de mişcări peste deversoare, adică mişcările cele mai reprezentative din punctul de vedere al formei deversorului şi al condiţiilor de scurgere la infinit amonte şi la infinit aval de deversor. Avînd în vedere acest lucru, s-au studiat mişcări peste două tipuri de deversoare : deversor cu muchia ascuţită şi deversor cu prag lat.

În cazul mişcării peste deversorul cu muchie ascuţită s-a analizat numai scurgerea lentă la infinit amonte de deversor. Cazul mişcării rapide ni s-a părut mai puţin interesant şi mai rar întîlnit în practica curentă.

La mişcarea peste deversorul cu prag lat se disting mai multe cazuri :

a) Mişcarea lentă la infinit amonte de deversor, în condiţiile înecării totale în avalul deversorului.

b) Mişcarea lentă la infinit amonte de deversor, în cazul cînd lama deversantă este complet aerată (scurgere liberă).

c) Mişcarea lentă la infinit aval, în cazul cînd lama deversantă aderă complet la peretele vertical din avalul deversorului.

d) Mişcarea rapidă la infinit amonte de deversor.

Nu pretindem că s-au epuizat în felul acesta toate cazurile de deversoare şi de scurgere care se întîlnesc în mod obişnuit în practică, dar credem că s-au avut în vedere tipurile cele mai reprezentative de mişcări peste deversoare.

Metoda folosită se bazează pe integrarea numerică a ecuaţiilor mişcării fluidelor grele cu suprafaţă liberă şi a fost expusă într-o lucrare a noastră publicată anterior [9].

În lucrarea de faţă se va arăta cum se aplică metoda generală la cazurile studiate şi se vor reaminti cîteva formule care vor folosi în cursul expunerii.

METODA DIFERENŢELOR FINITE

Să considerăm în general mişcarea plană a unui fluid greu pe o suprafaţă de scurgere (S) orizontală la infinit, unde fluidul are o viteză constantă V_∞ de debit Q (fig. 1). Pe suprafaţa liberă (L) acţionează presiunea atmosferică constantă p_0. Presupunînd mişcarea irotaţională, ea va fi complet cunoscută dacă se cunoaşte potenţialul complex în planul mişcării

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y),$$

sau a funcţiei de curent $\psi(x, y)$. Funcţia $\psi(x, y)$ satisface în (D) ecuaţia lui Laplace

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0, \tag{13}$$

ca parte imaginară a potenţialului complex al mişcării. Pe suprafaţa de scurgere (S) trebuie să fie satisfăcută relaţia $\psi[x, y(x)] = 0$, unde $y(x)$ este ecuaţia profilului de scurgere. Suprafaţa liberă (L) trebuie să fie astfel determinată, încît pe ea să fie satisfăcută relaţia lui Bernoulli

$$\frac{V^2}{2g} + y = \frac{V_\infty^2}{2g} + y_\infty = \text{const.}, \tag{14}$$

unde y este cota unui punct curent al suprafeţei libere şi y_∞ este cota suprafeţei libere la infinit amonte faţă de un sistem de axe ales arbitrar. În plus suprafaţa liberă trebuie să fie linie de curent. Condiţia (14) se poate scrie sub forma

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + 2gy = \text{const.}, \tag{15}$$

dacă se ţine seama de expresia componentelor u şi v ale vitezei V

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Pentru rezolvarea problemei s-au folosit reţele de formă pătratică, considerîndu-le cele mai potrivite pentru domenii cu frontiere neregulate (fig. 4). Prin această metodă se obţin valori numerice ale funcţiei $\psi(x, y)$ în nodurile domeniului (D) cu oricît de bună aproximaţie, stabilindu-se în prealabil o relaţie între valorile aproximative ale funcţiei în diferite puncte ale domeniului, relaţie care depinde în general de ecuaţia diferenţială care trebuie integrată şi de natura punctului.

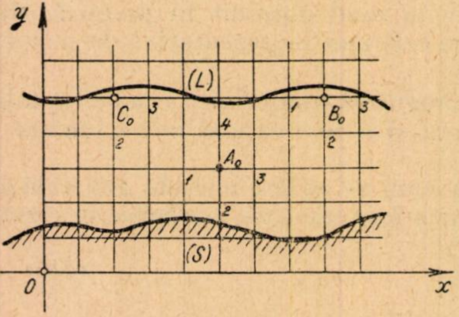


Fig. 4

În figura 4 se vede că nodurile reţelei, care acoperă domeniul de scurgere, se pot împărţi în trei categorii bine distincte notate respectiv cu A_0, B_0, C_0, după cum paşii razelor care converg în punctul respectiv sînt egali între ei sau nu.

În punctul A_0 în jurul căruia toate razele sînt egale cu pasul reţelei, ecuaţia cu derivate parţiale (13) se scrie în diferenţe finite

$$u_0 = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4), \tag{16}$$

unde am notat cu u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 valorile funcţiei ψ (x, y) respectiv în punctele 0, 1, 2, 3, 4 şi cu h pasul reţelei.

Pentru punctul B_0 în jurul căruia numai trei raze sînt egale cu h şi una cu δ, se obţine

$$u_0 = \frac{\delta}{2(h+\delta)}(u_1 + u_3) + \frac{h}{(h+\delta)^2}(h\,u_2 + \delta\,u_4), \tag{17}$$

unde s-au păstrat aceleaşi notaţii, iar pentru punctul C_0, unde sînt două raze mai mici ca h egale respectiv cu ε şi δ se obţine formula aproximativă

$$u_0 = \frac{\varepsilon\delta}{(h+\varepsilon)(\delta+\varepsilon)}u_1 + \frac{h\varepsilon}{(h+\delta)(\varepsilon+\delta)}u_2 + \frac{h\delta}{(h+\varepsilon)(\delta+\varepsilon)}u_3 + \\ + \frac{\varepsilon\delta}{(h+\delta)(\varepsilon+\delta)}u_4. \tag{18}$$

Relaţia lui Bernoulli (15), care va fi folosită în mod curent în cele ce urmează, capătă următoarea formă

$$\frac{(u_0 - u_2)^2}{2g\delta^2} + \frac{(u_0 - u_3)^2}{2g\varepsilon^2} + y = \text{const.}, \tag{19}$$

dacă se exprimă derivatele prin diferenţe finite. Modul cum au fost obţinute formulele (16), (17), (18) şi (19) este arătat în lucrarea citată [9].

Înainte de a prezenta cazurile studiate, se va expune metoda generală de determinare a suprafeţei libere, sau a suprafeţelor libere, pentru a nu se mai repeta acest lucru la fiecare caz în parte. Fie că trebuie determinată o singură suprafaţă liberă (ca în cazul deversoarelor înecate), fie că trebuie determinate mai multe suprafeţe libere (ca în cazul deversoarelor cu lama aerată) la început ele se aleg arbitrar. Se determină în planul mişcării domeniul format din suprafaţa de scurgere (S), suprafaţa liberă (L) şi două linii normale la liniile de curent în amonte şi în aval de deversorul care se studiază. Aceste două linii trebuie trasate la distanţă suficient de mare pentru ca în această zonă liniile de curent ale mişcării să fie cît mai paralele.

O dată determinat domeniul (D), el se acoperă cu o reţea de pas oarecare. La început se recomandă ca pasul reţelei să se aleagă cît mai mare, pentru a se evita calculele inutile şi a se determina cît mai repede o suprafaţă liberă apropiată de cea reală. În fiecare din nodurile reţelei se dau valori arbitrare funcţiei ψ (x, y) care trebuie determinată şi se verifică succesiv fiecare din aceste valori de mai multe ori cu una din relaţiile (16), (17) sau (18), după natura punctului pînă cînd ele nu se mai schimbă. După determinarea valorilor funcţiei ψ (x, y) în fiecare din nodurile reţelei cu procedeul indicat, se verifică relaţia lui Bernoulli cu ajutorul relaţiei (19). Dacă valorile constantei lui Bernoulli obţinute în mai multe puncte de pe suprafaţa liberă sînt aproximativ egale, se îndeseşte reţeaua reducîndu-se pasul la jumătate şi cu noua reţea se procedează ca şi cu precedenta. Dacă relaţia (19) nu este verificată cu suficient de bună aproximaţie se schimbă suprafaţa liberă şi în noul domeniu (D)

astfel format se determină valorile funcţiei $\psi(x, y)$ în fiecare din nodurile reţelei, aşa cum s-a spus mai sus. Această operaţie se repetă pînă cînd constanta lui Bernoulli determinată în mai multe puncte de pe suprafaţa liberă are valori aproximativ egale. Operînd în felul acesta asupra pasului reţelei şi asupra suprafeţei libere, se obţine valoarea numerică a funcţiei $\psi(x, y)$ în fiecare nod al reţelei care acoperă domeniul (D) deci se determină complet mişcarea. Tehnica de calcul expusă mai sus va rezulta mai clar din prezentarea cazurilor studiate.

Aşa cum s-a arătat la începutul acestui capitol, în această lucrare se studiază teoretic scurgerea peste deversoare cu prag lat şi cu muchie ascuţită şi se compară rezultatele obţinute cu măsurători experimentale.

În cele ce urmează se va studia amănunţit fiecare caz în parte şi se vor arăta rezultatele teoretice obţinute prin aplicarea metodei diferenţelor finite. În continuare se va descrie instalaţia experimentală în care s-au făcut verificările rezultatelor teoretice, se vor compara rezultatele obţinute şi se vor trage concluziile care rezultă din această comparaţie.

REZULTATE NUMERICE

Deversorul cu muchie ascuţită. Mişcarea peste deversorul cu muchie ascuţită şi lama aerată are aspectul general arătat în figura 5.

S-a presupus că înălţimea lamei de fluid la infinit amonte este H, viteza, constantă la infinit, este V_∞ iar înălţimea deversorului este h.

Deoarece s-a presupus că lama deversantă este aerată, trebuie determinate două suprafeţe libere $A'C'$ şi BC pe care acţionează presiunea atmosferică p_0.

Aceste două suprafeţe libere se aleg la început arbitrar şi apoi se procedează ca în cazul general expus mai sus. Dacă se consideră că pe suprafaţa $AOBC$ funcţia $\psi(x, y)$ are valoarea zero, atunci pe suprafaţa $A'C'$ funcţia $\psi(x, y)$ va avea valoarea Q, unde s-a notat cu Q debitul scurgerii. Pentru ca problema să poată fi rezolvată mai trebuie determinate valorile funcţiei $\psi(x,y)$ pe liniile AA' şi CC', normale la liniile de curent şi alese la distanţă suficient de mare de deversor.

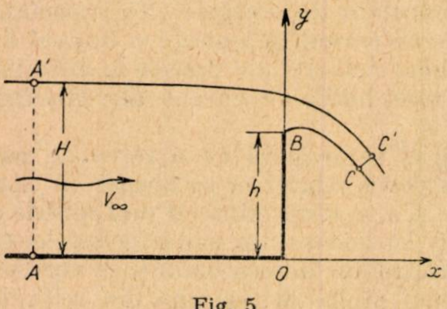


Fig. 5

S-a considerat că la infinit amonte fluidul are viteza constantă V_∞. În această regiune mişcarea este paralelă, deci componenta v a vitezei este nulă. Din relaţia

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = V_\infty$$

se deduce prin integrare

$$\psi(\infty, y) = V_\infty y + c,$$

unde c este o constantă de integrare. Deoarece pe suprafaţa AO s-a presupus că $\psi(x, y) = 0$ rezultă imediat $c = 0$. Pe linia AA' rezultă aşadar o repartiţie liniară a valorilor lui $\psi(x,y)$

$$\psi(\infty, y) = V_{\infty} y.$$

Pe linia CC' se poate presupune că există de asemenea o repartiţie liniară a valorilor lui $\psi(x, y)$. În adevăr, în această zonă suprafeţele libere superioară şi inferioară pot fi considerate aproximativ paralele. În acest caz viteza prin lama deversantă este constantă, după cum reiese imediat din relaţia lui Bernoulli. Se poate scrie aşadar

$$V_c = \frac{\partial\psi}{\partial n},$$

unde n este normala comună celor două suprafeţe libere. Relaţia de mai sus arată că în adevăr valorile lui $\psi(x, y)$ sînt liniar repartizate pe dreapta CC' aleasă suficient de departe de muchia deversorului. Aceste date fiind stabilite problema determinării mişcării poate fi rezolvată complet.

A fost studiat cazul particular în care $H = 3$ m, $V_{\infty} = 0{,}66$ m/s $h = 2$ m. S-au ales, cum s-a spus mai sus, suprafeţele libere în mod arbitrar orientîndu-se numai după aspectul general al mişcărilor peste deversoare aşa cum rezultă el din datele experimentale. O dată alese liniile libere şi liniile AA' şi CC' domeniul (D) este complet definit, iar valorile funcţiei sînt bine determinate pe contur, aşa cum s-a arătat mai sus. Se poate, aşadar, determina valoarea funcţiei de curent în fiecare din nodurile reţelei care acoperă domeniul (D), după procedeul general expus în capitolul precedent.

Rezultatele calculelor făcute de noi sînt arătate în figurile 6 şi 7. Figura 6 reprezintă valorile funcţiei de curent în fiecare din nodurile reţelei pentru cazul studiat. Aceste valori sînt înmulţite cu 100, pentru a evita zecimalele. Cu ajutorul acestor valori se pot determina repartiţiile de viteze şi de presiuni în orice secţiune a mişcării, ţinînd seamă de expresia componentelor vitezei şi de relaţia lui Bernoulli.

Se constată că rezultatele obţinute sînt foarte apropiate de cele experimentale iar în cele ce urmează se va face acest studiu comparativ detaliat pentru fiecare caz studiat în parte.

Deversoare cu prag lat. Înainte de a fi prezentate toate cazurile de mişcări peste deversoarele cu prag lat studiate, se vor face cîteva consideraţii teoretice generale, specifice deversoarelor cu prag lat, din care va rezulta modul de determinare a cotei suprafeţei libere deasupra pragului deversorului.

Presupunem că s-a realizat o mişcare peste un deversor cu prag lat, care are aspectul din figura 8.

Fiind cunoscute elementele caracteristice ale mişcării la infinit amonte şi elementele deversorului (notate în figură cu V_{∞}, H, H_0, d, h) se pune problema determinării grosimii y a lamei de fluid de pe pragul deversorului. Această mărime rezultă imediat din relaţia lui Bernoulli scrisă în punctul A' la infinit amonte de deversor şi în punctul B' dea-

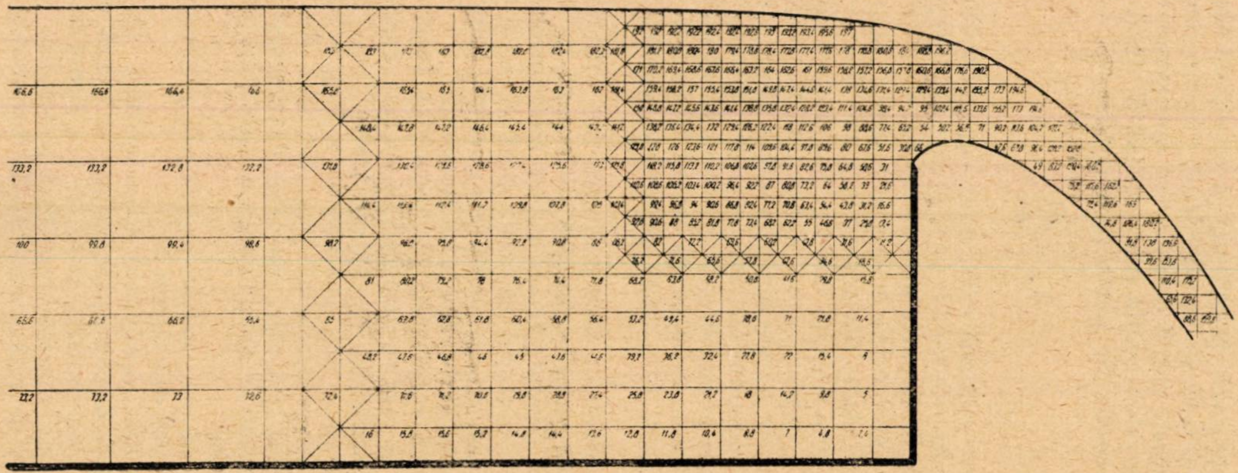


Fig. 6

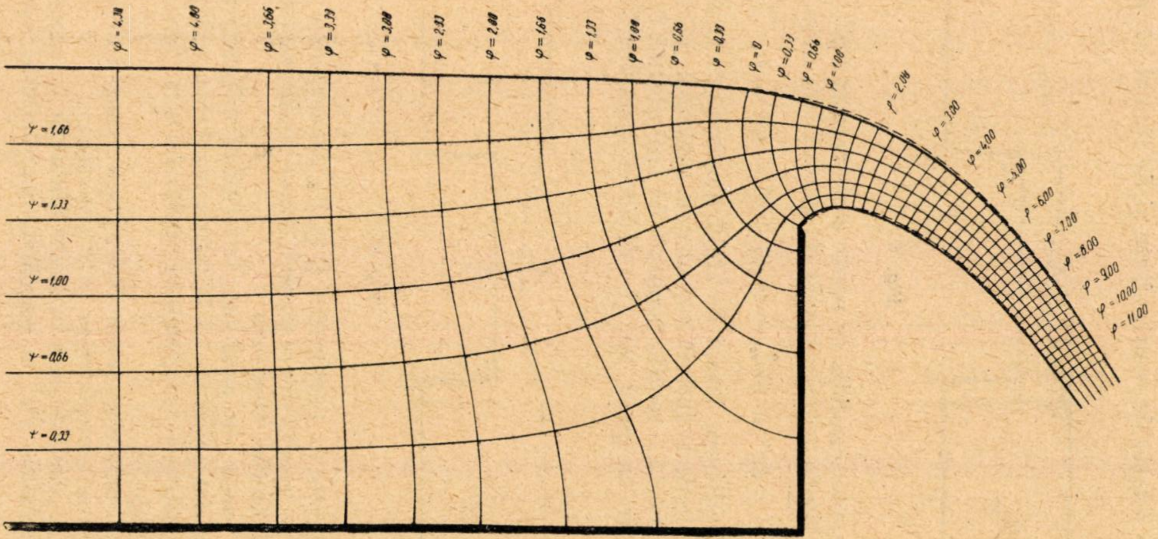

φ = 4,38
φ = 4,00
φ = 3,66
φ = 3,33
φ = 3,00
φ = 2,33
φ = 2,00
φ = 1,66
φ = 1,33
φ = 1,00
φ = 0,66
φ = 0,33
φ = 0
φ = 0,33
φ = 0,66
φ = 1,00
φ = 2,00
φ = 3,00
φ = 4,00
φ = 5,00
φ = 6,00
φ = 7,00
φ = 8,00
φ = 9,00
φ = 10,00
φ = 11,00
ψ = 1,66
ψ = 1,33
ψ = 1,00
ψ = 0,66
ψ = 0,33

Fig. 7

supra pragului deversorului, dacă se consideră dreapta *CD* ca axă de referinţă avem

$$\frac{V_\infty^2}{2g} + H_0 = \frac{V^2}{2g} + y. \tag{20}$$

Ţinînd seama de relaţia de continuitate şi de faptul că pe pragul deversorului mişcarea este paralelă, se poate scrie relaţia $Vy = Q$ care se introduce în (20). Obţinem astfel ecuaţia de gradul trei în y

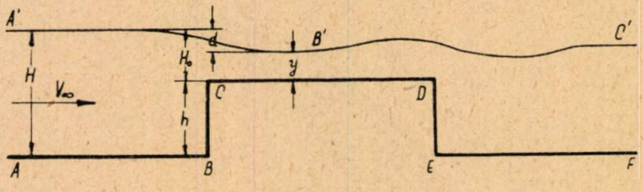


Fig. 8

$$2\,gy^3 - (V_\infty^2 + 2\,gH_0)\,y^2 + Q^2 = 0, \tag{21}$$

care determină înălţimea lamei de fluid deasupra pragului deversorului, în funcţie de datele de la infinit amonte ale scurgerii (Q şi V_∞).

Ecuaţia (21) este o relaţie deosebit de importantă în studiul mişcării peste deversoarele cu prag lat şi o discuţie amănunţită a caracterului

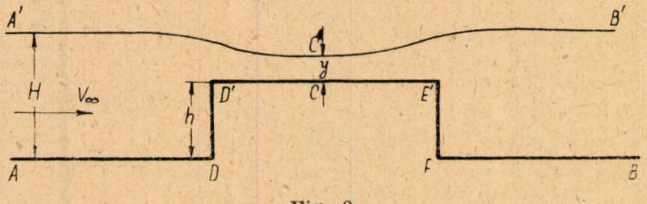


Fig. 9

soluţiilor ei în funcţie de parametrii Q şi V_∞ dă indicaţii preţioase asupra naturii scurgerii pe pragul deversorului. Acest studiu ar putea face obiectul principal al unei lucrări separate.

Deversorul înecat cu prag lat. În studiul mişcării peste deversorul înecat cu prag lat s-a presupus că la infinit aval sînt îndeplinite condiţiile care realizează o mişcare simetrică în raport cu axa verticală de simetrie a deversorului (fig. 9).

În acest caz, mişcarea poate fi studiată numai în domeniul $AA'CC'$, iar restul mişcării se completează prin simetrie.

Pe linia AA', considerată la mare distanţă în amonte de deversor, şi pe linia de simetrie CC' a mişcării, componenta verticală a vitezei este nulă.

Conform unui raţionament folosit în cazul mişcării peste deversorul cu muchie ascuţită, rezultă că pe liniile AA' şi CC' există o variaţie

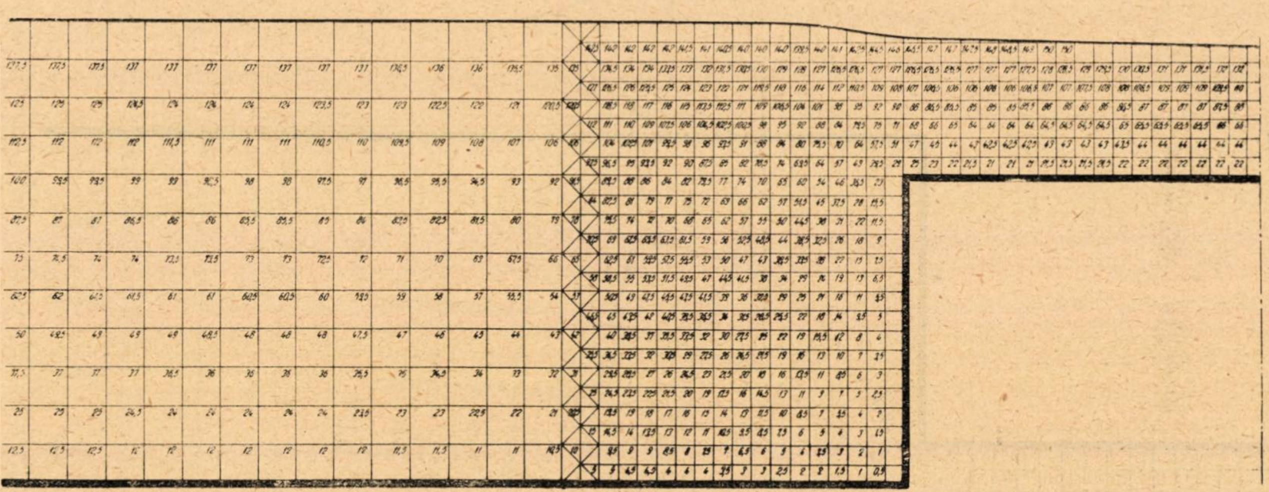


Fig. 10

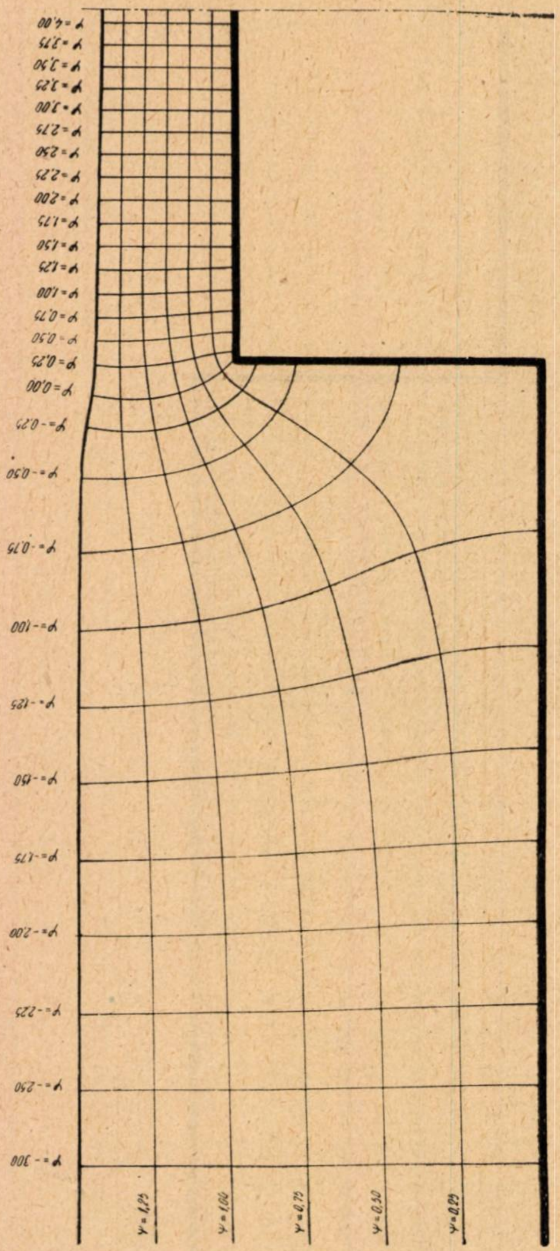

φ=4,00
φ=3,75
φ=3,50
φ=3,25
φ=3,00
φ=2,75
φ=2,50
φ=2,25
φ=2,00
φ=1,75
φ=1,50
φ=1,25
φ=1,00
φ=0,75
φ=0,50
φ=0,25
φ=0,00
φ=-0,25
φ=-0,50
φ=-0,75
φ=-1,00
φ=-1,25
φ=-1,50
φ=-1,75
φ=-2,00
φ=-2,25
φ=-2,50
φ=-3,00
ψ=1,25
ψ=1,00
ψ=0,75
ψ=0,50
ψ=0,25

Fig. 11

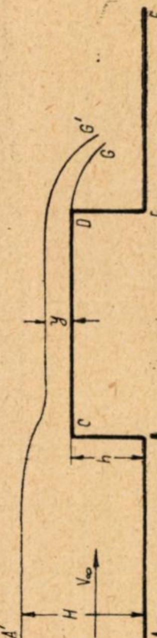

A'
H
V_∞
A
B
h
C
y
D
E
G
G'
F

Fig. 12

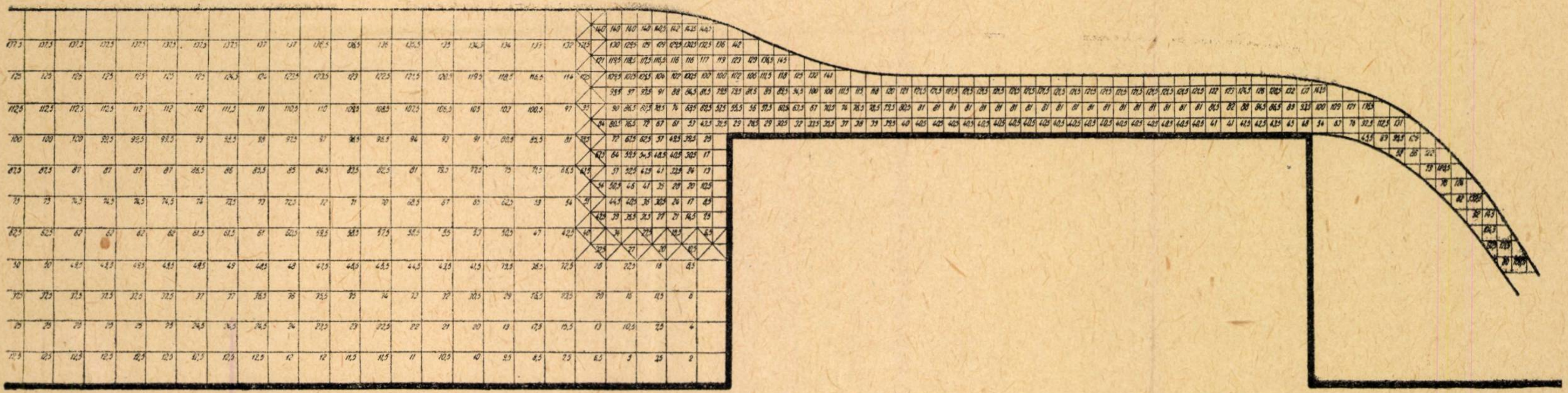


Fig. 13

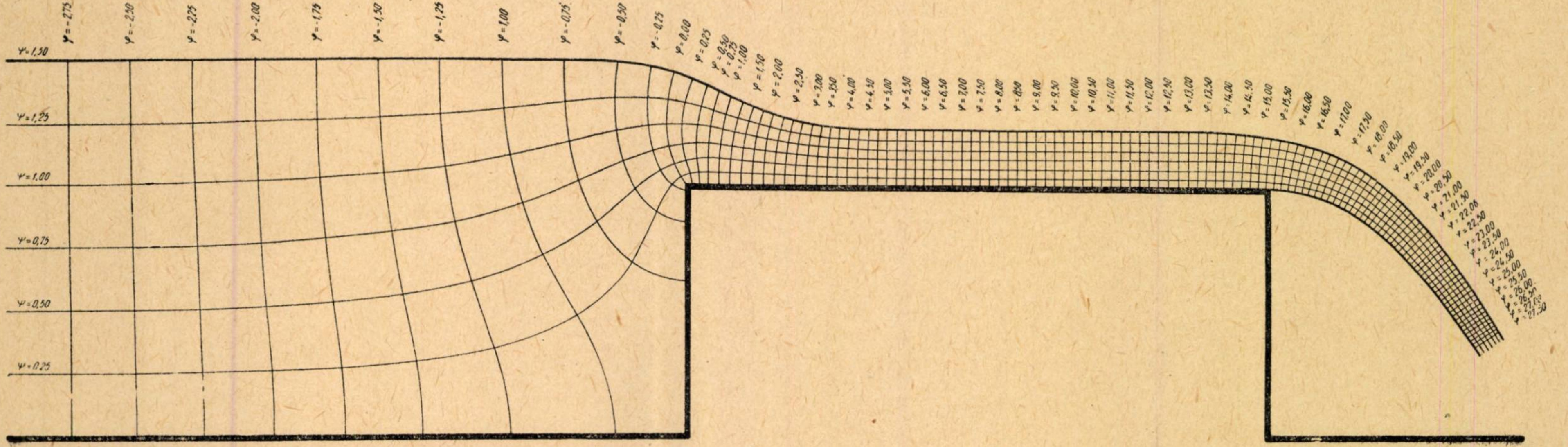

φ = -2,75
φ = -2,50
φ = -2,25
φ = -2,00
φ = -1,75
φ = -1,50
φ = -1,25
φ = 1,00
φ = -0,75
φ = -0,50
φ = -0,25
φ = 0,00
φ = 0,25
φ = 0,50
φ = 0,75
φ = 1,00
φ = 1,50
φ = 2,00
φ = 2,50
φ = 3,00
φ = 3,50
φ = 4,00
φ = 4,50
φ = 5,00
φ = 5,50
φ = 6,00
φ = 6,50
φ = 7,00
φ = 7,50
φ = 8,00
φ = 8,50
φ = 9,00
φ = 9,50
φ = 10,00
φ = 10,50
φ = 11,00
φ = 11,50
φ = 12,00
φ = 12,50
φ = 13,00
φ = 13,50
φ = 14,00
φ = 14,50
φ = 15,00
φ = 15,50
φ = 16,00
φ = 16,50
φ = 17,00
φ = 17,50
φ = 18,00
φ = 18,50
φ = 19,00
φ = 19,50
φ = 20,00
φ = 20,50
φ = 21,00
φ = 21,50
φ = 22,00
φ = 22,50
φ = 23,00
φ = 23,50
φ = 24,00
φ = 24,50
φ = 25,00
φ = 25,50
φ = 26,00
φ = 26,50
φ = 27,00
φ = 27,50
ψ = 1,50
ψ = 1,25
ψ = 1,00
ψ = 0,75
ψ = 0,50
ψ = 0,25

Fig. 14

liniară a vitezelor. Cota y a suprafeţei libere pe pragul deversorului rezultă din ecuaţia (21). Pe suprafaţa de scurgere $ADD'C$, $\psi = 0$, iar pe linia liberă, $A'C' = Q$. Aceste date pe contur fiind stabilite, problema poate fi complet rezolvată, urmînd procedeul general expus la sfîrşitul capitolului precedent şi folosit şi în cazul deversorului cu muchie ascuţită.

În cazul particular studiat s-a considerat că $H = 3$m, $h = 2$m, $V_\infty = 0{,}5$ m/s. De aici rezultă imediat valoarea numărului Froude al mişcării $Fr = \dfrac{V_\infty^2}{gH} = 0{,}0063$. Introducînd aceste valori în relaţia (21) rezultă pentru y două valori reale, distincte, acceptabile din punct de vedere fizic : $y_1 = 0{,}85$, $y_2 = 0{,}462$, a treia soluţie este negativă, $y_3 = -0{,}295$, şi nu corespunde unui caz real de mişcare. Prima dintre aceste valori $y_1 = 0{,}85$ realizează un regim lent de scurgere pe pragul deversorului şi corespunde cazului mişcării înecate în aval de deversor, iar valoarea $y_2 = 0{,}462$ realizează o mişcare rapidă pe pragul deversorului şi corespunde cazului scurgerii libere.

Cunoscînd cota suprafeţei libere la infinit amonte şi cota suprafeţei libere deasupra pragului deversorului, se alege la început o suprafaţă liberă arbitrară, se modifică după procedeul general expus pînă cînd pe ea este satisfăcută relaţia lui Bernoulli cu aproximaţie suficient de bună. În figurile 10 şi 11 sînt arătate rezultatele calculelor efectuate.

Figura 10 reprezintă tabloul valorilor funcţiei ψ (x, y) în toate nodurile reţelei finale care acoperă domeniul mişcării mărginit de suprafaţa liberă aleasă. Valorile funcţiei $\psi(x, y)$ sînt înmulţite cu 100 ca şi în cazul deversorului cu muchie ascuţită, pentru aceleaşi motive. Pe suprafaţa liberă relaţia lui Bernoulli este verificată în fiecare punct cu o eroare care rămîne inferioară lui 5% faţă de valoarea constantei lui Bernoulli la infinit amonte.

Figura 11 reprezintă spectrul hidrodinamic al mişcării (liniile de curent şi liniile echipotenţiale) pentru valorile lui φ (x, y) şi ψ (x, y) arătate în figură.

Deversorul cu prag lat şi lamă deversantă complet aerată. Mişcarea peste deversorul cu prag lat şi lama complet aerată are aspectul general din figura 12.

Deasupra pragului deversorului se realizează o mişcare paralelă, ca şi în cazul precedent, iar pe lama deversantă şi pe suprafaţa liberă trebuie să fie satisfăcută relaţia lui Bernoulli. S-a studiat cazul particular : $H = 3$m, $h = 2$m, $V_\infty = 0{,}5$m. Rezultă de aici $Fr = \dfrac{V_\infty^2}{gH} = 0{,}0063$. Înlocuind aceste date în relaţia (13) se găseşte pentru cota y deasupra pragului deversorului valoarea $y = 0{,}462$ care realizează pe pragul deversorului o mişcare rapidă : $Fr = \dfrac{V^2}{gy} = 2{,}34$. Pe suprafaţa de scurgere $ABCD$ şi pe linia liber inferioară DG, funcţia ψ (x, y) are valoarea zero, iar pe suprafaţa liberă superioară $A'G'$, $\psi(x, y) = 1{,}5$. Pe liniile AA' şi GG' funcţia $\psi(x, y)$ are o repartiţie liniară, conform unui raţionament folosit şi în cazul precedent.

Suprafeţele libere (superioară şi inferioară) se aleg arbitrar şi se modifică succesiv pînă cînd pe ele este satisfăcută relaţia lui Bernoulli, aşa cum s-a procedat şi în celelalte cazuri. Rezultatele calculelor numerice sînt arătate în figurile 13 şi 14.

Valorile funcţiei $\psi(x, y)$ în nodurile reţelei sînt înmulţite şi în acest caz cu 100.

După cum se vede din figurile 13 şi 14 s-a redus studiul mişcării la secţiunea GG', deoarece în zona în care lama deversantă întîlneşte radierul deversorului are loc un fenomen complicat, care nu mai poate fi studiat cu metoda folosită mai sus.

Deversorul cu prag lat şi lama deversantă aderentă. Dacă viteza V_∞ din amontele deversorului este foarte mică şi grosimea lamei de fluid deasupra pragului deversorului este de asemenea mică, se constată experimental şi se verifică prin calcule că lama deversantă aderă complet la peretele vertical al deversorului aşa cum arată figura 15 care reprezintă schematic mişcarea cu lama aderentă.

În domeniul $ABCPP'A'$ mişcarea nu diferă cu nimic de mişcarea studiată în cazurile anterioare şi de aceea s-a studiat mişcarea numai în domeniul $PP'G'G$ care diferă de cazurile anterioare. În cazul particular studiat s-a presupus că $y = 0{,}33$m, iar $V = 1{,}38$m/s. De aici rezultă imediat valoarea numărului Froude pe pragul deversorului $Fr = 0{,}58$.

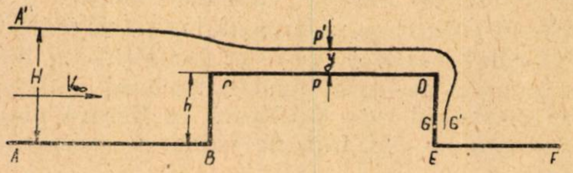


Fig. 15

Procedeul de determinare al suprafeţei libere este cel arătat în cazurile anterioare iar rezultatele numerice obţinute sînt arătate în figurile 16 şi 17. S-a oprit şi aici studiul lamei deversante în aval la secţiunea GG' pentru acelaşi motiv ca în cazul precedent.

Mişcarea rapidă la infinit amonte peste deversorul cu prag lat. Ultimul caz de mişcare studiat este mişcarea peste deversorul cu prag lat, în condiţiile care realizează un regim rapid de scurgere în amonte de deversor. Aspectul general al mişcării este cel arătat în figura 18.

Ca şi în toate celelalte cazuri de mişcări peste deversoare cu prag lat studiate, s-a presupus şi în acest caz că pragul CD al deversorului este suficient de lung pentru ca pe el să se realizeze o mişcare paralelă, similară cu cea de la infinit amonte.

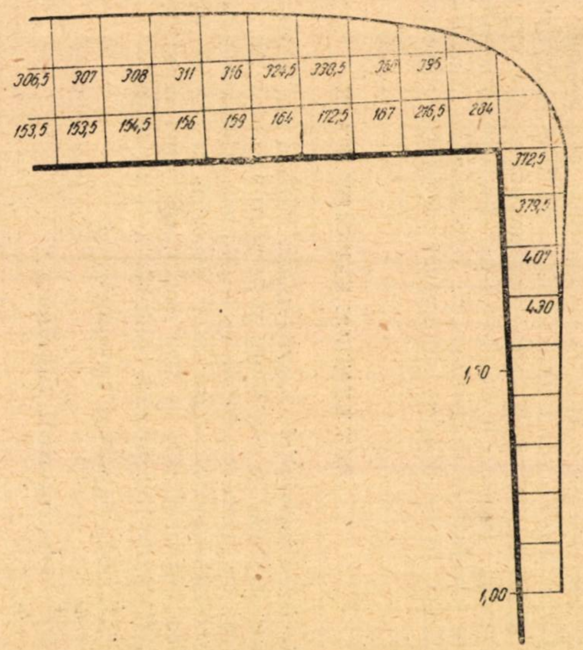

306,5
307
308
311
316
324,5
330,5
395
153,5
153,5
154,5
156
159
164
172,5
167
276,5
284
372,5
379,5
407
430
1,50
1,00

Fig. 16

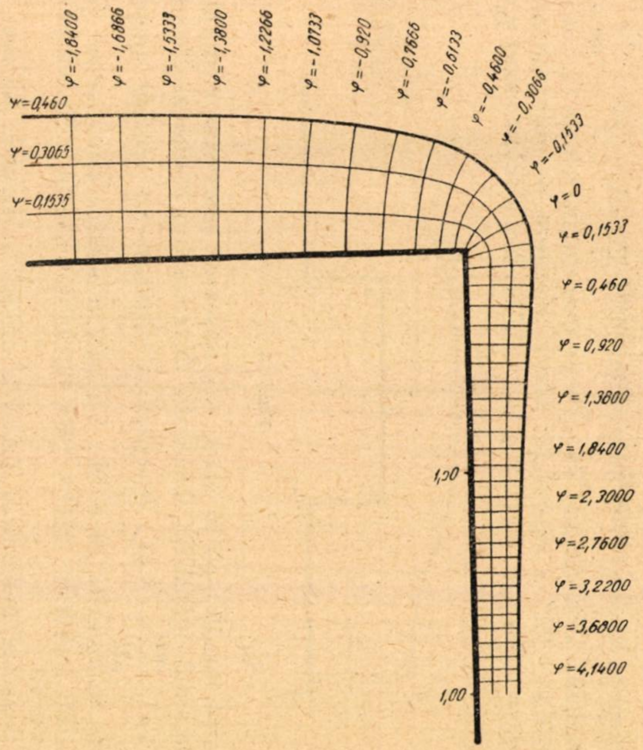

φ = -1,8400
φ = -1,6866
φ = -1,5333
φ = -1,3800
φ = -1,2266
φ = -1,0733
φ = -0,920
φ = -0,7666
φ = -0,6133
φ = -0,4600
φ = -0,3066
φ = -0,1533
φ = 0
φ = 0,1533
φ = 0,460
φ = 0,920
φ = 1,3800
φ = 1,8400
φ = 2,3000
φ = 2,7600
φ = 3,2200
φ = 3,6800
φ = 4,1400
ψ = 0,460
ψ = 0,3065
ψ = 0,1535
1,50
1,00

Fig. 17

S-a studiat cazul particular $H = 3\text{m}$, $h = 2\text{m}$ și $V_\infty = 15$ m/s. De aici rezultă imediat valoarea numărului Froude: $Fr = \frac{V_\infty^2}{gH} = 7{,}54$ (mișcare rapidă). Introducînd valorile de mai sus în relația (13) se obține pentru cota $y = GG'$ a suprafeței libere deasupra pragului deversorului valorile: $y_1 = 3{,}36$, $y_2 = 11{,}719$ și $y_3 = 2{,}611$. S-a studiat cazul $y_1 = 3{,}36$

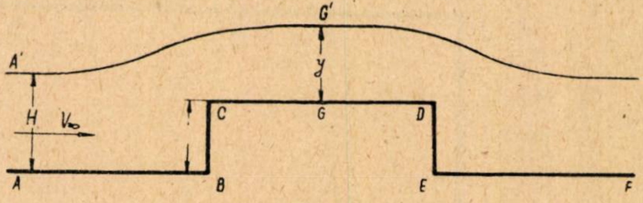


Fig. 18

și se observă imediat că în acest caz mișcarea păstrează regimul rapid în tot domeniul mișcării; deasupra deversorului numărul Froude are valoarea $Fr = \frac{V^2}{gH} = 5{,}44$. Rezultatele obținute în studiul acestui caz sînt arătate în figurile 19 și 20. Valorile numerice ale funcției $\psi(x, y)$ în fiecare din nodurile rețelei care acoperă domeniul de scurgere sînt înmulțite cu 10.

Din aspectul general al mișcării arătat în figurile de mai sus se vede că acest tip de mișcare peste deversorul cu prag lat diferă fundamental de mișcarea lentă în aval de deversor. Nivelul suprafeței libere deasupra pragului deversorului este mai mare decît nivelul în amonte, spre diferență de toate celelalte cazuri, cînd suprafața liberă coboară pe pragul deversorului. Alte particularități ale acestui gen de mișcare vor reieși din cele ce vor urma, cînd se va face comparația rezultatelor teoretice obținute cu verificările experimentale care vor fi prezentate în cele ce urmează. Înainte de a face comparația tuturor rezultatelor numerice arătate cu rezultatele experimentale obținute în laboratorul nostru sau în străinătate, se va descrie amănunțit instalația experimentală cu care s-a lucrat.

REZULTATELE EXPERIMENTALE

Descrierea instalației experimentale. Pentru verificarea experimentală a cazurilor studiate și rezolvate prin metoda rețelelor a fost folosit un canal vitrat cu pantă variabilă și secțiunea prismatică ce face parte din instalația experimentală care va fi descrisă în cele ce urmează (fig. 21).

Ideea conducătoare a fost realizarea unei similitudini Froude în așa fel încît să fie îndeplinită condiția $\lambda = \tau^2$, unde

$\lambda = \frac{l}{l_m}$ este raportul lungimilor și

$\tau = \frac{t}{t_m}$ este raportul timpilor.

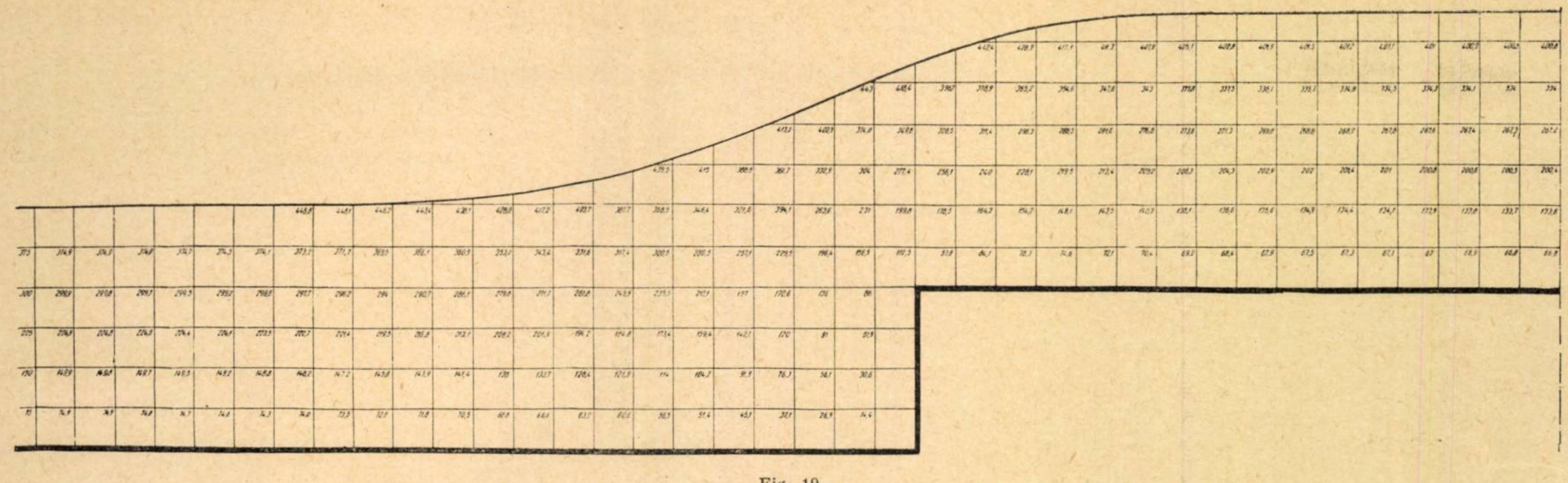

375
300
225
150
75

Fig. 19

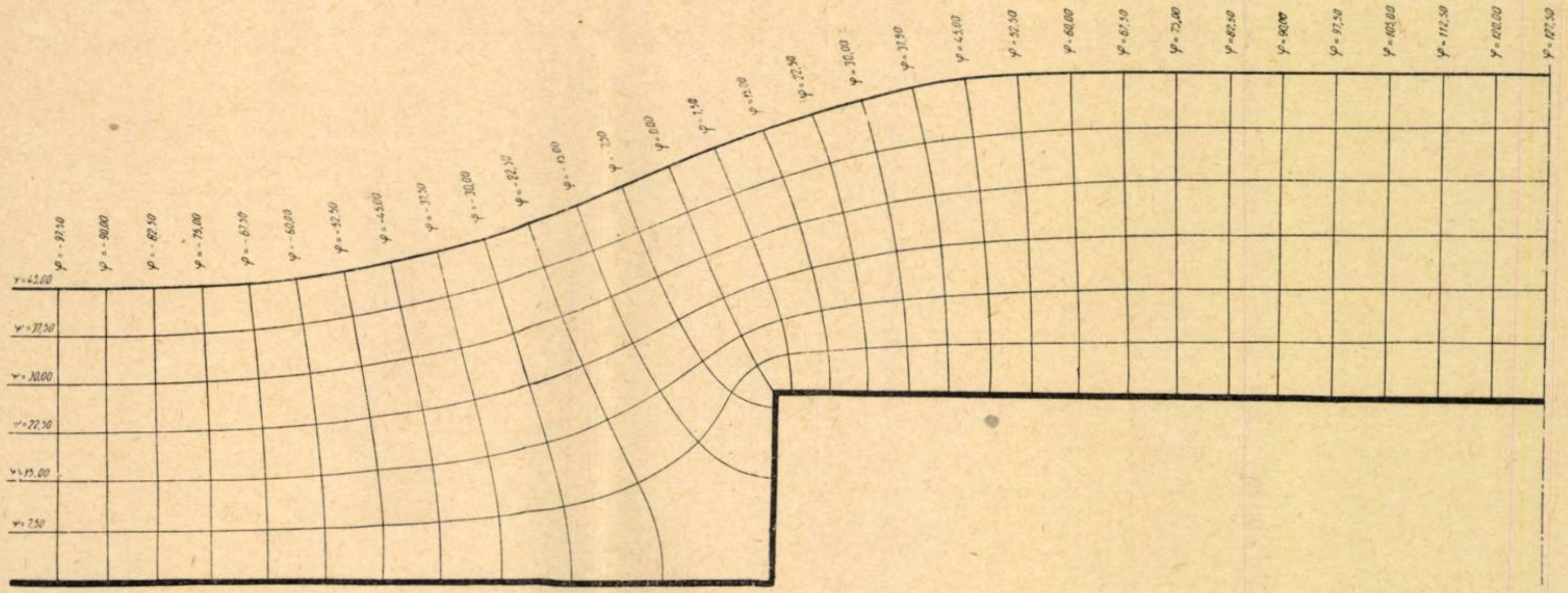
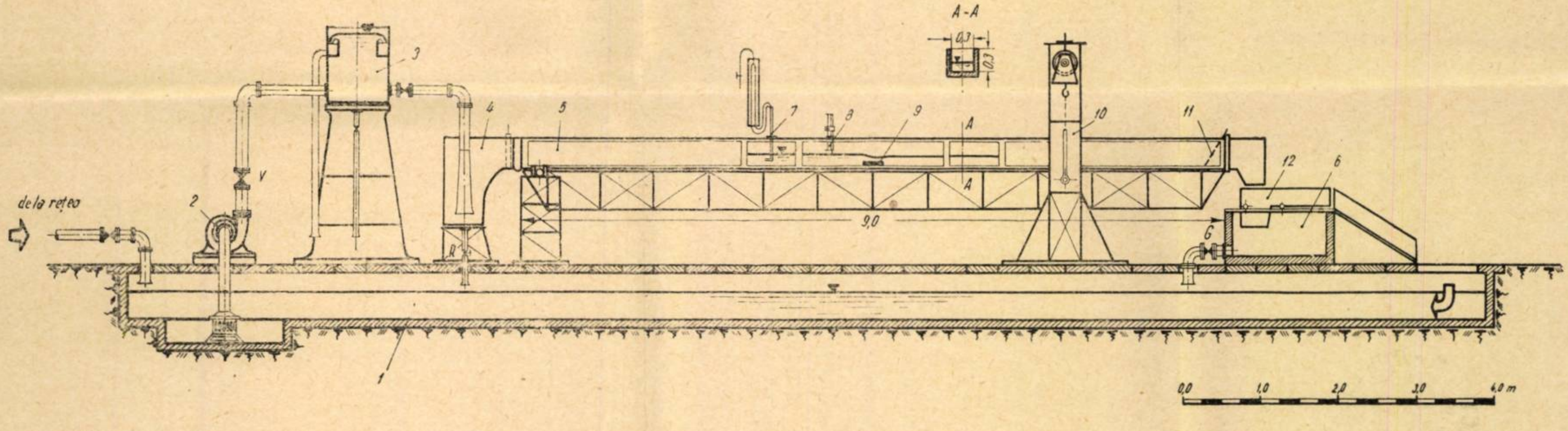

ψ=45,00
ψ=37,50
ψ=30,00
ψ=22,50
ψ=15,00
ψ=7,50
φ=-97,50
φ=-90,00
φ=-82,50
φ=-75,00
φ=-67,50
φ=-60,00
φ=-52,50
φ=-45,00
φ=-37,50
φ=-30,00
φ=-22,50
φ=-15,00
φ=-7,50
φ=0,00
φ=7,50
φ=15,00
φ=22,50
φ=30,00
φ=37,50
φ=45,00
φ=52,50
φ=60,00
φ=67,50
φ=75,00
φ=82,50
φ=90,00
φ=97,50
φ=105,00
φ=112,50
φ=120,00
φ=127,50

Fig. 20


A-A
0,3
0,3
dela rețea
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
V
R
G
A
A
9,0
0,0
1,0
2,0
3,0
4,0 m

1. bazin de aspirație – 2. pompa – 3. rezervor de nivel constant – 4. bazin de liniștire – 5. canal de experimentare 6. dispozitiv de măsură și recirculare a debitului – V. vană de reglaj a debitului – R. vană de reglaj fin a debitului – G. vană de golire – 7. tub Pitot – 8. ac de măsură al nivelelor – 9. deversor cu prag lat experimental – 10. dispozitiv de înclinare a canalului. – 11. dispozitiv de înnecare cu ace – 12. jghiab de deviere.

Fig. 21

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
1848

Cu indice s-au notat mărimile modelului. Pentru lungimi s-a ales raportul $\lambda = 33{,}3$ iar raportul timpilor rezultă $\tau = 5{,}78$.

Din condiția de similitudine aleasă rezultă că în fenomenele studiate s-a considerat viscozitatea fluidului ca neglijabilă.

Instalația folosită pentru studiul experimental al mişcării peste deversoare cu prag lat este arătată schematic în figura 21 și se compune din următoarele părți :

1. bazin de aspirație,
2. stație de pompare,
3. rezervor de nivel constant,
4. bazin de liniştire,
5. canal de experimentare,
6. dispozitiv de măsură şi circulare a debitului.

Bazinul de aspirație, necesar alimentării cu apă al instalației, este format dintr-o cameră de apă și un canal dublu cu o suprafață liberă de 68 m² şi cu un volum de 61 · 2 m³. A fost nevoie de o suprafață liberă aşa de mare pentru a asigura amorsarea pompei, știut fiind că atunci cînd se porneşte pompa, nivelul static al apei din rezervor scade brusc și dacă nu se asigură un anumit volum de apă, nivelul scade aşa de mult că poate coborî sub nivelul sorbului și pompa se dezamorsează.

Umplerea rezervorului se face printr-o conductă de 1/2″ de la rețeaua de apă a orașului.

Stația de pompare alimentează cu apă instalația în timpul experiențelor și se compune dintr-o pompă centrifugă cu un debit maxim $Q = 60$ l/s și o conductă racordată la rețeaua de apă a oraşului. Racordul la rețea a fost necesar pentru cazul cînd debitul necesar experiențelor nu putea fi asigurat de pompă sau cu alte cuvinte debitul necesar era mai mare decît cel dat de pompă. Atît conducta de refulare a pompei cît și racordul de la rețea debitează apă într-un rezervor de nivel constant.

Rezervor de nivel constant realizează un nivel constant al apei în timpul experiențelor ceea ce asigură un debit constant de scurgere. Se știe în adevăr, că viteza de scurgere prin orificii este dată de expresia $V = K\sqrt{2gh}$, unde K este o constantă, iar h diferența de nivel dintre planul de apă și axul orificiului. Deoarece h rămîne constantă în timpul experiențelor, rezultă că viteza, implicit debitul rămîn constante.

S-a realizat nivelul h constant prin montarea unui deversor circular la partea superioară a rezervorului cilindric după cum se vede în figura 21. Apa deversată este evacuată printr-o conductă în rezervorul de apă.

Bazin de liniștire. Din rezervorul de nivel constant apa cade printr-o conductă în formă de difuzor într-un bazin liniştitor. Construit de o anumită formă și prevăzut cu două grătare, unul rar și celălalt des, între care se găsește pietriş, bazinul de liniştire realizează liniştirea apei la intrarea în canalul de experimentare.

Canalul de experimentare are o lungime de 9 m şi o secţiune pătratică 30 × 30 cm^2 confecţionat din lemn şi căptuşit pe toată lungimea lui cu tablă de zinc. În porţiunea de mijloc a canalului unde s-a montat deversorul s-a înlocuit o porţiune din peretele lateral al canalului cu un cristal care permite fotografierea şi urmărirea în timp a variaţiei fenomenului studiat.

Canalul este fixat pe un cadru metalic construit din grinzi cu zăbrele articulat la capătul amonte şi se termină cu o pîlnie ce ghidează apa prin cădere liberă în dispozitivul de măsură şi recirculare a debitului. El se racordează la liniştitor prin intermediul unei legături elastice.

Dispozitiv de măsură şi recirculare a debitului de o formă simplă prismatică 200 × 120 × 60 cm^3 permite recepţionarea unui anumit volum de apă într-un timp dat şi apoi evacuarea lui printr-o vană de golire G în canalul de recirculare.

DISPOZITIVE ŞI INSTRUMENTE DE MĂSURĂ

Deversorul folosit a fost confecţionat din lemn iar pentru a preveni deformarea acestuia în timpul experienţelor a fost fiert în ulei mineral şi apoi vopsit. Prinderea de canal s-a făcut prin patru benzi de tablă aşezate în amonte şi în aval şi apoi etanşat faţă de pereţii laterali şi fund. Dimensiunile deversorului folosit sînt

— înălţimea h_m = 6 cm,
— lungimea δ_m = 24 cm,
— lăţimea L_m = 30 cm.

Profilul suprafeţei libere, care ia naştere în scurgerea peste deversorul model, a fost fotografiat prin vitroul de cristal practicat în unul din pereţii laterali ai canalului.

Variaţia debitului s-a făcut cu ajutorul unei vane de reglaj V montată imediat după flanşa de refulare a pompei. Forma suprafeţei libere fiind instabilă o dată cu cea mai mică variaţie a debitului, s-a prevăzut instalaţia cu o vană de reglaj fin R a debitului montată la partea inferioară a bazinului de liniştire.

Canalul folosit a fost prevăzut cu un dispozitiv de înclinare care a permis realizarea unei viteze de ajungere dorită. Dispozitivul constă dintr-o articulaţie la capătul amonte al canalului, un dispozitiv de variaţie a pantei la capătul aval al canalului şi un cadran cu ac indicator pentru măsurarea înclinării canalului.

Deşi instalaţia este prevăzută cu un bazin de liniştire totuşi atunci cînd apa intră în canal mai are unele perturbări ondulatorii regulate. Pentru a linişti complet suprafaţa liberă, ceea ce este foarte necesar pentru măsurarea cît mai exactă a nivelului amonte al apei din canal, s-au aşezat pe suprafaţa apei imediat după bazinul de liniştire o serie de plăci din lemn legate elastic între ele formînd un sistem de flotori. În acest fel suprafaţa apei în tot timpul experienţelor a fost liniştită.

Înecarea deversorului a fost realizată prin reglarea nivelului aval cu ajutorul unui dispozitiv cu ace montat la sfîrşitul canalului (intrarea în pîlnie), format dintr-un cadru şi mai multe plăci metalice de diferite lăţimi. Înecarea s-a realizat scoţînd sau introducînd în cadru plăci, care asigură o reglare fină a nivelului aval în funcţie de necesitate.

Debitul a fost măsurat cu metoda cea mai simplă însă cea mai exactă, şi anume metoda volumetrică. Principiul ei simplu adică scurgerea unui anumit volum V de apă într-un timp t, permite măsurarea cu o foarte mare precizie a debitului. Instalaţia constă din următoarele părţi :

a) Un bazin de recepţie pe care sînt montate două şine de rulare şi o vană de golire.

b) Un jgheab de deviere ce alunecă pe şinele de rulare prin intermediul unor rulmenţi.

c) Un ac de măsură ce permite citirea nivelelor apei din bazin.

În prealabil s-a ridicat o curbă de capacitate a bazinului de recepţie care a permis citirea directă a volumului de apă scurs.

Nivelul apei amonte de deversor şi nivelele diferitelor puncte ale suprafeţei libere (în regiunea deversorului) au fost măsurate cu ajutorul unui ac de măsură.

Viteza curentului de apă luată în consideraţie a fost cea calculată din debit cunoscînd secţiunea. Rezultatele obţinute prin măsurarea vitezei cu tubul Pitot au dat valori care s-au suprapus peste cele calculate din debit.

MODUL DE LUCRU

După punerea în funcţie a staţiei de pompare s-a căutat să se realizeze nivelul amonte H prin reglarea debitului, acţionînd în prealabil asupra vanei de reglaj V şi asupra vanei de reglaj fin R. S-a măsurat apoi viteza cu ajutorul tubului Pitot, iar debitul cu ajutorul dispozitivului de măsură descris mai sus.

În intervalul de timp cunoscut t, se lasă să curgă apa în dispozitivul de măsură şi se determină volumul scurs cu ajutorul curbei de capacitate a bazinului receptor.

Avînd toate dimensiunile necesare se calculează uşor viteza de ajungere a apei în canal

$$v = \frac{V}{LHt},$$

L fiind lăţimea canalului.

Această viteză trebuie să fie egală cu viteza folosită la calculul suprafeţei libere prin metoda reţelelor.

În cazul scurgerii înecate peste deversorul cu prag lat, înecarea se realizează cu ajutorul dispozitivului descris mai sus. Viteza din amonte variază în acest caz şi în funcţie de înecare, deci realizarea unei înălţimi H şi a vitezei v de ajungere se face printr-un reglaj mai complex manevrînd vana de reglaj fin R şi dispozitivul de înecare.

O dată realizate condiţiile de scurgere dorite, se efectuează fotografierea fenomenului şi se măsoară într-o serie de puncte arbitrare cota suprafeţei libere, pentru a folosi la comparare cu rezultatele obţinute.

Operaţia de măsurare şi trasare a suprafeţei libere s-a făcut în modul următor:

Zona de măsură a suprafeţei libere s-a ales în funcţie de căderea deversorului ($H-h$) şi în funcţie de cazul studiat:

— în amonte de deversor la distanţă de aproximativ $6(H-h)$,

— în aval de deversor la distanţă de aproximativ $8(H-h)$.

Măsurătorile au fost făcute din punct în punct începînd cu amontele pînă ce s-a acoperit toată zona. Distanţa dintre puncte s-a stabilit arbitrar aşa fel, ca acolo unde suprafaţa liberă este mai deformată, distanţa dintre puncte să fie mai mică pentru a copia cît mai exact suprafaţa apei. Pentru fiecare punct s-a măsurat nivelul respectiv faţă de canal.

Pe muchia superioară a canalului a fost montată o riglă gradată, cu ajutorul căreia s-a fixat uşor poziţia acului faţă de punctul de măsură.

Operaţia de măsurare a suprafeţei libere s-a făcut prin întocmirea unei tabele în care au fost trecute punctele şi nivelele respective citite la ac. Pe prima linie sînt indicate poziţiile punctelor de măsură faţă de muchiile amonte şi aval ale deversorului, iar pe a doua linie cotele citite cu ajutorul acului de măsură $\mathcal{H}$. Ultima linie indică nivelul apei în canal H pentru fiecare punct de măsură

$$H = \mathcal{H} - H_0, \qquad H_0 = 77{,}2 \text{ mm},$$

$\mathcal{H}$ este cota suprafeţei libere citită pe scara acului,

H_0 — cota fundului canalului,

H — nivelul apei în canal.

Folosind la fiecare caz în parte cîte un tabel de acest fel a fost posibilă trasarea suprafeţei libere a apei.

S-a folosit instalaţia descrisă mai sus numai la verificările rezultatelor obţinute în studiul scurgerii peste deversoare cu prag lat, iar rezultatele obţinute din studiul mişcării peste deversorul cu muchie ascuţită au fost comparate cu măsurătorile de precizie efectuate la barajul Boulder de pe fluviul Colorado [10].

Verificările experimentale au fost făcute pe două modele de deversoare cu prag lat de dimensiuni $l_1 = 24$ cm, $h_1 = 6$ cm respectiv $l_2 = 24$ cm, $h_2 = 3$ cm. Pe primul model s-au făcut verificările rezultatelor obţinute din studiul mişcării lente în amonte de deversor în toate cazurile prezentate, iar pe al doilea model s-a realizat prin similitudine mişcarea rapidă în amonte de deversor. Folosirea primului model de deversor, pentru realizarea mişcării rapide, ar fi necesitat un debit de apă mai mare decît ar fi putut să-l dea instalaţia. Pentru a înlătura acest inconvenient a fost folosit al doilea model de deversor cu ajutorul căruia s-a putut realiza mişcarea dorită. Ar fi putut fi realizate toate mişcările studiate numai cu ajutorul celui de-al doilea deversor, dar în acest caz măsurătorile ar fi introdus erori mai mari de observaţie, datorită dimensiunilor sale reduse, iar efectul viscozităţii ar fi fost mai mare. Pentru a elimina aceste erori am folosit cele două modele de deversoare.

În cele ce urmează vor fi prezentate detaliat fiecare caz în parte studiat şi se vor trage la urmă concluziile care rezultă din compararea rezultatelor teoretice obţinute, cu datele experimentale.

Deversorul cu prag lat înecat. Acest caz de mişcare a fost experimentat pe primul model de deversor ($l_1 = 24$ cm, $h_1 = 6$ cm). Se vede imediat că în acest caz raportul lungimilor este $\lambda = \frac{l}{l_m} = 33{,}3$ de unde rezultă imediat valoarea raportului $\tau = \frac{t}{t_m} = 5{,}78$. Pentru a realiza similitudinea Froude între mişcarea studiată teoretic şi mişcarea de pe model, trebuie ca numerele Froude ale celor două mişcări să fie egale. În mişcarea studiată, am văzut că $Fr = 0{,}0063$. Pe model $Fr_m = \frac{V^2_{m\infty}}{gH_m}$. Din egalarea celor două numere Froude rezultă valoarea $V_{m\infty} = 8{,}65$ m/s. Mărimea H_m trebuie să aibă valoarea $H_m = \frac{1}{\lambda} H$, $H_m = 9$ cm. S-au realizat aceste condiţii de scurgere cu ajutorul dispozitivului de înecare şi al vanei de reglaj fin. Odată obţinute aceste condiţii de mişcare au fost măsurate în amonte de deversor viteze foarte puţin diferite de valoarea $V_{m\infty} = 8{,}65$ cm/s.

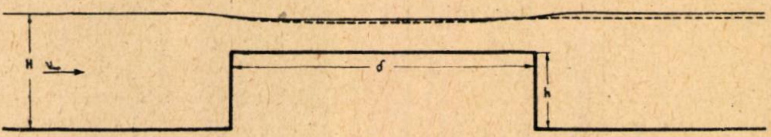


Fig. 22

Figura 22 (şi tabela 1) arată comparativ rezultatele teoretice şi cele experimentale obţinute; linia continuă reprezintă rezultatele studiului teoretic şi linia punctată rezultatele experimentale.

Tabela 1

Punctul măsurat	amonte			muchia amonte	deversor						muchia aval	aval	
	100	60	20		20	60	100	140	180	220		20	60
$\mathcal{H}$	167,2	167,2	166,6	165,2	162,2	160,6	160,0	160,2	161,0	162,0	163,0	163,2	163,2
H	90	90	89,4	88,0	85,0	83,4	82,8	83,0	83,8	84,8	85,8	86	86

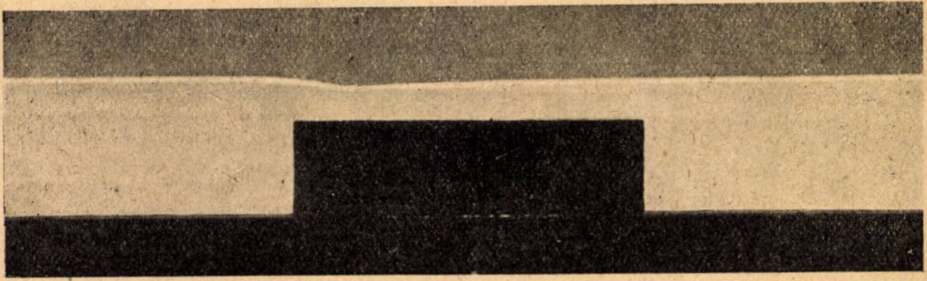


Fig. 23

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁR 1848

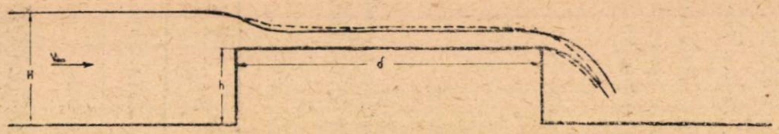


Fig. 24

Tabela 2

Punctul măsurat	amonte			muchia amonte	deversor						muchia aval	aval			
	120	80	40		20	40	80	120	160	200		10	20	30	40
$\mathcal{H}$	167,2	167,2	166,6	163,6	159,4	155,8	154,6	154,6	154,8	154,0	149,4	144,8	137,8	139,0	116,8
											137,2	133,6	127,4	118,4	107,4
H	90	90	89,4	86,4	82,2	78,6	77,4	77,4	77,6	76,8	72,2	67,6	60,6	51,8	39,6
											60	56,4	50,2	41,2	30,2

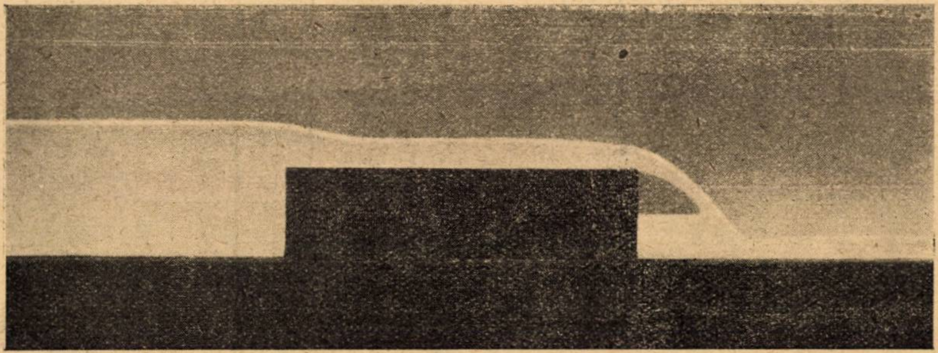


Fig. 25

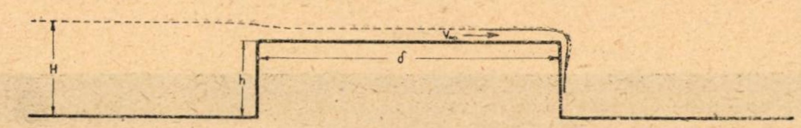


Fig. 26

Tabela 3

Punctul măsurat	amonte			muchia amonte	deversor						muchia aval	aval				
	100	60	20		20	60	120	180	200	220		2,6	3,0	5,0	6,8	7,2
ℋ	151,6	151,6	151,2	149,8	147,8	147,2	147,2	147,0	146,8	146,4	143,6	141,8	141,6	139,2	137,2	—
												97,2	111,2	121,2	131,2	134,2
H	74,4	74,4	74	72,6	70,6	70	70	69,8	69,6	69,2	66,4	64,6	64,4	62	60	—
												20	34	44	54	57

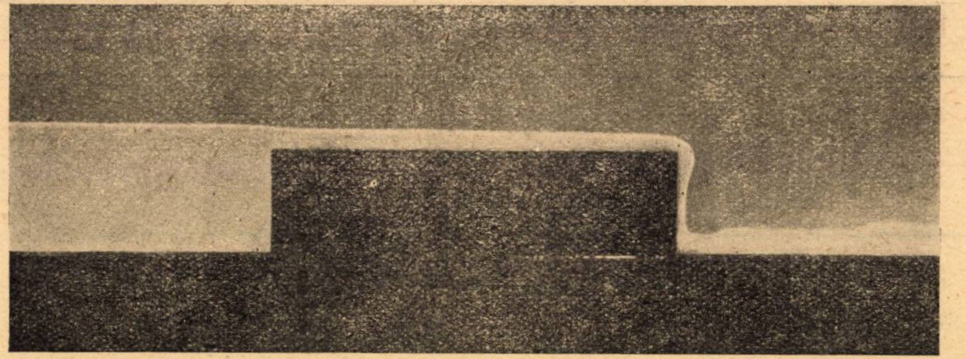


Fig. 27

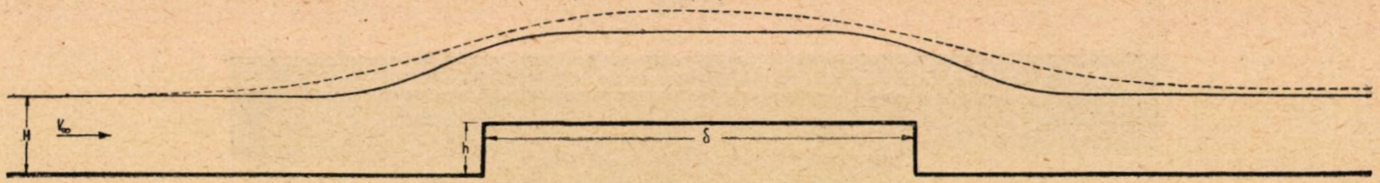


Fig. 28

Tabela 4

Punctul măsurat	amonte					muchia amonte	deversor				muchia aval	aval			
	270	225	150	90	30		45	90	150	195		45	105	180	255
$\varkappa$	122,2	122,2	124,5	130,7	145,4	154,0	164,8	169,4	168,7	164,2	155,2	143,2	131,2	125,9	125,5
H	45	45	47,3	53,5	68,2	76,8	87,6	92,2	91,5	87	78	66	54	48,7	48,3

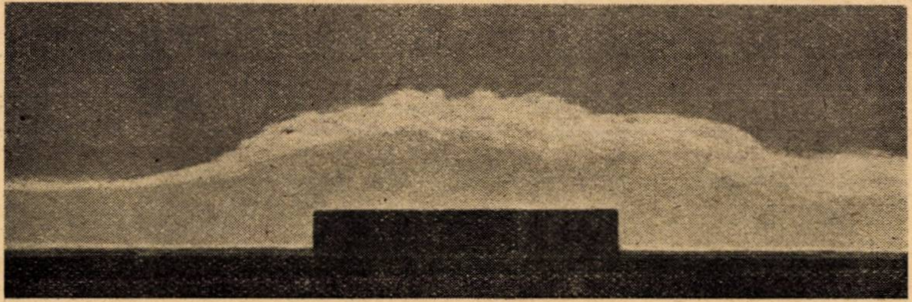


Fig. 29

Se vede din aceste rezultate că ele nu diferă mult şi se poate spune că se suprapun cu o aproximaţie destul de mare. Trebuie să fie remarcat faptul că în natură nu se poate realiza o mişcare perfect simetrică datorită pierderilor de sarcină prin frecare, care au fost neglijate în consideraţiile teoretice.

Figura 23 arată fotografia fenomenului realizat în laborator.

Deversorul cu prag lat şi lama deversantă aerată. Această mişcare a fost realizată tot cu primul model de deversor, ca şi mişcarea precedentă. În acest caz, numărul Froude al mişcării studiate are valoarea $Fr = 0{,}0063$. Din consideraţii de similitudine identice cu cele făcute în cazul precedent rezultă imediat valoarea vitezei în amonte de deversor $V_{m\infty} = 8{,}65$ cm/s şi a înălţimii lamei corespunzătoare de apă $H_m = 9$ cm.

Viteza $V_{m\infty}$ măsurată în repetate rînduri se situează în jurul valorii 8,65 cm/s cu diferenţe inferioare lui 2%.

Figura 24 (şi tabela 2) care reprezintă comparativ rezultatele teoretice şi experimentale obţinute arată că ele se suprapun foarte bine în regiunea în care a fost studiată mişcarea

Figura 25 arată fenomenul studiat aşa cum a fost realizat în laborator.

Deversorul cu prag lat şi lamă deversantă aderentă. Deoarece şi această mişcare a fost realizată pe modelul de deversor cu care au fost realizate şi celelalte două cazuri, valorile rapoartelor λ şi τ rămîn neschimbate. Consideraţiile de similitudine făcute mai sus şi aplicate în acest caz dau pentru viteza V_m pe linia PP' valoarea $V_m = 23{,}87$ cm/s şi pentru H_m pe aceeaşi linie valoarea $H_m = 1$ cm.

Rezultatele calculelor şi experienţelor arătate comparativ în figura 26 (şi tabela 3) şi aspectul general al mişcării realizate cu ajutorul instalaţiei experimentale (fig. 27) arată că diferenţele pot fi neglijate şi în acest caz fără a face erori prea mari.

Mişcarea rapidă peste deversorul cu prag lat. Această mişcare a fost realizată cu ajutorul celui de-al doilea model de deversor ($l_2 = 24$ cm, $h_2 = 3$ cm). În acest caz valorile rapoartelor λ şi τ sînt respectiv $\lambda = 66{,}6$ şi $\tau = 8{,}165$.

În cazul studiat numărul Froude al mişcării are valoare $Fr = \frac{V_\infty^2}{gH} = 7{,}54$. Egalînd această valoare cu numărul Froude al mişcării pe model se obţine ecuaţia $\frac{V_{m\infty}^2}{gH_m} = 7{,}54$ de unde rezultă valoarea $V_{m\infty} = 1{,}837$ m/s. Pentru înălţimea la infinit amonte de deversor rezultă valoarea $H_m = 4{,}5$ cm. Mişcarea dorită a fost realizată în laborator dînd canalului o pantă de 4%, iar rezultatele obţinute sînt arătate cu linie punctată în figura 28 (şi tabela 4) în comparaţie cu rezultatele teoretice (linie continuă).

După cum arată figura 29 care reprezintă fenomenul realizat în laborator, rezultatele teoretice, în acest caz, nu se suprapun la fel de bine peste rezultatele experimentale ca în cazurile precedente. Datorită vitezelor mari care apar în mişcarea fluidului, au loc desprinderi care fac ca suprafaţa liberă deasupra pragului deversorului să fie mai neregulată ca în cazul mişcărilor lente. Aceste fenomene nu pot fi studiate prin metoda folosită şi din acest motiv suprafaţa liberă obţinută prin calcule are un aspect cu mult mai regulat decît în natură.

Diferenţele dintre cele două suprafeţe libere, care apar aici mai pronunţat, se datoresc pierderilor mai mari de sarcină ca în celelalte cazuri. În adevăr, în acest caz viteza generală a curentului este foarte mare şi pierderile de sarcină variază proporţional cu pătratul vitezei, ceea ce explică diferenţele constatate.

CONCLUZII

Metoda diferenţelor finite este foarte simplă din punctul de vedere al instrumentajului matematic. Deoarece aplicarea ei necesită o atenţie deosebită şi o adaptare de la caz la caz, ea trebuie să fie făcută de un matematician sau inginer şi continuată apoi de către un tehnician calculator. În modul acesta, poate fi folosită cu succes în institutele de proiectare, ca o primă aproximaţie.

Datorită convergenţei aproximaţiilor succesive se pot reduce erorile de calcul oricît de mult şi de aici rezultă superioritatea acestei metode faţă de oricare altă metodă grafică (F. Prasil). Rezultatele teoretice au fost confirmate cu o foarte bună aproximaţie de datele experimentale.

Ipoteza simplificatoare a fluidelor grele fără viscozitate se arată a fi verosimilă şi deci poate reda cu o mare aproximaţie fenomenul real al mişcării peste deversorul cu muchie ascuţită. Chiar şi în cazul deversoarelor cu pragul lat viscozitatea poate fi neglijată într-o primă şi totuşi bună aproximaţie.

Din rezultatele obţinute şi din compararea lor cu rezultatele celorlalte metode teoretice expuse la începutul lucrării, se trage concluzia că se poate face un studiu global al mişcării fluidelor grele cu suprafaţă liberă cu metoda numerică a diferenţelor finite şi că rezultatele astfel obţinute pot fi folosite direct în tehnică fără corecţii importante.

Primit la redacţie la 5 mai 1958.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧЕРЕЗ ВОДОСЛИВЫ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В результате сравнительного исследования различных возможностей изучения движения тяжелых жидкостей со свободной поверхностью, авторы пришли к выводу, что метод конечных разностей имеет реальные преимущества по сравнению с другими существующими методами.

Путем применения этого метода были исследованы следующие случаи движения.

1. Медленное движение через водослив с острой кромкой.

2. Движение через затопленный водослив с широким порогом.

3. Движение через водослив с широким порогом и полностью аэрированным водосбросным гребнем.

4. Движение через водослив с широким порогом и прицепным водосбросным гребнем.

5. Быстрое движение в бесконечности вверх по течению через водослив с широким порогом.

Для каждого случая в отдельности были вычислены значения функции тока в каждом узле сети и затем был вычерчен гидродинамический спектр движения.

Полученные числовые результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными путем непосредственных испытаний на моделях, как это указывается во второй части работы.

В то же время подтверждается, с весьма близким приближением, справедливость гипотезы идеальной жидкости в исследовании движения через водослив с острой кромкой. В исследовании движения через водослив с широким порогом влиянием вязкости можно пренебречь в первом и все же достаточном приближении. Этот метод может быть с успехом использован при гидравлических исследованиях технического характера.

CONTRIBUTION THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE À L'ÉTUDE DU MOUVEMENT PAR-DESSUS LES DÉVERSOIRS

RÉSUMÉ

Par suite d'une étude comparée entre les diverses possibilités d'étudier le mouvement des fluides lourds à surface libre, on est arrivé à la conclusion que la méthode des différences finies présente des avantages réels sur les autres méthodes actuelles.

L'application de cette méthode a permis d'étudier les cas suivants :

1° Mouvement lent par-dessus le déversoir à paroi mince.

2° Mouvement par-dessus le déversoir noyé à large palier.

3° Mouvement par-dessus le déversoir à large palier et lame déversante complètement aérée.

4° Mouvement par-dessus le déversoir à large palier et lame déversante adhérente.

5° Mouvement rapide à l'infini amont par-dessus le déversoir à large palier.

Pour chaque cas en particulier, on a calculé les valeurs de la fonction de courant dans chaque nœud du réseau et l'on a tracé ensuite le spectre hydrodynamique du mouvement.

Les résultats numériques obtenus ont été confirmés, avec une approximation satisfaisante, par les données expérimentales obtenues par des essais directs sur modèles, ainsi que cela est montré dans la seconde partie du travail.

En même temps, la validité de l'hypothèse du fluide parfait, dans l'étude du mouvement par-dessus le déversoir à crête mince, se trouve confirmée avec une approximation satisfaisante. Lors de l'étude du mouvement par-dessus le déversoir à large seuil, l'influence de la viscosité peut être négligée dans une première, mais satisfaisante, approximation. Cette méthode peut être appliquée avec succès dans les études hydrauliques d'un caractère technique.

BIBLIOGRAFIE

1. H. VILLAT, *L'écoulement des fluides pesants à surface libre.* Ann. de l'Ecole Normale Supérieure, 32 (1915).
2. F. AIMOND, *Contribution à l'écoulement des fluides pesants à surface libre.* Ann. de Toulouse, **21**, 53 (1929).
3. H. PONCIN, *Recherches sur le mouvement des fluides pesants dans un plan vértical.* Paris, 1932.
4. R. GERBERT, *Solutions exactes des mouvements des liquides pesants.* Journal des Math. pures et appliquées, *3* (1955).
5. D. DUMITRESCU, *Strömung an einer Luftblase im senkrechten Rohr.* Z.A.M.M., **23**, 139 (1943).
6. F. JOHN, *Two dimensional potential flows with a free boundary.* Comm. Pure Applied. Math., **6**, 497 (1953).
7. H. LEWY, *On steady free surface flow in a gravity...* Comm. Pure Applied. Math., 413 5 (1952).
8. M. HAIMOVICI, *Sur l'écoulement des liquides pesants dans un plan vertical.* Ann. scientifiques de l'Univ. de Jassy, **21**, 182 (1935).
9. D. DUMITRESCU, *Aplicarea metodei diferențelor finite la studiul mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VI** (1955).
10. * * * *Boulder Canyon Project.* Studies of crests for Owerfall dams. Denwer - Colorado, 1948.

ASUPRA PROPAGĂRII UNDELOR DE PRESIUNE ÎNTR-UN LICHID CARE CURGE PRINTR-UN MEDIU POROS

DE

T. OROVEANU şi H. PASCAL

De obicei, pentru studiul fenomenelor nestaţionare în scurgerea unui lichid compresibil printr-un mediu poros, în ipoteza valabilităţii legii lui Darcy, ecuaţia de continuitate conduce, după anumite simplificări *) la o ecuaţie analoagă cu aceea a conductibilităţii termice

$$\frac{f\beta\mu}{k}\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}, \tag{1}$$

unde ρ este masa specifică a lichidului, μ viscozitatea şi β coeficientul de compresibilitate al acestuia, iar f şi k sînt respectiv porozitatea şi permeabilitatea mediului poros. Dacă se admite că relaţia dintre masa specifică şi presiune este, cu o destul de bună aproximaţie, liniară, rezultă pentru presiune o ecuaţie analoagă

$$\frac{f\beta\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \tag{2}$$

Pentru fenomenele în care caracterul nestaţionar predomină, cum este acela al propagării undelor de presiune, ecuaţiile precedente nu conduc la rezultate care să concorde satisfăcător cu datele experimentale. Din acest motiv, credem că este mai indicat să se ia ca punct de plecare în studiul problemelor de acest gen ecuaţiile de mişcare ale unui fluid într-un mediu poros [2]

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\mu}{\rho k}v_x,\\ \frac{\partial v_y}{\partial t}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\mu}{\rho k}v_y,\\ \frac{\partial v_z}{\partial t}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\mu}{\rho k}v_z-g,\end{aligned} \tag{3}$$

---

*) Pentru justificarea acestor simplificări a se vedea [1].

în care am notat cu v_x, v_y, v_z componentele vitezei de filtrare $\bar{v}$ şi cu g acceleraţia gravitaţiei. Axele de coordonate au fost astfel alese încît axa Oz să fie verticală şi cu sensul pozitiv de jos în sus.

Adoptarea acestor ecuaţii pentru descrierea fenomenului de mişcare implică ipoteza că scurgerea este destul de lentă pentru a se putea neglija termenii inerţiali şi a se admite că forţele de rezistenţă sînt proporţionale cu viteza la puterea întîi. Aceste presupuneri sînt în fond, echivalente cu afirmaţia că scurgerea se produce în condiţiile de valabilitate ale legii lui Darcy, la care se reduce de altfel sistemul precedent (3) dacă variabila timp dispare.

Considerăm de asemenea şi ecuaţia de continuitate

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = - f \frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{4}$$

precum şi relaţia între presiune şi masa specifică

$$\rho = \rho_0 e^{\beta(p - p_0)}, \tag{5}$$

urmînd ca mai tîrziu să utilizăm şi o formă aproximativă a acestei relaţii.

Deoarece coeficientul de compresibilitate β poate fi considerat constant într-un interval destul de larg de presiuni, obţinem din (5)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\beta \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \tag{6}$$

şi dacă înlocuim în prima ecuaţie (3) rezultă

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{1}{\beta \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho k} v_x, \tag{7}$$

sau

$$\rho^2 \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\mu}{k} \rho v_x. \tag{8}$$

Din relaţia (5) găsim de asemenea

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \rho \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{9}$$

şi deoarece β are valori reduse, putem pune

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} \approx \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \tag{10}$$

neglijînd termenul $v_x \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ care, în conformitate cu (9), este mic faţă de $\rho \dfrac{\partial v_x}{\partial t}$. Ţinînd seama de (8) avem deci

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} \approx \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\mu}{k} \rho v_x \right), \tag{11}$$

iar din a doua şi a treia ecuaţie a sistemului (3) rezultă, printr-un procedeu analog,

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} \approx \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\mu}{k}\rho v_y\right), \tag{12}$$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} \approx \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\mu}{k}\rho v_z\right),$$

cu observaţia că am neglijat efectul gravitaţional care nu joacă un rol important în problema de care ne ocupăm.

Pentru a merge mai departe, derivăm ecuaţia de continuitate (4) în raport cu timpul şi obţinem

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t}\right] = -f\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}. \tag{13}$$

Din (11) găsim însă

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\mu}{k}\rho v_x\right)\right] \approx -\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{1}{\beta}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\mu}{k}\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\right] \tag{14}$$

aproximaţia pe care am făcut-o înlocuind pe $\frac{1}{\rho}$ cu $\frac{1}{\rho_0}$ fiind justificată prin faptul că variaţia lui ρ este redusă datorită valorii mici a coeficientului de compresibilitate. Am admis de asemenea că viscozitatea μ şi permeabilitatea k sînt constante.

Din (12) rezultă încă două relaţii analoage cu (14) şi după înlocuirea în (13) avem

$$\frac{1}{\rho_0\beta}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{\rho_0 k}\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right] = f\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}, \tag{15}$$

sau dacă ţinem din nou seama de (4)

$$f\,\beta\,\rho_0\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{f\beta\mu}{k}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}. \tag{16}$$

Pentru a găsi ecuaţia corespunzătoare pentru presiune, observăm că din (5), (6) şi (9) se deduce

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \beta^2\rho\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 + \beta\rho\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \approx \beta\rho\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{17}$$

şi

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \beta^2\rho\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \beta\rho\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \approx \beta\rho\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \tag{18}$$

precum şi alte două relaţii analoage referitoare la derivatele de ordinul al doilea în raport cu y şi z. Termenii care conţin pe β^2 au fost neglijaţi pentru motivul arătat mai înainte.

Prin urmare, se obţine o ecuaţie de aceeaşi formă

$$f\beta\rho_0\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\frac{f\beta\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \tag{19}$$

şi se observă că putem pune

$$\beta=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}\approx\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho}{dp}=\frac{1}{\rho_0 c^2}, \tag{20}$$

c fiind viteza de propagare a sunetului în lichidul considerat. Ecuaţia (19) se poate deci scrie

$$\frac{f}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\frac{f\mu}{k\rho_0 c^2}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \tag{21}$$

şi dacă lichidul se consideră incompresibil regăsim ecuaţia lui Laplace care ne dă repartiţia presiunii în acest caz.

Remarcăm de asemenea faptul că, în intervalul de presiune ce intervine în problema de care ne ocupăm, relaţia (5) poate fi aproximată prin legea liniară

$$\rho=\rho_0\,[1+\beta(p-p_0)]. \tag{22}$$

Dacă se ia ca punct de plecare această relaţie între masa specifică a lichidului şi presiune, calculele conduc tot la ecuaţiile (16) şi (19).

Un interes deosebit pentru aplicaţii îl prezintă cazul scurgerii plane radiale, pentru care ecuaţia (19) devine

$$f\beta\rho_0\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\frac{f\beta\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{23}$$

Dacă se introduc variabilele adimensionale

$$\bar{r}=\frac{r}{r_0},\quad \bar{t}=\frac{k}{f\beta\mu}\frac{t}{r_0^2}, \tag{24}$$

unde r_0 este o dimensiune caracteristică a sistemului, ecuaţia (23) ia forma

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \bar{t}^2}+\alpha^2\frac{\partial p}{\partial \bar{t}}=\alpha^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial p}{\partial \bar{r}}\right), \tag{25}$$

α^2 fiind o constantă pozitivă adimensională definită prin relaţia

$$\alpha^2=\frac{f\beta\mu^2 r_0^2}{k^2\rho_0}. \tag{26}$$

Primit la redacţie la 28. II. 1958.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СРЕДУ ЖИДКОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исходя из установленного факта, что уравнение (2), используемое при исследовании нестационарного течения сжимаемой жидкости через пористую среду, не дает удовлетворительных результатов для явлений с преобладанием нестационарного характера, как например распространение волн давления, авторы предлагают новое уравнение для изучения этого явления. Рассматривая уравнение движения (3), уравнение непрерывности (4), а также закон изменения удельной массы с давлением (5), авторы выводят уравнение (19), используя некоторые упрощения, основанные на том, что жидкости имеют незначительный коэффициент сжимаемости, являющийся почти неизменным в достаточно широком диапазоне давлений. Для случая плоскорадиального течения дается и форма (25) выведенной формулы, в которой переменные являются безразмерными.

SUR LA PROPAGATION DES ONDES DE PRESSION DANS UN LIQUIDE QUI S'ÉCOULE À TRAVERS UN MILIEU POREUX

RÉSUMÉ

En raison du fait que l'équation (2), qu'on utilise pour l'étude de l'écoulement non stationnaire d'un liquide compressible à travers un milieu poreux, ne donne pas de résultats satisfaisants lorsqu'il s'agit de phénomènes où le caractère non stationnaire est prédominant — telle la propagation des ondes de pression —, les auteurs proposent une nouvelle équation pour l'étude de ces phénomènes. Ils considèrent les équations du mouvement (3), l'équation de continuité (4) et la loi de variation de la densité en fonction de la pression (5), et déduisent l'équation (19), en utilisant quelques simplifications basées sur le fait que les liquides ont un coefficient de compressibilité assez réduit et approximativement constant, dans un assez large intervalle de pressions. Pour le cas de l'écoulement plan-radial, on donne également la forme (25) de l'équation déduite précédemment, dans laquelle les variables sont sans dimensions.

BIBLIOGRAFIE

1. M. MUSKAT, *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media.* **Mac Graw Hill Book Company, New York - London, 1937, 131—133.**
2. **В. И. АРАВИН, И. Н. НУМЕРОВ, Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. ГТТЛ, Москва, 1953, 39—42, 65.**

UN NOU TIP DE CISTO-SFINCTEROMETRU

DE

D. DUMITRESCU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.
G. OLĂNESCU, C. IAMANDI și M. STREJA

INTRODUCERE

În organismul uman, vezica urinară îndeplinește dublul rol de înmagazinare și de evacuare. Echilibrul existent între funcția de înmagazinare și funcția de evacuare, adică dintre forțele de contenție și cele de expulsie, poate fi rupt la un moment dat datorită unor cauze patologice.

Definirea tipului de dezechilibru produs cît și orientarea cît mai exactă a indicațiilor terapeutice în acest domeniu nu se poate face decît după cunoașterea cît mai exactă a modului de funcționare a organului considerat.

Aparatul urinar inferior compus din vezică și uretră, prevăzut cu sfincterele corespunzătoare, poate fi considerat din punct de vedere fizic ca un ansamblu format dintr-un rezervor și o conductă prevăzută cu diafragme elastice. A cunoaște modul de funcționare a acestei părți a aparatului urinar înseamnă a cunoaște în fiecare moment natura curgerii prin acest sistem sub presiune.

Aparatajul necesar cercetărilor în acest domeniu va trebui să permită studierea completă a curgerii, ceea ce este echivalent cu determinarea distribuției și transmiterii presiunilor în masa fluidă.

Lipsa unui aparataj corespunzătoar, necesar efectuării determinărilor cerute de cunoașterea fiziologiei aparatului urinar inferior, a creat o rămînere în urmă în acest domeniu față de cunoașterea fiziologiei și fiziopatologiei rinichiului, care a făcut progrese foarte mari în ultimul timp.

Încă din anul 1882, Morso și Pellacani au încercat să determine funcționarea vezicii prin înscrierea grafică a mișcărilor lichidului dintr-un vas, ce se afla în legătură cu vezica. După aceasta s-au propus și realizat în diferite țări dispozitive și aparate cu ajutorul cărora s-au determinat mai mult sau mai puțin exact presiunile din vezica urinară și din fața sfincterilor uretrari.

Primele încercări ca și o bună parte din instrumentajul folosit astăzi nu corespund suficient necesităților medicale. Cu aceste mijloace, determinarea presiunilor se face în mod disparat, în diverse puncte ale aparatului urinar, fără a se putea stabili o legătură între presiunile măsurate în timp în diverse puncte sau același punct.

Aparatele existente se pot împărți în cistometre și sfincterometre :

— Cistometrele măsoară presiunea la diferite timpuri ale umplerii și golirii progresive a vezicii, graficele de funcționare construindu-se apoi prin legarea între ele a valorilor astfel determinate.

— Sfincterometrele obțin valorile presiunilor corespunzătoare deschiderii sfincterelor.

Studierea completă a aparatului urinar inferior, necesită însă o măsurare simultană a presiunilor în vezică și în fața sfincterilor, lucru ce a determinat crearea cisto-sfincterometrelor. Cu ajutorul acestora s-au putut efectua în mod continuu măsurători de presiune cisto-sfincterometrice care au fost înscrise pe o curbă unică.

Dintre acei care s-au ocupat cu această problemă și care au realizat în decursul timpului diferite tipuri de cistometre și sfincterometre trebuie amintiți : F. May care a arătat necesitatea efectuării continue a măsurătorilor, L. G. Lewis și F. Milam care înscriu presiunile de funcționare cu ajutorul unei capsule aneroide prin intermediul unei pungi de aer, Povulsen care în 1943 a publicat o lucrare despre un cistometru cu funcționare continuă, presiunea fiind înregistrată cu ajutorul unui flotor înregistrator Wagner care împreună cu F. May în anul 1950 realizează de asemenea un cistometru cu înregistrare continuă și K. M. Bauer care a construit în 1956 un nou tip de cistometru prezentînd o serie de îmbunătățiri.

În ceea ce privește realizarea cisto-sfincterometrelor sînt de relevat lucrările lui U. H. Reuter și W. Baumann care au căpătat rezultate cu mult superioare celor existente.

Toate realizările de pînă acum prezintă o serie de neajunsuri ce influențează exactitatea determinărilor. În ceea ce urmează vor fi înfățișate imperfecțiunile aparatelor existente și se vor arăta modurile de eliminare a acestora.

Introducerea lichidului utilizat în aparat, la punctul de determinare, fiind necesar a fi făcută sub un impuls inițial constant, este greu de presupus că presiunea constantă necesară se poate menține cu ajutorul unei pompe de mînă legată direct în circuit [2], [6]. Numai pomparea prin intermediul unui vas tampon de aer și reglarea admisiei aerului printr-un regulator de presiune poate constitui rezolvarea corectă în acest caz.

Variația temperaturii soluției folosite putînd influența valorile presiunilor, este necesar a se menține temperatura constantă cu ajutorul unui termostat. Acest element nu a fost utilizat însă în niciunul din aparatele existente.

Determinarea presiunilor a fost făcută folosindu-se diferite tipuri de manometre, dintre care însă manometrele cu mercur prezintă un oarecare pericol prin vaporii emanați la temperaturi normale.

Manometrele folosite au o serie de dezavantaje în ceea ce privește modul de înscriere și de stabilire a valorii absolute a presiunilor, astfel :

— Aparatele ce înscriu pe bandă cu negru de fum[2] sau pe film foto [6] sînt incomode datorită operațiunilor de prelucrare a materialului. Rezultatele căpătate de noi prin înscrierea cu cerneală (folosind o peniță basculantă fără frecare) dau posibilitatea realizării rapide a unei diagrame ce se atașează la fișa bolnavului.

— Presiunile determinate vor depinde de poziția capătului sondei față de poziția manometrului după cum se poate urmări în figura 1. Astfel se va putea spune că presiunea determinată este chiar valoarea reală cînd punctul de priză (capătul sondei) se va găsi în același plan orizontal (fig. 1*a*) cu centrul de greutate al diafragmei manometrului (în cazul manometrelor cu mercur se va considera valoarea medie a oscilațiilor). Aceasta desigur presupunînd că pierderile de sarcină pe porțiunea de la manometru la vezică sînt neglijabile, lucru posibil prin folosirea unui tub cu diametru mai mare (Ø 6—10 mm) și a unei sonde verificată din punctul de vedere al pierderilor de sarcină. Trebuie să amintim aici că în cercetările făcute de noi asupra pierderilor de sarcină și a influenței acestora asupra determinării, am constatat că cea mai importantă este pierderea la sondă. Din această cauză recomandăm verificarea prealabilă a sondei cu ajutorul manometrului cisto-sfincterometrului în cazul scurgerii în atmosferă, în care caz vitezele și deci pierderile de sarcină vor fi maxime. Dacă punctele amintite nu se vor găsi într-un același plan orizontal (fig.1*b*), erorile produse vor putea fi destul de mari apărînd uneori în diagramă și zone de subpresiune. Aceste situații sînt posibile în cazul aparatelor realizate pînă în prezent, deoarece acestea nu au posibilitatea de deplasare pe verticală, posibilitate care ar permite îndeplinirea condiției amintite. În acest sens realizarea unui stativ mobil cu contragreutate ne-a permis să înlăturăm și acest neajuns foarte important pentru măsurători.

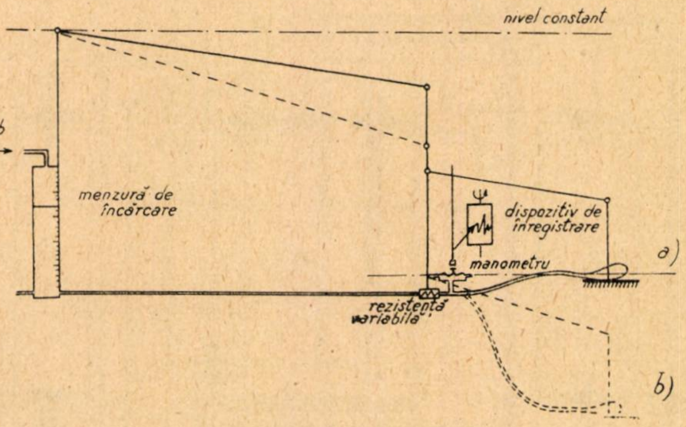


Fig. 1

DESCRIEREA CISTO-SFINCTEROMETRULUI

În această situație s-a simțit nevoia de a se realiza un nou tip de cisto-sfincterometru care să elimine dezavantajele celor existente și în același timp să înlocuiască metodele necorespunzătoare folosite în momentul de față.

S-a imaginat și realizat astfel un nou tip de cisto-sfincterometru cu funcționare continuă sub presiune și temperatură constantă, care permite determinarea exactă a presiunilor cît și determinarea relației ce există între forța expulsivă a vezicei și puterea de rezistență a sfincterilor.

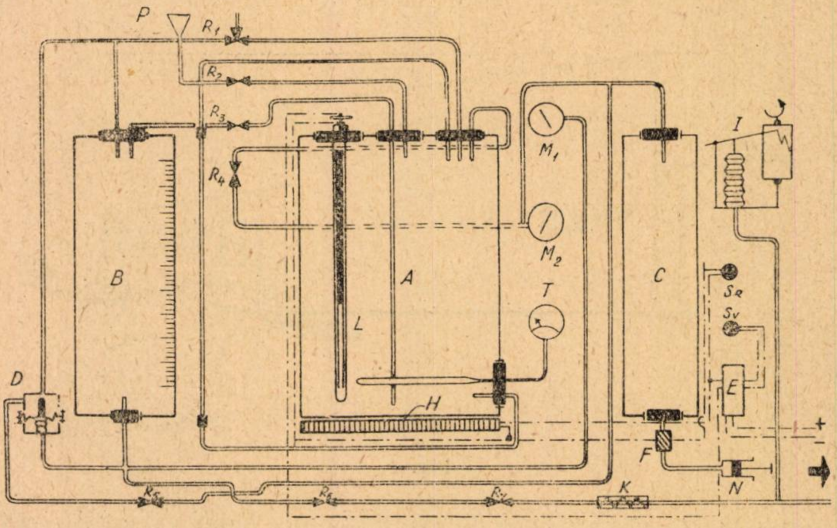


Fig. 2

În schema funcțională a aparatului (fig. 2 și 3) se pot deosebi două părți principale :

— de înmagazinare și recirculare a soluției folosită în aparat,

— de înregistrare a presiunilor și controlul condițiilor de determinare.

Aceste două părți pot fi complet separate datorită sistemului de circuite și robinete realizat.

Cisto-sfincterometrul este prevăzut cu un rezervor de înmagazinare *A* în care este introdusă soluția de rivanol prin intermediul pîlniei *P*. Gradul de umplere al acestui rezervor de înmagazinare poate fi determinat cu ajutorul unui tub de nivel *V*.

Sub acțiunea unei presiuni create cu ajutorul pompei de mînă ***N***, la suprafața soluției din vasul *A*, o parte din aceasta se va deplasa și va umple menzura de lucru *B*.

Cu ajutorul pompei de aer amintită se poate încărca un vas de presiune *C* prin intermediul filtrului de aer *F*, pînă la o limită superioară indicată de manometrul M_2. Limita de pompare a fost astfel stabilită, încît aerul introdus în vasul *C* să poată avea presiunea necesară unei determinări, ținînd seama că prin evacuarea din aparat a unui volum de lichid (în timpul funcționării) se produce o mărire a volumului ocupat inițial de aerul pompat.

Aerul sub presiune ce se găsește în vasul *C* poate fi trecut la suprafața lichidului din menzură prin intermediul unui regulator de presiune *D*. Regulatorul are rolul de a regla admisia aerului astfel că presiunea lichidului la plecarea din vasul *B* să se păstreze constantă în timpul funcționării. Stabilirea valorii constante inițiale a presiunii s-a făcut astfel ca aceasta să fie în limitele recomandate din punct de vedere medical. Alegerea unei valori mici a acestei presiuni nu ar acoperi scara presiunilor realizate în funcționarea organului considerat, iar presiunile prea mari ar produce falsificarea rezultatelor.

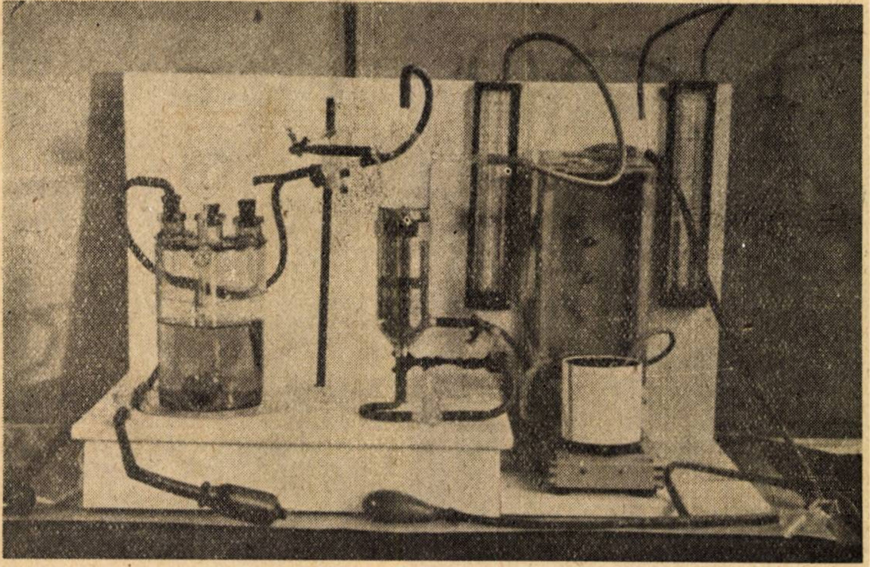


Fig. 3

Pentru realizarea temperaturii optime a fluidului, s-a imaginat încălzirea vasului de înmagazinare cu ajutorul unui încălzitor electric *H*. Curentul electric este introdus în aparat prin intermediul automatului electric *E*, care este în legătură cu termostatul *L* care asigură cuplarea și decuplarea încălzirii la circuit. Termostatul se reglează astfel ca, ținîndu-se seamă de pierderile de căldură ale soluției în aparat, aceasta să aibă temperatura normală a corpului omenesc. Aparatul este prevăzut cu două semnalizatoare electrice roșu și verde care indică respectiv cuplarea și decuplarea încălzitorului. Determinările vor putea fi făcute numai în momentul aprinderii semnalizatorului verde, moment în care temperatura dorită este realizată.

Pe ecranul aparatului poate fi citită în timpul determinării temperatura soluţiei cu ajutorul unui termometru T, iar cu ajutorul manometrului M_1 se poate urmări modul de menţinere constantă a presiunii iniţiale de lucru.

Manometrul înregistrator I, cu ajutorul căruia sînt determinate şi înscrise presiunile, are sensibilitatea şi viteza de înregistrare variabile.

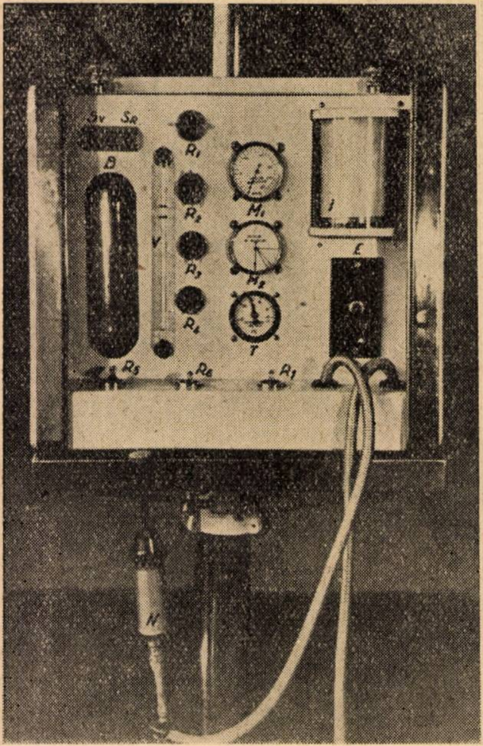


Fig. 4

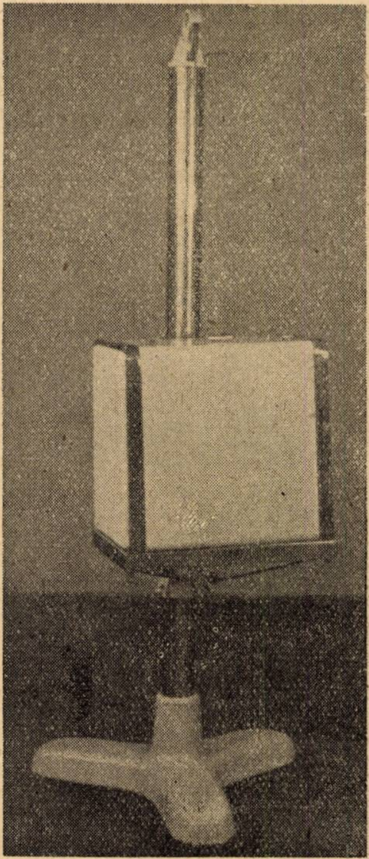


Fig. 5

În concluzie, aparatul realizat (fig. 4) asigură :

— constanţa presiunilor iniţiale,

— realizarea temperaturilor dorite,

— purificarea aerului introdus în circuit,

— limitarea vitezei de alimentare a vezicii prin introducerea unei rezistenţe hidraulice reglabile K,

— măsurarea şi înregistrarea exactă a presiunilor,

— uşoara manipulare şi funcţionare, datorită separării sistemului de alimentare de sistemul de înregistrare,

— deplasarea rapidă și comodă în plan și pe verticală datorită unui suport mobil cu contragreutate (fig. 5),

— posibilitatea de montare și demontare a pieselor componente, important pentru curățirea, sterilizarea și eventuala înlocuire a acestora,

— protejarea întregului ansamblu cu ajutorul unei carcase formată din capace demontabile (fig. 5).

MODUL DE ÎNTREBUINȚARE

Vom arăta în cele de mai jos modul de folosire a cisto-sfincterometrului realizat.

— După desfacerea bușonului situat în partea superioară a aparatului se ridică pîlnia de alimentare.

— Se deschide robinetul de aerisire R_1 și robinetul de alimentare R_2, asigurîndu-se astfel circulația soluției din pîlnie în rezervorul de înmagazinare.

— Soluția medicinală se introduce în aparat prin intermediul pîlniei P, pînă cînd nivelul din tubul de control V indică umplerea rezervorului de înmagazinare (nivelul în tubul V arată umplerea cînd este situat între cele două repere roșu și verde).

— Legătura aparatului cu sursa electrică fiind făcută, se declanșează automatul E iar funcționarea instalației de încălzire se controlează prin aprinderea semnalizatorului roșu S_r.

— Se așteaptă pînă cînd semnalizatorul S_r se stinge aprinzîndu-se semnalizatorul S_v de culoare verde, moment în care se poate începe efectuarea măsurătorii. Controlul temperaturii se poate face cu ajutorul termometrului T.

— Se închide robinetul de aerisire R_1, realizîndu-se astfel posibilitatea de aerisire a menzurei B (robinetul este cu trei căi); de asemenea se închide robinetul R_2.

— După efectuarea legăturii între rezervorul de aer și vasul A prin deschiderea robinetului R_4 se pompează aer cu ajutorul pompei de mînă N prin intermediul filtrului de aer F. În același timp se urmărește umplerea cu soluție a menzurei de lucru B.

— Umplerea menzurei fiind realizată se închid robinetele R_3, R_4, R_1 (în ordinea indicată).

— Se verifică situația manometrului înregistrator I (fișa de înregistrare, remontarea mecanismului de rotire și alimentarea cu cerneală a peniței) prin manevrarea capacului rabatabil din spatele aparatului.

— Se pompează aer cu pompa de mînă pînă cînd acul manometrului M_2 se va găsi în sectorul roșu (aceasta arată că în rezervorul de presiune C a fost introdus aerul necesar unei determinări).

— Se deschid robinetele R_5 și se controlează presiunea la punctul de plecare cu ajutorul manometrului M_1.

— Se deschid robinetele R_6—R_7 și se reglează aparatul pentru poziția 0 a manometrului înregistrator, funcție de poziția punctului în care se face măsurătoarea, după care se reînchide robinetul R_7.

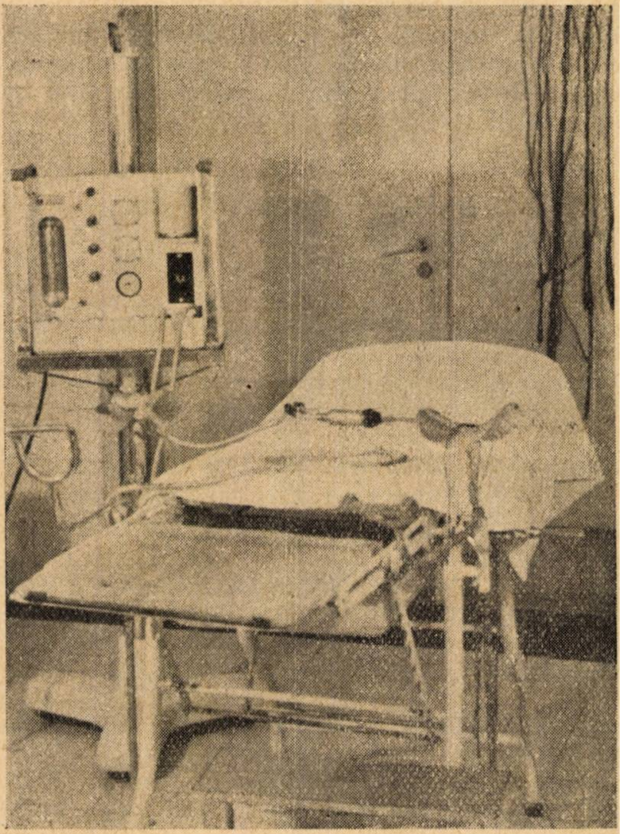
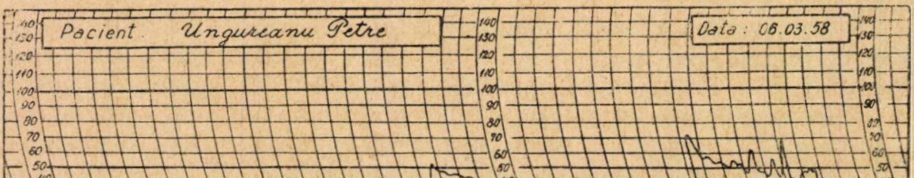


Fig. 6



Pacient Ungureanu Petre
Data: 06.03.58
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
mm/Hg
100 cm³
200 cm³
300 cm³
400 cm³
t=12'

Fig. 7

— După efectuarea legăturii cisto-sfincterometrului cu sonda introdusă în punctul dorit se deschide robinetul R_7 şi se declanşează mecanismul manometrului înregistrator.

— În timpul măsurătorii se vor urmări continuu aparatele de control şi de înregistrare ale cisto-sfincterometrului.

Aparatul descris a fost realizat şi este în prezent folosit (fig. 6) în clinica de urologie a spitalului Dr. Cantacuzino din Bucureşti. Măsurătorile ce se efectuează în prezent (fig. 7) permit stabilirea precisă a diagnosticului şi deschid perspective noi de cercetare ştiinţifică în domeniul urologiei, care vor face obiectul unor comunicări viitoare.

Primit la redacţie la 5 Mai 1958.

НОВЫЙ ТИП ЦИСТОСФИНКТЕРОМЕТРА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

После краткого критического представления аппаратуры, используемой в настоящее время для выполнения цистосфинктерометрических измерений, описывается новый тип цистосфинктерометра непрерывного действия при постоянных значениях давления и температуры.

Вновь построенный аппарат устраняет недостатки существующей аппаратуры путем внесенных усовершенствований, среди которых отмечаются:

— система поддержания постоянного начального давления при помощи регулятора давления;

— система осуществления температур, заданных рабочей жидкости;

— система точного измерения и записи давлений.

Далее указывается способ работы нового аппарата, используемого в настоящее время в Урологической клинике при больнице имени д-ра Кантакузино в Бухаресте.

UN NOUVEAU TYPE DE CYSTO-SPHINCTÉROMÈTRE

RÉSUMÉ

Après un bref exposé critique des appareils actuels de mesure cysto-sphinctérométrique, on présente la construction d'un nouveau type de cysto-sphinctéromètre à fonctionnement continu, sous pression et à température constante.

Le nouvel appareil construit élimine les défauts des appareils existants, grâce aux perfectionnements apportés, dont :

— système de maintien de la pression initiale à un niveau constant, à l'aide d'un régulateur de pression ;

— système de réglage des températures requises du liquide employé dans l'appareil ;

— système de mesure et d'enregistrement exacts des pressions.

On explique ensuite le mode d'utilisation de l'appareil, qui est actuellement en service à la Clinique d'Urologie de l'Hôpital «Dr. Cantacuzino» de Bucarest.

BIBLIOGRAFIE

1. BAUER K. M., *Ein verbessertes Cystometer*. Zeitschrift für Urologie, *11*, 641—644 (1956).
2. BAUMANN W., *Prüfung der Blasenphysiologie mit Cystometrie und Sphincterometrie*. Urologia Internationalis, 1, *6*, 427—439 (1955).
3. DUMITRESCU D., OLĂNESCU GH., IAMANDI C., STREJA M., *Contribuții la rezolvarea problemelor de cisto-sfincterometrie*. Buletinul Inst. de terapeutică al Academiei R.P.R., *5*, (1958).
4. HORTOLOMEI N., BURGHELE TH., STREJA M., *Dinamica aparatului urinar inferior*. Raport la Congresul Romîn de Urologie (1937).
5. REUTER U. H., *Ein neues Gerät sur Cystometrie und Sphincterometrie*. Zeitschrift für Urologie, *47*, 597 (1954)
6. OLĂNESCU GH., DUMITRESCU D., STREJA M., IAMANDI C., ZAHARIA Z., *Notes sur la Cystométrie*. Congresul Internațional de Urologie, Stockholm (1958).

STUDIUL PRIN METODE RADIOACTIVE A INFLUENȚEI VISCOZITĂȚII ASUPRA GROSIMII FILMULUI DE LUBRIFIANT

DE

D. PAVELESCU și I. ILIUC

1. SCOPUL ȘI DOMENIUL LUCRĂRII

Părerile specialiștilor au rămas încă împărțite, în ceea ce privește valoarea grosimii filmului de lubrifiant, care condiționează ungerea hidrodinamică. Astfel, din ipotezele făcute de diverși cercetători, rezultă că pentru a asigura regimul hidrodinamic, grosimea filmului de lubrifiant poate varia de la 100 Å la 6 000 Å și chiar mai mult pînă la cîțiva microni [7], [15], [18], [20], [21]. Pentru regimul limită nu există o linie precisă de demarcație, ci se presupune o trecere gradată [20], [21].

Cu toate că teoriile moderne, privind acțiunile intime intermoleculare și de suprafață, au contribuit la anumite elucidări teoretice, totuși incertitudinea arătată mai sus persistă, pentru că numai în cîteva cazuri izolate s-a reușit să se obțină confirmări experimentale.

Pentru influența pereților, limitele presupuse de diverși autori sînt la fel de mari ca și în cazul limitei domeniului hidrodinamic [4], [7], [12], [20], [21].

Urmărindu-se o clarificare, atît din punct de vedere teoretic cît și din cel experimental, s-a căutat în unele lucrări, să se aprofundeze corelația ce ar putea exista între principalii factori ce condiționează ungerea.

În lucrarea de față, ne vom opri în special, numai asupra a doi factori importanți : viscozitatea și grosimea peliculei. Avînd în vedere posibilitățile de verificare, ce se deschid prin folosirea indicatorilor radioactivi, ne propunem să prezentăm o metodă de măsură (ce privește peliculele subțiri de lubrifiant), care pentru început, să poată contribui la găsirea unei concluzii în privința corelației dintre factorii menționați mai sus și la examinarea regimului hidrodinamic.

Vom presupune că regimul hidrodinamic începe chiar în zona de tranziţie, numită de unii autori cvasi-hidrodinamică, şi desigur numai în domeniul în care se mai poate vorbi de viscozitatea fluidului. La această situaţie, considerăm că filmului de lubrifiant îi corespunde o grosime minimă δ_0. Sînt diferiţi autori care fie că sesizează o mărire a viscozităţii în apropierea peretelui, fie că admit un regim hidrodinamic (sau cvasi-hidrodinamic) începînd de la $\approx$ 100 Å de la perete [3], [7], [18], [20], [21]. De asemenea, este necesar să precizăm, că ne vom referi atît la viscozitatea dinamică η, cît şi la expresia pe care unii autori o denumesc *viscozitate de rupere**) [18], ambele fiind definite ca avînd aceleaşi dimensiuni (kgf.s.cm^{-2}] şi aceeaşi dependenţă de temperatură. Va fi avută în vedere desigur şi influenţa celorlalţi factori ce pot interveni, temperatura (T°K, t°C), presiune, compoziţie chimică, starea suprafeţei etc.

2. CUM APARE DEPENDENŢA VISCOZITATE – GROSIMEA PELICULEI, DIN CERCETĂRILE ÎNTREPRINSE PÎNA ÎN PREZENT. METODE UTILIZATE

În unele cazuri, s-a admis existenţa unei funcţii $\eta - \delta$, fapt ce a condus la anumite simplificări teoretice, prin înlocuirea funcţiei $\eta - T$ cu funcţia $\eta - \delta$, ambele fiind considerate ca avînd o formă asemănătoare [20]. Dacă admitem această ipoteză, faţă de constatarea experimentală obţinută la anumite uleiuri între 20 – 120°C, că viscozitatea variază aproximativ cu puterea a 2,6 a temperaturii [16], rezultă în paralel şi o variaţie oarecum asemănătoare a lui δ cu T şi cu η.

Existenţa unei dependenţe $T - \delta$, prin intermediul unei dependenţe $T - \eta$, este sezisată de asemenea şi de alte cercetări asupra ungerii la motoare, care arată că, uleiurile peste 70°C, formează pelicule de grosimi mai mici, dar care sînt sensibil egale, independent dacă lubrifiantul a fost vîscos sau fluid [1], [15], [21].

În această situaţie, trebuie să avem însă în vedere şi faptul că, prin apropierea suprafeţelor solide, se produce totodată şi o variaţie în repartiţia zonelor în care au loc diferite forme de ungere [20], [21], zona hidrodinamică micşorîndu-se sau chiar dispărînd complet.

Complexitatea problemei este reflectată de asemenea şi de alte constatări. Astfel este de reţinut faptul că deşi două uleiuri prezintă la două temperaturi anumite aceeaşi viscozitate, totuşi curbele lor $\eta - T$ sînt diferite [15], [20].

De asemenea, trebuie avut în vedere şi faptul că sarcinile exterioare, acţionează atît asupra lui δ cît şi asupra lui η, atît prin intermediul presiunii, cît şi indirect prin intermediul temperaturii, datorită lucrului mecanic de frecare [20]. Astfel la suprasarcini în paliere [5], s-a sezisat o mărire a filmului de lubrifiant, explicată numai prin creşterea viscozităţii, ca urmare a creşterii presiunii. De asemenea , s-a constatat că la temperatură şi presiune constantă, viscozitatea mai variază şi cu forţa de forfecare [16].

---

*) $\eta_z = \sigma \cdot t$.

În ceea ce privește modalitățile de verificare, se remarcă că, metodele electrice (în special cu rezistență sau capacitate), nu au putut să dea satisfacție [8], la studierea variației lui δ, mai ales cînd este vorba de grosimi mai mici δ_0 [1], [7], [12], [21].

S-au remarcat de asemenea metodele optice, cu interferență, [1], [7], [8], [18], și cele cu raze X [3], care însă sînt dificile de folosit atunci cînd se depășește faza de laborator, mai ales în regim dinamic. Metodele electrice cu inducție [8] par a fi mai curent folosite.

Ne vom opri însă asupra unei metode pe care o socotim mai concludentă pentru subiectul nostru [7], [18].

Astfel, S. von Schiezl [18], plecînd de la unele condiții anterioare [6], caută să clarifice limita de valabilitate a hidrodinamicii în straturi subțiri de lubrifiant: folosind de asemenea o metodă optică de interferență, măsurînd variații de grosime de film la rupere, ajunge printre altele, la concluzia că, între η, η_z și δ, poate exista o dependență dar spre deosebire de alte păreri [18], în această dependență intervine și mărimea suprafeței.

În ceea ce privește utilizarea radiațiilor, în literatura de specialitate, nu am întîlnit pînă în prezent măsurători ale straturilor subțiri de lubrifiant, prin folosirea izotopilor radioactivi, în genul celor prezentate în lucrare [5], [10], [11], [13], [14], [17], [19].

3. O CORELAȚIE PREALABILĂ EXPERIMENTĂRII, OBȚINUTĂ PE BAZĂ HIDRODINAMICĂ

Ne propunem să determinăm, pe cale teoretică, în regim hidrotinamic, pentru un caz particular ce se prezintă la verificare experimendală și generală, relația care să ne dea pe δ funcție de viscozitate, pentru ca apoi să putem compara rezultatele obținute prin metode radioactive, cu aceste valori.

Pentru considerente de reproductivitate, simetrie și geometrie, condiții impuse de măsurătorile ce vor avea loc cu contori Geiger-Müller, se alege cazul a două suprafețe paralele metalice lăpuite, (controlate optic), circulare (de rază R), între care se va crea un regim de *scurgere vîscoasă*, produsă exclusiv de forțe exterioare normale suprafețelor, față de care se pot neglija forțele masice (greutate și inerție) [2], [6], [18], [20].

Se presupune că printr-o sarcină normală pe suprafața plăcilor, s-a expulzat (în timpul t secunde), lubrifiantul lichid de viscozitate η pînă cînd, valoarea grosimii filmului rămîne δ_0, nivelul lichidului exterior menținîndu-se deasupra cotei $+ \delta_2/2$, astfel că la aplicarea unei sarcini de sens contrar (sarcina de rupere) tot pe direcția Z, scurgerea hidrodinamică să se poată alimenta corespunzător, pînă la ruperea filmului de grosime

$$\delta_2 = \delta_0 + \delta_1 ; \quad \delta_2 \gg \delta_0 \qquad (1)$$

(δ_1 variația distanței în timpul t s).

Să considerăm un element de lichid (în coordonate cilindrice fig. 1). Faţă de ipotezele puse rezultă condiţia de echilibru

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \tag{2}$$

Se consideră următoarele condiţii : $T = \text{const.}$; $\eta = \text{const.}$ (viscozitatea dinamică) ; scurgere staţionară şi fluid incompresibil ; $\frac{\partial p}{\partial r}$ nu depinde de Z ; $V = \frac{d\delta}{dt}$ viteza de depărtare a plăcilor. După scrierea ecuaţiei debitului şi presiunii medii se urmăreşte în continuare găsirea unei relaţii funcţie de σ = tensiunea specifică [kgf. cm^{-2}] şi mai precis funcţie de $\sigma . t = \eta_z$

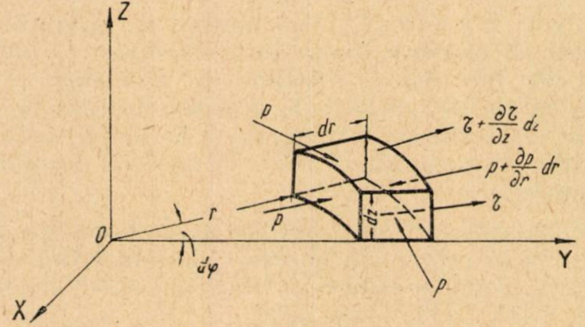

Z
p
dr
$\tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz$
$p + \frac{\partial p}{\partial r} dr$
τ
r
p
dz
0
$d\varphi$
Y
p
X

Fig. 1. — Un element de volum în coordonate cilindrice.

$$\sigma \cdot t = \frac{3}{2} \eta R^2 \int_{\delta_0}^{\delta_2} \frac{1}{\delta^3} d\delta = \frac{3}{4} \eta R^2 \left[\frac{1}{\delta_0^2} - \frac{1}{\delta_2^2} \right]. \tag{3}$$

Conform relaţiei (1), $\frac{1}{\delta_2^2} \ll \frac{1}{\delta_0^2}$ şi se neglijează.

În acest caz , se poate obţine δ_0 din relaţia

$$\delta = \frac{R}{2} \sqrt{3 \frac{\eta}{\sigma \cdot t}} = \frac{R}{2} \sqrt{3 \frac{\eta}{\eta_z}}. \tag{4}$$

Formula simplificată (4) este valabilă pînă la o valoare $\delta \approx 2{,}5\ \mu$, eroarea corespunzătoare prin neglijarea factorului $\frac{1}{\delta_2^2}$, ajungînd pînă la 2 % (valoarea δ_2 limita de *rupere* a peliculei fiind $\approx 15\ \mu$).

Se constată deci, că în condiţia celorlaţi factori (menţionaţi anterior) constanţi, grosimea minimă a filmului δ_0 pentru menţinerea regimului hidrodinamic, rezultă funcţie de mărimea suprafeţei plăcilor circulare, viscozitatea dinamică, încărcarea specifică şi timpul de rupere.

4. PREZENTAREA APARATURII ŞI METODELOR EXPERIMENTALE

S-a imaginat o aparatură experimentală simplă (fig. 2 şi 3), care însă să poată răspunde condiţiilor ce se pun pentru verificarea relaţiilor (3) şi (4) şi efectuării măsurătorilor de grosime de peliculă, în condiţii de reproductibilitate.

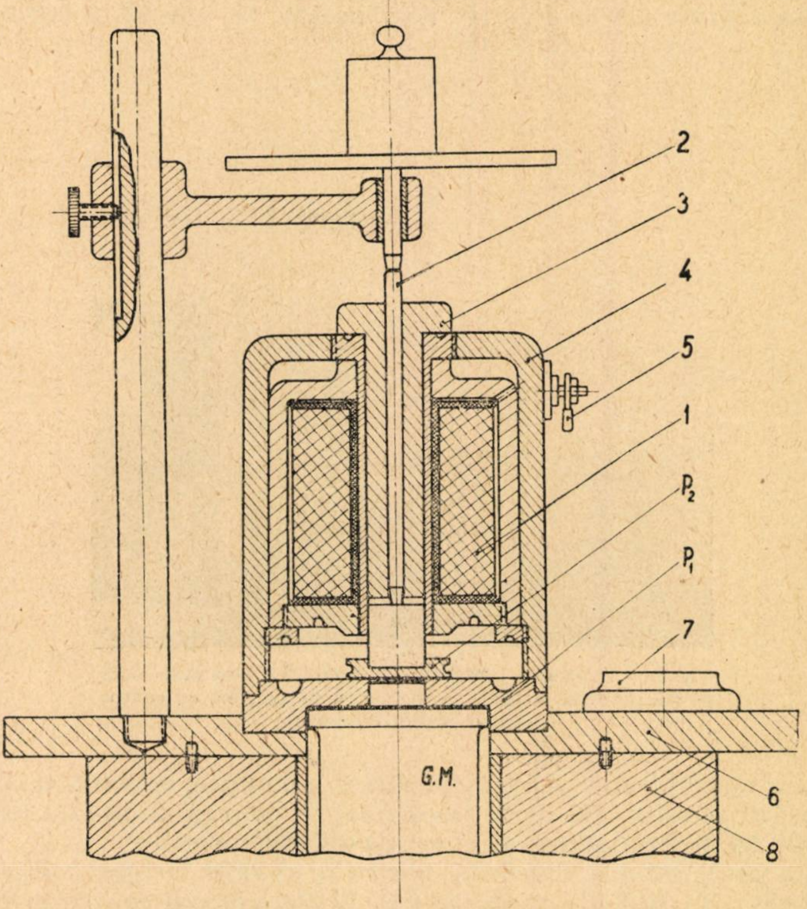


Fig 2. — Aparatură pentru studiul variaţiei δ (**montaj metoda I**) P_1, P_2 — plăci de Al; G. M. — contor Geiger-Müller clopot;

1 — electromagnet; 2 — ax de transmitere a sarcinei; 3 — miez de fier moale; 4 — cămaşe de Al; 5 — spre miliampermetru şi alimentare; 6 — placa de bază a dispozitivului; 7 — indicator orizontalitate; 8 — perete Pb.

Determinările s-au efectuat prin două metode diferite, ambele caracterizîndu-se în primul rînd prin aceea că, lubrifiantul folosit conţine un trasor radioactiv, prealabil introdus.

Pentru motive experimentale (solubilitate, omogeneitate, energie mare, spectru simplu etc.), cît şi pentru motive de protecţie mai uşoară s-a ales ca trasor radioactiv ^{32}P.

Prima metodă utilizată, constă în a executa (în limitele $\delta_2 \ldots \delta_0$) presarea lubrifiantului activat, și măsurarea simultană a activității specifice; determinarea grosimilor succesive (corespunzătoare diferitor valori a lui $\sigma \cdot t$) se face apoi prin compararea vitezelor de numărare (pulsuri/minut) cu cele ale unui etalon măsurat în condiții similare.

Instalația experimentală, utilizată în primul caz, este prezentată în figura 2. Între plăcile P_1 și P_2 de aluminiu, se creează scurgerea vîscoasă cu ajutorul unei sarcini exterioare cunoscute, aplicată axial prin intermediul piesei *2*. Placa P_2 joacă rolul de diafragmă, în fața ferestrei de mică (2,9 mg/cm^2) a unui contor Geiger-Müller clopot.

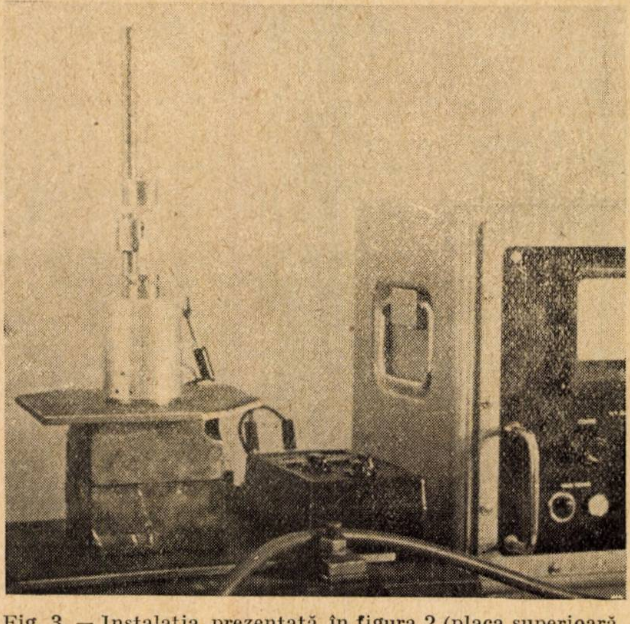


Fig. 3. — Instalația prezentată în figura 2 (placa superioară de Pb (8) fiind amenajată și pentru măsurători cu contor Geiger-Müller cilindric).

Ea are grosimea suficientă pentru a absorbi integral radiațiile β de energie 1,701 MeV ale trasorului ^{32}P, în afară de cele provenite dintr-o regiune centrală (Ø = 12 mm), unde grosimea diafragmei de aluminiu este numai de 0,6 mm.

Precizăm că placa P_1 este folosită de asemenea ca suport etalon, măsurătoarea executîndu-se și în acest caz în prezența plăcii P_2, așezată în poziție normală.

Determinarea se întrerupe în momentul în care prin creșterea timpului t, în prezența încărcării specifice inițiale σ, viteza de numărare se menține constantă.

Aparatura folosită (fig. 2 și 3) prezintă calitatea că, fără a se deranja ansamblul interior, numai prin manipulări exterioare (îndepărtarea sarcinii și acționarea electromagnetului *1*), măsurătoarea se poate repeta, în exact aceleași condiții (geometrie, cantitate ulei, δ_2 inițial etc.).

Cea de a doua metodă constă de asemenea din obținerea aceluiași fenomen de scurgere vîscoasă, sub acțiunea sarcinii specifice σ; în acest caz însă, după fiecare valoare $\Delta t = t_2 - t_1$, se îndepărtează excesul de lubrifiant de pe placa inferioară, apărut prin presare, și apoi, cu același sistem electric prezentat mai sus, se despart cele două plăci. În figura 4 se prezintă piesa *C*, care este o anexă a aparaturii din figura 2, și care permite acest gen de măsurătoare ce s-a efectuat de asemenea la diferite temperaturi. S-au folosit piese metalice (P'_1 și P'_2) din oțel călit (Ø = 12 mm), valoarea grosimii peliculei după fiecare determinare revenind prin măsurarea activității lubrifiantului rămas pe cele două plăci și compararea cu o placă identică (suport—etalon); placa etalon a fost măsurată de asemenea în fața unui contor Geiger-Müller în condiții perfect similare (geometrie și fond), dar fără membrană intermediară P_1 (fig.2).

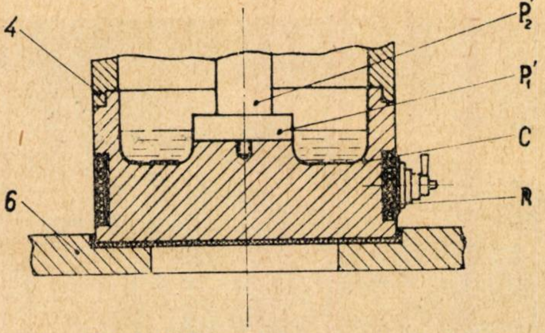


Fig. 4. — Piesă suplimentară a aparaturii din figura 2 (pentru metoda II).

P'_1, P'_2 — plăci de oțel; *C* — cuvă de oțel; *B* — rezistență electrică; *4* – *6* – idem ca figura 2.

În cazul acestei metode (fig. 5) sistemul electromagnetic permite de asemenea executarea unor *ruperi* cu distribuție omogenă a lubrifiantului, și o manipulare simplă a ansamblului conținut de piesa *4*, numai prin îndepărtarea piesei *C* (P'_2 fiind piesa polară cu o cursă de 1,5 mm).

Din măsurători rezultînd o distribuție în mod egal a lubrifiantului pe cele două plăci (eroare $\approx$ 1,5%), este practic suficientă înregistrarea numai a vitezei de numărare, dată de fața inferioară a plăcii P'_2.

Distribuția omogenă s-a verificat și prin autoradiografiere, imaginea obținută după un timp de expunere în fața unui film Röntgen, timp de 10 zile, a prezentat o densitate omogenă de înnegrire — 0,2 — pe toată suprafața unor pastile de 20 mm Ø [12].

Pentru ambele metode, care presupun determinări relative, pe bază de etalon, față de peliculele subțiri de lubrifiant (0,5. . .15μ), și radiația β dură a ^{32}P, volumul de ulei de pe placa subiect (V_s) se obține din relația

$$V_s = V_e \cdot \frac{I_s}{I_e}, \tag{5}$$

în care V_e este volumul filmului de ulei etalon, iar I_e şi I_s fiind vitezele de numărare respective.

Precizăm cu toate acestea, că s-a măsurat cu cîte două etaloane, de grosimi diferite, corespunzătoare valorilor δ apropiate de cele două limite.

Rugozităţile admise la plăcile lăpuite (0,3 μ oţel şi 0,5 μ aluminiu — valori pătratice medii —) conduc la erori sub 3% numai la valorile limită a lui δ_0 [9], [12].

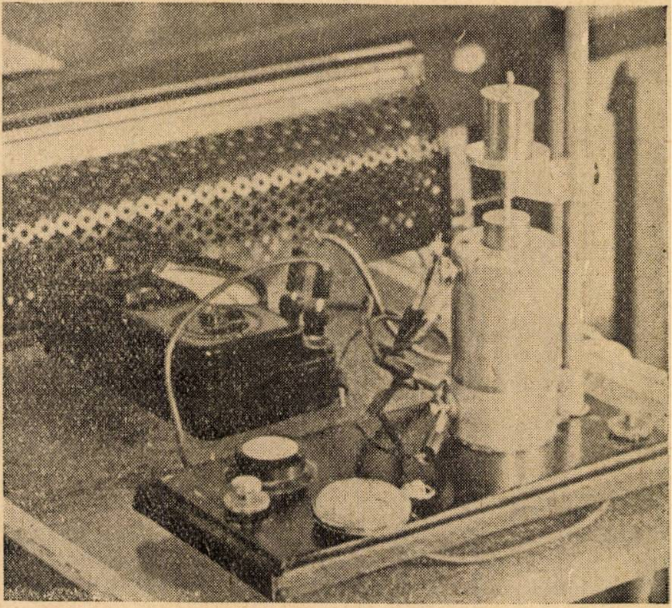


Fig. 5. — Instalaţia în cazul unei măsurători cu metoda II,

Se remarcă faptul că aparatura folosită la metoda II permite şi studii (pe baza relaţiilor (3) şi (4)) cu lubrifiant neactivat, executîndu-se fenomenul invers, adică ruperi de peliculă (cu alimentare continuă), prin varierea curentului, electromagnetul (tarat), putînd realiza diferite forţe portante.

5. REZULTATE EXPERIMENTALE

S-au făcut experimentări cu lubrifianţi avînd compoziţii chimice şi viscozităţi diferite, precum şi cu un lubrifiant cu aditiv de onctuozitate.

Lubrifianţii folosiţi au fost următorii : uleí mineral rafinat „413”, ind. Dean Davis min 90 STAS 751-49 R.P.R. ; ulei industrial ind. Dean Davis min. 40 STAS 383-49 R.P.R. ; ulei de parafină STAS 1092-50 ; ulei de ricin (ulei vegetal farmaceutic) ; acid oleic cu aditiv de onctuozitate.

Lubrifiantul cu trasor radioactiv a fost obținut în două moduri:

a) Prin iradierea uleiului „413” cu impurități, printre care 0,1% sulf, într-un flux de 10^{12} n/cm²/s;

b) Prin dizolvarea în lubrifiant a fosforului radioactiv obținut de asemenea în reactor la un flux de 10^{3}n/cm²/s*).

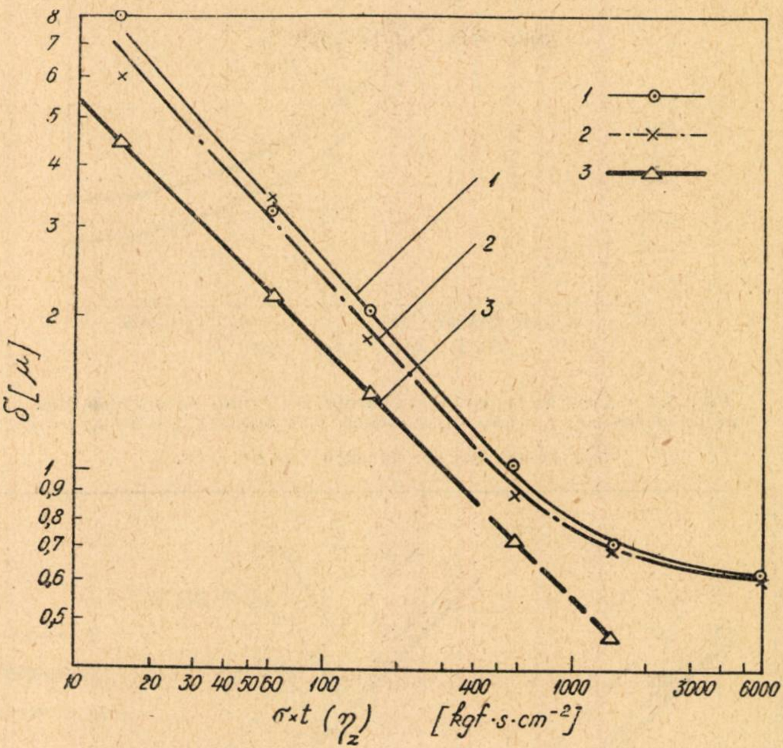


Fig. 6. — Diagramă comparativă a metodelor

1 — metoda I; 2 — metoda II; 3 — curbă teoretică. Ulei „413”, $T = 294°$ K, $\eta = 4{,}05$ P
P_1, P_2 Al∅ = 20 mm; $\sigma = 1{,}5$ kgf. cm^{-2}.

În general, s-a lucrat cu o activitate specifică de aproximativ 250μCu/cm³ lubrifiant, astfel aleasă pentru a se putea obține pelicule minime δ_0 cu activități de peste 15 ori valoarea fondului (≈ 30 p/min).

S-a căutat ca sarcinile să fie mici, deci încărcările specifice σ să fie de asemenea reduse, pentru a ne menține într-un regim în care influența variației viscozității, prin variația presiunii să se poată neglija și fenomenul să se poată urmări comod (timp lung).

În cele ce urmează sînt prezentate diferite rezultate experimentale obținute în condițiile expuse.

---

*) Iradierile s-au obținut în reactorul Institutului de fizică atomică al Academiei R.P.R. din București.

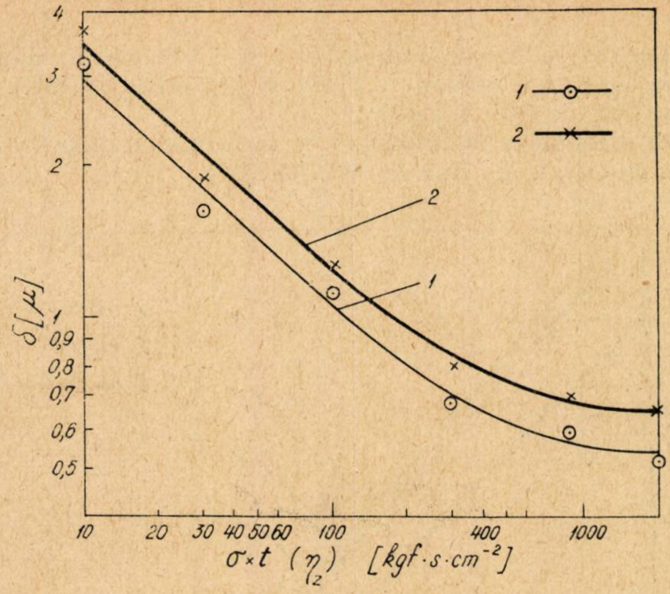


Fig. 7. — Diagramă privind influența aditivului de onctuozitate.
1 – Curba ulei de parafină; 2 – curba ulei de parafină + 5% acid oleic. $T = 294°$ K, $\eta = 2{,}23$ P.
P_1', P_2' oțel călit $\varnothing = 12$ mm, $\sigma = 0{,}4$ kgf. cm^{-2}.

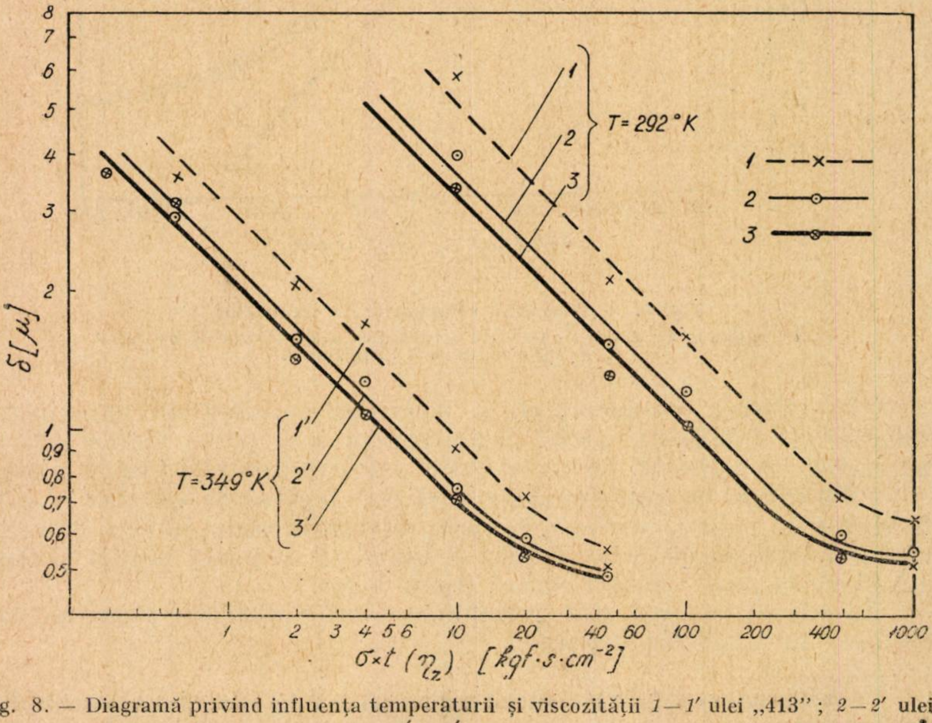


Fig. 8. — Diagramă privind influența temperaturii și viscozității 1—1′ ulei „413" ; 2—2′ ulei „105" ; 3—3′ ulei de ricin farmaceutic ; P_1' , P_2' oțel călit $\varnothing = 12$ mm, $\sigma = 0{,}04$ și 0,4 kgf. cm^{-2}.

a. *Privind compararea metodelor experimentale.* În diagramele din figura 6 sînt prezentate, în scară logaritmică, în cazul uleiului „413", ($\eta = 4{,}05$ P la $t = 21$°C, placă de aluminiu Ø $= 20$ mm, $\sigma = 1{,}5$kg/cm^2), curbele grosime peliculă funcție de $\sigma . t$ (*viscozitate de rupere*).

Cele trei curbe corespund :

1 (metodei I)
2 (metodei II)
3 rezultă din formula teoretică (4).

În tabela care urmează, prezentăm valorile numerice obținute, pentru a da o imagine comparativă mai clară a variației valorilor lui δ, în cele trei situații prezentate mai sus :

t (s)	$\sigma \cdot t = \eta_z$ (kgf. s. cm^{-2})	δ (μ)					Regiune
		Metode					
		I*)		II*)		valoarea teoretică relația (3)	
		val. exp.	curba 1	val. exp.	curba 2		
10	15	8,00	7,80	6,05	6,85	4,54	I
42	63	3,56	3,60	3,66	3,40	2,41	II
100	150	2,25	2,20	1,87	1,90	1,62	
400	600	1,14	1,10	0,89	0,95	0,76	
1 000	1 500	0,74	0,74	0,70	0,72	(0,44)	III
4 000	6 000	0,66	0,66	0,65	0,65	—	

*) Valori medii.

b. *Privind influența aditivului de onctuozitate.* S-a ales ca aditiv de onctuozitate acidul oleic în proporție de 5%, iar ca lubrifiant de bază uleiul de parafină ca avînd o viscozitate mai redusă decît a uleiului „413". Lucrîndu-se cu plăci de oțel măsurătorile experimentale au decurs după metoda II (temperatura $t = 21$°C, plăcile de oțel călit avînd Ø $= 12$ mm și $\sigma = 0{,}4$ kgf/cm^2).

Cele două curbe experimentale obținute sînt prezentate în figura 7, curba *1* reprezentînd funcția $\delta = f(\sigma . t)$ pentru uleiul de parafină, iar curba *2* pentru același lubrifiant cu aditivul de onctuozitate menționat.

c. *Privind influența variației viscozității și a temperaturii asupra lui δ.* S-au ales ca lubrifianți — uleiurile minerale „413" și „105" — și uleiul vegetal — uleiul de ricin — primul avînd în condiții similare, viscozitate relativ mare, iar ultimul relativ redusă.

În condițiile metodei II — s-au repetat măsurările grosimii peliculei (pastilă oțel călit Ø $= 21$ mm), atît pentru $t_1 = 19$°C cît și în cazul unei temperaturi mai ridicate, întîlnită în exploatarea mașinilor — $t_2 = 76$°C.

În figura 8 sînt prezentate cele 6 diagrame care după cum se observă se grupează în două familii, corespunzătoare celor două temperaturi.

6. OBSERVAŢII ŞI CONCLUZII

Pe baza rezultatelor experimentale obținute, ne propunem să sintetizăm observațiile și concluziile pe care le socotim esențiale subiectului ales.

a. Cu privire la metodele folosite

— Rezultatele obținute în diagramele din figura 6, tabelă, cît și metodologia respectivă, prezintă metoda I, ca fiind avantajoasă pentru simplitate de manipulare și reproducere, și afectată de erori relative mai mici; cîmpul de împrăștiere al punctelor experimentale provenite de la metoda II este mai mare (decît al metodei I) în special spre valorile lui δ apropiate de δ_2.

Dacă examinăm diferențele (dintre valorile δ) ale celor două metode (din tabelă), prin raport cu cele ale metodei I, remarcăm procente mari ($\approx 22\%$) în regiunea I ($\delta \approx 8\mu$) și o diminuare continuă spre regiunea III a valorilor δ apropiate de δ_0 ($1{,}5\%$, $\delta_0 \approx 0{,}65\mu$).

— Rezultatele obținute cu prima metodă indică posibilitatea realizării unui banc experimental pe care să se poată măsura prin peretele metalic (oțel) în regim dinamic, (cazul unui lagăr), variația grosimii δ, a peliculei de lubrifiant, folosindu-se de data aceasta un indicator γ activ, de asemenea introdus în prealabil în lubrifiant.

— Faptul că s-a dovedit că la un flux de neutroni mai redus (10^{12} n/cm^2/s), și un timp relativ scurt de iradiere, lubrifiantul nu-și schimbă practic sensibil caracteristicile, conduce la simplificare esențială în prepararea lubrifiantului cu trasor, aditivul *țintă* putînd fi comod dozat și introdus înainte de iradiere.

— În cazul folosirii pastilelor de oțel s-a observat o reacție chimică între elementul trasor și suprafața metalică mult mai mare decît în cazul pastilelor de aluminiu.

— Examinînd optic suprafețele *active* în cazul metodei II, se constată (în cazul grosimilor mari) repartizări stelate ale lubrifiantului pe suprafață și de asemenea cazuri în care dizolvantul de curățire a excesului produce pe o adîncime de maximum 0,3 mm de la margine, o curățire și a filmului dintre plăci; ambele situații devin surse de erori.

b. Cu privire la rezultatele obținute

— Diagramele în scară logaritmică indică curbe $\delta = K \cdot f(\eta, \eta_2)$ ca avînd aproximativ aceeași alură și pantă, indiferent de metal (suprafață), rugozitate, compoziție chimică, temperatură.

— Diagramele din figura 6 indică o înclinare a curbelor experimentale, asemănătoare curbei teoretice, aceasta fiind afectată de erori progresive în regiunea valorilor δ mari, dacă este prevăzută prin relația simplificată (4); în regiunea inferioară (limită), unde scurgerea hidrodinamică încetează, relațiile teoretice (3) și (4), de asemenea, nu pot reflecta fenomenul fizic.

— Relațiile teoretice nu țin seama de factorii enumerați mai sus, iar diagrama din figura 6 apare deplasată sub curbele experimentale; apare necesitatea completării expresiei cu o corecție K (mai mare ca unitatea), care se poate de altfel determina ușor experimental, funcție de factorii respectivi.

— Diagramele (fig. 6, 7 și 8) indică existența a trei zone principale aproximativ între 6 și 15μ, depinzînd de viscozitate, $\sigma \cdot t$ și compoziție chimică, în care influența suprafeței și a materialului se pare că nu mai intervine, în schimb împrăștierea punctelor este mai mare.

Experimentîndu-se cu lubrifiant neactivat, diferite ruperi de peliculă în zona 10—15μ, se constată că funcția $\delta = f(\sigma \cdot t)$ nu este perfect reproductibilă și conduce la erori pînă la $\pm$ 30%; valorile lui $\sigma \cdot t$ din faza de încărcare nu se reproduc prin valorile din faza de rupere.

Experimental s-a evitat în general partea superioară a acestei zone, ea conduce la valori $\sigma \cdot t$ mici, deci fie la încărcări de ordinul gf/cm^2, fie la timpi fracțiuni de secundă, ambele situații fiind practic greu de realizat și reprodus, efectuînd erori mari.

— O zonă centrală între 1. . .6μ în care variația grosimii peliculei pare a fi riguros proporțională cu η și η_z.

Influența forțelor moleculare ale pereților metalici par a nu mai acționa peste 1μ (confirmă unele ipoteze [21]).

— Zona cea mai interesantă este însă zona inferioară aceea care reprezintă valorile lui δ sub 1μ. Prin comparație cu curba teoretică (curba *3*, fig. 6), se constată că (în limitele factorilor utilizați) regimul de scurgere începe să nu mai fie hidrodinamic sub 0,8μ, indiferent de temperatură, viscozitate, onctuozitate, sarcină, timp, compoziție chimică, suprafață, metal sau rugozitate (confirmă unele ipoteze [21]).

Erorile relative de măsură, care au fost constatate la metalele folosite ($\pm$1%... $\pm$7%), nu pot influența calitativ concluziile ce au rezultat în acest domeniu de grosimi sub 8μ.

— Față de sarcinile reduse utilizate, la temperaturi normale 19—21°C, valoarea δ_0 variază puțin ($\approx$0,52 — 0,66μ) părînd a fi afectată de rugozitatea suprafeței, metal și aditivul de onctuozitate. Aditivul de onctuozitate mărește deci pelicula limită (se confirmă [12], [16], [20], [21]). La temperaturi mai mari (76°C, fig. 8), $\sigma \cdot t$ și temperatura sînt factori hotărîtori, obținîndu-se de această dată pelicule de valori apropiate ($\approx$0,49 — 0,56μ), viscozitatea lubrifianților intervenind deci mai puțin (se confirmă deci [1] și [21]).

— Un alt factor hotărîtor al zonei inferioare este însă rugozitatea suprafeței. După cum este normal, la același ulei, viscozitate și sarcină, plăcile cu rugozitate mai mică conduc la valori δ_0 mai mici. (Se confirmă [1], [9], [12], [15], [20]).

— O altă constatare ce se poate face cu ajutorul metodei de măsură folosită, este de asemenea posibilitatea de a stabili cu ușurință intervalul de timp necesar pentru a se trece de la regimul hidrodinamic la regimul onctuos.

Din tabelă — sau fig. 6 — rezultă t secunde funcție de η, R și σ, în cazul valorilor δ_0.

Se cunoaște că acest interval, interesant de cunoscut (la studiul uzurii de pornire funcție de timpul de întrerupere), este de asemenea subiectul unor controverse privind valoarea sa.

O concluzie generală, ce se desprinde, este faptul că numai în situația celorlalți factori constanți, viscozitatea influențează direct grosimea peliculei de lubrifiant, influența sa scăzînd în zona peliculelor subțiri.

Lucrarea a reușit să precizeze o metodă de măsură comodă și destul de precisă, cu care se pot continua cercetările în acest domeniu.

De asemenea a putut face unele constatări utile (calitative), privind limitele de acțiune a pereților în stratul de ulei și limita inferioară de la care regimul hidrodinamic începe să dispară. De asemenea a rezultat și precizarea cu privire la influența viscozității asupra grosimii peliculei.

Metodele radiometrice permit să se examineze comod cu date reproductibile, în special zona inferioară, fiind însă necesar să se utilizeze suprafețe superfinisate – (lustruite) cu rugozități între 0,025. . .0,05μ, adică cu valori comparabile cu limita inferioară a domeniul hidrodinamic admis de unii autori [4], [7], [12] [20] și [21]. (Aceste valori nu sînt întîlnite decît în cazul prelucrărilor speciale).

În cadrul acestei lucrări s-a preferat să se tragă concluzii bazate pe rugozități apropiate de posibilitățile industriale curente privind finisajul suprafețelor.

Rezultatele obținute pînă în prezent deschid autorilor posibilități de cercetare; ei speră să exploreze mai tîrziu acest domeniu complex, din care au fost semnalate doar cîteva aspecte.

Primit la redacție la 6 mai 1958

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОСТИ НА ТОЛЩИНУ ПЛЕНКИ СМАЗОЧНОГО ВЕЩЕСТВА РАДИОАКТИВНЫМИ МЕТОДАМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исходя из частного случая, дающего возможность экспериментальной проверки и обобщения, при гипотезе вязкого гидродинамического течения, получают простое соотношение между δ, η и $\sigma \cdot t = \eta_z$

Описывается экспериментальная аппаратура, позволяющая производить исследование функции $\delta = K \cdot f(\eta, \eta_z)$ двумя оригинальными методами, основанными на использовании предварительно введенного в смазочный материал β-активного индикатора (^{32}P).

Один из методов предоставляет возможность использования его при измерении пленок масла в случае подшипников, работающих в динамическом режиме.

Произведенные испытания смазочных материалов различных вязкостей и температур, с добавлением маслянистости в случае металлических стенок с шероховатостью порядка 0,3—0,5 μ, позволили дать в этой работе указания относительно границы гидродинамической области влияния металлических стенок и условий зависимости δ от η или η_z.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Объемный элемент в цилиндрических координатах.

Рис. 2. — Аппаратура для исследования изменений (монтаж по методу 1). P_1, P_2— алюминиевые пластинки. δ — счетчик Гейгера—Мюллера, колокол. *1* — электромагнит; *2* — ось передачи заряда; *3* — сердечник из мягкого железа; *4* — алюминиевый кожух; *5* — провод к миллиамперметру и питанию; *6* — пластина основания прибора; *7* — указатель горизонтальности; *8* — свинцовая стенка.

Рис. 3. — Аппаратура, представленная на рис. 2. Верхняя свинцовая пластина (8) приспособлена для измерений цилиндрическим счетчиком Гейгера — Мюллера.

Рис. 4. — Дополнительная деталь аппаратуры, представленной на рис. 2 (для метода II). P_1', P_2' — стальные пластины; C — стальной сосуд; R — электрическое сопротивление; 4 — 6 то же, что на рис. 2.

Рис. 5. — Аппаратура для измерений по методу II.

Рис. 6. — Сравнительная диаграмма методов. *1* — метод I; *2* — метод II; *3* — теоретическая кривая. Масло „413"; $T = 294°$ K; $\eta = 4{,}05$ P; P_1, P_2 Al $\varnothing = 20$ мм; $\sigma = 1{,}5$ кГ см$^{-2}$.

Рис.7. — Диаграмма, изображающая влияние аддитивной маслянистости. *1* — кривая парафинового масла; *2* — кривая парафинового масла + 5 % олеиновой кислоты. $T = 294°$ K; $\eta = 2{,}23$ P; P_1, P_2 — закаленная сталь $\varnothing$ 12 мм; $\sigma = 0{,}4$ кГ см$^{-2}$.

Рис. 8. — Диаграмма, изображающая влияние температуры и вязкости. *1* — *1'* — масло „413"; *2* — *2'* — масло „105"; *3* — *3'* — аптекарское касторовое масло; P_1', P_2' — закаленная сталь $\varnothing = 12$ мм; $\sigma =$ 0,04 и 0,4 кГ см$^{-2}$.

RADIOACTIVE TRACER FOR DETERMINING THE INFLUENCE OF VISCOSITY UPON THE OIL-FILM THICKNESS

ABSTRACT

Proceeding from a particular case, which gives the possibility of experimental verification and generalisation, a single relation is obtained between δ, η and $\sigma \cdot t = \eta_z$ under the assumption of a hydrodynamic viscous flow.

An experimental equipment is presented, which allows the function $\delta = K \cdot f(\eta, \eta_z)$ to be studied by two original methods, based upon the utilisation of an active β tracer (^{32}P) previously introduced into the lubricant.

One of the methods may be applied for measuring the oil-film thickness of dynamically loaded bearings.

By experimenting with lubricants of various viscosities, at various temperatures, and by using an oilness additive (the surface roughness being 0,3 — 0,5μ), the authors give indications about the limit of hydrodynamic range effects of metallic walls and the dependence condition η, η_z, δ.

EXPLANATION OF FIGURES

Fig. 1. — A volume element in cylindrical coordinates.

Fig. 2. — Equipment for studying the variation of δ (assembly method I) P_1, P_2 = Al plates; G.M. = Geiger-Müller bell counter; *1.* electromagnet; *2.* load transmission shaft; *3.* soft iron core; *4.* Al jacket; *5.* to milliamperemeter and feeding; *6.* assembly base plate; *7.* level indicator; *8.* Pb wall.

Fig. 3. — Equipment shown in figure 2 (Pb top plate (8), disposed for measurements with cylindrical G.M. counter too).

Fig. 4. — Supplementary part of equipment shown in figure 2 (for method II). P_1', P_2' = Steel plates; C = steel vessel ; R = electric resistance; *4—6.* as in figure 2.

Fig. 5. — Equipment in the case of a measurement by method II.

Fig. 6. — Comparative diagram of the methods. *1.* Method I; *2.* method II; *3.* theoretic curve.

„413" oil, $T = 294°\mathrm{K}$; $\eta = 4.05$ P.

P_1, P_2 Al $\varnothing = 20$ mm ; $\sigma = 1.5$ kgf. cm^{-2} .

Fig. 7. — Diagram regarding influence of oilness additive. *1.* Paraffin oil curve ; *2.* paraffin oil + 5 % oleic acid curve.

$T = 294°\mathrm{K}$; $\eta = 2.23$ P.

P_1', P_2' tempered steel $\varnothing = 12$ mm ; $\sigma = 0{,}4$ kgf. cm^{-2}.

Fig. 8. — Diagram regarding influence of temperature and viscosity *1—1'*. „413" oil ; *2—2'*. „105" oil ; *3—3'*. pharmaceutic castor-oil ; P_1', P_2' = tempered steel $\varnothing = 12$ mm ; $\sigma = 0.04$ and 0.4 kgf, cm^{-2}.

BIBLIOGRAFIE

1. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids.* Oxford University Press, 1954, 10—22 şi 58—63.
2. E. Carafoli, T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor*, I. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1953 26—52.
3. R. Cazaud, *Le frottement et l'usure des métaux.* Ed. Dunod, Paris, 1955, 2—16.
4. К. Б. **Дьвиес**, Граничная смазка. Машиностроение, 55, 2, 61, 1958.
5. А. К. **Дьачков**, Учет влияния зависимости вязкости смазочного масла от давления на показатели работы цилиндрического подшипника при статическом нагружении. Трение и износ в машинах. III, Москва, 1958, 51 — 53.
6. L. Guembel, E. Everling, *Reibung und Schmierung im Maschinenbau.* Verlag M. Krayn, Berlin, 1925, 27—41 şi 54—58.
7. В. В. **Карасев**, Б. В. **Дерягуинэ**, Изучение граничной вязкости органических жидкостей методом сдувания. Коллоидный журнал, XV, 5, 364—370, 1953.
8. JA. J. Kogan, O. J. Bogdanov, JE. J. Jantowski, *Das Messen der Dicke des Ölfilms in Gleit und Stätzlagern.* Deutsche Elektrotechnik, **II**, *2*, 81—83 (1957).
9. Ф. Л. **Крейсле**, Сероватость поверхности как критерий минимальной толщины масляной пленки в условиях подшипников. Машиностроение, 55, 1, 63 (1958).
10. I. S. Koulikov, I. A. Popov, *Folosirea izotopilor radioactivi în metalurgie.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1957, 87, 100—111 şi 186.
11. D. Pavelescu, *Cercetări cu radioizotopi în domeniul mecanicii aplicate.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *1*, 275—278 (1956).
12. R. Poppinga, *Wear and Lubrication of Piston Rings and Cylinders.* Publ. by the American Society of Lubrication Engineers, New York, 1942, 40, 47, 48, 64—89 şi 95—108.
13. L. J. Putman, *Jauges d'épaisseur et instruments du même type.* Actes de la Conf. Internat. Genève, **XV**, 231—235 (1955).
14. S. M. Raisky, V. F. Smirnov, *Bazele fizice ale metodei indicatorilor radioactivi* I.S.R.S., Bucureşti, 1957, 139—168.
15. L. Rozeanu, O. Preotescu, *Clasificarea lubrifianţilor de motoare după criteriul viscozităţii.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IV**, *3—4*, 404, 146 (1955).
16. L. Rozeanu, *Probleme noi în legătură cu folosirea lubrifianţilor.* I. D. T., Bucureşti, 13—16 şi 36—40.
17. D. J. Salley, A. J. Weith Jr., A. A. Argyle, J. K. Dixon, *Measurement of the adsorption of surface active agents at a solution air interface by a radio tracer method.* Proc. of. the Roy. Soc. Series A, **203**, 42 (1950).
18. S. von Schieszl, *Versuche zur Klärung der Gültigkeitsgrenze der Hydrodynamik in dünnen Schmierölchichten.* Chem. Technik, **2**, *3*, 91 (1950).
19. V. I. Spitzyn, *Metode de lucru cu folosirea indicatorilor radioactivi.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1957, 160—179.
20. N. Tipei, Hidroaerodinamica lubrificaţiei. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1957, 11—84 şi 528—538.
21. H. H. Zuidema, *The Performance of Lubrificating Oils.* Reinhold Publishing Co. New York, 1952, 2—8.

LUBRIFICAŢIA LAGĂRELOR ÎN REGIM TURBULENT SUPUSE LA FORŢE ŞI VITEZE VARIABILE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

În unele lucrări anterioare [1], [2], [3], s-au studiat ecuaţiile lubrificaţiei în regim turbulent, considerînd mişcarea în stratul de lubrifiant ca fiind staţionară (ceea ce revine la a considera lagărele supuse la forţe şi viteze constante). În aceste condiţii s-au putut determina, pentru problema bidimensională, distribuţiile vitezelor şi presiunilor, permiţînd astfel calculul diferitelor tipuri de lagăre funcţionînd în regim turbulent.

În cele ce urmează vom relua studiul ecuaţiilor de mişcare în stratul de lubrifiant, considerînd însă scurgerea nepermanentă, adică vitezele celor două suprafeţe lubrifiate, ca şi sarcina suportată de lagăr sînt variabile în timp. Această problemă este interesantă din punctul de vedere al aplicaţiilor, deoarece pentru viteze mari, la care apare în stratul de lubrifiant regimul turbulent de scurgere, sarcinile în lagăre provin de cele mai multe ori din cauza dezechilibrărilor.

Forţele centrifuge datorită eventualelor dezechilibrări sînt constante ca mărime, dar variabile ca direcţie şi în consecinţă mişcarea în stratul de lubrifiant nu este permanentă. De asemenea, în cazul lagărelor la viteze mari este important studiul vibraţiilor şi al stabilităţii lor, deoarece, excentricităţile fiind în general reduse, există pericolul ca mişcarea celor două suprafeţe să fie instabilă. Or, studiul stabilităţii lagărelor se bazează pe cunoaşterea în prealabil a comportării lor în regim nepermanent.

1. ECUAŢIILE PROBLEMEI

Vom efectua studiul mişcării în stratul de lubrifiant în aceleaşi ipoteze ca şi pentru lagărele supuse la forţe şi viteze constante în mărime şi direcţie, adică :

— vom considera mişcarea efectuîndu-se în straturi subţiri în aşa fel încît să se poată neglija viteza în straturi de lubrifiant pe direcţia normală la suprafețe, și de asemenea să se poată neglija derivatele vitezelor pe celelalte două direcții, în raport cu direcția normală la suprafețe ;

— ca o consecință a celor de mai sus vom considera forțele de inerție ca fiind neglijabile în raport cu forțele datorită viscozității (cu excepția, bineînțeles, a tensiunilor turbulente, care provin din forțele de inerție) ;

— sistemul de axe de coordonate $Oxyz$ ales va fi cel curent utilizat în problemele de lubrificație și anume avînd axa Oy dirijată după normala la una din suprafețe, iar celelalte două axe cuprinse în întregime pe aceeași suprafață (se neglijează deci curbura suprafețelor în raport cu grosimea stratului de lubrifiant, în virtutea faptului că mișcarea se efectuează în straturi foarte subțiri) ;

— vom considera că toate mărimile care caracterizează mișcarea sînt puse sub forma

$$\varphi = \varphi' + \varphi\,;\quad \bar{\varphi} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(\theta)\,d\theta, \tag{1}$$

în care φ' ste pulsația turbulentă, iar $\bar{\varphi}$ o valoare depinzînd de timp (fig. 1), dar care elimină pulsația turbulentă pentru care

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi'\,dt = 0. \tag{2}$$

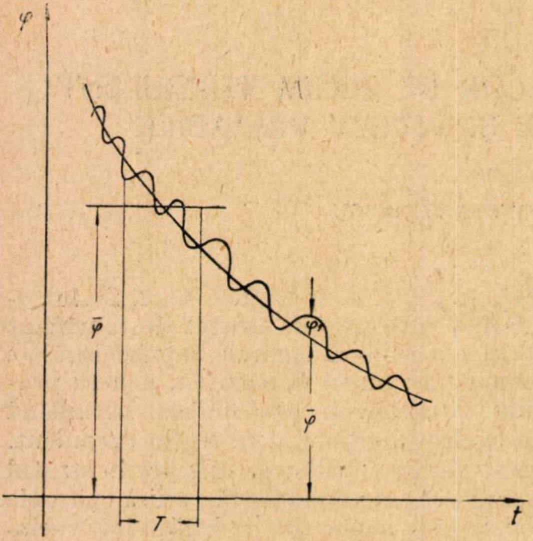


Fig. 1

Faptul că mișcarea este nepermanentă introduce o dificultate înscrierea ecuațiilor de mișcare, deoarece mărimile $\bar{\varphi}$ trebuie să depindă de timp. Vom considera însă în mod aproximativ, că variațiile în raport cu timpul a pulsațiilor φ' sînt considerabil mai mari, ca și frecvența lor, decît variațiile mărimilor $\bar{\varphi}$. În același timp, în aceste condiții vom putea presupune că intervalul de integrare T poate fi presupus suficient de mic, încît să se poată neglija variația în raport cu timpul a mărimii $\bar{\varphi}$, astfel încît, dacă φ și ψ sînt doi parametri ai mișcării, să putem scrie aproximativ

$$\left.\begin{aligned} \overline{\bar{\varphi}\,\bar{\psi}} &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \bar{\varphi}\,\bar{\psi}\,d\theta = \bar{\varphi}\,\bar{\psi}\,, \\ \overline{\bar{\varphi}\,\psi'} &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \bar{\varphi}\,\psi'\,d\theta = \frac{\bar{\theta}}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \psi'\,d\theta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Aceste ipoteze revin la a considera curba $\overline{\varphi}(t)$ (fig. 1) înlocuită cu o linie în trepte, la care lățimea treptelor este suficient de redusă pentru ca apoi, după efectuarea operației de mediere (1), să considerăm această linie în trepte ca o linie continuă. Cu alte cuvinte, vom considera că sistemul, ce se obține în cazul mișcărilor permanente, este valabil în primă aproximație și pentru mișcări nepermanente, cu singura deosebire că acum vor apare și derivatele $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ etc. În aceste condiții, considerînd că mișcarea instantanee satisface ecuațiile Navier-Stokes, vom scrie aceste ecuații, vom înlocui apoi toate mărimile care intervin cu mărimi de forma (1) și vom efectua operațiile de mediere. În acest mod rezultă, ținînd seama și de ecuația continuității, ecuațiile lui Reynolds pentru fluide incompresibile,

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\mu\,\Delta\bar{u}+\\
&+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'^2})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{u'v'})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{u'w'}),\\
&\rho\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\bar{u}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}+\mu\,\Delta\bar{v}+\\
&+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'v'})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'^2})\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v'w'}),\\
&\rho\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}+\bar{u}\,\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}+\bar{v}\,\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}+\bar{w}\,\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}+\mu\,\Delta\bar{w}+\\
&+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'w'})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'w'})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{w'^2}),
\end{aligned}\right\}\qquad (4)$$

în care ρ este densitatea, u, v, w componentele vitezei după direcțiile x, y, z; p presiunea iar μ viscozitatea.

Ecuația de continuitate se scrie, pentru fluide incompresibile

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}=0. \qquad (5)$$

În ecuațiile (4) și (5), toate mărimile, evident cu excepția densității ρ care este constantă, adică $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{p}$, $\overline{u'^2}$, $\overline{u'v'}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{v'w'}$ etc. sînt și funcții de timp, nu numai de punct. Dar, deoarece considerăm forțele de inerție neglijabile (primii membri ai ecuațiilor (4)), timpul va interveni în ecuațiile de mișcare numai ca parametru și nu ca variabilă independentă în funcție de care să apară și derivate ale mărimilor care definesc mișcarea.

Astfel, operînd asupra sistemului (4) și celelalte simplificări care decurg din faptul că scurgerea se efectuează în straturi subțiri, acest sistem se scrie

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(- \rho\overline{u'^2})\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(- \rho\overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(- \rho\overline{u'w'}\right),\\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(- \rho\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y}(- \rho\overline{v'^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(- \rho\overline{v'w'}),\\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}(- \rho\overline{u'w'}) + \frac{\partial}{\partial y}(- \rho\overline{v'w'}) + \frac{\partial}{\partial z}(- \rho\overline{w'^2}),\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

sau încă, ținînd seama că derivatele tensiunilor turbulente în raport cu x și z sînt în raportul $\frac{\delta}{x}$ (aproximativ 10^{-3}, δ fiind grosimea stratului de lubrifiant) mai mici, decît derivatele lor în raport cu y, sub forma

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \mu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(- \rho\overline{u'v'}),\\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(- \rho\overline{v'^2}),\\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= \mu\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(- \rho\overline{v'w'}).\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Acest sistem are aceeași formă ca și pentru mișcările permanente, iar timpul intervine numai ca parametru. În schimb, timpul va interveni în condițiile la limită ale problemei și în ecuația de continuitate.

În consecință ca și pentru mișcările permanente [1], [2] presiunea va fi o funcție de forma

$$\bar{p} = \sigma(x, y, z) + \pi(x, z), \qquad (8)$$

în care $\sigma(x, y, z) = - \rho\overline{v'^2}$, iar $\pi(x, z)$ reprezintă presiunea la perete (la $y = 0,\ \delta$) și $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \cong \frac{\partial \pi}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{\partial \pi}{\partial z}$.

De asemenea, considerînd tensiunea turbulentă de forma

$$- \rho\overline{u'v'} = \rho l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|, \qquad (9)$$

unde l este lungimea de amestec

$$\left.\begin{aligned} l &= \varkappa y\,; \quad 0 \leqslant y \leqslant \delta/2\,; \quad \varkappa = 0{,}4\\ l &= \varkappa(\delta - y)\,; \quad \delta/2 \leqslant y \leqslant \delta\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

prima ecuaţie a sistemului (7), care dă distribuţia vitezelor, se scrie

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\rho \varkappa^2 y^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right|\right\} + \mu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = 0, \tag{11}$$

pentru $0 \leqslant y \leqslant \delta/2$ şi o ecuaţie asemănătoare, pentru $\delta/2 \leqslant y \leqslant \delta$.

În cele ce urmează, avînd în vedere că vom considera numai mărimi de forma $\overline{\varphi}$ şi nu şi mărimi pulsatorii, vom renunţa la notaţia supraliniată. În schimb vom nota mărimile adimensionale cu

$$\overline{u} = \frac{u}{V}; \ \overline{y} = \frac{y}{\delta}. \tag{12}$$

Cu aceste notaţii, ecuaţia (11) se scrie după o primă integrare sub forma

$$A\,\overline{y}^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\right| + \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} + B\overline{y} - C = 0, \tag{13}$$

în care

$$A = \varkappa^2 Re\,; \ Re = \frac{\rho V \delta}{\mu}; \ \ B = -\frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}. \tag{14}$$

În această ecuaţie mărimile Re, A, B etc. sînt funcţii de timp. De asemenea, şi condiţiile la limită, la $y = 0$, δ, ca şi condiţiile de racordare necesare pentru construirea profilului vitezelor pe întreaga grosime a stratului de lubrifiant sînt funcţii de timp prin intermediul mărimilor δ şi V, care sînt, la rîndul lor, funcţii de timp. Dar, deoarece timpul nu apare decît prin intermediul mărimilor menţionate şi nu direct, rezultatele privind integrarea ecuaţiei diferenţiale (13) şi studiul distribuţiei vitezelor u obţinute în lucrările [1], [2] pentru mişcări permanente sînt valabile şi pentru regimurile nepermanente, cu observaţia că toate mărimile δ, V, Re, A, B etc. sînt funcţie de timp.

În consecinţă, vom putea în final scrie relaţia

$$B = k\,\overline{u}_m, \tag{15}$$

în care

$$\overline{u}_m = \overline{u}_{tm} - \overline{u}_{mc}; \quad \overline{u}_{mc} = \frac{1}{2}, \tag{16}$$

u_{tm} fiind viteza medie în stratul de lubrifiant iar $\overline{u}_{mc}$ viteza medie corespunzătoare unei mişcări Couette.

Coeficientul k este egal cu [3]

$$k = k_1 + k_2\,Re^n = 12 + 0{,}14\,Re^{0{,}725}, \tag{17}$$

astfel încît, ţinînd seama de prima relaţie (12), $\overline{u}_m = V\overline{u}_m$ este o funcţie de $\frac{\partial p}{\partial x}$ avînd forma

$$\overline{u}_m = -\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{1}{\frac{\mu}{\delta^2}\left[12 + 0{,}14\left(\frac{\rho V \delta}{\mu}\right)^{0.725}\right]}. \tag{18}$$

Pentru a scrie ecuația diferențială a presiunilor, pentru mișcări bidimensionale vom deduce valoarea vitezei din condiția de continuitate a debitului de lubrifiant.

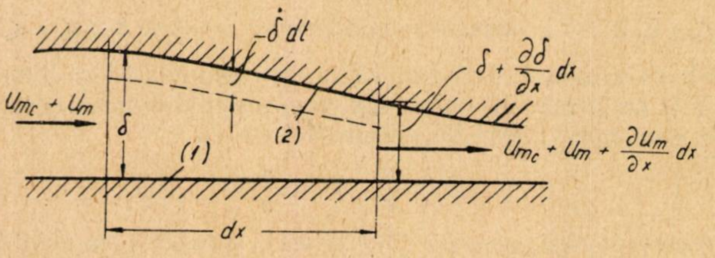

$-\dot{\delta}\,dt$
$\delta + \frac{\partial \delta}{\partial x} dx$
$u_{mc} + u_m$
δ
(1)
(2)
$u_{mc} + u_m + \frac{\partial u_m}{\partial x} dx$
dx

Fig. 2

Pentru aceasta să considerăm (fig. 2) o porțiune a stratului de lubrifiant de lățime dx. Variația debitului de fluid va trebui să fie egală cu variația volumului elementar datorită vitezei normale $V_{2v} - V_{1v}$.

$$\left(u_{mc} + u_m + \frac{\partial u_m}{\partial x}\right)\left(\delta + \frac{\partial \delta}{\partial x} dx\right) dt - (u_{mc} + u_m)\,\delta\, dt = -(V_{2v} - V_{1v})\, dx\, dt,$$

$$u_{mc} = \frac{V}{2} = \frac{V_{2x} - V_{1x}}{2}, \tag{19}$$

sau, neglijînd infiniții mici de ordin superior

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V}{2}\delta + u_m \delta\right] + (V_{2v} - V_{1v}) = 0\,, \tag{20}$$

sau încă, observînd că în general $V_{2v} - V_{1v} = \dot{\delta}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{2}\delta + u_m \delta\right) = -\dot{\delta}. \tag{21}$$

Integrînd ambii membri în raport cu x

$$\frac{V}{2}\delta + u_m \delta = -\int \dot{\delta}\, dx + \frac{V}{2}\delta_0 + \bar{\bar{C}}_1(t), \tag{22}$$

în care s-a notat constanta de integrare : $\left\{\frac{V}{2}\delta_0 + \bar{\bar{C}}_1(t)\right\}$.

Relația (22) se mai scrie

$$u_m = -\frac{1}{\delta}\int \dot{\delta}\, dx - \frac{V}{2}\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right) + \frac{1}{\delta}\bar{\bar{C}}_1(t). \tag{23}$$

Egalînd această relaţie cu relaţia (18) se obţine ecuaţia diferenţială a presiunilor, sub forma

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{\delta^3}\left[12 + 0,14\left(\frac{\rho V\delta}{\mu}\right)^{0.725}\right]\left[\int \dot{\delta}\,dx - \overline{\overline{C}}_1(t)\right] + \\ + \frac{\mu V}{\delta^3}\left[6 + 0,07\left(\frac{\rho V\delta}{\mu}\right)^{0.725}\right]\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right). \tag{24}$$

Ecuaţia diferenţială (24) fiind liniară, vom putea să punem soluţia p, ca şi pentru mişcarea laminară [4], [5], sub forma

$$p = \overline{p} + \overline{\overline{p}}, \tag{25}$$

în care $\overline{p}$ satisface ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = \frac{\mu V}{\delta^2}\left[6 + 0,07\left(\frac{\rho V\delta}{\mu}\right)^{0.725}\right]\left(1 - \frac{\delta_0}{\delta}\right) \tag{26}$$

iar $\overline{\overline{p}}$ ecuaţia

$$\frac{\partial \overline{\overline{p}}}{\partial x} = \frac{\mu}{\delta^3}\left[12 + 0,14\left(\frac{\rho V\delta}{\mu}\right)^{0.725}\right]\left[\int \dot{\delta}\,dx - \overline{\overline{C}}_1(t)\right]. \tag{27}$$

Prin această schimbare de funcţie, ecuaţia diferenţială (26) pentru $\overline{p}$ este identică cu ecuaţia diferenţială a presiunilor în cazul regimurilor permanente [2], [3]. În consecinţă soluţia $\overline{p}$ poate fi considerată cunoscută, exceptînd cel mult constantele de integrare.

Pentru soluţia $\overline{\overline{p}}$, dacă se consideră viscozitatea variabilă după relaţia

$$\mu = \mu_1\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^q \tag{28}$$

cu $q = 1$ (în care δ_1 este grosimea maximă a stratului de lubrifiant, iar μ_1 viscozitatea corespunzătoare), relaţie aplicabilă pentru uleiuri, atunci, notînd cu

$$Re_1^* = \frac{\rho V\Delta}{\mu_1}, \tag{29}$$

în care Δ este o grosime medie a stratului de lubrifiant, ecuaţia (27) se scrie

$$\frac{\partial \overline{\overline{p}}}{\partial x} = \frac{12\mu_1}{\delta_1}\left[1 + \frac{7}{600}Re_1^{*\,0.725}\left(\frac{\delta_1}{\Delta}\right)^{0.725}\right]\frac{1}{\delta^2}\left[\int \dot{\delta}\,dx - \overline{\overline{C}}_1(t)\right], \tag{30}$$

sau, integrînd în raport cu x

$$\overline{\overline{p}} = \frac{12\mu_1}{\delta_1}\left[1 + \frac{7}{600}Re_1^{*\,0.725}\left(\frac{\delta_1}{\Delta}\right)^{0.725}\right]\int \frac{1}{\delta^2}\left[\int \dot{\delta}\,dx - \overline{\overline{C}}_1(t)\right]dx + \overline{\overline{C}}_2(t). \tag{31}$$

În cazul cînd se consideră viscozitatea constantă, notînd cu

$$Re^{*} = \frac{\rho V \Delta}{\mu} \tag{32}$$

ecuația (27) se scrie:

$$\frac{\partial \overline{\overline{p}}}{\partial x} = \frac{12\mu}{\delta^3}\left[\int \dot{\delta}\, dx - \overline{\overline{C}}_1(t)\right] + \frac{914\,\mu\, Re^{*0,725}}{\Delta^{0,725}}\,\frac{1}{\delta^{2,275}}\left[\int \dot{\delta}\, dx - \overline{\overline{C}}_1(t)\right], \tag{33}$$

sau, integrînd în raport cu x

$$\begin{aligned}\overline{\overline{p}} = \int \frac{12\mu}{\delta^3}\left[\int \dot{\delta}\, dx - \overline{\overline{C}}_1(t)\right] dx \,+ \\ + \frac{0,14\ Re^{*0,725}}{\Delta^{0,725}}\int \frac{1}{\Delta^{2,275}}\left[\int \delta\, dx - \overline{\overline{C}}_1(t)\right] dx + \overline{\overline{C}}_2(t)\,,\end{aligned} \tag{34}$$

în care $\overline{\overline{C}}_1(t)$ și $\overline{C}_2(t)$, împreună cu $\overline{C}_1(t)$ și $\overline{C}_2(t)$ din soluția $\overline{p}$, se determină punînd condițiile la limită ale problemei.

Examinînd soluțiile (31) și (34) obținute, se constată, întocmai ca pentru regimurile de funcționare permanente, o frapantă analogie cu soluțiile obținute pentru regimurile laminare [4]. Cel puțin pentru viscozitate variabilă, soluția (31) are aceeași formă cu cea obținută în cazul regimurilor laminare cu excepția coeficientului $1 + \frac{7}{600}\, Re_1^{*0,725}\left(\frac{\partial_1}{\Delta}\right)^{0,725}$ (de altfel, pentru a obține soluțiile corespunzătoare regimului laminar, este suficient să se pună în relațiile (31) și (34) $Re_1^{*} = 0$, respectiv $Re^{*} = 0$). În consecință, se poate afirma de la început că distribuțiile presiunilor vor avea o alură asemănătoare cu cea obținută în cazul regimului laminar, valorile presiunilor fiind însă sporite din cauza existenței coeficienților proporționali cu Re_1^{*}, respectiv Re^{*}. Această creștere a valorilor presiunilor, constatată și pentru cazul regimurilor permanente [2], [3] se explică fizic prin existența tensiunilor turbulente, considerabil mai mari decît tensiunile datorită viscozității pentru regimul laminar.

2. LAGĂRE PLANE

Pentru acestea, grosimea stratului de lubrifiant variază în raport cu x după relația

$$\delta = \delta_1 - \varepsilon x\,, \tag{35}$$

iar

$$\Delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\,; \qquad \varepsilon = \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\,. \tag{36}$$

În sfîrșit

$$\dot{\delta}_1 = \delta_1 - \dot{\varepsilon}\, x. \tag{37}$$

În cazul cînd se consideră viscozitatea variabilă, introducînd aceste relaţii în ecuaţia (31) se obţine distribuţia presiunilor $\overline{\overline{p}}$ sub forma

$$\overline{\overline{p}} = \frac{12\,\mu_1}{\delta_1\,\varepsilon^2}\left[1 + \frac{7}{600}\,Re_1^{\star\,0725}\left(\frac{\delta_1}{\Delta}\right)^{0{,}725}\right]\left[\left(\dot{\delta}_1 - \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\,\delta_1\right)\ln\delta - \frac{\dot{\varepsilon}}{2}\,x + \right.$$
$$\left. + \left(\dot{\delta}_1 - \frac{\dot{\varepsilon}}{2\varepsilon}\,\delta_1\right)\frac{\delta_1}{\delta} - \overline{\overline{C}}{}_1^{\star}(t)\,\frac{\varepsilon}{\delta}\right] + \overline{\overline{C}}_2\,(t), \tag{38}$$

în care

$$\overline{\overline{C}}{}_1^{\star}\,(t) = \frac{\overline{\overline{C}}_1\,(t)}{\varepsilon}. \tag{39}$$

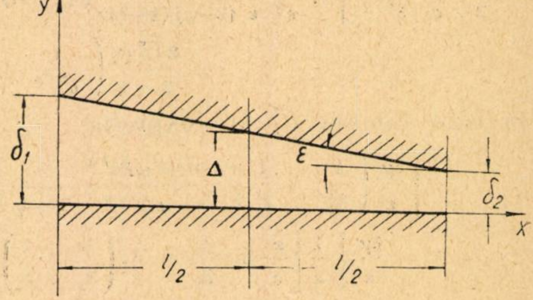


Fig. 3

Condiţiile la limită ale problemei impun ca la $x = 0$ şi $x = x_1 = l$, $p = p_0$, p_0 fiind presiunea din mediul înconjurător. Dacă se consideră $\overline{p} = p_0$ la extremităţile lagărului, atunci soluţia $\overline{p}$ rezultă identică cu soluţia presiunilor obţinută în cazul regimurilor de funcţionare permanente[3] (ecuaţia diferenţială (26) fiind aceeaşi, iar condiţiile la limită de asemenea). Atunci rezultă pentru $\overline{\overline{p}}$, condiţiile

$$\overline{\overline{p}} = 0 \text{ la } x = 0\,;\ x = l \tag{40}$$

în aceste condiţii distribuţia presiunilor $\overline{\overline{p}}$ (38) se scrie sub forma

$$\overline{\overline{p}} = \frac{12\,\mu_1}{\delta_1\,\varepsilon^2}\left[1 + \frac{7}{600}\,Re_1^{\star 0{,}725}\left(\frac{\delta_1}{\Delta}\right)^{0{,}725}\right]\left\{\left(\dot{\delta}_1 - \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\,\delta_1\right)\ln\frac{\delta}{\delta_1} - \frac{\dot{\varepsilon}}{2}\,x + \right.$$
$$\left. + \left(\dot{\delta}_1 - \frac{\dot{\varepsilon}}{2\varepsilon}\,\delta_1\right)\left(\frac{\delta_1}{\delta} - 1\right) - \overline{\overline{C}}{}_1^{\star}\,(t)\,\varepsilon\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta_1}\right)\right\}, \tag{41}$$

în care funcţia $\overline{\overline{C}}{}_1^{\star}\,(t)$ are expresia

$$C_1^{\star}\,(t) = \frac{\left(\dot{\delta}_1 - \dfrac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\,\delta_1\right)\ln\dfrac{\delta_2}{\delta_1} - \dfrac{\dot{\varepsilon}}{2}\,l + \left(\dot{\delta}_1 - \dfrac{\dot{\varepsilon}}{2\,\varepsilon}\,\delta_1\right)\left(\dfrac{\delta_1}{\delta_2} - 1\right)}{\varepsilon\left(\dfrac{1}{\delta_2} - \dfrac{1}{\delta_1}\right)}. \tag{42}$$

În cazul cînd se consideră viscozitatea constantă, ţinînd seama de relaţiile (35) şi (37), distribuţia presiunilor $\overline{\overline{p}}$ (34) se scrie

$$\overline{\overline{p}} = \frac{6\mu}{\varepsilon}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\ln\delta - \frac{\dot{\delta}_1}{\delta}\right) + \frac{x}{\delta}\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{\dot{\delta}_1}{\delta} - \frac{\dot{\varepsilon}x}{2\delta}\right) + \frac{\overline{\overline{C}}{}_1^{\star}\,(t)}{\delta^2}\right] +$$
$$+ \frac{0{,}07\,\mu\,R_e^{\star\,q}}{\varepsilon\,\Delta^{1-q}}\left\{\frac{x}{\delta}\left[\frac{2}{(2-q)\,(1-q)}\,\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\,\delta^q + \frac{2}{(2-q)}\,\frac{\delta_1^q}{\delta^{1-q}} - \frac{\dot{\varepsilon}}{2-q}\,\frac{x}{\delta^{1-q}}\right] + \right. \tag{43}$$
$$\left. + \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\,\frac{2}{q\,(2-q)\,(1-q)}\,\delta^q - \frac{2}{(2-q)\,(1-q)}\,\frac{\dot{\delta}_1}{\delta^{1-q}}\right] - \frac{2\,\overline{\overline{C}}{}_1^{\star}}{2-q}\,\frac{1}{\delta^{2-q}}\right\} + \overline{\overline{C}}{}_2^{\star}\,(t)$$

cu $q = 0{,}725$ sau, dacă se consideră condițiile la limită (40)

$$\begin{aligned}\overline{\overline{p}} = \frac{6\mu}{\varepsilon}\Bigg\{\frac{1}{\varepsilon}\Bigg[\frac{\dot\varepsilon}{\varepsilon}\ln\frac{\delta}{\delta_1} - \dot\delta_1\Big(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\delta_1}\Big)\Bigg] + \frac{x}{\delta}\Big(\frac{\dot\varepsilon}{\varepsilon}+\frac{\dot\delta_1}{\delta}-\frac{\dot\varepsilon x}{2\delta}\Big) - \\ - \overline{\overline{C}}{}_1^{\star}(t)\Big(\frac{1}{\delta^2}-\frac{1}{\delta_1}\Big)\Bigg\} + \frac{0{,}07\,\mu Re^{\star q}}{\varepsilon\Delta^{1-q}}\Bigg\{\frac{x}{\delta}\Bigg[\frac{2}{(2-q)(1-q)}\frac{\dot\varepsilon}{\varepsilon}\,\delta^q + \frac{2}{2-q}\frac{\dot\delta_1}{\delta^{1-q}} - \\ - \frac{\dot\varepsilon}{2-q}\frac{x}{\delta^{1-q}}\Bigg] + \frac{1}{\varepsilon}\Bigg[\frac{\dot\varepsilon}{\varepsilon}\frac{2}{(2-q)(1-q)q}(\delta^q-\delta_1^q) - \frac{2}{(2-q\,(1-q)}\,\dot\delta_1\Big(\frac{1}{\delta^{1-q}}-\frac{1}{\delta_1^{1-q}}\Big)\Bigg] - \\ - \frac{2\overline{\overline{C}}{}_1^{\star}(t)}{2-q}\Big(\frac{1}{\delta^{2-q}}-\frac{1}{\delta_1^{2-q}}\Big)\Bigg\},\end{aligned} \tag{44}$$

în care funcția $\overline{\overline{C}}{}_1^{\star}$ are expresia

$$\begin{aligned}\Bigg[\frac{6\mu}{\varepsilon}\Big(\frac{1}{\delta_2^2}-\frac{1}{\delta_1^2}\Big) + \frac{0{,}07\,\mu Re^{\star q}}{\varepsilon\Delta^{1-q}}\frac{2}{2-q}\Big(\frac{1}{\delta_2^{2-q}}-\frac{1}{\delta_1^{2-q}}\Big)\Bigg]\overline{\overline{C}}{}_1^{\star}(t) = \\ = \frac{6\mu}{\varepsilon}\Bigg\{\frac{1}{\varepsilon}\Bigg[\frac{\dot\varepsilon}{\varepsilon}\ln\frac{\delta_2}{\delta_1} - \dot\delta_1\Big(\frac{1}{\delta_2}-\frac{1}{\delta_1}\Big)\Bigg] + \frac{l}{\delta_2}\Big(\frac{\dot\varepsilon}{\varepsilon}+\frac{\dot\delta_1}{\delta_2}-\frac{\dot\varepsilon l}{2\delta_2}\Big)\Bigg\} + \\ + \frac{0{,}07\,\mu Re^{\star q}}{\varepsilon\Delta^{1-q}}\Bigg\{\frac{l}{\delta_2}\Bigg[\frac{2}{(2-q)(1-q)}\frac{\dot\varepsilon}{\varepsilon}\,\delta_2^q + \frac{2}{2-q}\frac{\dot\delta_1}{\delta_2^{1-q}} - \frac{\dot\varepsilon}{2-q}\frac{l}{\delta_2^{1-q}}\Bigg] + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\Bigg[\frac{\dot\varepsilon}{\varepsilon}\frac{2}{(2-q)(1-q)\,q}(\delta_2^q-\delta_1^q) - \frac{2}{(2-q)(1-q)}\,\dot\delta_1\Big(\frac{1}{\delta_2^{1-q}}-\frac{1}{\delta_1^{1-q}}\Big)\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{45}$$

Rezultanta presiunilor P este apoi egală cu

$$P = \int_0^l (p - p_0)\,dx = \int_0^l (\overline{p} - p_0)\,dx + \int_0^l \overline{\overline{p}}\,dx = \overline{P} + \overline{\overline{P}}. \tag{46}$$

Astfel definind coeficienții adimensionali

$$\zeta = \frac{P\,\Delta^2}{2\mu\,Vl^2}\ ;\ \overline{\zeta} = \frac{\overline{P}\,\Delta^2}{2\mu Vl^2}\ ;\ \overline{\overline{\zeta}} = \frac{\overline{\overline{P}}\Delta^2}{2\mu Vl^2}, \tag{47}$$

rezultă

$$\zeta = \overline{\zeta} + \overline{\overline{\zeta}}, \tag{48}$$

în care $\overline{\zeta}$ are aceeași expresie ca și pentru cazul regimurilor de funcționare permanente, iar $\overline{\overline{\zeta}}$ este egal cu

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\zeta}} = -\frac{3}{2V}\frac{\delta_2^2}{\delta_1}\left(\frac{\dfrac{\delta_1}{\delta_2}+1}{\dfrac{\delta_1}{\delta_2}-1}\right)^2\Bigg\{\frac{\dot\delta_1}{\varepsilon}(\delta_1+\delta_2)\ln\frac{\delta_2}{\delta_1} + \dot\varepsilon\Bigg\{\frac{l^2}{4} - \frac{\delta_1}{\varepsilon^2}\Bigg[\Bigg(\frac{\delta_1}{2} + \\ + \delta_2\Bigg)\ln\frac{\delta_2}{\delta_1} - \frac{1}{2}(\delta_1-\delta_2)\Bigg]\Bigg\} - \overline{\overline{C}}{}_1^{\star}\Bigg(\ln\frac{\delta_2}{\delta_1} + 1 - \\ - \frac{\delta_2}{\delta_1}\Bigg)\Bigg\}\Bigg[1 + \frac{7}{600}\Big(\frac{\delta_1}{\Delta}\Big)^q Re^{\star q}\Bigg],\end{aligned} \tag{49}$$

în cazul cînd se consideră viscozitatea variabilă, şi

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{\zeta}} = &-\frac{3}{4V}\,\delta_2^2\left(\frac{\dfrac{\delta_1}{\delta_2}+1}{\dfrac{\delta_1}{\delta_2}-1}\right)^2 \Biggl\{\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\,l\left[\frac{1}{2}\left(5+\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)+\frac{2\,\delta_1+\delta_2}{\delta_1-\delta_2}\ln\frac{\delta_2}{\delta_1}\right]- \\
&-\frac{\dot{\delta}_1}{\varepsilon}\left[2\left(1+\ln\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)-\frac{\delta_1}{\delta_2}-\frac{\delta_2}{\delta_1}\right]+\frac{\overline{\overline{C}}{}_1^{\star}\left(1-\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2}{\delta_2}\Biggr\}+ \\
&+\frac{0{,}07\,\mu\,Re^{\star q}}{\varepsilon\,\Delta^{1-q}}\,\frac{\Delta^2}{2\mu V l^2}\Biggl\{\frac{2}{(2-q)\,(1-q)\,\varepsilon}\Biggl[-\frac{l\delta_2^q}{q}-\frac{\delta_2^{1+q}}{q\,(q+1)}\left(\frac{\delta_1^{1+q}}{\delta_2^{1+q}}-1\right)+ \\
&+\frac{l}{\varepsilon\delta_2^{1-q}}-\frac{\dot{\delta}_1\,\delta_2^q}{\varepsilon q}\left(\frac{\delta_1^q}{\delta_2^q}-1\right)\Biggr]-\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon\,(2-q)\,(1-q)}\Biggl[\frac{l^2}{\delta_2^{1-2}}-\frac{2l\delta_2^q}{\varepsilon q}+ \\
&+\frac{2\delta_2^{1+q}\,(1-q)}{\varepsilon^2\,q\,(q+1)}\left(\frac{\delta_1^{1+q}}{\delta_2^{1+q}}-1\right)+\frac{l\delta_1^q}{\varepsilon q}\Biggr]-\frac{2\dot{\delta}_1}{\varepsilon\,(2-q)\,(1-q)}\Biggl[\frac{\delta_2^q}{\varepsilon q}\left(\frac{\delta_1^q}{\delta_2^q}-1\right)- \\
&-\frac{l}{\delta_1^{1-q}}\Biggr]-\frac{2\overline{\overline{C}}{}_1^{\star}}{2-q}\Biggl[\frac{1}{\varepsilon\,(1-q)\,\delta_2^{1-q}}\left(1-\frac{\delta_2^{1-q}}{\delta_1^{1-q}}\right)-\frac{l}{\delta_1^{2-q}}\Biggr]\Biggr\}, \qquad (50)
\end{aligned}
$$

în cazul cînd se consideră viscozitatea constantă.

Ca şi pentru regimul laminar [4] se pot lua în considerare cazurile mai particulare, dar care conduc la rezultate mai simple şi anume, cînd cele două suprafeţe au rotaţii în jurul unui ax perpendicular pe direcţia mişcării astfel încît înclinarea lor relativă variază, dar raportul între grosimea maximă şi grosimea minimă a filmului de lubrifiant rămîne constant în timp, adică δ este de forma

$$\delta\,(x, t) = \delta_t\,(t)\;\delta_x\,(x), \qquad (51)$$

sau cazul cînd suprafeţele păstrează aceeaşi înclinare relativă depărtîndu-se sau apropiindu-se cînd δ are forma

$$\delta = \delta_1(t) + \delta_x(x). \qquad (52)$$

Pentru aceste cazuri calculele se conduc în mod asemănător ca pentru cazul general studiat mai sus.

3. LAGĂRE CIRCULARE

În cazul lagărelor circulare, grosimea filmului de lubrifiant variază în raport cu unghiul $\theta = \dfrac{x}{r_1}$ (fig. 4) şi are expresia

$$\delta = \Delta + e\cos\theta = \Delta\,(1 + \alpha\cos\theta), \qquad (53)$$

în care Δ este jocul radial, e excentricitatea, iar $\alpha = \frac{e}{\Delta}$ excentricitatea relativă.

Înainte de a efectua integralele din relațiile (31) și (34) este utilă o analiză cinematică a sistemului cu scopul de a determina din ce se compune în cazul general viteza V care intervine în determinarea soluției $\overline{p}$. Problema este rezolvată pentru mişcarea laminară [4]. Pentru mişcarea turbulentă ne putem aştepta la rezultate asemănătoare, totuşi această analiză este mai dificilă, deoarece trebuie să se raționeze direct pe ecuația continuității scrisă sub formă globală, cu alte cuvinte pentru o integrală primă a ecuației presiunilor.

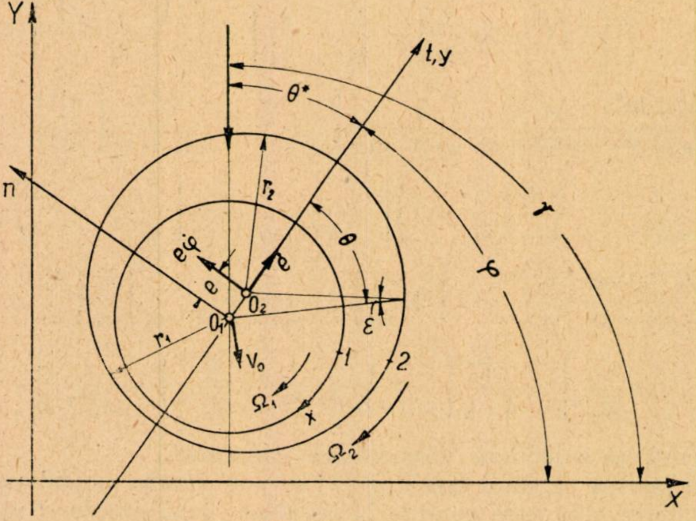


Fig. 4

Mişcarea generală a celor două corpuri lubrifiate (1) și (2) studiată în raport cu un sistem OXY fix ca direcții (fig. 4) poate fi considerată ca fiind compusă din cele două viteze unghiulare Ω_1 și Ω_2 ale fusului și cuzinetului, dintr-o mişcare relativă de translație a cuzinetului față de fus cu o viteză care are o componentă $\dot{e}$ pe direcția liniei centrelor și o componentă $e\dot{\varphi}$ pe normala la aceasta (φ fiind unghiul dintre linia centrelor și direcția fixă OX); în sfîrșit dintr-o translație a centrului fusului cu viteza V_0. Notînd cu $\overline{V}_1$ și $\overline{V}_2$ vitezele celor două suprafețe pentru un unghi θ oarecare, componentele acestor viteze după direcțiile x și y sînt [4]:

$$\left.\begin{aligned} V_{1x} &= r_1\,\Omega_1 + V_{0x}\ ;\ V_{1y} = V_{0y}, \\ V_{2x} &= V_{0x} + r_2\Omega_2 \cos\varepsilon - \dot{e}\sin\theta - e\dot{\varphi}\cos\theta, \\ V_{2y} &= V_{0y} - r_2\Omega_2 \sin\varepsilon + \dot{e}\cos\Omega - e\dot{\varphi}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Din punct de vedere fizic diferiţii termeni care intervin în relaţiile (54) au influenţe de natură diferită.

În primul rînd viteza de translaţie V_0 nu influenţează distribuţia presiunilor, ea reprezentînd o translaţie a întregului sistem. Apoi ţinînd seamă că,

$$r_2 = r_1 + \Delta = r_1\left(1 + \frac{\Delta}{r_1}\right) \cong r_1, \tag{55}$$

sin ε poate fi scris sub forma

$$\sin \varepsilon = \frac{e}{r_1}\,\frac{\sin\theta}{1+\dfrac{\Delta}{r_1}} \cong \frac{e}{r_1}\sin\theta = -\frac{1}{r_1}\frac{\partial\delta}{\partial\theta}. \tag{56}$$

De asemenea,

$$\dot{e}\cos\theta = \dot{\delta}\ ;\ -e\,\dot{\varphi}\sin\theta = \dot{\varphi}\,\frac{\partial\delta}{\partial\theta}, \tag{57}$$

iar $\cos\varepsilon \cong 1$. În sfîrşit, observînd că $\frac{\dot{e}}{\Delta}$ şi $\dot{\varphi}$ sînt de acelaşi ordin de mărime cu Ω_1 şi Ω_2, termenii $\dot{e}\sin\theta$ şi $e\,\dot{\varphi}\cos\theta$ sînt în raportul $\frac{\Delta}{r_1}$ ($\sim 10^{-3}$) mai mici decît $r_1\Omega_2$ şi în consecinţă neglijabili.

Relaţiile (54) se scriu atunci, ţinînd seama de cele de mai sus, sub forma

$$\left.\begin{aligned} &V_{1x} = r_1\Omega_1 + V_{0x}\ ;\ V_{1y} = V_{0y},\\ &V_{2x} = V_{0x} + r_1\,\Omega_2,\\ &V_{2y} = V_{0y} + \Omega_2\frac{\partial\delta}{\partial\theta} + \dot{\delta} + \dot{\varphi}\,\frac{\partial\delta}{\partial\theta}.\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

În aceste condiţii, ecuaţia de continuitate (21) trebuie scrisă pentru lagăre circulare sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{mc}\,\delta + u_m\,\delta) + V_{2y} = 0, \tag{59}$$

în care

$$u_{mc} = \frac{1}{2}(V_{1x} - V_{2x}). \tag{60}$$

Ţinînd seama de relaţiile (58), ecuaţia (59) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}[r_1(\Omega_1 - \Omega_2)\,\delta + 2u_m\delta] + 2r_1\,(\Omega_2 + \dot{\varphi})\,\frac{\partial\delta}{\partial x} + 2\dot{\delta} = 0, \tag{61}$$

sau încă, deoarece r_1, Ω_2, $\dot{\varphi}$ nu depind de x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{r_1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2 + 2\dot{\varphi})\,\delta + u_m\delta\right] = -\,\dot{\delta}. \tag{62}$$

Scrisă în acest mod, ecuația (62) are același aspect cu ecuația (21) în care $u_{mc} = \frac{V}{2}$ cu condiția ca să considere că viteza V este egală cu

$$V = r_1 \Omega = r_1 (\Omega_1 + \Omega_2 + 2\dot{\varphi}). \tag{63}$$

Relația (63) conduce la concluzia că, contrar aparențelor, vitezele unghiulare au influență de același sens asupra distribuției presiunilor și nu de sensuri contrarii, deoarece în expresia vitezei V intervine $\Omega_1 + \Omega_2$ și nu $\Omega_1 - \Omega_2$.

Astfel de exemplu, dacă rotațiile celor două suprafețe sînt egale $\Omega_1 = \Omega_2$ și de același sens, presiunile nu se anulează ci sînt de două ori mai mari în comparație cu cazul cînd $\Omega_2 = 0$. Din contră, dacă $\Omega_2 = -\Omega_1$, rotațiile Ω_1 și Ω_2 nu dau naștere la presiuni. Acest fapt se explică din punct de vedere fizic, prin aceea că suprafața (2) are o viteză $r_2 \Omega_2$ în lungul ei, ca și cum, în figura 2, ar exista pe suprafața (2) o pînză care s-ar mișca în lungul acestei suprafețe cu viteza $r_2 \Omega_2$, antrenînd fluidul din interiorul stratului de lubrifiant, deci amplificînd debitul care trece prin stratul de grosime δ. Altfel raționînd, acest gen de mișcare a suprafeței (2) provoacă o viteză normală suplimentară în raport cu suprafața (1) egală cu $r_2 \Omega_2 \sin \varepsilon$, care, după cum se constată ușor din ecuația de continuitate (61) are asupra distribuției presiunilor, un efect dublu față de componenta paralelă cu suprafața (1), $r_2 \Omega_2 \cos \varepsilon$ care întradevăr are un efect negativ asupra distribuției presiunilor. Rotația liniei centrelor $\dot{\varphi}$ are un efect asemănător cu componenta normală la suprafața (1), $r_2 \Omega_2 \sin \varepsilon$.

În concluzie, ecuațiile diferențiale (26) și (27) sînt valabile și pentru lagărele circulare, cu observația că în calculul presiunilor $\overline{p}$, viteza V are expresia (63). În aceste condiții, distribuția presiunilor $\overline{p}$ poate fi calculată în același mod ca distribuția presiunilor pentru regimurile de funcționare permanente.

Ținînd seama, că grosimea δ a stratului de lubrifiant este dată de relația (53) și că r_1 și Δ nu variază în raport cu timpul

$$\int \dot{\delta} dx = r_1 \Delta \dot{\alpha} \int \cos \theta d\theta = r \Delta \dot{\alpha} \sin \theta, \tag{64}$$

astfel încît, relația (31) pentru calculul presiunii $\overline{\overline{p}}$ în cazul cînd se consideră viscozitatea variabilă se scrie

$$\overline{\overline{p}} = \frac{12 \mu_1 r_1^2 \dot{\alpha}}{\Delta^2 (1+\alpha)} \left[1 + \frac{7}{600} Re_1^{\star\, 0{,}725} (1+\alpha)^{0{,}725} \right] \int \frac{\sin\theta - \overline{\overline{C}}{}_1'(t)}{(1+\alpha\cos\theta)^2} d\theta + \overline{\overline{C}}_2(t), \tag{65}$$

în care $\overline{\overline{C}}{}_1' = \frac{\overline{\overline{C}}_1}{\Delta \dot{\alpha}}$.

Integrala din relația (65) poate fi efectuată fără dificultăți, obținîndu-se

$$\overline{\overline{p}} = \frac{12 \mu_1 r_1^2 \dot{\alpha}}{\Delta^2 (1+\alpha)} \left[1 + \frac{7}{600} Re_1^{\star\, 0{,}725} (1+\alpha)^{0{,}725} \right] \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1+\alpha\cos\theta} + \frac{\overline{\overline{C}}{}_1'(t)}{(1-\alpha^2)^{3/2}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\arcsin \frac{\sqrt{1-\alpha^2} \sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} - \frac{\alpha \sqrt{1-\alpha^2} \sin\theta}{1+\alpha\cos\theta} \right] \right\} + \overline{\overline{C}}_2(t). \tag{66}$$

Constantele $\overline{\overline{C}}{}'_1$ și $\overline{\overline{C}}_2$, împreună cu constantele corespunzătoare soluției $\overline{p}$ trebuie determinate punînd condițiile la limită asupra începutului și sfîrșitului zonei de suprapresiune. Determinarea acestor limite este mai dificilă decît pentru cazul regimurilor de funcționare permanentă. Totuși, ca și pentru acestea [4] se poate face o ipoteză apropiată de realitate și anume să se considere pentru $\overline{p}$ aceleași condiții ca și pentru regimurile permanente și anume

$$\overline{p} = p_0 \qquad \text{la } \theta = 0,\ \theta = \pi \tag{67}$$

deoarece soluția $\overline{p}$ conține efectul alunecării suprafețelor și al vitezelor normale provenite din rotațiile $\Omega_2 \sin \varepsilon$ și $\dot{\varphi} \sin \theta$ care de asemenea se anulează la $\theta = 0$ și $\theta = \pi$. Atunci soluția $\overline{\overline{p}}$, care introduce efectul apropierii sau depărtării suprafețelor prin variația excentricității, trebuie să fie simetrică în raport cu linia centrelor, deoarece mișcarea de apropiere sau depărtare a suprafețelor este simetrică față de linia centrelor. Ca o consecință maximele și minimele soluției $\overline{\overline{p}}$ se găsesc în mod necesar la $\theta = 0$ și $\theta = \pi$, și, avînd în vedere că presiunea p_0 a mediului înconjurător a fost inclusă în soluția $\overline{p}$, putem considera că $\overline{\overline{p}} = 0$ la $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ și $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$. În concluzie,

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\overline{p}}(\theta) = \overline{\overline{p}}(2\pi - \theta); \qquad \frac{\partial \overline{\overline{p}}}{\partial \theta} = 0 \text{ la } \theta = 0,\ \theta = \pi, \\ &\overline{\overline{p}} = 0 \text{ la } \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Din relația (65) sau (66) se constată imediat că primele două condiții (68) impun ca

$$\overline{\overline{C}}{}'_1(t) = 0, \tag{69}$$

astfel încît relația (66) se poate scrie

$$\overline{\overline{p}} = \frac{12\,\mu_1 r^2 \dot{\alpha}}{\Delta^2 (1+\alpha)\,\alpha}\left[1 + \frac{7}{600} Re_1^{*0,725} (1+\alpha)^{0,725}\right]\frac{1}{1 + \alpha \cos \theta} + \overline{\overline{C}}_2(t). \tag{70}$$

Impunînd ultima condiție (68) rezultă

$$\overline{\overline{C}}_2(t) = -\frac{12\,\mu_1 r_1^2 \dot{\alpha}}{\Delta^2 (1+\alpha)\,\alpha}\left[1 + \frac{7}{600} Re_1^{*0,725} (1+\alpha)^{0,725}\right], \tag{71}$$

astfel încît soluția $\overline{\overline{p}}$ este în cele din urmă egală cu

$$\overline{\overline{p}} = -\frac{12\,\mu_1 r_1^2 \dot{\alpha}}{\Delta^2 (1+\alpha)}\left[1 + \frac{7}{600} Re_1^{*0,725} (1+\alpha)^{0,725}\right]\frac{\cos \theta}{1 + \alpha \cos \theta}. \tag{72}$$

Din relația (72) se constată că, dacă excentricitatea α crește ($\dot{\alpha} > 0$) în zona $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ în care $\cos\theta > 0$ presiunile $\bar{\bar{p}}$ sînt negative, iar în zona $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\bar{\bar{p}} > 0$.

În cazul cînd se consideră viscozitatea constantă, relația (33) se scrie

$$\bar{\bar{p}} = \frac{12\,\mu\, r_1^2\,\dot{\alpha}}{\Delta^2}\int\frac{\sin\theta - \bar{\bar{C}}_1'(t)}{(1+\alpha\cos\theta)^3}\,d\theta + \frac{0{,}14\,\mu Re^{\star 0{,}725} r_1^2\,\dot{\alpha}}{\Delta^2}\int\frac{\sin\theta - \bar{\bar{C}}_1'(t)}{(1+\alpha\cos\theta)^{2{,}275}}\,d\theta + \bar{\bar{C}}_2(t). \quad (73)$$

Primele două condiții (68) impun și de data aceasta $\bar{\bar{C}}_1'(t) = 0$ și astfel

$$\bar{\bar{p}} = \frac{12\,\mu\, r^2\,\dot{\alpha}}{2\,\alpha\,\Delta^2}\,\frac{1}{(1+\alpha\cos\theta)^2} + \frac{0{,}14\,\mu\, r_1^2\,\dot{\alpha}\, Re^{\star 0{,}725}}{1{,}275\,\Delta^2}\,\frac{1}{(1+\alpha\cos\theta)^{1{,}275}} + \bar{\bar{C}}_2(t). \quad (74)$$

Din ultima condiție (68) rezultă

$$\bar{\bar{C}}_2(t) = -\frac{12\,\mu\, r_1^2\,\dot{\alpha}}{2\alpha\,\Delta^2} - \frac{0{,}14\,\mu\, r_1^2\,\dot{\alpha}\, Re^{\star 0{,}725}}{1{,}275\,\alpha\,\Delta^2}. \quad (75)$$

În acest mod soluția $\bar{\bar{p}}$ se scrie în cele din urmă pentru viscozitate constantă

$$\bar{\bar{p}} = -\frac{6\,\mu\, r_1^2\,\dot{\alpha}}{\Delta^2}\,\frac{(2+\alpha\cos\theta)\cos\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2} - \frac{0{,}14}{1{,}275}\,\frac{\mu\, r_1^2\,\dot{\alpha}\, Re^{\star 0{,}725}}{\alpha\Delta^2}\left[1 - \frac{1}{(1+\alpha\cos\theta)^{1{,}275}}\right]. \quad (76)$$

Relația (76) se mai poate scrie, ținînd seamă că $|\alpha\cos\theta| < 1$, sub forma mai simplă aproximativă

$$\bar{\bar{p}} = -\frac{6\,\mu\, r_1^2\,\dot{\alpha}}{\Delta^2}\,\frac{(2+\alpha\cos\theta)\cos\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2} - \frac{0{,}14\,\mu\, r_1^2\,\dot{\alpha}\, Re^{\star 0{,}725}}{\Delta^2}\,\frac{(1+0{,}137\alpha\cos\theta)\cos\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^{1{,}275}}, \quad (77)$$

în care s-au păstrat la numărătorul celui de al doilea termen, primii trei termeni ai dezvoltării în serie a expresiei $(1+\alpha\cos\theta)^{1{,}275}$.

Aceste relații (72) și (77) pentru $\bar{\bar{p}}$, împreună cu relațiile [3] pentru $\bar{p}$ și anume

$$\bar{p} = p_0 + \frac{6\,\mu_1\,\Omega r_1^2\,\alpha}{\Delta^2(1+\alpha)}\left[1 + \frac{7}{600}(1+\alpha)^{0{,}725}\, Re_1^{\star 0{,}725}\right]\frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}, \quad (78)$$

în cazul viscozității variabile și

$$\bar{p} = p_0 + \frac{6\mu\,\Omega r_1^2\,\alpha}{\Delta^2}\left[\bar{\varepsilon}_1(Re^\star) + \frac{1+\bar{\varepsilon}_2(Re^\star)}{2+\alpha^2}\,\frac{2+\alpha\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta}\right]\frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}, \quad (79)$$

în cazul viscozității constante, în care

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1(Re^\star) &= 0{,}00846\, Re^{\star 0{,}725}, \\ \bar{\varepsilon}_2(Re^\star) &= 0{,}00321\, Re^{\star 0{,}725}, \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

dau distribuția presiunilor, dacă se cunoaște $\Omega_1(t)$ și $\Omega_2(t)$.

Din distribuția presiunilor astfel determinată, pentru calculul rezultantei presiunilor trebuie să se ia în considerare numai zona în care $p - p_0 > 0$, deoarece după cum se știe [4] în regiunea în care $p - p_0 < 0$ filmul de lubrifiant nu își mai păstrează continuitatea, și se stabilește presiunea mediului înconjurător p_0.

Limitele θ_1 și θ_2 ale zonei de suprapresiuni se pot determina din ecuația

$$\overline{p} + \overline{\overline{p}} = p_0. \tag{81}$$

Astfel, în cazul viscozității variabile, ținînd seama că $\overline{p}$ și $\overline{\overline{p}}$ sînt date de relațiile (72) și (78), rezultă

$$\alpha \Omega \sin \theta_{1.2} - 2 \dot{\alpha} \cos \theta_{1.2} = 0, \tag{82}$$

adică

$$\operatorname{tg} \theta_{1.2} = \frac{2\dot{\alpha}}{\Omega \alpha} = \frac{2 r_1 \dot{\alpha}}{V \alpha}, \tag{83}$$

de unde se vede că zona de suprapresiuni are un unghi la centru egal cu π deoarece $\theta_2 = \theta_1 + \pi$. În cazul cînd se consideră viscozitatea constantă, unghiurile θ_2 și θ_2 rezultă , aplicînd formula aproximativă (91)

$$\left[\overline{\varepsilon}_1 + \frac{1 + \overline{\varepsilon}_2}{2 + \alpha^2} \frac{2 + \alpha \cos \theta_{1.2}}{1 + \alpha \cos \theta_{1.2}}\right] \sin \theta_{1.2} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha \Omega} \left[\overline{\overline{\varepsilon}}_1 + (1 + \overline{\overline{\varepsilon}}_2) \frac{2 + \alpha \cos \theta_{1.2}}{1 + \alpha \cos \theta_{1.2}}\right] \cos \theta_{1.2} = 0, \tag{84}$$

iar unghiul la centru corespunzător zonei de suprapresiuni este tot π.

Dacă importanța soluției $\overline{\overline{p}}$ este redusă, se poate considera aproximația că zona de suprapresiuni este tot $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ ca în cazul mișcărilor permanente, simplificîndu-se astfel considerabil formulele care dau caracteristicile globale ale lagărului.

Elementele globale pot fi calculate în aceste condiții destul de simplu. Astfel considerînd ca axe t și n linia centrelor și o normală la aceasta (fig. 4), componentele P_n și P_t ale rezultantei presiunilor sînt egale cu

$$\left.\begin{aligned} P_n &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} (p - p_0) \sin\theta \, r_1 \, d\theta, \\ P_t &= - \int_{\theta_1}^{\theta_2} (p - p_0) \cos\theta \, r_1 \, d\theta. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Unghiul $\theta^\star$ dintre rezultanta presiunilor și linia centrelor este dat de relația

$$\operatorname{tg} \theta^\star = \frac{P_n}{P_t}. \tag{86}$$

Introducînd mărimile adimensionale

$$\overline{C}_{n.t} = \frac{\overline{P}_{n.t} \Delta^2}{6\mu \, \Omega r_1^3}; \qquad \overline{\overline{C}}_{n.t} = \frac{\overline{\overline{P}}_{n.t} \Delta^2}{12\mu \, r_1^2 \, \dot{\alpha}}. \tag{87}$$

Coeficienții $\overline{C}_n$ și $\overline{C}_t$, în cazul cînd se consideră viscozitatea variabilă, sînt egali cu

$$\overline{C}_n = \left[1 + \frac{7}{600} Re_1^{*0,725} (1+\alpha)^{0,725}\right] \left\{ \frac{2\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha(1+\alpha)} \left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} \right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2} \right)\right] + \frac{\theta_2-\theta_1}{\alpha(1+\alpha)} + \frac{\sin\theta_2 - \sin\theta_1}{1+\alpha} \right\}, \quad (88)$$
$$\overline{C}_t = \left[1 + \frac{7}{600} Re_1^{*0,725} (1+\alpha)^{0,725}\right] \frac{1}{1+\alpha} \left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1 + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1+\alpha\cos\theta_1}{1+\alpha\cos\theta_2} \right).$$

În cazul cînd se consideră viscozitatea constantă, coeficienții $\overline{C}_n$ și $\overline{C}_1$ sînt egali cu

$$\overline{C}_n = \frac{\overline{\varepsilon}_1}{\alpha} \left\{ 2\sqrt{1-\alpha^2} \left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} \right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2} \right) \right] + \right.$$
$$\left. + \theta_2 - \theta_1 + \alpha(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \right\} + \frac{1+\overline{\varepsilon}_2}{2+\alpha^2} \left\{ \frac{\sin\theta_1}{1+\alpha\cos\theta_1} - \frac{\sin\theta_2}{1+\alpha\cos\theta_2} + \right.$$
$$+ \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2} \right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} \right) - \right.$$
$$\left. - \alpha(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) \right\},$$
$$\overline{C}_t = \overline{\varepsilon}_1 \left[\cos\theta_2 - \cos\theta_1 + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1+\alpha\cos\theta_1}{1+\alpha\cos\theta_2} \right] +$$
$$+ \frac{1+\overline{\varepsilon}_2}{2+\alpha^2} \left[\cos\theta_2 - \cos\theta_1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{1+\alpha\cos\theta_2} - \frac{1}{1+\alpha\cos\theta_1} \right) \right]. \quad (89)$$

De asemenea, în cazul cînd se consideră viscozitatea variabilă, coeficienții $\overline{\overline{C}}_n$ și $\overline{\overline{C}}_t$ sînt egali cu

$$\overline{\overline{C}}_n = \left[1 + \frac{7}{600} Re_1^{*0,725} (1+\alpha)^{0,725}\right] \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1 + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1+\alpha\cos\theta_1}{1+\alpha\cos\theta_2} \right)$$
$$\overline{\overline{C}}_t = \left[1 + \frac{7}{600} Re_1^{*0,725} (1+\alpha)^{0,725}\right] \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \left\{ \frac{2}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2} \right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} \right)\right] + \sin\theta_1 - \sin\theta_2 - \frac{\theta_2-\theta_1}{\alpha} \right\}. \quad (90)$$

Coeficienții $\overline{\overline{C}}_n$ și $\overline{\overline{C}}_t$ în cazul cînd se consideră viscozitatea constantă pot fi calculați în mod riguros, cu ajutorul relației (76) pentru $\overline{\overline{p}}$. Pentru simplificarea rezultatelor putem însă opera și asupra soluției $\overline{\overline{p}}$ aceleași simplificări aproximative ca și pentru soluția $\overline{p}$, respectiv soluția ecuației presiunilor în cazul regimurilor permanente [2].

Astfel se obține pentru $\overline{\overline{p}}$ expresia aproximativă

$$\overline{\overline{p}} = -\frac{6\mu r_1^2 \dot{\alpha}}{\Delta^2} \left[\overline{\overline{\varepsilon}}_1(Re^*) + (1 + \overline{\overline{\varepsilon}}_2(Re^*)) \frac{2+\alpha\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta} \right] \frac{\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta}, \quad (91)$$

în care

$$\left.\begin{aligned}\bar{\bar{\varepsilon}}_1(Re^\star) &= \frac{7}{600}\frac{q}{1{,}275}Re^{\star 0{,}725} = 0{,}00663\ Re^{\star 0{,}725},\\ \bar{\bar{\varepsilon}}_2(Re^\star) &= \frac{7}{600}\frac{1-q}{1{,}275}Re^{\star 0{,}725} = 0{,}00252\ Re^{\star 0{,}725}.\end{aligned}\right\}\tag{92}$$

Iar coeficienții $\bar{\bar{C}}_n$ și $\bar{\bar{C}}_t$ vor fi dați atunci de relațiile

$$\begin{aligned}\bar{\bar{C}}_n = \frac{\bar{\bar{\varepsilon}}_1}{\alpha}\left[\cos\theta_2 - \cos\theta_1 + \frac{1}{\alpha}\ln\frac{1+\alpha\cos\theta_1}{1+\alpha\cos\theta_2}\right] + \frac{1+\bar{\bar{\varepsilon}}_2}{\alpha}\Bigg[\cos\theta_2 - \cos\theta_1 +& \\ + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1+\alpha\cos\theta_2} - \frac{1}{1+\alpha\cos\theta_1}\right)\Bigg]&,\\ \bar{\bar{C}}_t = \frac{\bar{\bar{\varepsilon}}_1}{\alpha^2}\Bigg\{-(\theta_2-\theta_1) + \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}\right)\right] +& \\ + \alpha(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\Bigg\} + \frac{1+\bar{\bar{\varepsilon}}_2}{\alpha(1-\alpha^2)}\Bigg\{\frac{\sin\theta_1}{1+\alpha\cos\theta_1} - \frac{\sin\theta_2}{1+\alpha\cos\theta_2} +& \\ + \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}\right)\right] -& \\ - (1-\alpha^2)\,\alpha(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\Bigg\}&.\end{aligned}\tag{93}$$

În acest mod se determină complet problema, dacă se cunoaște $\Omega(t)$ și $\alpha(t)$. În cazurile curente de aplicații, se întîlnește însă problema inversă și anume se cunoaște sarcina suportată de lagăr $P(t)$ și direcția ei $\gamma(t)$. Atunci, dacă se neglijează forțele de inerție ale celor două corpuri lubrificate, provocate de accelerațiile $\ddot{\alpha}$, $\alpha\dot{\varphi}^2$ și $\ddot{\varphi}\alpha$, condițiile de echilibru se scriu

$$\left.\begin{aligned}\frac{6\mu\,\Omega r_1^3}{\Delta^2}\bar{C}_n + \frac{12\mu\,r_1^3\dot{\alpha}}{\Delta^2}\bar{\bar{C}}_n &= P\sin\theta^\star,\\ \frac{6\mu\,\Omega r_1^3}{\Delta^2}\bar{C}_t + \frac{12\mu\,r_1^3\dot{\alpha}}{\Delta^2}\bar{\bar{C}}_t &= P\cos\theta^\star,\end{aligned}\right\}\tag{94}$$

existînd în plus, relația (fig. 4)

$$\theta^\star = \gamma - \varphi\tag{95}$$

și toate considerațiile privind determinarea mișcării, efectuate în cazul lubrificației în regim laminar [4], pot fi refăcute într-un mod asemănător și pentru lubrificația în regim turbulent.

În particular și pentru lubrificația în regim turbulent se poate neglija în majoritatea cazurilor, contribuția adusă de soluția $\bar{\bar{p}}$, calculele fiind astfel mult simplificate. Astfel considerînd numai soluția $\bar{p}$, cu $\theta_1 = 0$,

$\theta_2 = \pi$, din a doua ecuație (88) și ecuația (89) se deduce ecuația diferențială în $\theta^\star$

$$\dot{\theta}^\star = \tfrac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) + \dot{\gamma} - \frac{P(t)\Delta^2 \cos\theta^\star}{12\mu\, r_1^3 \overline{C}_t}, \tag{96}$$

iar locul geometric al centrului fusului [3] poate fi aproximat cu un arc de elipsă sau, mai simplu cu un arc de cerc, adică

$$\cos\theta^\star \cong \alpha, \tag{97}$$

aproximație ce permite integrarea ecuației (90) prin aceleași metode ca și pentru lubrificația în regim laminar, dacă se cunosc $P(t)$, $\gamma(t)$, $\Omega_1(t)$ și $\Omega_2(t)$ cunoscute (ultimele două intervenind și în expresia $\overline{C}_t$, prin intermediul numărului Reynolds).

★

Să considerăm ca aplicație, un lagăr funcționînd sub o sarcină centrifugă, unul dintre cele mai frecvente cazuri de funcționare a lagărelor la turații mari, cînd poate apare regimul de funcționare turbulent (sarcina provenind din dezechilibrări). În aceste condiții $P(t) = \text{const.}$, Ω_2 poate fi considerat zero, iar $\dot{\gamma} = -\Omega_1$.

Problema poate fi studiată și în condiții mai generale cînd $\Omega_2 = 0$ și $\dot{\gamma}$ are o valoare oarecare, urmînd metoda indicată de N. Tipei [4] în cazul lubrificației în regim laminar. Pentru cazul considerat, soluția problemei poate fi dedusă în mod foarte simplu, observînd că soluția ecuației diferențiale (96) este

$$\theta^\star = \text{const.}, \tag{98}$$

avînd în același timp

$$\alpha = \text{const.}\,; \ \dot{\varphi} = \dot{\gamma}. \tag{99}$$

În consecință, întocmai ca și pentru regimul laminar, dacă încărcarea este centrifugală, linia centrelor se rotește în același sens cu fusul și cu aceeași viteză unghiulară, iar excentricitatea este riguros constantă ($\dot{\alpha} = 0$). În consecință,

$$\overline{\overline{p}} = 0, \tag{100}$$

iar pentru construirea soluție $\overline{p}$ trebuie să se introducă viteza unghiulară

$$\Omega = \Omega_1 + 2\dot{\varphi} = -\Omega_1. \tag{101}$$

Cu alte cuvinte problema se reduce la calculul unui lagăr în regim permanent, (problemă cunoscută și pentru care s-au construit diagrame de calcul [2], [3]), sub aceeași sarcină P, considerînd însă că viteza unghiulară este de semn contrar, ceea ce evident nu modifică cu nimic calculele ce trebuie efectuate pentru determinarea tuturor caracteristicilor care interesează în aplicații.

Primit la redacție la 8 aprilie 1958.

СМАЗКА ПОДШИПНИКОВ В ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ И СКОРОСТЯХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Приводятся общие уравнения движения с учетом упрощений, вытекающих из условия течения в тонких слоях. Таким образом получается система, аналогичная ранее полученной для установившихся движений [1], [2], [3], для которой можно считать справедливыми полученные в этих случаях результаты с той, однако, оговоркой, что постоянные интегрирования являются функциями времени. Затем получается дифференциальное уравнение давлений для двухмерных движений, причем уравнение непрерывности пишется в интегральном виде. Это уравнение интегрируется, причем получаются распределение давлений и общие характеристики для случая плоских и круглых подшипников. В заключение дается применение полученных результатов для расчета круглых подшипников с центробежными нагрузками.

LA LUBRIFICATION EN RÉGIME TURBULENT DES PALIERS SOUMIS À DES CHARGES ET VITESSES VARIABLES

RÉSUMÉ

On écrit les équations générales du mouvement, en introduisant les simplifications qui dérivent du fait que l'écoulement s'effectue en couches minces. On obtient ainsi un système similaire à celui obtenu pour le régime permanent, étudié antérieurement [1], [2], [3], et pour lequel on utilise les mêmes résultats, mais en tenant compte de ce que les constantes d'intégration résulteront des fonctions de temps. On obtient ensuite l'équation différentielle des pressions, pour l'écoulement bidimensionnel, en écrivant l'équation de continuité sous une forme intégrale. Cette équation est intégrée, pour les cas de paliers plans et circulaires, en obtenant la distribution et la résultante des pressions. A la fin de l'étude, on applique les résultats obtenus au calcul des paliers ciculaires, soumis à une charge centrifuge.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Influenţa turbulenţei asupra mişcării în stratul de lubrifiant.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1* (1958).
2. — *Studiul lubrificaţiei bidimensionale în regim turbulent.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1* (1958).
3. — *On the Turbulent Lubrication. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, London, 1958.
4. N. Tipei, *Hidro-aerodinamica lubrificaţiei.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1957.
5. V. N. Constantinescu, *L'étude de la lubrification en régime non permanent.* Revue de mécanique appliquée, *2* (1957).

STUDIUL CONTRACȚIEI UNOR MATERIALE PLASTICE PE BAZĂ DE RĂȘINĂ FURFUROL-FENOLICĂ

DE

D. ISĂCESCU și V. CALCAN

Afirmarea în tehnică a pieselor din materiale plastice și necesitatea respectării toleranțelor impuse de ansamblul, în cadrul căruia funcționează, au făcut utilă cunoașterea contracției acestor materiale pentru corecta dimensionare atît a matrițelor de presare, cît și a pieselor presate.

Dacă în cazul pieselor metalice, diferențele între cotele teoretice și cele reale sînt funcție de gradul de precizie al prelucrării mecanice, în cazul materialelor plastice, abaterile de la dimensiunile pieselor se datoresc [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]

— erorilor cotelor matriței,
— uzurii matriței,
— contracției materialului plastic,
— condițiilor generale de presare.

Este evident că precizia dimensiunilor poate fi mărită printr-o bună execuție a matriței, prin folosirea unui oțel cu o duritate corespunzătoare, prin respectarea strictă a condițiilor de presare, măsuri ce pot fi desigur realizate.

În cele ce urmează, va fi considerată numai contracția unor materiale plastice termorigide și posibilitatea de a o diminua.

Este cunoscut faptul că procesul de întărire și răcire al materialelor plastice este însoțit de o micșorare a volumului și aceasta indiferent de procedeul utilizat pentru obținerea piesei.

Diferența între dimensiunea matriței la temperatura de formare și dimensiunea corespunzătoare a piesei la temperatura obișnuită exprimă contracția materialului.

Există un număr foarte mare de factori care influențează contracția materialelor plastice. Dintre aceștia, cei mai importanți sînt :

a) Rășina — natura,
— procedeul de fabricare,
— proprietăți ;

b) Umplutura — natura,
— forma,
— dimensiuni,
— umiditatea proprie;

c) Procedeul de fabricare a materialului plastic;
d) Pretratamentul materialului;
e) Forma şi dimensiunile piesei;
f) Armăturile metalice înglobate în piesă;
g) Forma matriţei;
h) Închiderea matriţei;
i) Amplasarea dimensiunilor piesei faţă de matriţă;
j) Procedeul de formare;
k) Condiţiile de formare — presiune,
— temperatură,
— timp;
l) Repartiţia presiunilor şi temperaturilor;
m) Modul operator;
n) Procedeul de răcire a piesei presate.

Toate operaţiunile, care măresc omogenitatea materialului plastic printr-o bună repartizare a presiunii şi căldurii în timpul fluidizării, contribuie la diminuarea contracţiei.

Pentru acest motiv, contracţia este funcţie şi de procedeul de formare, scăzînd în ordinea: compresie, transfer, injecţie, extrudere, fiecare din aceste procedee asigurînd omogenizări şi posibilităţi diferite de deplasare a particulelor materialului plastic aflat sub presiune.

Însuşi materialul plastic ca atare suferă în procesul de fabricare operaţii de omogenizare. Unele procedee de formare continuă această omogenizare în însuşi procesul de formare. La transfer, de exemplu, ea este reluată sub presiune şi temperatură prin laminarea materialului în timpul trecerii din cilindru în matriţă.

Contracţia ulterioară în timp, care se încadrează în problema mai mare a stabilităţii dimensionale a piesei finite, depinde în general de aceiaşi factori care influenţează şi contracţia, intervenind în plus:

— post-tratamentul piesei,
— condiţiile de utilizare.

Contracţia ulterioară în timp se datoreşte continuării chiar la temperatura obişnuită a polimerizării, respectiv a policondensării; la răşinile termoplaste, intervine şi evaporarea lentă a plastifiantului.

Exceptînd răşinile presate prin curgere, trebuie ţinut cont şi de tensiunile reziduale de la presare.

Pentru cercetările noastre, s-au folosit materiale plastice pe bază de răşină furfurol-fenolică, formarea făcîndu-se prin compresie, procedeu utilizat industrial în ţară.

Literatura studiată se ocupă, în general, cu studiul materialelor plastice pe bază de răşini fenol-formaldehidice. Un studiu al contracţiei materialelor plastice pe bază de răşini furfurol-fenolice nu ne este cunoscut.

I. MATERIALE FOLOSITE

Contracţia a fost studiată pe următoarele materiale:

1) Răşină furfurol-fenolică vălţuită cu adaos de hexametilen-tetramină (15%);

2) Răşină furfurol-fenolică vălţuită cu adaos de hexametilen-tetramină (15%) şi apă (2,5%);

3) Răşină furfurol-fenolică spălată şi vălţuită cu adaos de hexametilen-tetramină (15%) şi apă (2,5%);

4) Masă de presare pe bază de răşină furfurol-fenolică şi umplutură din tocătură textilă;

5) Praf de presare pe bază de răşină furfurol-fenolică şi umplutură din făină de lemn.

Pentru toate materialele s-a utilizat aceeaşi răşină, sintetizată în şarje industriale, avînd punctul de picurare după Ubelhode cuprins între 108 şi 110°C.

Condiţiile de vălţuire pentru materialele 1, 2 şi 3 au fost identice ca şi pentru 5, pentru a asigura răşinii acelaşi tratament termic şi mecanic pe care îl suferă la fabricarea prafurilor de presare.

Masa de presare 4 a fost realizată prin impregnarea unei tocături textile cu o soluţie alcoolică de răşină furfurol-fenolică cu o concentraţie de 44,5%.

Umplutura a constat din deşeuri textile (capete de la 0 la 30 mm) tocate cu o ghilotină; forma umpluturii a fost neregulată, suprafaţa tocăturii variind între 1 şi 1,5 cm^2.

Impregnarea şi omogenizarea s-a făcut în malaxor; materialul astfel obţinut a fost uscat în cuptor la temperatura de 60°C, presiunea de 750 mm, timp de 90 minute.

Praful de presare 5 a fost realizat după *procesul tehnologic pentru obţinerea prafurilor de presare pe bază de răşină furfurol-fenolică şi făină de lemn*, elaborat de colectivul Secţiei de mase plastice.

Curgerile acestor materiale după Rashig sînt date în tabela 1.

Tabela 1

Nr.	Materialul	300 kg/cm^2		400 kg/cm^2		500 kg/cm^2	
		mm	min	mm	min	mm	min
1	Răşină vălţuită cu adaos de hexametilen-tetramină (15%)	> 220	—	—	—	—	—
2	Idem + 2,5% apă	> 220	—	—	—	—	—
3	Răşină spălată şi vălţuită cu adaos de hexametilen-tetramină (15%) şi apă (2,5%)	> 220	—	—	—	—	—
4	Masă de presare pe bază de răşină furfurol-fenolică cu umplutură din tocătură textilă	17	3′3″	52	2′48″	68,5	2′22″
5	Praf de presare pe bază de răşină furfurol-fenolică cu umplutură din făină de lemn	116	1′22″	—	—	—	—

Prin alegerea materialelor s-a urmărit:

— contracţia răşinii 1,
— influenţa asupra contracţiei a conţinutului de apă la vălţuire 2,
— influenţa alcalinităţii răşinii 3,
— influenţa naturii umpluturii 4 şi 5.

II. CONDIŢIILE EXPERIMENTALE

Contracţia unui material se determină în general pe epruvete standard.

În cazul materialelor plastice, la serii mari şi pentru piese tolerate, este indicat un studiu al contracţiei chiar pe piesă, mai ales dacă aceasta are o formă complicată şi comportă şi armături metalice.

Ca epruvete standard, pentru materialele plastice, au fost considerate:

Bara lisă	[9], [10], [11], [12]	120 ± 2 mm	lungime
		15 ± 0,5 mm	lăţime
		4 ± 0,2 mm	grosime
	[13]	127 mm [5 in.]	lungime
		12,7 mm [0,5 in.]	lăţime
		12,7 mm [0,5 in.]	grosime
Disc	[7]	Ø 100 × 4 ± 0,2 mm	
	[13]	Ø 101,6 × 3,175 mm [Ø 4 in, × 0,125 in.]	

Alegerea barelor poate fi justificată prin criterii de similitudine cu epruvetele pentru încercări mecanice şi cu epruvetele pentru determinarea dilatării liniare a materialelor plastice.

Dată fiind însă eterogenitatea şi anizotropia materialelor plastice, rapoartele atît de distanţate între lungime, pe de o parte, şi lăţimea şi grosimea barei, pe de altă parte (1/8 respectiv 1/30) introduc influenţe greu de sezisat, α fiind în acest caz diferit de 3β. Prin răcire, bara astfel dimensionată suferă deformaţii care alterează valoarea reală a contracţiei în lungime. În plus, piesele de uz tehnic din materiale plastice termorigide, practic au rareori o dimensiune foarte mare în raport cu celelalte două.

Discurile, deşi nu oferă cifre comparative prin prisma tuturor standardelor actuale, prezintă avantajul că la determinarea contracţiei se neglijează influenţa unei singure dimensiuni, — grosimea — pretîndu-se deci mai bine unui studiu. Măsurarea mai multor diametre, decalate cu un acelaşi unghiu, poate da indicaţii asupra neregularităţii contracţiei; în plus, se sezisează mai uşor contracţia unui volum.

Pentru aceste motive s-au ales pentru cercetare discurile, acoperindu-se o gamă de 12 diametre cuprinsă între 10 şi 120 mm, şi păstrînd grosimea constantă în limitele standardizate de 4 ± 0,2 mm.

Pentru a vedea variaţia contracţiei cu grosimea, s-au presat discuri cu un diametru de 50 mm şi grosimile: 4 ± 0,2; 8 ± 0,2; 12 ± 0,2; 16 ± 0,2 mm.

În felul acesta, s-a urmărit cunoaşterea contracţiei atît la dimensiunile situate perpendicular pe direcţia de presare cît şi la cele situate paralel cu direcţia de presare.

Toate materialele studiate au fost întîi pastilate.

Contracția a fost determinată pe aceste materiale necondiționate cît și condiționate în termostat timp de o oră la 60—65°C.

Pentru a prinde cît mai exact contracția materialului plastic, s-a căutat să se elimine pe cît posibil toate cauzele ce conduc la variații ale dimensiunilor.

Astfel, condițiile de presare arătate în tabela 2 au fost riguros constante pentru același material, condiționat sau necondiționat.

Tabela 2

Nr.	Material	Condiţii de presare		
		Presiunea kg/cm²	Temperatura °C	Timpul min/mm
1	Răşină vălţuită cu adaos de hexametilen-tetramină (15%)	300	160 ± 5	2
2	Idem + 2,5% apă	300	160 ± 5	2
3	Răşină spălată şi vălţuită cu adaos de hexametilen-tetramină (15%) şi apă (2,5%)	300	160 ± 5	2
4	Masă de presare pe bază de răşină furfurol-fenolică cu umplutură din tocătură textilă	500	160 ± 5	2
5	Praf de presare pe bază de răşină furfurol-fenolică cu umplutură din făină de lemn	300	160 ± 5	1

Modul operator folosit a fost :

— timpul de umplere a matriței : 10 ± 1 secunde, calculat din momentul începerii introducerii materialului și pînă la atingerea presiunii ;

— timpul de scoatere a discului : 30 secunde, calculat din momentul începerii deschiderii matriței ;

— așezare uniformă a materialului în matriță ;

— variație admisă pentru volumele de presare : ± 0,1 g ; respectarea fidelă a modului operator arătat nu a introdus influențe străine.

Faptul că matrițele au fost executate cu o mare precizie (toleranța realizată pentru diametre interioare : ± 0,0015 mm), faptul că numărul de discuri presate cu o aceeași matriță a fost prea mic pentru a conduce la o uzură determinată de frecarea materialului sub presiune, iar condițiile de presare au fost riguros respectate, ne permite să afirmăm că diferențele între diametrele matrițelor și discurilor se datoresc în cea mai mare parte contracției materialului plastic.

Pentru fiecare material și condiție s-au presat cîte 5 discuri.

După scoaterea din matriță, discurile au fost lăsate să se răcească timp de 24 ore între plăci din material cu bună izolare termică, peste care s-a pus o aceeași greutate, pentru a împiedeca deformațiile produse prin răcire și apoi măsurate.

Măsurătorile s-au făcut cu o precizie de ± 0,005 mm la temperatura de 22 ± 2°C.

La fiecare disc au fost măsurate două diametre, decalate cu 90°, mereu aceleaşi în raport cu matriţele şi s-a luat media aritmetică.

Respectarea grosimii a fost controlată prin măsurarea în patru puncte, la extremităţile celor două diametre şi făcîndu-se media aritmetică.

Contracţia ulterioară în timp prin post-tratament termic timp de 200 ore la 130°C pentru masa de presare şi 200°C pentru praful de presare, deşi a fost prevăzută în planul de cercetare, nu a putut fi realizată din motive independente de intenţiile iniţiale.

Trebuie menţionat că cercetările de faţă nu permit prevederi asupra stabilizării materialului în timp.

III. EXPRIMAREA ŞI INTERPRETAREA REZULTATELOR

Contracţia reală a unui material plastic este exprimată de diferenţa dintre dimensiunea matriţei la temperatura de formare şi dimensiunea corespunzătoare a piesei presate la temperatura camerei şi această definire corespunde şi din punct de vedere teoretic.

Astfel exprimată, ea înglobează *contracţia de solidificare* — respectiv micşorarea volumului piesei în timpul procesului de întărire a materialului plastic, sub influenţa combinată a presiunii, temperaturii şi timpului — şi contracţia termică a materialului plastic, rezultată din răcirea piesei presate.

Fenomenul prezintă o oarecare analogie cu retrecisarea metalelor.

Practic, dată fiind dificultatea atît a măsurării dimensiunilor matriţei la temperatura de formare cît şi a calculelor de dilatare termică a matriţei, se consideră [9], [10], [11], [12], [13]

$$c = 100\frac{b-a}{b}\,\%$$

în care

c — contracţia materialului plastic (%),
b — dimensiunea matriţei la temperatura camerei (mm),
a — dimensiunea corespunzătoare a piesei presate la temperatura camerei, măsurată în ziua următoare presării (mm)

şi acest mod de exprimare va fi folosit iniţial şi în lucrarea de faţă.

Bineînţeles, măsurînd atît matriţa cît şi epruveta la temperatura camerei, se introduce sistematic aceeaşi eroare, datorită diferenţelor dintre coeficientul de dilatare termică al materialului din care este confecţionată matriţa de presare $\left(\text{pentru OL } \alpha = 1,\ 2.10^{-5}\frac{1}{^\circ\mathrm{C}}\right)$ şi coeficientul de dilatarea liniară a materialului plastic $\left[\alpha = (8-12).10^{-5}\frac{1}{^\circ\mathrm{C}}\right.$ [1] sau

$\alpha = (3-7) \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\mathrm{C}}$ [4]], iar valoarea contracţiei astfel calculată este relativă.

Rezultatele cercetărilor noastre sînt prezentate în diagramele din figurile 1 şi 2, în care s-au trecut valorile medii ale măsurătorilor făcute pe loturile de cîte 5 epruvete.

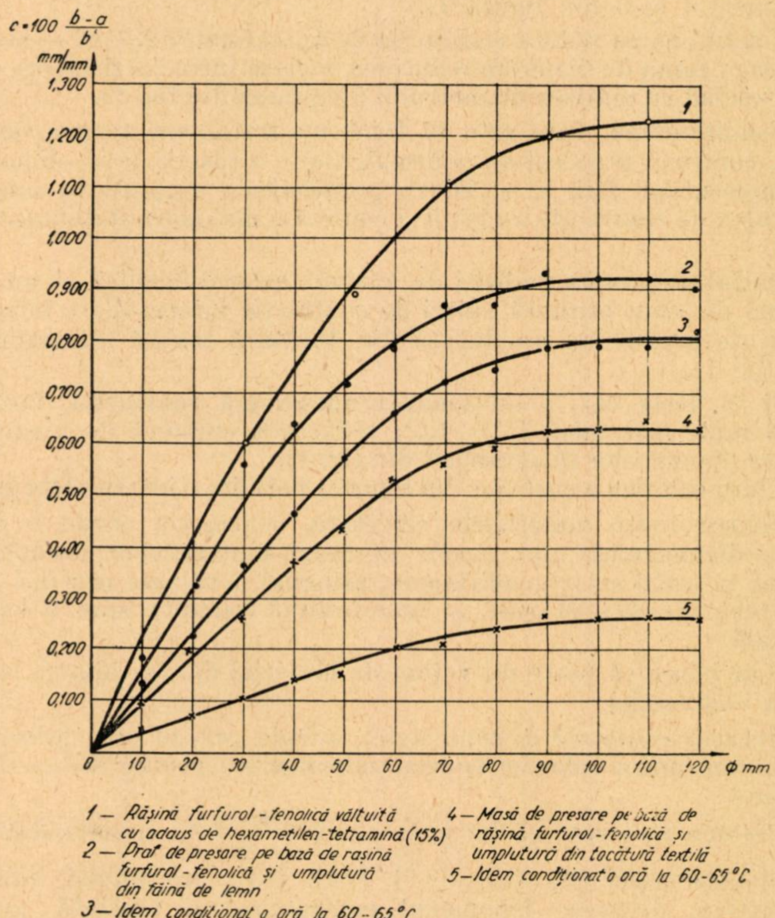


Fig. 1

Cele mai mari valori pentru contracţie se obţin în cazul răşinii; între răşina vălţuită cu adaos de apă şi cea vălţuită fără adaos de apă, diferenţele sînt foarte mici, fapt pentru care s-a tras o singură curbă (diagrama 1 din figura 1).

Prin spălarea răşinii şi vălţuirea ei în aceleaşi condiţii, se obţine o micşorare a contracţiei, ceea ce arată că alcalinitatea răşinii contribuie la mărirea contracţiei.

Încercările informative cu rășină nevălțuită, deci fără tratamentul termic și mecanic suferit în procesul de obținere a prafurilor de presare, au condus la valori de contracție și mai mari, gradul de policondensare al rășinii fiind în acest caz mult mai mic.

Masa de presare pe bază de rășină furfurol-fenolică și umplutură din tocătură textilă prezintă cele mai mici valori pentru contracție (diagramele 4 și 5 din figura 1).

Condiționarea reduce contracția de aproximativ 2,5 ori — mai exact pe întreaga gamă de diametre reducerea variază între 2,3 și 2,8 ori — reducerea crescînd cu mărirea diametrului (diagrama din fig. 1).

Condiționarea, care este în fond un tratament termic de scurtă durată, continuă procesul de policondensare a rășinii, cresc dimensiunile macromoleculelor fără a se altera proprietățile umpluturii, micșorează capacitatea de contracție a rășinii și conferă o mai mare stabilitate dimensională.

Praful de presare pe bază de rășină furfurol-fenolică și umplutură din făină de lemn prezintă valori de contracție intermediare între rășină și masa de presare cu umplutură din tocătură textilă (diagramele 2 și 3 din fig. 1).

Și în acest caz, condiționarea micșorează contracția, însă într-o măsură mult mai mică (1,2—1,6), reducerea crescînd de asemenea cu creșterea diametrelor (diagrama 3 din fig. 1).

Alura comună a curbelor din figura 1 permite o interpretare generală.

Pentru toate materialele cercetate, contracția crește o dată cu mărirea diametrului, mai repede în cazul materialelor necondiționate, mai lent în cazul celor condiționate, atingînd o valoare maximă în jurul diametrelor de 80—90 mm, și manifestînd tendința spre o asimptotă orizontală.

S-ar părea că peste un volum de material dat, se ajunge la o *constantă* a contracției.

Această *constantă* a contracției trebuie privită prin prisma exprimării în mm/mm a valorilor contracției calculate pentru fiecare diametru considerat.

Trebuie remarcat că formula $c = 100 \frac{b-a}{b}\,\%$, recomandată pentru calculul contracției [9], [10], [11], [12], [13], are numai valabilitate comparativă, deoarece fenomenul contracției nu prezintă proporționalitatea pe care o presupune formula.

Raportarea la sută, aparent creează impresia unei unitați în exprimare ; cum însă nivelul de la care se face referința variază, datorită anizotropei și eterogenității materialelor plastice, regula de trei simple complică lucrurile, deoarece pe parcursul celor 12 diametre au fost introduse 11 variabile.

În valori absolute, de la Ø = 10 mm la Ø = 20 mm contracția crește de 3,83 ori, în procente de 1,84 ori ; de la Ø = 70 mm la Ø = 80 mm creșterile sînt de 1,182 ori, respectiv de 1,033 ori (tabela 3).

Tabela 3

n	Ø (mm)	Contracţia		Creşteri	
		$c = b - a$	$c\% = 100\frac{b-a}{b}$	$\frac{c_n}{c_{n-1}}$	$\frac{c_n\%}{c_{n-1}\%}$
1	10	−0,012	0,125		
2	20	−0,046	0,230	3,830	1,840
3	30	−0,108	0,360	2,370	1,565
4	40	−0,186	0,465	1,722	1,291
5	50	−0,288	0,576	1,548	1,238
6	60	−0,398	0,644	1,381	1,118
7	70	−0,507	0,725	1,271	1,126
8	80	−0,600	0,750	1,182	1,033
9	90	−0,712	0,790	1,187	1,052
10	100	−0,800	0,800	1,123	1,012
11	110	−0,880	0,800	1,100	1,000
12	120	−0,985	0,820	1,119	1,025

Pentru acest motiv, valorile din standarde pentru contracţie pot fi considerate numai pentru compararea diferitelor materiale plastice, ele neputînd fi folosite în general la dimensionare, aşa cum se recomandă uneori [9].

Desigur că privită prin prisma valorilor $c = b - a$, micşorarea volumului epruvetelor presate nu manifestă o constanţă (diagramele din fig. 2).

Într-adevăr, contracţia creşte o dată cu mărirea diametrului. Curbele cresc întîi lent, convexitatea lor fiind în jos, ca apoi să prezinte o variaţie liniară, pentru fiecare material schimbîndu-se numai panta.

Apariţiei variaţiei liniare (fig. 2) îi corespunde tendinţa spre o *asimptotă* orizontală (fig. 1), cu alte cuvinte, constanţa constracţiei este o regularizare a micşorării volumului epruvetelor presate, valabilă de la un anumit prag de dimensiuni.

Tot din diagrame se vede că la diametre mici, valoarea contracţiei nu diferă mult de la un material la altul, diferenţierea evidenţiindu-se o dată cu creşterea diametrelor.

Regularizarea contracţiei peste diametrul de 80—90 mm la toate materialele studiate, indiferent de tratamentul suferit înainte de presare şi de natura umpluturii, permite o interpretare nouă a fenomenului contracţiei prin prisma raportului dintre suprafaţa totală şi volumul epruvetei presate.

Cum în generral $S_t = f(L^2)$ iar $V = f(L^3)$, cînd L tinde către infinit, raportul S_t/V tinde către zero (s-a notat prin S_t suprafaţa totală a epruvetei presate, prin V volumul ei, iar prin L dimensiunea).

În domeniul dimensiunilor finite şi practic utilizate pentru piesele din materiale plastice presate în matriţă, raportul S_t/V prezintă variaţiile cele mai mari, [8] creşterea dimensiunilor conducînd la o *stabilizare* a lui.

Apariţia variaţiei liniare a contracţiei cu diametrul epruvetei presate, corespunde cu tendinţa de *stabilizare* a raportului S_t/V, respectiv cu tendinţa de egalizare a creşterilor suprafeţei totale şi volumului epruvetei o dată cu creşterea diametrului (tabela 4).

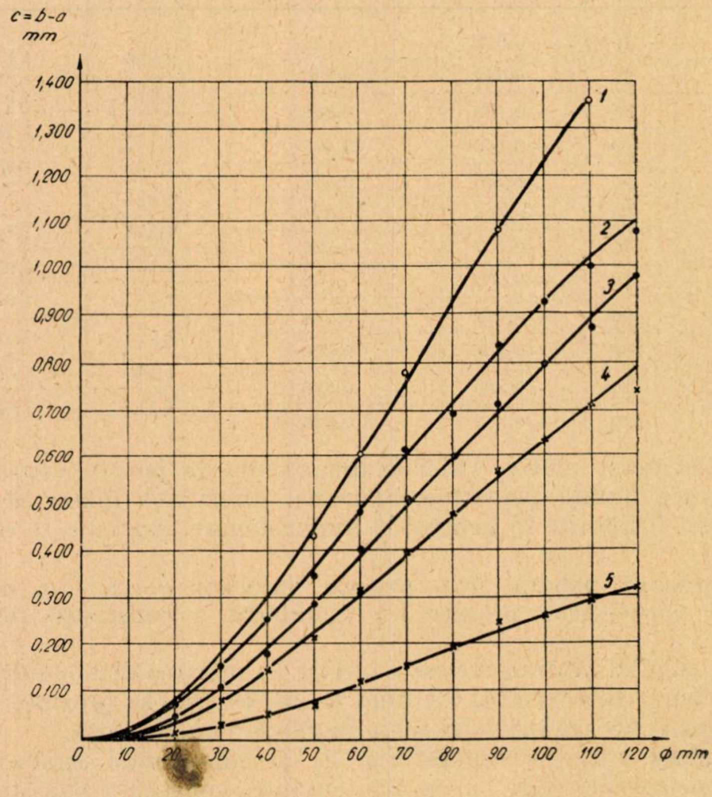


Fig. 2

Raportată la procesul de presare, neproporţionalitatea dintre creşterea suprafeţei totale şi volumului cu dimensiunile epruvetei, conduce la o repartiţie diferită a forţei de presare şi căldurii raportate la unitatea de volum de material plastic, repartiţie pe care o uniformizează tocmai creşterea diametrului.

De la Ø = 10 mm la Ø = 20 mm de exemplu, suprafaţa totală a discului creşte de 3,12 ori, în timp ce volumul lui se măreşte de 4 ori; de la Ø = 140 mm la Ø = 150 mm, creşterile sînt de 1,143 ori, respectiv de 1,149 ori (tabela 4).

Aceasta înseamnă că de la Ø = 10 mm la Ø = 20 mm, cu o suprafaţă limitatoare — suprafaţă de transfer de căldură de la matriţă la

Tabela 4

n	Ø mm	S_t cm^2	V cm^3	$\frac{S_t}{V}$	$\frac{V}{S_t}$	Creşteri	
						$\frac{S_{t_n}}{S_{t_{n-1}}}$	$\frac{V_n}{V_{n-1}}$
1	10	2,82	0,314	8,980	0,1114	3,120	4,00
2	20	8,79	1,256	7,00	0,1429	2,040	2,25
3	30	17,91	2,827	6,34	0,1580	1,677	1,77
4	40	30,16	5,026	6,00	0,1665	1,518	1,57
5	50	45,55	7,854	5,80	0,1725	1,417	1,44
6	60	64,48	11,310	5,70	0,1755	1,330	1,36
7	70	85,75	15,390	5,58	0,1797	1,288	1,31
8	80	110,58	20,110	5,53	0,1820	1,252	1,27
9	90	138,54	25,450	5,45	0,1840	1,223	1,24
10	100	169,64	31,420	5,40	0,1853	1,201	1,21
11	110	203,88	38,010	5,36	0,1863	1,180	1,19
12	120	241,28	45,240	5,34	0,1875		

materialul plastic — de 3,12 ori mai mare, se presează un volum de material de patru ori mai mare.

Asupra consecinţelor nu mai este nevoie să insistăm :

— variaţia căldurii primită de material pe unitate de volum, în aceleaşi condiţii de temperatură,

— variaţia forţei de presare pe unitate de volum,

— variaţia densităţii materialului,

— variaţia gradului de policondensare şi a proprietăţilor legate de el,

— tensiuni interne diferite în piesele presate.

Consecinţele sînt cu atît mai evidente, cu cît creşterile suprafeţei totale şi a volumului piesei presate cu dimensiunile sînt mai distanţate.

Mărirea diametrului conducînd la *egalizarea* acestor creşteri, uniformizează condiţiile de presare şi deci proprietăţile epruvetelor, ceea ce explică apariţia regularităţii contracţiei peste un anumit prag de dimensiuni, corespunzînd *stabilizării* raportului S_t/V.

Compararea diagramelor 2, 4 şi 3, 5 din figura 1 arată că natura umpluturii are o deosebită importanţă.

Efectul umpluturii este întotdeauna pozitiv — cu excepţia cazului cînd se cere intenţionat o contracţie mare — deoarece ea reduce contracţia provocată de răşină.

În cazul umpluturilor organice, cu cît capacitatea lor de tasare este mai mare, cu atît mai mare este capacitatea lor de a micşora contracţia (contracţia masei de presare care are ca umplutură o tocătură textilă, este mai mică decît contracţia prafului de presare, care are ca umplutură făină de lemn).

Cu alte cuvinte, cu cît materialul plastic necesită o presiune mai mare pentru formare, cu atît contracţia lui este mai mică.

Tabela 5

Material	Tip Contracția						
Pulberi de presare cu destinație generală	K–X–2 x = 15, 17, 18 19, 20, 100	K –18 TO–5	K–18–TS1 K–18–TS2	monolit	monolit FF	TS—1 TS—2 TS—10	K–101–201
	0,6–1,0	–	1,0	1,0	0,6–0,9	1,0	0,6–0,9
Pulberi de presare cu destinație specială	K–18–22	K–18–26	K–18–42	K–214–2	K–23–2	K–101–52	monolit cu barită
	–	1,0	–	0,6–1,0	0,6–1,0	0,4–0,7	0,8
Pulberi de presare cu proprietăți electroizolante	K–211–2 K–21–22 K–220–23	K–211–3					
	0,6–1,0	0,4–0,65					
Materiale de presare cu proprietăți mecanice ridicate	fibrolit TU NKHP 459–41	fibrolit de Novolac					
	0,8	0,8					
Materiale pentru presare cu rezistență mecanică, termică și proprietăți antifricțiune ridicate	K–6–B	K–6	K–F–3	K–F–3M			
	0,4	0,4	0,3	0,6			

Tabela 6

Tipul	Rășina	Materialul de umplutură			Conținut de rășină %	Absorbția de apă %	Contracție
		Tip	Structură	Exemplu			
31 ; 31,5	fenol-formaldehidică	lemn	fibre scurte	făină de lemn	50	180	0,6–0,8
51		celuloză	fibre	fibre de hîrtie	50	300	0,3–0,5
54			tăiței	tăiței de hîrtie	—	500	
71		textile	fibre	fibre bumbac	—	250	
74			tăiței	tăiței din țesătură de bumbac	50	300	
11 ; 11,5		neorganic	granule	făină de piatră	—	45	0,15–0,3
12			fibre	fibre de azbest	—	60	
16				sfoară de azbest	—	90	0 –0,3
131	uree	lemn-celuloză	fibre	făină	—	300	0,5 –0,7
Rășină					—	—	0,9 –1,3

În sprijinul acestei afirmaţii, vin datele din tabela 1 şi cele din tabelele 5 şi 6, în care sînt prezentate valorile contracţiei unor materiale plastice sovietice şi germane.

Un conţinut redus de răşină, conduce desigur la micşorarea contracţiei materialului plastic.

Încercările făcute variind grosimea discurilor la diametru constant, au dus la valori care nu sînt suficient de concludente pentru a fi interpretate şi aceasta se datoreşte influenţei provocată de închiderea matriţei.

Pentru comparaţie, dăm contracţia standard a materialelor cercetate (valori medii):

— răşină furfurol-fenolică vălţuită cu adaus de hexametilen- tetramină (15%) 1,200%;

— masă de presare pe bază de răşină furfurol-fenolică şi umplutură din tocătură textilă (necondiţionat) 0,630%;

— idem, condiţionat o oră la 60—65°C 0,263%;

— praf de presare pe bază de răşină furfurol-fenolică şi umplutură din făină de lemn (necondiţionat) 0,925%;

— idem, condiţionat o oră la 60—65°C 0,800%;

Diagramele prezentate pot servi ca bază pentru tolerarea matriţelor de presare pentru materialele date.

CONCLUZII

1) Contracţia materialelor plastice se datoreşte contracţiei răşinii;

2) Umplutura diminuează capacitatea răşinii de a micşora volumul pieselor presate;

3) Condiţionarea reduce contracţia materialelor plastice;

4) Contracţia materialelor plastice nu este o constantă ci variază cu dimensiunile piesei presate.

Există o legătură între contracţia pieselor din materiale plastice presate în matriţă şi raportul dintre suprafaţa totală şi volumul piesei presate;

5) Pentru fixarea toleranţelor matriţelor şi pieselor, sînt necesare diagrame care să dea contracţia materialului plastic, funcţie de dimensiunile piesei, deoarece exprimarea procentuală a contracţiei nu dă valori reale pentru contracţia absolută.

Primit la redacţie la 8 Martie 1958.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСАДКИ НЕКОТОРЫХ ПЛАСТМАСС ИЗ ФУРФУРОЛ-ФЕНОЛОВОЙ СМОЛЫ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматриваются проведенные экспериментальные исследования некоторых пластмасс отечественного производства из фурфурол-феноловой смолы. Путем прессовки была изготовлена серия образцов в форме

диска, включающая 12 диаметров от 10 до 120 мм с сохранением постоянной толщины 4 мм, с стандартным допуском ± 0,2 мм.

Далее указывается, что для пластмассы используемое обычно процентное выражение усадки не дает действительных значений для абсолютной усадки (таблица 3).

Для интерпретации использовались абсолютные значения и было установлено, что усадка возрастает с диаметром, причем ход возрастания является общим для всех исследованных материалов с изменением лишь уклона кривой для каждого материала.

Выше определенного порога размеров у всех исследованных материалов, независимо от термической обработки до прессовки и от состава наполнителя, появляется определенная регулярность усадки, соответственно линейное изменение усадки с диаметром (рис. 2).

Указывается, что появление линейного изменения усадки с диаметром соответствует стремлению к стабилизации отношения общей площади к объему образца, соответственно со стремлением к уравновешению прироста общей площади и объема с увеличением диаметра образца. Увеличение диаметра приводит к уравновешению этих приростов, унифицирует условия прессовки и, следовательно, общие свойства образцов (рис. 2 и табл. 4).

Вследствие этого не рекомендуется использование стандартных значений усадки при установлении размеров изделий, так как они имеют лишь чисто сравнительное значение для различных пластмасс.

Для проектировки и для установления допусков для штампов и изделий из пластмассы необходимы диаграммы, дающие усадку в зависимости от размеров изделия, поскольку путем кондиционирования понижается усадка пластмассовых материалов.

ÉTUDE DE LA CONTRACTION DE CERTAINS MATÉRIAUX PLASTIQUES, À BASE DE RÉSINE FURFUROL-PHÉNOLIQUE

RÉSUMÉ

On expose les résultats des recherches expérimentales portant sur la contraction de certains matériaux plastiques indigènes, fabriqués à partir de résine furfurol-phénolique. On a utilisé à ces fins, comme éprouvettes, une série de 12 disques, obtenus par compression, dont les diamètres variaient entre 10 et 120 mm, tout en maintenant leur épaisseur constante entre les limites standardisées, soit 4 ± 0,2 mm.

On montre que l'expression procentuelle de la contraction — couramment employée — crée l'impression, apparente seulement, d'une unité d'expression. De fait, en procédant ainsi, on introduit des erreurs, fonction du niveau auquel se rapporte le taux, par suite de la non-proportionnalité entre le phénomène de la contraction présenté par un matériel hétérogène et anisotrope et la formule recommandée pour le calcul (tableau 3).

Pour interpréter les résultats, on a utilisé des valeurs absolues et l'on a constaté une augmentation de la contraction avec le diamètre, l'allure de cette augmentation étant commune à tous les matériaux étudiés, alors que pour chaque matériel la pente seule a varié.

Au-dessus d'un certain seuil de dimensions, pour tous les matériaux étudiés et indifféremment du traitement thermique subi avant le pressage ou de la nature du remplissage, apparaît une tendance d'uniformité de la contraction, c'est-à-dire une variation linéaire de la contraction avec le diamètre (fig. 2).

On montre que l'apparition d'une variation linéaire de la contraction avec le diamètre correspond à la tendance de stabilisation du rapport de la surface totale au volume de l'éprouvette, ou encore à la tendance d'égalisation des augmentations de la surface totale et du volume en même temps que le diamètre de l'éprouvette augmente. L'augmentation du diamètre conduit à l'égalisation de ces augmentations, uniformisant par là les conditions de pressage, donc, les propriétés, dans, l'ensemble, des éprouvettes (fig. 2 et tableau 4).

Pour cette raison, il est contre-indiqué d'utiliser les valeurs standard de la contraction pour le dimensionnement des pièces, ces valeurs n'ayant qu'une valeur purement comparative pour les différents matériaux plastiques.

Pour faire le projet et établir les tolérances dans le cas des matrices et pièces en matériaux plastiques, il est nécessaire de faire usage de diagrammes qui donnent la contraction en fonction des dimensions de la pièce, tout en tenant compte du fait que, par conditionnement, la contraction des matériaux plastiques diminue.

BIBLIOGRAFIE

1. M. MEYER, *Introduction à l'étude des matières plastiques*. Dunods, Paris, 1948.
2. — *Tolérances de moulage*. Ind. Plast. Mod., Num. Spécial, 1955.
3. H. STRENGE, *Härtbare Kunststoffe richtig Angewendet*, Fachbuchverlag, Leipzig, 1954.
4. A. K. VARDENBURG, *Fabricarea pieselor electroizolante din mase plastice*. Ed. energetică de stat, Bucureşti, 1954.
5. J. H. DUBOIS, J. PRIBBLE, *Plastics mold engineering*. American Technical Society, Chicago, 1946.
6. W. BUCKSCH, H. BRIEFS, *Presswerkzeuge in der Kunststofftechnik*. Springer-Verlag, Berlin, 1953.
7. I. S. PIC, *Mase plastice de presare şi plastice laminate*, I.D.T., Bucureşti, 1953.
8. V. CALCAN, *Observaţii asupra influenţei rapoartelor* $\frac{S_t}{V}$ *şi* $\frac{V}{S_t}$ *în cazul pieselor din materiale plastice presate în matriţă*. Standardizarea, *10* (1957).
9. * DIN 53.464—9.49.
10. * GOST 5 689—51.
11. * UNI 3 683.
12. * V.S.M. 77 012 $^{S}_{P}$.
13. * ASTM D—955—51.

REZISTENȚA ÎMBINĂRII FILETATE CU CONICITATE PRONUNȚATĂ A ȚEVILOR SOLICITATE LA TRACȚIUNE

DE

N. S. PÎRVULESCU

A. DEZVOLTĂRI TEORETICE

1. CEDAREA FILETULUI SUB SARCINĂ

Pentru țevile supuse la tracțiune, repartizarea eforturilor în îmbinare cilindrică și de conicitate puțin pronunțată, a fost studiată anterior [1] și [2], avînd în vedere burlanele de foraj a căror conicitate 1/16—1/32 poate fi considerată ca puțin pronunțată.

De data aceasta ne referim la îmbinarea racordurilor speciale a prăjinilor de foraj, unde conicitatea filetului este mai pronunțată și anume de 1/4—1/6.

Ca și în lucrarea precedentă [2] vom reține, pentru simplificare, numai efectul de cedare al filetului datorit alunecării pe flancuri (v. [1]), care este esențial.

S-a arătat că prin efectul de pană al flancurilor filetului, cînd îmbinarea este supusă la tracțiune, se creează o apăsare a mufei pe cep, care pentru inelul m de lățimea unui pas, este dată de expresia

$$p_m = \frac{P_m \operatorname{ctg}(\alpha + \varphi)}{\pi D_m k}, \qquad (1)$$

în care

m este numărul de ordine al poziției reazemului de la mijlocul flancului respectiv al pasului de la poziția 0 de referință (fig. 1), poziție situată la mijlocul porțiunei filetate. Indicele m face referința la pasul respectiv;

p_m — presiunea pe suprafața cilindrică fictivă care trece pe la mijlocul flancului;

D_m — diametrul filetului la mijlocul flancului;
h — pasul constant al filetului;
P_m — forța transmisă prin filet pe pasul respectiv;
α — unghiul format de flancul filetului cu axa burlanului;
φ — unghiul de frecare.

Relația (1) este valabilă în premisa simplificatoare, pe care o menținem, că presiunea pe inelul unui pas nu influențează inelele adiacente.

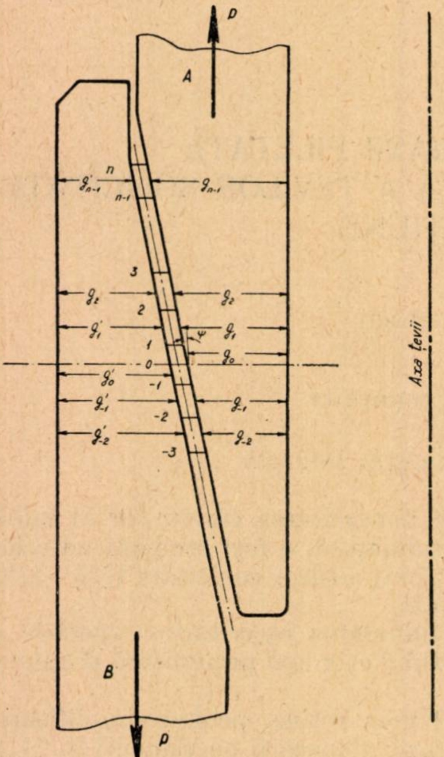


Fig. 1

S-a arătat că dilatarea relativă U_m a mufei față de cep, sub acțiunea apăsării p_m, este dată de relația

$$U_m = \frac{2R_m^3(R_e^2 - R_i^2)\,p_m}{E(R_e^2 - R_m^2)\,(R_m^2 - R_i^2)}, \tag{2}$$

în care:

R_e — raza conturului exterior al mufei;
R_i — raza conturului interior al cepului;
R_m — raza filetului la mijlocul flancului respectiv.

Deplasarea relativă e_m a mufei față de cep în lungul axului, prin alunecarea flancurilor filetului și corespunzător dilatărei relative U_m este dată pe considerații geometrice, de relația

$$e_m = U/\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{3}$$

De asemenea, păstrăm relațiile

$$g_m = g_0 + m\delta, \quad g'_m = g'_0 - m\delta,$$
$$g_{-m'} = g_0 - m'\delta, \quad g'_{-m'} = g'_0 + m'\delta, \tag{4}$$

în care

$$\delta = h\ \mathrm{tg}\ \psi, \tag{5}$$

cu notațiile:

g_m — grosimea cepului în poziția m;
g'_m — grosimea mufei în poziția m;
m' se referă la pozițiile din cealaltă parte a poziției 0 (de mijloc)
h — pasul filetului;
2ψ — unghiul la vîrf al conului generat de linia mediană a flancului filetului.

Dacă se ține seama și de înălțimea f a filetului, din considerații geometrice, și avînd în vedere relațiile (4), avem relațiile

$$R_e = \frac{D_0 + f}{2} + g'_0; \qquad R_i = \frac{D_0 - f}{2} - g_0; \qquad R_m = \frac{D_0}{2} + m\delta, \tag{6}$$

în care D_0 este diametrul filetului la mijlocul flancului în secțiunea reperului 0.

Ținînd seama de relațiile (6), relația (2) devine

$$U_m = \frac{(D_0 + 2m\delta)^3 (D_0 + g_0' - g_0)(f + g_0' + g_0)\, p_m}{4E\left[D_0 + m\delta + \frac{f}{2} + g_0'\right]\left[D_0 + m\delta - \frac{f}{2} - g_0\right]\left(\frac{f}{2} + g_0' - m\delta\right)\left(\frac{f}{2} + g_0 + m\delta\right)}. \tag{7}$$

Dacă $g_0 = g_0'$ relația (7) devine

$$U_m = \frac{D_0\, D_m^3 (g_0 + f/2)}{2E\left[(D_0 + m\delta)^2 - \left(g_0 + \frac{f}{2}\right)^2\right]\left[\left(g_0 + \frac{f}{2}\right)^2 - m^2\delta^2\right]}, \tag{8}$$

în care

$$D_m = 2R_m, \tag{9}$$

D_m — diametrul filetului la mijlocul flancului în poziția m se înlocuiește în ultima dintre relațiile (6).

Influența inegalității de grosime a pereților îmbinării a fost arătată anterior [3].

Relația (8) se mai poate pune sub forma

$$U_m = \frac{D_m^2\, p_m (1 + 2m\delta/D_0)}{2Eg_0\left[1 + \frac{f}{2g_0} - \frac{(m\delta/g_0)^2}{1 + f/2g_0}\right]\left[\left(1 + \frac{m\delta}{D_0}\right)^2 - \left(\frac{g_0}{D_0}\right)^2\left(1 + \frac{f}{2g_0}\right)^2\right]}. \tag{10}$$

Dacă D_0 este îndeajuns de mare (a se vedea tabela 2), pentru ca rapoartele $m\delta/D_0$ și g_0/D_0 să devină destul de mici încît să putem neglija pătratele lor față de unitate, relația (10) devine succesiv

$$U_m \approx \frac{D_m^2\, p_m/2Eg_0}{\left[1 + \frac{f}{2g_0} - \frac{(m\delta/g_0)^2}{1 + f/2g_0}\right]\left[1 - \left(\frac{g_0}{D_0}\right)^2\left(\frac{1 + f/2g_0}{1 + m\delta/D_0}\right)^2\right]}, \tag{11}$$

$$U_m \approx \frac{D_m^2\, p_m/2Eg_0}{1 + \frac{f}{2g_0} - \frac{(m\delta/g_0)^2}{1 + f/2g_0}}. \tag{12}$$

Dacă și raportul $f/2g_0$ este îndeajuns de mic față de unitate, pentru a fi neglijat, relația (12) devine

$$U_m \approx \frac{p_m\, D_m^2}{2\,Eg_0(1 - m^2\varkappa^2)}, \tag{13}$$

în care

$$\varkappa = \delta/g_0. \tag{14}$$

Dacă $m\varkappa$ este destul de mic — premisă simplificatoare acceptabilă în cazul filetelor de burlane, a căror conicitate este puțin pronunțată — se poate neglija al doilea termen din paranteză și se obține tocmai relația (9) din lucrarea citată [2].

Luarea în considerare a acestui termen, constituie prima diferenţă, care apare în studiul îmbinării de conicitate pronunţată, faţă de lucrarea menţionată precedent. Într-adevăr, pentru burlane, $\varkappa$ este în general mai mic decît 0,01 — după cum s-a arătat la aplicaţii [2] — spre deosebire de prăjini, la care — după cum se arată în tabela 1 — $\varkappa$ este mai mare decît 0,2.

Înlocuind valoarea p_m din (1) relaţia (13) devine

$$U_m = \frac{P_m D_m \operatorname{ctg}(\alpha + \varphi)}{\pi h 2 E g_0 (1 - m^2 \varkappa^2)}. \tag{15}$$

Prin urmare, ţinînd seamă de (6), relaţia (3) se poate pune sub forma

$$e_m = P_m K_m, \tag{16}$$

în care

$$K_m = K_0 \frac{1 + m\delta/D_0}{1 - m^2\varkappa^2}, \tag{17}$$

menţinînd notaţia

$$K_0 = \frac{D_0 \operatorname{ctg}(\alpha + \varphi)}{2\pi h E g_0 \operatorname{tg} \alpha}. \tag{18}$$

Dacă D_0 este îndeajuns de mare, putem împinge simplificarea mai departe, renunţînd la termenul al doilea de la numărătorul expresiei (17), care devine

$$K_m \approx K_0/(1 - m^2 \varkappa^2). \tag{19}$$

Prin urmare, spre deosebire de lucrarea precedentă [2], K_m nu mai este considerat constant de-a lungul filetului.

2. REPARTIŢIA EFORTURILOR ÎN ÎMBINAREA FILETATĂ

Dacă se neglijează înălţimea filetului, secţiunea A_m a cepului în poziţia m este dată de expresia

$$A_m = \frac{\pi}{4} [D_m^2 - (D_m - 2g_m)^2], \tag{20}$$

care, se mai poate pune sub forma

$$A_m = \pi D_m g_m \left(1 - \frac{g_m}{D_m}\right). \tag{21}$$

Ţinînd seama de relaţiile (4) şi făcînd aceleaşi aproximaţii admise pînă aici, se regăsesc [2] formulele

$$A_m \approx (1 + m\varkappa) A_0, \qquad A'_m \approx (1 - m\varkappa') A'_0, \tag{22}$$
$$A_{m'} \approx (1 - m'\varkappa) A_0, \qquad A'_{m-1} \approx (1 + m'\varkappa') A'_0,$$

în care A'_m este secțiunea normală a mufei în poziția m

$$\varkappa' = \delta'/g'. \tag{23}$$

$$A_0 \approx \pi D_0 g_0 \qquad A'_0 \approx \pi D_0 g'_0 \tag{24}$$

indicele m' se referă la poziția m' de cealaltă parte a reperului 0

Menținem notațiile ξ_m, ξ'_m pentru alungirile — după deformația dată de tracțiunea P — a pasului dintre pozițiile m și $m-1$, respectiv pentru cep și pentru mufă. Deci se mențin și expresiile lor

$$\xi_m = \frac{(P_0 + \sum\limits_{j=1}^{m} P_j)h}{(1 + m\varkappa)\, A_0 E}, \qquad \xi'_m = \frac{(P_0 - \sum\limits_{j=1}^{m} P_j)h}{(1 - m\varkappa')\, A'_0 E}, \tag{25}$$

în care P_0 și P'_0 sînt eforturile în secțiunile celor două piese în poziția 0.

Dacă $g'_0 = g_0$ se obține

$$A'_0 = A_0, \qquad \varkappa' \approx \varkappa, \tag{26}$$

și în virtutea simetriei

$$P'_0 = P_0 = P/2. \tag{27}$$

Menținem expresia

$$e_m = e_{m-1} + \xi_{m-1} - \xi'_{m-1} \tag{28}$$

stabilită pe considerații geometrice și în care

$$\xi_{m-1} - \xi'_{m-1} = \frac{2h}{A_0 E} \, \frac{\sum\limits_{j=1}^{m-1} P_j - (m-1)\varkappa P_0}{1 - (m-1)^2 \varkappa^2} \tag{29}$$

a fost dedusă prin scăderea una din cealaltă a relațiilor (24) și ținînd seama de (25) și (26).

Ținînd seama de (16), (19) și (29), relația (28) devine

$$K_m P_m = K_{m-1} P_{m-1} + \frac{2h}{A_0 E} \, \frac{\sum\limits_{j=1}^{m-1} P_j - (m-1)\varkappa P_0}{1 - (m-1)^2 \varkappa^2}. \tag{30}$$

Făcînd înlocuirile date de formula (19), relația (30) devine

$$P_m = q_{m-1}^{m} \left\{ P_{m-1} + \beta \left[\sum_{j=1}^{m-1} P_j - (m-1)\varkappa P_0 \right] \right\} \tag{31}$$

în care

$$q_{m-1}^{m} = \frac{1 - (m-1)^2 \varkappa^2}{1 - m^2 \varkappa^2}, \tag{32}$$

$$\beta = 2h/E A_0 K_0, \tag{33}$$

şi ţinînd seama de (18) şi (24)

$$\beta = \left(\frac{2h}{D_0}\right)^2 \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}(\alpha+\varphi)}. \tag{34}$$

Pentru $m = 2, 3, 4 \ldots n$, formula (31) devine

$$\begin{aligned}
\frac{P_2}{P_1} &= q_1^2 \left\{ 1 + \beta\left[1 - \varkappa\frac{P_0}{P_1}\right]\right\},\\
\frac{P_3}{P_1} &= q_2^3 \left\{ \frac{P_2}{P_1} + \beta\left[1 + \frac{P_2}{P_1} - 2\varkappa\frac{P_0}{P_1}\right]\right\},\\
\frac{P_4}{P_1} &= q_3^4 \left\{ \frac{P_3}{P_1} + \beta\left[1 + \frac{P_2}{P_1} + \frac{P_3}{P_1} - 3\varkappa\frac{P_0}{P_1}\right]\right\},\\
&\vdots\\
\frac{P_n}{P_1} &= q_{n-1}^n \left\{ \frac{P_{n-1}}{P_1} + \beta\left[\sum_{j=1}^{n-1}\frac{P_j}{P_1} - (n-1)\varkappa\frac{P_0}{P_1}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Să înlocuim succesiv valorile P_m în funcţie de P_m şi relaţiile (35) devin

$$\begin{aligned}
\frac{P_2}{P_1} &= M_2^0 + \beta M_2^1 - \varkappa\frac{P_0}{P_1}\beta N_2^1,\\
\frac{P_3}{P_4} &= M_3^0 + \beta M_3^1 + \beta^2 M_3^2 - \varkappa\frac{P_0}{P_1}(\beta N_3^1 + \beta^2 N_3^2),\\
&\vdots\\
\frac{P_n}{P_1} &= \sum_{i=0}^{n-1}\beta^i M_n^i - \varkappa\frac{P_0}{P_1}\sum_{i=1}^{n-1}\beta^i N_n^i,
\end{aligned} \tag{36}$$

în care

$$M_m^i = q_{m-1}^m\left[\sum_{j=i}^{m-1} M_j^{i-1} + M_{m-1}^i\right], \tag{37}$$

valabilă pentru i, j, m întregi şi

$$0 \leqslant i \leqslant m-1, \tag{38}$$

iar

$$M_1^0 = 1, \qquad M_m^{-1} = 0 = M_m^m, \tag{39}$$

şi

$$N_m^i = q_{m-1}^m\left[\sum_{j=i}^{m-1} N_j^{i-1} + N_{m-1}^i\right], \tag{40}$$

valabile pentru i, j, m întregi şi

$$1 \leqslant i \leqslant m-1, \tag{41}$$

iar

$$N_j^0 = 1, \qquad N_m^m = 0. \tag{42}$$

Observăm că expresiile M_m^i şi N_m^i sînt date de aceleaşi relaţii de recurenţă (37) şi (40), numai valabilitatea lor diferă, întrucît termenii iniţiali (de la care se porneşte) sînt diferiţi.

Pentru simplificarea scrisului să facem următoarele notaţii

$$\overline{M}_m^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} \beta^i M_m^i, \qquad \overline{N}_m^{m-1} = \sum_{i=1}^{m-1} \beta^i N_m^i, \tag{43}$$

$$\underline{M}_{m-1}^{i-1} = \sum_{j=i}^{m-1} M_{j-1}^{i-1}, \qquad \underline{N}_{m-1}^{i-1} = \sum_{j=i}^{m-1} N_j^{i-1}. \tag{44}$$

Cu aceste notaţii relaţiile (36), (37), (40) devin respectiv

$$\frac{P_m}{P_1} = \overline{M}_m^{m-1} - \varkappa \frac{P_0}{P_1} \overline{N}_m^{m-1}, \tag{45}$$

$$M_m^i = q_{m-1}^m \left(\underline{M}_{m-1}^{i-1} + M_{m-1}^i \right), \tag{46}$$

$$N_m^i = q_{m-1}^m \left(\underline{N}_{m-1}^{i-1} + N_{m-1}^i \right). \tag{47}$$

Condiţiile de valabilitate şi valorile termenilor iniţiali rămîn cele date respectiv de expresiile (38), (39), (41), (42).

Comutativitatea însumărilor sub barate şi supra barate

Să dezvoltăm însumarea sumelor numerilor M_j^{j-1} cu ajutorul rclaţiilor (43) şi (44)

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{M}_j^{j-1} = M_1^0 + \left(M_2^0 + \beta M_2^1\right) + \left(M_3^0 + \beta M_3^1 + \beta^2 M_3^2\right) + \ldots$$
$$+ \left(M_m^0 + \beta M_m^1 + \beta^2 M_m^2 + \ldots + \beta^{m-1} M_m^{m-1}\right). \tag{48}$$

Dînd factori comuni pe β şi puterile lui se obţine

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{M}_j^{j-1} = M_1^0 + M_2^0 + \ldots + M_m^0 + \beta \left(M_2^1 + M_3^1 + \ldots M_m^1\right) +$$
$$+ \beta^2 \left(M_3^2 + M_4^2 + \ldots + M_m^2\right) + \ldots + \beta^{m-1} M_m^{m-1}. \tag{49}$$

Însumînd termenii din paranteză se obţine

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{M}_j^{j-1} = \underline{M}_m^0 + \beta\, \underline{M}_m^1 + \beta^2 \underline{M}_m^2 + \ldots + \beta^{m-1} \underline{M}_m^{m-1}. \tag{50}$$

Prin urmare

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{M}_j^{j-1} = \sum_{i=0}^{m-1} \beta^i \underline{M}_m^i. \tag{51}$$

Această proprietate ne îndreptăţeşte să folosim notaţia dublei însumări

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{M}_j^{j-1} = \overline{M}_m^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} \beta^i \underline{M}_m^i . \tag{52}$$

În mod analog se arată că

$$\sum_{j=2}^{m} \overline{N}_j^{j-1} = \overline{N}_m^{m-1} = \sum_{i=1}^{m-1} \beta^i \underline{N}_m^i . \tag{53}$$

Folosirea acestor proprietăţi la alcătuirea tabelelor numerice, după cum se va arăta **mai departe, înlesneşte calculul numeric.**

Să punem condiția de echilibru

$$\frac{P}{2} = \sum_{m=1}^{n} P_m . \tag{54}$$

Înlocuind pe P_m succesiv cu valoarea sa din (45), ecuația (54) devine

$$\frac{P}{2P_1} = \underline{\overline{M}}_n^{n-1} - \varkappa \frac{P_0}{P_1} \underline{\overline{N}}_n^{n-1} . \tag{55}$$

Ținînd seama de (27) se obține

$$\frac{P}{2P_1} = \frac{\underline{\overline{M}}_n^{n-1}}{1 + \varkappa \underline{\overline{N}}_n^{n-1}} . \tag{56}$$

Obișnuit, ultimul filet angajat este cel mai solicitat și prin urmare poziția n este cea mai interesantă. Prin urmare pentru $m = n$, ținînd seama de (27) și (56) relația (45) devine

$$\frac{P_n}{P/2} = \frac{\overline{M}_n^{n-1} + \varkappa\Delta}{\underline{\overline{M}}_n^{n-1}} , \tag{57}$$

în care

$$\Delta = \underline{\overline{M}}_n^{n-1} \underline{\overline{N}}_n^{n-1} - \underline{\overline{M}}_n^{n-1} \underline{\overline{N}}_n^{n-1} . \tag{58}$$

Atît în ipoteza filetului cilindric [1] — cînd s-a trecut de la relația (62) la (63) — cît și în ipoteza unei conicități nepronunțate [2] — cînd s-a trecut de la relația (34) la (35) — s-a avut în vedere că β este îndeajuns de mic, încît să se poată renunța la termenii cu β^i pentru $i \geqslant 2$, ceea ce a condus la simplificări considerabile în calculul numerilor de recurență.

Aceste lucrări s-au referit la burlanele de tubaj, la care într-adevăr — după cum se vede în tabloul 4 din [1] — β este în general mai mic de de 0,01 ; ceea ce nu este cazul la prăjinile de foraj, la care β este mai mare decît 0,05. Luarea în considerare a termenilor cu β^i chiar pentru $i > 2$, constituie o a doua diferență importantă față de lucrările precedente; ceea ce va mări considerabil preciziunea, dar va reclama calcule laborioase pentru numerile de recurență folosite în aceste formule (57) și (58).

Se menţine expresia

$$\zeta_n = \frac{P_n}{P/2n}, \tag{59}$$

care exprimă gradul de supraîncărcare al ultimului filet n angajat. Ţinînd seama de (57), aceasta devine

$$\zeta_n = \frac{\overline{M}_n^{n-1} + \varkappa\Delta}{\underline{M}_n^{n-1}}. \tag{60}$$

3. COMPUNEREA EFORTURILOR

S-a arătat [1] că sub acţiunea presiunii p efortul σ_t după direcţia tangentei pe conturul interior al ţevii este dat de formula

$$\sigma_t = \frac{p\,D\,(1 - f/D)}{2g\,[1 - g/(D - f)]}. \tag{61}$$

În cazul filetului cilindric [1], sau în cazul filetelor de conicitate nepronunţată [2], în vederea burlanelor de sondă s-a folosit formula simplificată

$$\sigma_t \approx p\,D/2g \tag{62}$$

valabilă pentru ţevi cu pereţi subţiri, unde efortul unitar se consideră constant pe grosimea filetului.

Pentru a se ajunge la formula (62), s-a neglijat în formula (61) atît raportul f/D cît şi raportul g/D ca mici faţă de unitate.

Dacă se neglijează înălţimea f a filetului, dar nu şi grosimea g a ţevii, şi ne referim la poziţia n, în premisele acceptate, se obţine

$$\sigma_{tn} = \frac{p_n\,D_n}{2g_n\,(1 - g_n/D_n)}. \tag{63}$$

Procedînd în mod analog ca şi în lucrările citate, adică, în orice ipoteză de ruperea materialului, compunînd solicitarea de tracţiune P/A_n cu aceea dată de apăsarea mufei pe cep (62), se obţine expresia forţei de smulgere

$$P = \frac{A_n\,\sigma_a}{1 + \xi\,\zeta_n\,\frac{D_n}{2l}\,\mathrm{ctg}\,(\alpha + \varphi)}, \tag{64}$$

în care (redăm toate notaţiile)

A_n — secţiunea cepului în dreptul ultimului filet angajat dat de formula (21) şi cu aproximaţia (22) pentru $m = n$;

σ_a — rezistenţa admisibilă a materialului;

ξ — coeficientul referitor la ipoteze de rupere a materialului. Am admis $\xi = 2/3$;

ζ_n — gradul de supraîncărcare al ultimului filet angajat dat de expresiile (60), (58), (44), (43), (34) și (14);

D_n — diametrul filetului în poziția n;

l — lungimea porțiunii filetate

$$l = 2nh; \tag{65}$$

α — unghiul flancurilor cu axa burlanului;

φ — unghiul de frecare $\varphi \approx 18°$.

Formula (64) diferă de formula anterioară (43) din [2] prin aceea că A_0 a fost înlocuit cu A_n, iar ζ — după cum s-a arătat — are altă expresie

B. OBSERVAȚIE

Deoarece pentru fiecare caz în parte, calculele necesitate de formula (60) și celelalte formule respective sînt laborioase, este preferabil să întocmim tabele pentru diferite valori ale parametrilor $\varkappa$, m și n. Cu ajutorul tabelelor s-au trasat diagramele din figura 2, încît să obținem prin interpolare valorile ζ pentru fiecare caz în parte.

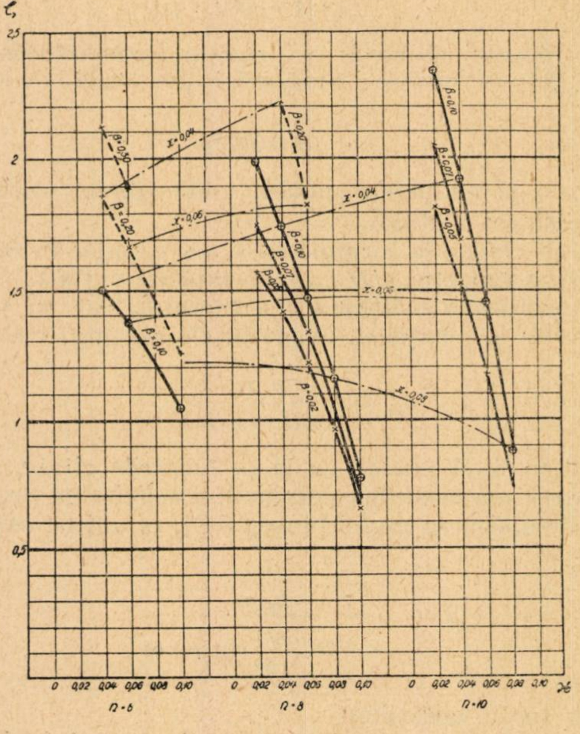


Fig. 2

C. APLICAŢII

Ne referim la filetul special al prăjinilor grele şi al racordurilor prăjinilor de foraj, ale căror elemente geometrice sînt date în STAS 324-49 (fig. 3).

S-au menţionat notaţiile din standard însă stelate spre a se deosebi de notaţiile folosite anterior. Paralelizînd avem

$$D_n = d^\star,\ D_i = d_2^\star,\ h = p^\star,\ f = h^\star\,. \quad (66)$$

Precizăm notaţiile

$d^\star$ — diametrul flancurilor în punctul de calibrare;
$d_2^\star$ — diametrul interior al cepului;
$H^\star$ — înălţimea filetului netrunchiat;
$h^\star$ — înălţimea filetului trunchiat;
$f^\star$ — trunchierea la fund;
$p^\star$ — pasul;
$l_3^\star$ — lungimea de la capătul cepului la umăr.

Dimensiunile sînt date în milimetri. Conicitatea este exprimată prin 2 tg ψ.

Valorile parametrilor rezultaţi din elementele geometrice sînt trecute în tabela 1, şi au fost calculate cu ajutorul formulelor

$$l = l_3^\star - 15{,}875, \quad (67)$$

$$n = n^\star/2, \quad (68)$$

$$g_n = \frac{1}{2}\,(d^\star - H^\star - d_2^\star), \quad (69)$$

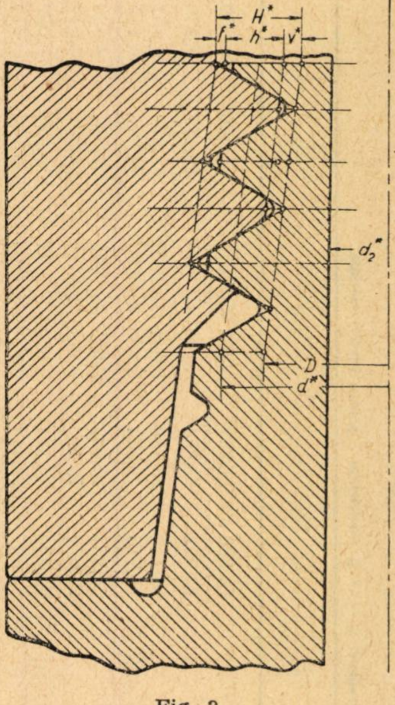


Fig. 3

stabilite pe consideraţii geometrice (fig. 3).

Ceilalţi parametri δ, g_0, $\varkappa$, D_0, β au fost calculaţi folosind formulele: (5), (4), (14), (6), (34). În ultima formulă s-a considerat $\alpha = 60°$, $\varphi = 18°$ şi prin urmare $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = 8{,}149$.

Coeficienţii ζ s-au calculat prin interpolări folosind diagramele din figura 2.

Astfel pentru îmbinări $3''{}^1/_2 N$ unde $n \approx 8$ şi $\varkappa \approx 0{,}06$, coincid cu valorile pentru care au fost întocmite diagramele, numai β diferă, încît avînd $\zeta = 1{,}75$ pentru $\beta = 0{,}10$ şi $\zeta = 2{,}21$ pentru $\beta = 0{,}20$, interpolînd pentru $\beta = 0{,}16$ se obţine $\zeta = 2{,}03$

În ceea ce priveşte $\varkappa$, citirea se poate face direct pe diagrame, întrucît acestea au fost trasate în funcţie de $\varkappa$.

Pentru îmbinarea $4''{}^1/_2 N$ unde nici n nu coincide cu unele din valorile pentru care s-au executat diagramele, se obţine printr-o primă interpolare (în ceea ce priveşte β), $\zeta = 1{,}8$ pentru $n = 8$ şi $\zeta = 2{,}06$

Tabela 1

Parametri n, $\varkappa$, β şi coeficientul ζ pentru filetele speciale

Diam. nominal	Cate-goria	l	n	δ	g_n	g_0	$\varkappa$	D_0	β	ζ_n
2''3/8	N	60,325	$5{,}94 \approx 6$	0,635	15,660	11,889	$0{,}053 \approx 0{,}05$	52,540	$0{,}309 \approx 0{,}31$	2,00
2''7/8	N	73,025	$7{,}19 \approx 7$		17,222	12,658	$0{,}050 \approx 0{,}05$	60,477	0,230	1,95
3''1/2	N	79,325	$7{,}81 \approx 8$		20,416	15,458	$0{,}041 \approx 0{,}04$	72,377	$0{,}161 \approx 0{,}16$	2,03
	L				14,792	9,834	$0{,}065 \approx 0{,}06$	84,928	$0{,}117 \approx 0{,}12$	1,54
4''1/2	N	92,025	$9{,}06 \approx 9$		25,154	19,402	$0{,}033 \approx 0{,}03$	99,364	$0{,}086 \approx 0{,}09$	1,93
	L	85,725	$8{,}44 \approx 8$		15,820	10,462	$0{,}061 \approx 0{,}06$	104,397	$0{,}072 \approx 0{,}07$	1,33
5''1/2	N	104,725	$8{,}95 \approx 9$	0,794	29,422	22,315	$0{,}036 \approx 0{,}04$	118,730	$0{,}089 \approx 0{,}09$	1,77
	L				18,147	13,518	$0{,}039 \approx 0{,}04$	132,753	$0{,}075 \approx 0{,}07$	1,63
6''5/8	N	111,125	$8{,}75 \approx 9$	0,529	26,566	21,937	$0{,}024 \approx 0{,}02$	136,990	0,070	1,95
	L				17,191	15,652	$0{,}042 \approx 0{,}04$	156,340	$0{,}054 \approx 0{,}05$	1,97

Tabela 2

Termenii neglijabili

D.am. nominal	Cate-goria	$\frac{\delta}{D_0}$	$n\frac{\delta}{D_0}$	$\left(\frac{\delta}{D_0}\right)^2$	$\left(n\frac{\delta}{D_0}\right)^2$	$\frac{g_0}{D_0}$	$\left(\frac{g_0}{D_0}\right)^2$	$\frac{l}{2g_0}$	$\varkappa^2$	$(n\varkappa)^2$
2''3/8	N	0,0121	0,0718	0,00015	0,0052	0,226	0,051	0,126	0,0028	0,099
2''7/8	N	0,0108	0,0771	0,00012	0,0059	0,209	0,044	0,118	0,0025	0,129
3''1/2	N	0,0088	0,0685	0,00008	0,0047	0,214	0,045	0,097	0,0017	0,102
	L	0,0075	0,0584	0,00006	0,0034	0,116	0,013	0,152	0,0042	0,257
4''1/2	N	0,0064	0,0589	0,00004	0,0034	0,195	0,038	0,077	0,0011	0,089
	L	0,0061	0,0513	0,00004	0,0046	0,100	0,010	0,143	0,0037	0,265
5''1/2	N	0,0067	0,0599	0,00005	0,0036	0,188	0,035	0,084	0,0013	0,104
	L	0,0040	0,0349	0,00002	0,0012	0,102	0,010	0,139	0,0015	0,116
6''5/8	N	0,0039	0,0438	0,00002	0,0011	0,160	0,025	0,086	0,0006	0,044
	L	0,0034	0,0296	0,00001	0,0009	0,080	0,006	0,149	0,0018	0,135

pentru $n = 10$ şi printr-o a doua interpolare (în ceea ce priveşte n) se obţine în cele din urmă $\zeta = 1{,}93$ pentru $n \approx 9$.

Valorile termenilor neglijabili, au fost trecute în tabela 2. Urmărind cifrele din această tabelă se pot aprecia aproximaţiile făcute, la stabilirea formulelor (11)...(19).

Pentru a arăta importanţa termenilor neglijabili în domeniul burlanelor ($\varkappa < 0{,}01$ şi $\beta < 0{,}01$), dar care fac nevalabile formulele anterioare în domeniul prăjinilor ($\varkappa > 0{,}02$ şi $\beta > 0{,}05$), dăm în tabela 3, valorile coeficientului ζ pentru filetul special al prăjinilor de foraj în următoarele ipoteze :

I. Pentru filet cilindric cu formula (71) din [1] şi anume

$$\zeta = 1 + \beta\nu, \tag{70}$$

în care se foloseşte expresia aproximativă

$$\nu = \frac{n-1}{3} n\mu \tag{71}$$

şi

$$\mu = 1.$$

II. Tot pentru filet cilindric, cu aceleaşi formule (70) şi (71), cu diferenţa că expresia lui μ din (72) conform relaţiei (70) din [1] devine

$$\mu = \frac{1 - 1/2n}{1 + \beta\,(n^2 - 1)/6}. \tag{73}$$

III. Pentru conicitate puţin pronunţată, conform formulei (41) din [2] şi anume

$$\nu = \frac{n-1}{3}\left\{ n \frac{1 + \varkappa \dfrac{n+1}{2}\left[1 + \beta n \dfrac{n-1}{2}\right] - \dfrac{1}{2n}}{1 + \beta\,(n^2 - 1)/6} - \frac{3}{2}\varkappa \right\}. \tag{74}$$

Tabela 3

Coeficientul ζ în diferite ipoteze de calcul

Ipoteza		I		II		III		IV
Diam. nominal	Categoria	ζ	Diferenţa %	ζ	Diferenţa %	ζ	Diferenţa %	ζ
2" 3/8	*N*	4,10	+105	2,01	+ 1	3,04	+52	2,00
3" 1/2	*N*	3,99	+ 96	2,05	+ 1	3,12	+54	2,03
	L	3,24	+110	1,93	+25	2,96	+92	1,54
4" 1/2	*N*	3,16	+ 64	1,93	0	2,54	+32	1,93
	L	2,31	+ 74	1,71	+29	2,29	+72	1,33
6" 5/8	*N*	2,68	+ 37	1,82	− 7	2,12	+ 9	1,95
	L	2,20	+ 13	1,68	−15	2,12	+ 8	1,97

IV. Pentru conicitate pronunțată, conform formulei (60) și tabelei 3 din prezenta lucrare.

În coloana a doua de la fiecare ipoteză sînt date diferențele în procente față de valorile ipotezei IV, care rămîne singură valabilă în domeniul filetului special al prăjinilor de foraj. Observăm că termenii în β^1 pentru $i > 2$ sînt mai importanți decît influența parametrului $\varkappa$, încît ipoteza II este mai apropiată de ipoteza valabilă IV decît ipoteza III.

D. CONCLUZII

În studiul precedent [2], în care s-a avut în vedere filetul burlanelor, a căror conicitate este puțin pronunțată (1/16—1/32), s-a considerat pentru simplificare K_m constant cînd m variază de la n la $-n$; ceea ce înseamnă că s-a neglijat cel de-al doilea termen $m^2\varkappa^2$ de la numitorul relației (19). În exemplul considerat [2], burlanele 6″5/8 au $\varkappa > 0{,}007$ și $n \approx 10$, ceea ce înseamnă că termenul neglijat $m^2\varkappa^2$ variază între 0,005% și între 0,5% și prin urmare este într-adevăr neglijabil.

Făcînd comparația cu filetul special de la prăjinile 6″ 5/8, observăm că : dacă pentru prăjinile normale (N) termenul $m^2\varkappa^2$ rămîne tot atît de neglijabil, însă pentru prăjinile cu gaură largă (L), acest termen variază între 0,18% și 13,5%, ceea ce poate să nu mai fie neglijabil.

Tendința modernă, pentru a reduce pierderile de circulație a noroiului, este de a folosi racorduri cu gaură largă, a căror grosime (g_0) este considerabil redusă, ceea ce conduce la un $\varkappa$ majorat (tabela 1) și respectiv termenul $m^2\varkappa^2$ neglijabil.

Urmărind cifrele din tabela 2, observăm că pentru racorduri cu gaură largă termenul $n^2\varkappa^2$ intră în considerație, astfel pentru racordurile $4^1/_2$, care sînt cele mai uzuale, termenul $n^2\varkappa^2$ devine 26,5%, ceea ce nu mai poate fi neglijat.

Aceste considerații justifică necesitatea de a se lua în considerație conicitatea pronunțată a filetului special de la prăjini, spre deosebire de studiul precedent [2] referitor la burlane.

Luarea în considerație a unui K_m variabil cu m, complică așa de mult calculul, în cît devine prea laborios să se calculeze de fiecare dată valoarea gradului de repartizare ζ al efortului de transmis prin filet. Volumul mare de muncă provine de la calcularea numerelor M_j^i, N_j^i simplu și dublu barat pentru diferitele valori ai parametrilor n, $\varkappa$, β. Este preferabil să se folosească în orice caz, diagramele din fig. 2, cu ajutorul cărora, se poate aprecia prin interpolare valoarea ζ în funcție de parametrii menționați.

Din examinarea diagramelor din figura 2, constatăm că pentru un anumit n, valorile ζ cresc cu β însă scad pronunțat cu $\varkappa$. Odată cu creșterea lui n, valorile ζ pot să crească, dacă $\varkappa$ este redus și să scadă, dacă $\varkappa$ este ridicat.

Se vede că parametrii $\varkappa$ și β, individualizați prin necesitățile de calcul, încep să capete o semnificație fizică.

Urmărind valorile ζ_n din tabela 1, observăm că acestea (referitoare la filetul special al prăjinilor) sînt mult mai ridicate (1,33...2,00), decît cele calculate pentru burlane (1,08...1,25) [1]. Acest efect defavorabil este compensat într-o anumită măsură, de faptul că în formula (64) apare la numitor secțiunea A_n (în ultimul filet angajat), care se mărește prin îngroșarea de perete a racordului.

Atît timp cît secțiunea din ultimul filet angajat este cea mai defavorabilă, avem interesul să scădem valoarea ζ_n, ceea ce se poate realiza, după cum s-a arătat, prin mărirea lui $\varkappa$ și reducerea lui β (a se vedea relațiile (16) și (34)).

Examinînd tabela 3, observăm că valorile coeficientului ζ, calculate în ipotezele precedente (I—IV) dau diferențe grosolane, ceea ce conduce la concluzia că vechile formule nu rămîn valabile pentru prăjinile de foraj.

Primit la redacție la 25 ianuarie 1958.

ПРОЧНОСТЬ РЕЗЬБОВОГО СОЕДИНЕНИЯ С ПОВЫШЕННОЙ КОНУСНОСТЬЮ РАБОТАЮЩИХ НА РАСТЯЖЕНИЕ ТРУБ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исследование цилиндрической резьбы [1] и резьбы с небольшой конусностью (1/16—1/32) [2] на обсадных трубах, пополняется настоящей работой, рассматривающей специальную резьбу с повышенной конусностью (1/4—1/6) для буровой штанги.

С теми же, что и в предыдущей работе [2], предпосылками было сохранено лишь скольжение вдоль боковых поверхностей в отношении ослабления соединения под нагрузкой.

Исследование проводилось аналогично, но K_m более не считалось постоянным вдоль резьбы, а изменяющимся с величиной m, что указывает на то, что членом $m^2\varkappa^2$ в формуле (19) уже не пренебрегалось.

Это привело в исследовании распределения усилий вдоль резьбы к более сложным выражениям; числа M^i_m и N^i_m, данные рекуррентными формулами (37), (40), с учетом обозначений (43), (44), были написаны в виде (46), (47).

Таким образом пришли к формуле (60), выражающей степень нагружения ζ_n последней загруженной резьбы, в которой числа $\overline{M}_n^{n-1}$, $\overline{N}_n^{n-1}$, Δ_n^{n-1} выражаются соответственно через соотношения (52), (53) и (58).

В составе тягового усилия P с усилием давления, созданным клиновым эффектом боковых поверхностей резьбы, приходят к той же формуле (64) с той разницей, что ζ_n имеет, как это было указано выше, другое выражение.

Расчет коэффициента ζ_n производится легко, путем интерполяции, при помощи диаграммы рис. 6.

Результаты применения к специальной резьбе обычной буровой штанги (СТАС 324—49) помещены в таблице 1, содержащей в последней графе величины ζ_n. Пренебрегаемые члены помещены в таблице 2.

RÉSISTANCE DE L'ASSEMBLAGE FILETÉ, À CONICITÉ MARQUÉE, DES TIGES SOLLICITÉES À LA TRACTION

RÉSUMÉ

L'étude du filet cylindrique [1] et celle du filet à conicité peu marquée (1/16—1/32) [2] est complétée par le texte présent portant sur le filet spécial, à conicité marquée (1/4—1/6), des tiges de forage.

On a maintenu les hypothèses de l'étude précédente [2] et, en ce qui concerne la déformation du raccord sous charge, on n'a considéré que le glissement sur les flancs des filets.

On a procédé d'une manière analogue, K_m n'est plus constant mais varie avec m, ce qui veut dire qu'on ne néglige plus $m^2\varkappa^2$ de la formule (19). Cette considération conduit, lors de l'étude de la répartition des efforts, à des expressions plus compliquées ; les nombres M_m^i et N_m^i, exprimés par les formules de récurrence (37), (40), compte tenu des notations (43), (44), prennent les formes (46) et (47).

On en arrive ainsi à la formule (60), qui exprime le degré de chargement ζ_n du dernier filet engagé, où les nombres $\overline{M}_n^{n-1}$, $\overline{N}_n^{n-1}$, Δ_n^{n-1} sont exprimés, respectivement, par les relations (52), (53) et (58).

En composant les efforts biaxiaux, P, de traction et celui de pression, provoqués par le glissement sur les flancs des filets, on arrive à la formule (64), différente seulement en ce qui concerne l'expression de ζ_n.

On calcule facilement le coefficient ζ_n, par interpolation, à l'aide du diagramme 2.

Les applications faites au filet spécial des tiges usuelles (STAS 324-49) sont portées sur le tableau 1, dont la dernière colone contient les valeurs ζ_n.

Dans le tableau 2, on trouvera les valeurs des termes négligeables.

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. PÎRVULESCU, *Smulgerea țevilor din filet.* Studii, Inst. de petrol și gaze (I.P.G.), **I**, 92 (1955).
2. — *Smulgerea burlanelor din filet conic.* Studii, Inst. de petrol și gaze (sub tipar).
3. — *Smulgerea țevilor din îmbinarea filetată cu pereți de grosime inegală.* Studii, Inst. de petrol și gaze (I.P.G.), **III** (1957).

CALCULUL DE REZISTENȚĂ A PALELOR DE ELICOPTER DE SECȚIUNE CONSTANTĂ SUB O SARCINĂ DATĂ

DE

A. PETRE

Se consideră o pală de elicopter de secțiune constantă, solicitată de o sarcină de valoare și repartiție, în lungul ei, cunoscută. Se descompune această sarcină după direcții paralele cu direcțiile principale ale secțiunilor transversale și se consideră, în lucrarea prezentă, numai componentele conținute de unul din aceste plane de inerție.

Pentru componentele din celălalt plan de inerție, problema se soluționează în același mod și rezultatul final se poate obține însumînd efectele.

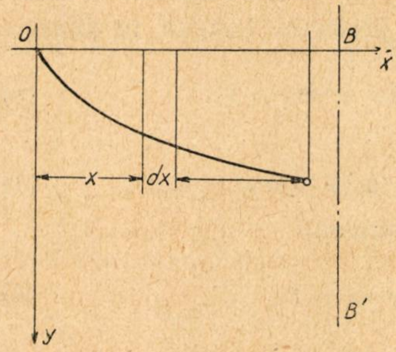


Fig. 1

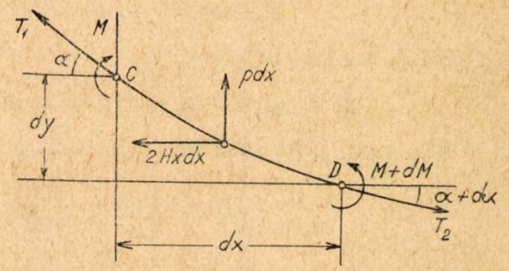


Fig. 2

Se presupune că sub sarcina dată, deformațiile palei nu sînt prea mari.

Sub efectul sarcinilor și forței centrifuge fibra medie a palei va lua o formă oarecare ca în figura 1.

Se consideră un sistem de axe de coordonate rectangulare cu originea în vîrful palei și axa Ox normală la axul de rotație al palei BB' (fig. 1).

Componenta în direcția Ox a forței centrifuge într-un punct la distanța x). de origine are valoarea

$$F_c = \frac{\gamma A}{2g} \omega^2 x^2,$$

sau

$$F_c = H x^2, \tag{1}$$

unde

$$H = \frac{\gamma A}{2g} \omega^2. \tag{2}$$

Se consideră un element de pală (fig. 2). S-a notat aici cu p sarcina repartizată dată. Expresia analitică a acestei sarcini se consideră în general de forma

$$p = a_1 + a_2 \ x + a_3 x^2. \tag{3}$$

Cu notațiile din figura 2, utilizînd relația (1), se poate scrie

$$\begin{aligned} T_1 \cos \alpha &= H x^2, \\ T_2 \cos (\alpha + d\alpha) &= H \ (x + dx)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Relațiile (4) satisfac identic ecuațiile de echilibru rezultate din proiectarea forțelor pe direcția Ox.

Din (4) se obține

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{H x^2}{\cos \alpha}, \\ T_2 &= \frac{H (x + dx)^2}{\cos (\alpha + d\alpha)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Ecuația de echilibru rezultată din proiecția forțelor în direcția Oy este

$$T_1 \sin\alpha + p \ dx - T_2 \sin (\alpha + d\alpha) = 0, \tag{6}$$

sau ținînd seama de (5)

$$H x^2 \operatorname{tg}\alpha + p dx - H \ (x + dx)^2 \operatorname{tg} (\alpha + d\alpha) = 0, \tag{7}$$

de unde, neglijînd infiniții mici de ordin superior

$$H x^2 \frac{d (\operatorname{tg}\alpha)}{dx} + 2 \ H x \operatorname{tg}\alpha - p = 0. \tag{8}$$

Ecuația de moment față de punctul D (fig. 2) este

$$M + dM - M - T_1 \sin \alpha \ dx + T_1 \cos \alpha \ dy + \frac{2Hxdxdy}{2} - p \frac{dx^2}{2} = 0, \tag{9}$$

de unde, utilizînd relațiile (5) și neglijînd infiniții mici de ordin superior, se obține

$$\frac{dM}{dx} + H x^2 \frac{dy}{dx} - H x^2 \operatorname{tg}\alpha = 0. \tag{10}$$

Derivînd ecuația (10) se obține

$$\frac{d^2M}{dx^2} + Hx^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2Hx\frac{dy}{dx} - Hx^2\frac{d\,(\mathrm{tg}\alpha)}{dx} - 2Hx\,\mathrm{tg}\alpha = 0. \tag{11}$$

Eliminînd pe α între relația (8) și (11), știind că

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -EI\frac{d^4y}{dx^4} \tag{12}$$

și ținînd seama de (3) se obține

$$-EI\frac{d^4y}{dx^4} + Hx^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2Hx\frac{dy}{dx} = -a_1 - a_2x - a_3x^2. \tag{13}$$

Notînd cu R distanța între vîrful palei și axa de rotație, se face schimbarea de variabilă

$$\xi = \frac{x}{R}\cdot \tag{14}$$

Relația (13) devine

$$\frac{d^4y}{d\xi^4} + \alpha\xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2\alpha\xi\frac{dy}{d\xi} = b_1 + b_2\xi + b_3\xi^2, \tag{15}$$

unde

$$\alpha = -\frac{\gamma A\omega^2}{2g}\,\frac{R^4}{EI} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= a_1\,\frac{R^4}{EI} \\ b_2 &= a_2\,\frac{R^3}{EI} \\ b_3 &= a_3\,\frac{R^2}{EI} \end{aligned}\right| \tag{17}$$

Notînd

$$\frac{dy}{d\xi} = \varphi \tag{18}$$

ecuația (15) devine

$$\frac{d^3\varphi}{d\xi^3} + \alpha\xi^2\frac{d\varphi}{d\xi} + 2\alpha\xi\varphi = b_1 + b_2\xi + b_3\xi^2. \tag{19}$$

Deoarece

$$2\alpha\xi - \frac{d\,(\alpha\xi)}{d\xi} = 0, \tag{20}$$

ecuația (19) este o ecuație diferențială exactă și integrată odată devine

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \alpha\xi^2\varphi = b_0 + b_1\xi + \frac{b_2}{2}\xi^2 + \frac{b_3}{3}\xi^3, \tag{21}$$

unde b_0 este o constantă arbitrară.

Efectuînd schimbarea de variabilă

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\alpha}}}\, z^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

și schimbarea de funcție

$$\varphi = \sqrt[4]{\frac{2}{\sqrt{\alpha}}}\, z^{\frac{1}{4}}\, \eta(z), \tag{23}$$

ecuația (21) devine

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\eta}{dz} + \left[1 - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{z^2}\right]\eta = b_0 2^{-\frac{5}{4}}\alpha^{-\frac{3}{8}}z^{-\frac{5}{4}} + b_1 2^{-\frac{3}{4}}\alpha^{-\frac{5}{8}}z^{-\frac{3}{4}} + \tag{24}$$
$$+ b_2 2^{-1}\, 2^{-\frac{1}{4}}\alpha^{-\frac{7}{8}}z^{-\frac{1}{4}} + b_3 3^{-1}\, 2^{\frac{1}{4}}\alpha^{-\frac{9}{8}}z^{\frac{1}{4}},$$

sau

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\eta}{dz} + \left[1 - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{z^2}\right]\eta = \beta_0 z^{-\frac{5}{4}} + \beta_1 z^{-\frac{3}{4}} + \beta_2 z^{-\frac{1}{4}} + \beta_3 z^{\frac{1}{4}}, \tag{25}$$

unde expresiile pentru β_1, β_2, β_3 și β_0 se obțin comparînd ecuația (25) cu (24). Ecuația (25) este de tip Lommel și soluția va fi

$$\eta = C_1 J_{\frac{1}{4}}(z) + C_2 J_{-\frac{1}{4}}(z) + \beta_0 s_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(z) + \beta_1 s_{\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(z) + \beta_2 s_{\frac{3}{4},\frac{1}{4}}(z) + \tag{26}$$
$$+ \beta_3 s_{\frac{5}{4},\frac{1}{4}}(z),$$

unde $s_{\mu,\nu}$ este funcția lui Lommel și are expresia

$$s_{\mu,\nu} = z^{\mu-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+2}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}+m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+m+\frac{3}{2}\right)}. \tag{27}$$

Este de observat că α fiind negativ funcțiile Bessel vor fi de argument imaginar. Revenind la sistemul de coordonate φ și ξ cu ajutorul relațiilor (22) și (23), se obține

$$\varphi = C_1\sqrt{\xi}\,J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right) + C_2\sqrt{\xi}\,J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right) + \beta_0\sqrt{\xi}\,s_{-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right) +$$

$$+ \beta_1\sqrt{\xi}\,s_{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right) + \beta_2\sqrt{\xi}\,s_{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right) + \beta_3\sqrt{\xi}\,s_{\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right), \tag{28}$$

ceea ce constituie o soluție a problemei.

Se poate ușor observa că în locul celor doi termeni ce conțin pe β_2 și β_3 se pot utiliza, soluții particulare de forma

$$\frac{b_2}{2\alpha}, \tag{29}$$

$$\frac{b_3}{3\alpha}\,\xi, \tag{30}$$

iar ecuația (28) devine

$$\varphi = C_1\sqrt{\xi}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right) + C_2\sqrt{\xi}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right) + \beta_0\sqrt{\xi}s_{-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right) +$$

$$+ \beta_1\sqrt{\xi}s_{\frac{1}{4},\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right) + \frac{b_2}{2\alpha} + \frac{b_3}{3\alpha}\,\xi. \tag{31}$$

Soluția (28) se poate scrie utilizînd în loc de funcții Lommel funcții hipergeometrice știind că

$$s_{\mu,\nu}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)}\,{}_1F_2\left(1\,;\,\frac{\mu-\nu+3}{2}\,;\,\frac{\mu+\nu+3}{2}\,;\,-\frac{z^2}{4}\right) \tag{32}$$

și devine

$$\varphi = C_1\sqrt{\xi}\,J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right) + C_2\sqrt{\xi}\,J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right) + \frac{b_0}{2!}\,\xi^2\,{}_1F_2\left(1\,;\,\frac{5}{4}\,;\,\frac{3}{2}\,;-\frac{\alpha}{16}\,\xi^4\right) +$$

$$+ \frac{b_1}{3!}\,\xi^3\,{}_1F_2\left(1\,;\,\frac{3}{2}\,;\,\frac{7}{4}\,;-\frac{\alpha}{16}\,\xi^4\right) + \frac{b_2}{2\alpha} + \frac{b_3}{3\alpha}\,\xi. \tag{33}$$

Soluția problemei conține trei constante arbitrare C_1, C_2 și b_0 care urmează a se determina din condiții la limită.

Condițiile la limită din origine, respectiv la vîrful palei; sînt

$$\xi = 0,\quad \frac{d\varphi}{d\xi} = 0, \tag{34}$$

$$\xi = 0,\quad \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = 0. \tag{35}$$

Condiția la limită pentru punctul de fixare a palei situat la distanța de $R\varepsilon$ de axul de rotație poate fi una din următoarele.

Pentru pală articulată

$$\xi = 1 - \varepsilon, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = 0. \tag{36}$$

Pentru pală încastrată

$$\xi = 1 - \varepsilon, \qquad \varphi = 0, \tag{37}$$

sau

$$\xi = 1 - \varepsilon, \qquad \varphi = \varphi_0, \tag{38}$$

unde φ_0 este unghiul între normala de axul de rotație și fibra medie a palei în locul de încastrare.

Diferențiind relația (31) se obține consecutiv

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = C_1\sqrt{\alpha}\,\xi^{\frac{3}{2}} J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right) - C_2\sqrt{\alpha}\,\xi^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right) - \beta_0\sqrt{\alpha}\,\xi^{\frac{3}{2}} s_{-\frac{5}{4},-\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right) + \tag{39}$$

$$+ \beta_1\sqrt{\alpha}\,\xi^{\frac{3}{2}} s_{-\frac{3}{4},-\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right), \frac{b_3}{3\alpha},$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = -C_1\,\alpha\,\xi^{\frac{5}{2}} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right) - C_2\,\alpha\,\xi^{\frac{5}{2}} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right) + \beta_0\left[\alpha\xi^{\frac{5}{2}} s_{-\frac{9}{4},-\frac{7}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{a}\,\xi^{\frac{1}{2}} s_{-\frac{5}{2},-\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right)\right] + \beta_1\left[\alpha\xi^{\frac{5}{2}} s_{-\frac{7}{4},-\frac{7}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right) - \sqrt{\alpha}\,\xi^{\frac{1}{2}} s_{-\frac{3}{4},-\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right)\right]. \tag{40}$$

Introducînd condiția (35) în (40) și utilizînd relația (27) se obține

$$b_0 = 0. \tag{41}$$

Introducînd de asemenea condiția (34) în (39) și observînd că

$$\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right)^{\frac{1}{4}} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right) \xrightarrow[\xi \to 0]{} \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)} \tag{42}$$

se obține

$$C_1 = -\frac{b_3}{3\alpha^{\frac{1}{3}}}\Gamma\left(1 + \frac{3}{4}\right). \tag{43}$$

Odată determinate constantele C_1 și b_0 soluția (31) se poate scrie

$$\varphi = C_2\sqrt{\xi}\,J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right) + \beta_1\sqrt{\xi}\,s_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right) + \frac{b_2}{2\alpha} + \frac{b_3}{3\alpha}\left[\xi - \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{4}\right)}{\alpha^{\frac{1}{8}}}\sqrt{\xi}\,J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right)\right]. \tag{44}$$

Pentru determinarea constantei C_2 se utilizează una din condițiile (36) (37) sau (38) obținîndu-se respectiv

$$C_2 = \frac{1}{(1-\varepsilon)^{3/2} J_{\frac{3}{4}}\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{2}(1-\varepsilon)^2\right]} \left\{ \frac{b_3}{3\alpha\sqrt{\alpha}} \left\{ 1 - \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{4}\right)}{\alpha^{\frac{1}{8}}} (1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}} J_{-\frac{3}{4}}\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{2}(1-\varepsilon)^2\right]\right\} - \right.$$

$$\left. - \beta_1 (1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}} s_{-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}}\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{2}(1-\varepsilon)\right]\right\}, \qquad (45)$$

$$C_2 = \frac{1}{(1-\varepsilon)^{1/2} J_{\frac{1}{4}}\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{2}(1-\varepsilon)^2\right]} \left\{ \frac{b_3}{3\alpha} \left\{ \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{4}\right)}{\alpha^{\frac{1}{8}}} (1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{2}(1-\varepsilon)^2\right] - 1 \right\} - \right.$$

$$\left. - \beta_1 (1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} s_{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{2}(1-\varepsilon)^2\right] \frac{b_2}{2\alpha}\right\}, \qquad (46)$$

$$C_2 = \frac{1}{(1-\varepsilon)^{1/2} J_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{2}(1-\varepsilon)^2\right]} \left\{ \frac{b_3}{3\alpha} \left\{ \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{4}\right)}{\alpha^{\frac{1}{8}}} (1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{2}(1-\varepsilon)^2\right] - 1 \right\} - \right.$$

$$\left. - \beta_1 (1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} s_{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}}\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{2}(1-\varepsilon)^2\right] - \frac{b_2}{2\alpha} + \varphi_0 \right\}. \qquad (47)$$

Odată cunoscută funcția φ, momentele încovoietoare se pot obține din relația

$$M = -EI \frac{d\varphi}{d\xi}, \qquad (48)$$

iar calculul de rezistență se poate efectua în consecință.

Valoarea maximă a momentului încovoietor va fi în secțiunea în care

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = 0. \qquad (49)$$

Dacă nu există tabele satisfăcătoare pentru funcția Lommel se poate utiliza funcția hipergeometrică, soluția (44) devenind

$$\varphi = C_2 \, \xi^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right) + \frac{\beta_1}{3}\xi^3 \, {}_1F_2\left(1; \frac{3}{2}; \frac{7}{4}; -\frac{\alpha}{16}\xi^4\right) +$$

$$+ \frac{b_2}{2\alpha} + \frac{b_3}{3\alpha}\left[\xi - \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{4}\right)}{\alpha^{\frac{1}{8}}} J_{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right], \qquad (50)$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

sau seria pentru aceste funcții

$$\varphi = C_2 \xi^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right) + \frac{b_2}{2\alpha} + \frac{b_3}{3\alpha}\left[\xi - \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{4}\right)}{\alpha^{\frac{1}{8}}}\right] +$$

$$+ b_2\left[\frac{\xi^3}{3.2} - \frac{\alpha\xi^7}{7.6.3.2.} + \frac{\alpha^2\xi^{11}}{11.10.7.6.3.2} - \ldots\right]. \qquad (51)$$

Momentul încovoietor într-o secțiune oarecare se obține utilizînd relațiile (48), (39), (41) și (43). Expresia acestui moment este

$$M = EI\left\{C_2\sqrt{\alpha}\,\xi^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right) + \frac{b_3}{3\alpha}\left[\alpha^{\frac{3}{8}}\xi^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(1+\frac{3}{4}\right) J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right) - 1\right] +\right.$$

$$\left. + \beta_1\sqrt{\alpha}\,\xi^{\frac{3}{2}} s_{-\frac{3}{4},\,-\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right)\right\} \qquad (52)$$

sau

$$M = EI\left\{C_2\sqrt{\alpha}\,\xi^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\xi^2\right) + \frac{b_3}{3\alpha}\left[\alpha^{\frac{3}{8}}\xi^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(1+\frac{3}{4}\right) J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\xi^2\right) - 1\right] +\right.$$

$$\left. + b_1\left[\frac{\xi^2}{2} - \frac{\alpha\xi^6}{6.3.2} + \frac{\alpha^2\xi^{10}}{10.7.6.3.2} - \ldots\right]\right\} \qquad (53)$$

unde C_2 are una din valorile (45)—(47).

Primit la redacție la 17 februarie 1958.

РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ ЛОПАСТЕЙ ВЕРТОЛЕТНЫХ НЕСУЩИХ ВИНТОВ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ ПОД ЗАДАННОЙ НАГРУЗКОЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Устанавливается точное дифференциальное уравнение срединной деформированной линии для лопасти вертолетного винта постоянного сечения, с учетом добавочной нагрузки, вызываемой деформацией. Рассматриваемая лопасть находится под заданной нагрузкой.

Полученное этим путем уравнение интегрируется, и в результате получается точное решение. Таким образом дается выражение срединного деформированного волокна и выражение изгибающих моментов. Решение дается в виде функций Ломмеля или гипергеометрических функций, в зависимости от различных возможных условий закрепления лопастей.

CALCUL DE LA RÉSISTANCE DES PALES D'HÉLICOPTÈRE, À SECTION CONSTANTE, SOUS UNE CHARGE DONNÉE

RÉSUMÉ

On établit l'équation différentielle rigoureuse de la ligne élastique pour une pale d'hélicoptère, à section constante, en tenant également compte de la sollicitation suplémentaire due à la déformation. La pale est considérée supporter une charge donnée.

L'équation ainsi obtenue est intégrée et l'on obtient la solution exacte. On présente ainsi l'expression de la ligne élastique ainsi que l'expression des moments fléchissants. La solution est donnée sous la forme de fonctions Lommel ou hypergéométriques, fonction des différentes conditions de fixation possibles.

ASUPRA CALCULULUI DE REZISTENȚĂ AL PLĂCILOR PLANE GROASE *)

DE

PETRE P. TEODORESCU

1. În general, studiile întreprinse pînă în prezent asupra plăcilor plane elastice, omogene și izotrope au folosit ipotezea dată de G. R. Kirchhoff [7], încă din secolul trecut, conform căreia un segment de dreaptă, normal pe planul median al unei plăci subțiri înainte de deformație, rămîne un segment de dreaptă, normal pe suprafața medie deformată, fără a suferi vreo deformație liniară; rezolvarea problemei, în baza acestei ipoteze suplimentare (de natura ipotezelor rezistenței materialelor), se reduce la integrarea ecuației diferențiale Lagrange- Sophie Germain, cu anumite condiții pe contur, funcție de modul de rezemare al plăcii.

Cazul plăcilor plane groase, pentru care această ipoteză nu mai este verificată, a fost mult mai puțin studiat, cu toate că asemenea plăci pot interveni adesea în practică. Menționăm astfel studiul întreprins de B. G. Galerkin [4] în 1932 pentru placa groasă simplu rezemată, de formă circulară, și studiul, publicat [5] în 1935, privitor la placa groasă dreptunghiulară. Se dau atît rezultate calitative cît și cantitative, folosind anumite funcții de deplasări (ca o aplicație la reprezentarea deplasărilor elastice cu ajutorul a trei funcții biarmonice); aceste funcții au însă o formă mai complicată decît este necesar, iar rezultatele obținute de asemenea. O rezolvare directă, tot în deplasări, a problemei a dat în 1933 S. Woinowski-Krieger [14], căutînd soluții sub forma de dezvoltări în serie trigonometrice care să verifice ecuațiile lui Lamé. Recent, în 1955, L. Bonneau [1], a reluat problema, ocupîndu-se de integrarea ecuațiilor de echilibru și a ecuațiilor de continuitate ale lui Beltrami pentru cazul plăcii groase și făcînd diferite considerente de ordin practic. De asemenea, la noi, M. Mișicu [8] a prezentat cîteva rezultate cu

---

*) Comunicare prezentată la Sesiunea științifică a Academiei R.P.R., Filiala Timișoara, din 30 ianuarie – 2 februarie 1958.

caracter general ca o aplicație la reprezentarea soluției în deplasări a problemei spațiale a teoriei elasticității cu ajutorul unor funcții monogene.

În cele ce urmează, vom face, pentru placa plană infinită, un studiu analog cu cel întreprins de noi [11], [13] pentru cazul semispațiului elastic. În felul acesta, vom căuta să extindem rezultatele cunoscute [6] de la studiul benzii plane la problema corespunzătoare spațială.

2. După cum am arătat în [10] și [12], putem reprezenta starea de tensiune și starea de deformație a unui corp elastic omogen și izotrop cu ajutorul a trei funcții biarmonice.

Tensiunile sînt date de relațiile *)

$$\sigma_x = \Delta F_x - \frac{3}{2+\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{3}{2+\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{3\mu}{2(2+\mu)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iint \Delta F\, dy\, dz + {}$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta\left(\int \frac{\partial F_y}{\partial z} dy + \int \frac{\partial F_z}{\partial y} dz\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[F_{xy}(x,y) - F_{zx}(z, x)\right], \tag{1'}$$

iar deplasările de relațiile

$$\frac{E}{1+\mu} u = \Delta \int \left(F_x - \frac{3\mu}{2+\mu} F\right) dx - \frac{3}{2+\mu}\frac{\partial F}{\partial x} + 2\overline{F}_{yz}(y, z) + f_{yz}(y, z) + {}$$
$$+ \frac{E}{1+\mu}\left(-y\omega^0_{xy} + z\omega^0_{zx} + u_0\right), \tag{2}$$

unde funcțiile F_x, F_y, F_z sînt biarmonice

$$\Delta\Delta F_x(x, y, z) = \Delta\Delta F_y(x, y, z) = \Delta\Delta F_z(x, y, z) = 0, \tag{3}$$

funcțiile F_{xy}, F_{yz}, F_{zx} sînt armonice

$$\Delta F_{xy}(x, y) = \Delta F_{yz}(y,z) = \Delta F_{zx}(z,x) = 0, \tag{4}$$

funcțiile $f_{xy}(x, y)$, $f_{yz}(y, z)$, $f_{zx}(z, x)$ sînt integrale particulare ale sistemului de ecuații cu variabile separate

$$\frac{\partial f_{zx}(z,x)}{\partial z} + \frac{\partial f_{xy}(x,y)}{\partial y} = \frac{3\mu}{2+\mu}\Delta\left(\int \frac{\partial F}{\partial z} dy + \int \frac{\partial F}{\partial y} dz + \iint \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy\, dz\right), \tag{5}$$

funcțiile $\overline{F}_{xy}(x, y)$, $\overline{F}_{yz}(y, z)$, $\overline{F}_{zx}(z, x)$ sînt conjugate armonice ale funcțiilor $F_{xy}(x,y)$, $F_{yz}(y, z)$, $F_{zx}(z, x)$ și am introdus notația

$$3F = F_x + F_y + F_z. \tag{6}$$

Constantele u_0, v_0, w_0, ω^0_{xy}, ω^0_{yz}, ω^0_{zx} sînt deplasările, respectiv rotirile corpului, considerat ca un rigid, și se determină din condiții de rezemare;

---

*) Celelalte relații se obțin prin permutări circulare.

de asemenea E și μ sînt constantele elastice ale materialului adică modulul de elasticitate longitudinală, respectiv coeficientul de contracție transversală al lui Poisson.

3. Vom considera o placă plană infinită, de grosime $2c$, acționată pe cele două fețe de sarcini periodice pe două direcții. Luăm axele de coordonate Ox și Oy în planul median iar axa Oz normală pe acest plan. În cele ce urmează este util să folosim eventuale proprietăți de simetrie și de antisimetrie în raport cu axele de coordonate. Admitem astfel o încărcare, normală pe cele două fețe, simetrică în raport cu axele Ox și Oy și o reprezentăm cu ajutorul seriilor duble Fourier sub forma

$$p\,(x,y) = b_0 + \sum_{n,m} b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y, \tag{7}$$

unde

$$\alpha_n = \frac{2n\pi}{L_x} = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{2m\pi}{L_y} = \frac{m\pi}{b} \quad (n,\, m = 1,2,3,\ldots) \tag{8}$$

și am inclus sub semnul sumă toți termenii seriei, inclusiv pe cei pentru care unul din indici este nul, iar b_0 este încărcarea medie pe un interval dreptunghiular; $L_x = 2a$ și $L_y = 2b$ sînt lungimile perioadelor pe cele două direcții.

Considerăm întîi cazul unei încărcări simetrică în raport cu planul Oxy. În acest caz condițiile pe contur se vor pune sub forma

$$\left.\begin{aligned} z = c: &\quad \sigma_z = \bar{p}\,(x,\, y) \quad, \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \\ z = -c: &\quad \sigma_z = p\,(x,\, y) \quad, \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

cu

$$p\,(x,\, y) = \bar{p}(x,\, y). \tag{9'}$$

4. Pentru rezolvarea problemei vom alege funcții de tensiune biarmonice pare în raport cu cele trei variabile

$$\begin{aligned} F_x &= K_1 x^2 + \sum_{n,m} (A'_{nm} \operatorname{ch} \gamma_{nm} z + \gamma_{nm} z B'_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm} z) \cos \alpha_n x \cos \beta_m y, \\ F_y &= K_2 y^2 + \sum_{n,m} (A''_{nm} \operatorname{ch} \gamma_{nm} z + \gamma_{nm} z B''_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm} z) \cos \alpha_n x \cos \beta_m y, \\ F_z &= K_3 z^2 + \sum_{n,m} (A'''_{nm} \operatorname{ch} \gamma_{nm} z + \gamma_{nm} z B'''_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm} z) \cos \alpha_n x \cos \beta_m y, \end{aligned} \tag{10}$$

unde

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2}. \tag{11}$$

Vom lua de asemenea

$$F_{xy}(x,y) = F_{yz}(y,z) = F_{zx}(z,x) = 0. \tag{12}$$

Folosind formulele (1) și (1′) calculăm tensiunile

$$\begin{aligned}\sigma_z = \frac{2(1+\mu)}{2+\mu} K_z - \frac{1}{2+\mu} \sum_{n,m} \gamma_{nm}^2 \Big\{ \{C_{nm} + 2[B'_{nm} + B''_{nm} - (1+\mu) B'''_{nm}]\} \operatorname{ch} \gamma_{nm} z + \\ + \gamma_{nm} z (B'_{nm} + B''_{nm} + B'''_{nm}) \operatorname{sh} \gamma_{nm} z \Big\} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\tau_{zx} = \frac{1}{2+\mu} \sum_{n,m} \frac{\gamma_{nm}}{\alpha_n} \Big\{ \{ \alpha_n^2 C_{nm} + [(3+\mu)\alpha_n^2 + 2\beta_m^2] B'_{nm} + (\alpha_n^2 - \mu\beta_m^2) B''_{nm} - \\ - [(1+\mu)\alpha_n^2 + \mu\beta_m^2] B'''_{nm}\} \operatorname{sh} \gamma_{nm} z + \alpha_n^2 \gamma_{nm} z (B'_{nm} + \\ + B''_{nm} + B'''_{nm}) \operatorname{ch} \gamma_{nm} z \Big\} \sin \alpha_n x \cos \beta_m y,\end{aligned} \tag{13′}$$

unde am notat

$$C_{nm} = A'_{nm} + A''_{nm} + A'''_{nm} \tag{14}$$

și analog pentru τ_{zy}.

Punînd condițiile (9) și (9′) și ținînd seama de (7), găsim sistemul de ecuații algebrice

$$\begin{aligned}&C_{nm} \operatorname{ch} \gamma_{nm} c + (2 \operatorname{ch} \gamma_{nm} c + \gamma_{nm} c \operatorname{sh} \gamma_{nm} c)(B'_{nm} + B''_{nm}) - \\ &- [2(1+\mu) \operatorname{ch} \gamma_{nm} c - \gamma_{nm} c \operatorname{sh} \gamma_{nm} c] B'''_{nm} = -(2+\mu) \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2}, \\ &\alpha_n^2 C_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm} c + \{[(3+\mu)\alpha_n^2 + 2\beta_m^2] \operatorname{sh} \gamma_{nm} c + \alpha_n^2 \gamma_{nm} c \operatorname{ch} \gamma_{nm} c\} B'_{nm} + \\ &+ [(\alpha_n^2 - \mu\beta_m^2) \operatorname{sh} \gamma_{nm} c + \alpha_n^2 \gamma_{nm} c \operatorname{ch} \gamma_{nm} c] B''_{nm} - \{[(1+\mu)\alpha_n^2 + \\ &+ \mu\beta_m^2] \operatorname{sh} \gamma_{nm} c - \alpha_n^2 \gamma_{nm} c \operatorname{ch} \gamma_{nm} c\} B'''_{nm} = 0, \\ &\beta_m^2 C_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm} c + [(\beta_m^2 - \mu\alpha_n^2) \operatorname{sh} \gamma_{nm} c + \beta_m^2 \gamma_{nm} c \operatorname{ch} \gamma_{nm} c] B'_{nm} + \\ &+ \{[(3+\mu)\beta_m^2 + 2\alpha_n^2] \operatorname{sh} \gamma_{nm} c + \beta_m^2 \gamma_{nm} c \operatorname{ch} \gamma_{nm} c\} B''_{nm} - \\ &- \{[(1+\mu)\beta_m^2 + \mu\alpha_n^2] \operatorname{sh} \gamma_{nm} c - \beta_m^2 \gamma_{nm} c \operatorname{ch} \gamma_{nm} c\} B'''_{nm} = 0,\end{aligned} \tag{15}$$

care ne dă șirurile de coeficienți de determinat. Observăm că, folosind trei funcții biarmonice, obținem mai puține ecuații decît avem nevoie pentru determinarea acestor constante.

Deoarece constantele A'_{nm}, A''_{nm}, A'''_{nm} intervin mereu grupate numai sub forma (14), sistemul de trei ecuații (15) va avea patru necunoscute. Luînd unul din șirurile de coeficienți arbitrar (de exemplu C_{nm}) vom determina pe ceilalți în funcție de acesta și vom calcula tensiunile cu ajutorul relațiilor (1) și (1′). Observăm că aceste tensiuni nu vor depinde de șirul de constante arbitrare C_{nm}, fiind perfect determinate. Acest rezultat era de așteptat, deoarece starea de tensiune în interiorul plăcii este unică (conform teoremei de unicitate a lui Kirchhoff) dar este dată de o infinitate de grupe de funcții de tensiune.

Noi vom alege aceste șiruri de constante astfel ca soluția problemei să fie cît mai simplă. Luăm

$$A'_{nm} = A''_{nm} = 0, \quad C_{nm} = A'''_{nm} = \frac{(2+\mu)\,[(1+2\mu)\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm} c - \gamma_{nm} c\, \mathrm{ch}\,\gamma_{nm} c]}{\gamma_{nm} c + \mathrm{sh}\,\gamma_{nm} c\, \mathrm{ch}\,\gamma_{nm} c} \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}}$$

$$B'_{nm} = -B''_{nm} = -\frac{\mu(\alpha_n^2 - \beta_m^2)\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm} c}{\gamma_{nm} c + \mathrm{sh}\,\gamma_{nm} c\, \mathrm{ch}\,\gamma_{nm} c} \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^4}, \tag{16}$$

$$B'''_{nm} = \frac{(2+\mu)\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm} c}{\gamma_{nm} c + \mathrm{sh}\,\gamma_{nm} c\, \mathrm{ch}\,\gamma_{nm} c} \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2}.$$

De asemenea,

$$K_3 = \frac{2+\mu}{2(1+\mu)} b_0. \tag{17}$$

Datorită termenilor care nu intră sub semnul sumă în expresiile funcțiilor de tensiune, găsim deplasarea

$$Eu = \frac{2(1+\mu)}{2+\mu} [K_1 - \mu(K_2 + K_3)], \tag{18}$$

celelalte obținîndu-se prin permutări circulare. Punînd condiția ca deplasările u și v să nu crească indefinit odată cu variabilele x și y (deformația laterală este împiedicată datorită mediului) și ținînd seama de (17), căpătăm

$$K_1 = K_2 = \frac{\mu(2+\mu)}{2(1-\mu^2)} b_0. \tag{19}$$

5. Funcțiile de tensiune vor fi deci de forma

$$F_x - \frac{\mu(2+\mu)}{2(1-\mu^2)} b_0 x^2 = -F_y + \frac{\mu(2+\mu)}{2(1-\mu^2)} b_0 y^2 =$$

$$= -\mu z \sum_{n,m} \frac{\alpha_n^2 - \beta_m^2}{\gamma_{nm}^3} \frac{\mathrm{sh}\,\gamma_{nm} c\, \mathrm{sh}\,\gamma_{nm} z}{\gamma_{nm} c + \mathrm{sh}\,\gamma_{nm} c\, \mathrm{ch}\,\gamma_{nm} c} b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y,$$

$$F_z = \frac{2+\mu}{2(1+\mu)} b_0 z^2 + \tag{20}$$

$$+ (2+\mu) \sum_{n,m} \frac{[(1+2\mu)\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm} c - \gamma_{nm} c\, \mathrm{ch}\,\gamma_{nm} c]\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm} z + \gamma_{nm} z\, \mathrm{sh}\,\gamma_{nm} c\, \mathrm{sh}\,\gamma_{nm} z}{\gamma_{nm} c + \mathrm{sh}\,\gamma_{nm} c\, \mathrm{ch}\,\gamma_{nm} c} \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2} \times$$

$$\times \cos \alpha_n x \cos \beta_m y,$$

iar formulele (1) și (1′) ne permit să calculăm tensiunile normale

$$\sigma_x = \frac{\mu}{1-\mu} b_0 + \sum_{n,m} \frac{\alpha_n^2 [(1 - \gamma_{nm} c\, \mathrm{cth}\,\gamma_{nm} c)\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm} z + \gamma_{nm} z\, \mathrm{sh}\,\gamma_{nm} z] + 2\mu\beta_m^2\, \mathrm{ch}\,\gamma_{nm} z}{\mathrm{ch}\,\gamma_{nm} c + \dfrac{\gamma_{nm} c}{\mathrm{sh}\,\gamma_{nm} c}} \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2} \times$$

$$\times \cos \alpha_n x \cos \beta_m y,$$

$$\sigma_y = \frac{\mu}{1-\mu} b_0 + \sum_{n,m} \frac{\beta_m^2 [(1-\gamma_{nm}c \operatorname{cth} \gamma_{nm}c) \operatorname{ch} \gamma_{nm}z + \gamma_{nm}z \operatorname{sh} \gamma_{nm}z] + 2\mu\alpha_u^2 \operatorname{ch} \gamma_{nm}z}{\operatorname{ch} \gamma_{nm} c + \dfrac{\gamma_{nm}c}{\operatorname{sh}\gamma_{nm}c}} \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2} \times$$
$$\times \cos \alpha_n x \cos \beta_m y, \qquad (21)$$

$$\sigma_z = b_0 + \sum_{n,m} \frac{(1+\gamma_{nm}c \operatorname{cth} \gamma_{nm} c) \operatorname{ch} \gamma_{nm}z - \gamma_{nm}z \operatorname{sh} \gamma_{nm}z}{\operatorname{ch} \gamma_{nm} c + \dfrac{\gamma_{nm} c}{\operatorname{sh} \gamma_{nm} c}} b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y$$

și tensiunile tangențiale

$$\tau_{xy} = -\sum_{n,m} \frac{(1-\gamma_{nm}c \operatorname{cth} \gamma_{nm}c) \operatorname{ch}\gamma_{nm}z + \gamma_{nm}z \operatorname{sh} \gamma_{nm}z - 2\mu \operatorname{ch} \gamma_{nm}z}{\operatorname{ch} \gamma_{nm} c + \dfrac{\gamma_{nm} c}{\operatorname{sh} \gamma_{nm} c}} \frac{\alpha_n\beta_m}{\gamma_{nm}^2} b_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y,$$

$$\tau_{yz} = -\sum_{n,m} \frac{\gamma_{nm} c \operatorname{cth} \gamma_{nm} c \operatorname{sh} \gamma_{nm} z - \gamma_{nm}z \operatorname{ch} \gamma_{nm} z}{\operatorname{ch} \gamma_{nm} c + \dfrac{\gamma_{nm} c}{\operatorname{sh} \gamma_{nm} c}} \frac{\beta_m}{\gamma_{nm}} b_{nm} \cos \alpha_n x \sin \beta_m y, \qquad (21')$$

$$\tau_{zx} = -\sum_{n,m} \frac{\gamma_{nm} c \operatorname{cth} \gamma_{nm} c \operatorname{sh} \gamma_{nm} z - \gamma_{nm}z \operatorname{ch} \gamma_{nm} z}{\operatorname{ch} \gamma_{nm} c + \dfrac{\gamma_{nm} c}{\operatorname{sh} \gamma_{nm} c}} \frac{\alpha_n}{\gamma_{nm}} b_{nm} \sin \alpha_n x \cos \beta_m y.$$

Am scris aceste relații astfel încît să reiasă în evidență modul în care ele reprezintă generalizarea rezultatelor cunoscute din cazul benzii elastice plane.

6. Folosind relațiile (2), putem calcula ușor și componentele deplasării

$$\frac{E}{1+\mu} u = \sum_{n,m} \frac{(1-\gamma_{nm}c \operatorname{cth}\gamma_{nm} c) \operatorname{ch} \gamma_{nm}z + \gamma_{nm}z \operatorname{sh} \gamma_{nm}z - 2\mu \operatorname{ch} \gamma_{nm}z}{\operatorname{ch} \gamma_{nm} c + \dfrac{\gamma_{nm} c}{\operatorname{sh} \gamma_{nm} c}} \frac{\beta_m}{\gamma_{nm}^2} b_{nm} \sin \alpha_n x \cos \beta_m y,$$

$$\frac{E}{1+\mu} v = \sum_{n,m} \frac{(1-\gamma_{nm}c \operatorname{cth} \gamma_{nm}c) \operatorname{ch} \gamma_{nm}z + \gamma_{nm}z \operatorname{sh} \gamma_{nm}z - 2\mu \operatorname{ch} \gamma_{nm} z}{\operatorname{ch} \gamma_{nm} c + \dfrac{\gamma_{nm} c}{\operatorname{sh} \gamma_{nm} c}} \frac{\alpha_n}{\gamma_{nm}^2} b_{nm} \cos \alpha_n x \sin \beta_m y,$$
$$(22)$$
$$\frac{E}{1+\mu} w = \frac{1-2\mu}{1-\mu} b_0 z + \sum_{n,m} \frac{[2(1-\mu) + \gamma_{nm}c \operatorname{cht}\gamma_{nm}c] \operatorname{sh}\gamma_{nm}z - \gamma_{nm}z \operatorname{ch}\gamma_{nm}z}{\operatorname{ch} \gamma_{nm} c + \dfrac{\gamma_{nm} c}{\operatorname{sh} \gamma_{nm} c}} \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y.$$

Din motive de simetrie a deplasărilor în raport cu cele trei plane coordonate, am luat constantele

$$u_0 = v_0 = w_0 = \omega_{xy}^0 = \omega_{yz}^0 = \omega_{zx}^0 = 0. \qquad (23)$$

7. Convergența seriilor care ne dau tensiunile depinde de factorul b_{nm}. Chiar și în cazul unor sarcini concentrate însă, suma seriei se poate aproxima cu un număr mic de termeni, datorită liniilor hiperbolice de la numitor.

Cu cît ne apropiem de planele de separație $z = \pm c$ dezvoltările în serie devin mai lent convergente. Dacă ținem seama însă de (7), putem scrie tensiunile pentru aceste plane sub forma

$$\begin{aligned}
\sigma_x(x,y,\pm c) &= p(x,y) - b_0 + \frac{\mu}{1-\mu} b_0 - (1-2\mu)\sum_{n,m}\left(\frac{\beta_m}{\gamma_{nm}}\right)^2 b_{nm}\cos_n \alpha_n x \cos\beta_m y - \\
&\quad - \sum_{n,m}\frac{\alpha_n^2+\mu\beta_m^2}{\gamma_{nm}^2}\,\frac{4\gamma_{nm}c}{2\gamma_{nm}c+\operatorname{sh}2\gamma_{nm}c}\, b_{nm}\cos\alpha_n x\cos\beta_m y, \\
\sigma_y(x,y,\pm c) &= p(x,y) - b_0 + \frac{\mu}{1-\mu} b_0 - (1-2\mu)\sum_{n,m}\left(\frac{\alpha_n}{\gamma_{nm}}\right)^2 b_{nm}\cos\alpha_n x\cos\beta_m y - \\
&\quad - \sum_{n,m}\frac{\beta_m^2+\mu\,\alpha_n^2}{\gamma_{nm}^2}\,\frac{4\gamma_{nm}c}{2\gamma_{nm}c+\operatorname{sh}2\gamma_{nm}c}\, b_{nm}\cos\alpha_n x\cos\beta_m y, \\
\tau_{xy}(x,y,\pm c) &= -(1-2\mu)\sum_{n,m}\frac{\alpha_n\beta_m}{\gamma_{nm}^2} b_{nm}\sin\alpha_n x\sin\beta_m y + \\
&\quad + (1-\mu)\sum_{n,m}\frac{4\gamma_{nm}c}{2\gamma_{nm}c+\operatorname{sh}2\gamma_{nm}c}\,\frac{\alpha_n\beta_m}{\gamma_{nm}^2}\, b_{nm}\sin\alpha_n x\sin\beta_m y.
\end{aligned} \tag{24}$$

unde am făcut să intervină diferența dintre încărcarea exterioară și cea medie. În felul acesta, calculul se face cu ușurință, dezvoltările de mai sus fiind rapid convergente.

Seriile care ne dau deplasările sînt convergente după factorul b_{nm}/γ_{nm}, deci se pot calcula cu un număr mai mic de termeni decît tensiunile. De asemenea, forma deformată a planelor de separație va fi dată de ecuațiile

$$\begin{aligned}
w(x,y,\pm c) &= \pm\frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{(1-\mu)E} b_0 c \pm \frac{2(1-\mu^2)}{E}\sum_{n,m}\frac{1}{\operatorname{cth}\gamma_{nm}c + \dfrac{\gamma_{nm}c}{\operatorname{sh}^2\gamma_{nm}c}}\,\frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}} \times \\
&\quad \times \cos\alpha_n x\cos\beta_m y.
\end{aligned} \tag{25}$$

De asemenea, pentru planul median sau pentru planele de separație ale intervalelor, se pot găsi expresii interesante ale tensiunilor și ale deplasărilor.

8. În cazul unei încărcări simetrică în raport cu axa Ox și antisimetrică în raport cu axa Oy

$$p(x,y) = \sum_{n,m} a_{nm}\sin\alpha_n x\cos\beta_m y, \tag{26}$$

pornim de la funcții de tensiune de forma

$$F = \sum_{n,m}(A_{nm}\operatorname{ch}\gamma_{nm}z + \gamma_{nm}zB_{nm}\operatorname{sh}\gamma_{nm}z)\sin\alpha_n x\cos\beta_m y. \tag{27}$$

Pentru o încărcare antisimetrică în raport cu axa Ox și simetrică în raport cu axa Oy

$$p(x,y) = \sum_{n,m} c_{nm}\cos\alpha_n x\sin\beta_m y, \tag{28}$$

folosim funcții de tensiune de forma

$$F = \sum_{n,m} (A_{nm} \operatorname{ch} \gamma_{nm} z + \gamma_{nm} z B_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm} z) \cos \alpha_n x \sin \beta_m y. \tag{29}$$

De asemenea, pentru o încărcare antisimetrică în raport cu ambele axe de coordonate

$$p(x,\ y) = \sum_{n,m} d_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y, \tag{30}$$

luăm funcții de tensiune de forma

$$F = \sum_{n,m} (A_{nm} \operatorname{ch} \gamma_{nm} z + \gamma_{nm} z B_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm} z) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y. \tag{31}$$

Rezultatele care se obțin sînt asemănătoare cu cele date mai sus.

9. Pentru o încărcare a plăcii antisimetrică în raport cu planul Oxy se poate face un studiu analog. Încărcarea va fi de forma

$$p(x,\ y) = \sum_{n,m} b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y, \tag{32}$$

fără termen liber, din motive de echilibru global al plăcii. Condițiile pe contur se vor pune tot sub forma (9), unde

$$p(x,\ y) = -\bar{p}\,(x,\ y). \tag{9''}$$

Pornind de la funcții de tensiune pare în raport cu variabilele x și y dar impare în raport cu variabila z, putem găsi, pe o cale analoagă, expresiile tensiunilor și ale deplasărilor.

Funcțiile de tensiune vor fi

$$\begin{gathered}
F_x = -F_y = \mu z \sum_{n,m} \frac{\alpha_n^2 - \beta_m^2}{\gamma_{nm}^3} \, \frac{\operatorname{ch} \gamma_{nm} c \operatorname{ch} \gamma_{nm} z}{\gamma_{nm} c - \operatorname{sh} \gamma_{nm} c \operatorname{ch} \gamma_{nm} c} \, b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y, \\
F_z = -(2+\mu) \sum_{n,m} \frac{[(1+2\mu) \operatorname{ch} \gamma_{nm} c - \gamma_{nm} c \operatorname{sh} \gamma_{nm} c] \operatorname{sh} \gamma_{nm} z + \gamma_{nm} z \operatorname{ch} \gamma_{nm} c \operatorname{ch} \gamma_{nm} z}{\gamma_{nm} c - \operatorname{sh} \gamma_{nm} c \operatorname{ch} \gamma_{nm} c} \, \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2} \times \\
\times \cos \alpha_n x \cos \beta_m y.
\end{gathered} \tag{33}$$

Tensiunile normale sînt date de

$$\begin{gathered}
\sigma_x = \sum_{n,m} \frac{\alpha_n^2 [(1 - \gamma_{nm} c \operatorname{th} \gamma_{nm} c) \operatorname{sh} \gamma_{nm} z + \gamma_{nm} z \operatorname{ch} \gamma_{nm} z] + 2\mu \beta_m^2 \operatorname{sh} \gamma_{nm} z}{\operatorname{sh} \gamma_{nm} c - \dfrac{\gamma_{nm} c}{\operatorname{ch} \gamma_{nm} c}} \, \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y, \\
\sigma_y = \sum_{n,m} \frac{\beta_m^2 [(1 - \gamma_{nm} c \operatorname{th} \gamma_{nm} c) \operatorname{sh} \gamma_{nm} z + \gamma_{nm} z \operatorname{ch} \gamma_{nm} z] + 2\mu \alpha_n^2 \operatorname{sh} \gamma_{nm} z}{\operatorname{sh} \gamma_{nm} c - \dfrac{\gamma_{nm} c}{\operatorname{ch} \gamma_{nm} c}} \, \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y, \\
\sigma_z = \sum_{n,m} \frac{(1 + \gamma_{nm} c \operatorname{th} \gamma_{nm} c) \operatorname{sh} \gamma_{nm} z - \gamma_{nm} z \operatorname{ch} \gamma_{nm} z}{\operatorname{sh} \gamma_{nm} c - \dfrac{\gamma_{nm} c}{\operatorname{ch} \gamma_{nm} c}} \, b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y,
\end{gathered} \tag{34}$$

iar tensiunile tangenţiale de

$$\tau_{xy} = -\sum_{n,m} \frac{(1-\gamma_{nm}c\,\mathrm{th}\gamma_{nm}c)\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}z + \gamma_{nm}z\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}z - 2\mu\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}z}{\mathrm{sh}\gamma_{nm}\,c - \dfrac{\gamma_{nm}\,c}{\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}\,c}} \frac{\alpha_n\beta_m}{\gamma_{nm}^2} b_{nm} \sin\alpha_n x \sin\beta_m y,$$

$$\tau_{yz} = -\sum_{n,m} \frac{\gamma_{nm}\,c\,\mathrm{th}\,\gamma_{nm}\,c\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}\,z - \gamma_{nm}\,z\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}\,z}{\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}c - \dfrac{\gamma_{nm}\,c}{\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}\,c}} \frac{\beta_m}{\gamma_{nm}} b_{nm} \cos\alpha_n\,x \sin\beta_m y, \tag{34'}$$

$$\tau_{zx} = -\sum_{n,m} \frac{\gamma_{nm}c\,\mathrm{th}\,\gamma_{nm}\,c\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}\,z - \gamma_{nm}\,z\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}\,z}{\mathrm{sh}\gamma_{nm}\,c - \dfrac{\gamma_{nm}\,c}{\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}\,c}} \frac{\alpha_n}{\gamma_{nm}} b_{nm} \sin\alpha_n\,x \cos\beta_m y.$$

Componentele deplasării vor fi

$$\frac{E}{1+\mu}u = \sum_{n,m} \frac{(1-\gamma_{nm}c\,\mathrm{th}\,\gamma_{nm}\,c)\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}z + \gamma_{nm}z\,\mathrm{ch}\gamma_{nm}z - 2\mu\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}z}{\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}c - \dfrac{\gamma_{nm}\,c}{\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}\,c}} \frac{\beta_m}{\gamma_{nm}^2} b_{nm} \sin\alpha_n\,x \cos\beta_m y,$$

$$\frac{E}{1+\mu}v = \sum_{n,m} \frac{(1-\gamma_{nm}\,c\,\mathrm{th}\,\gamma_{nm}\,c)\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}\,z + \gamma_{nm}z\,\mathrm{ch}\gamma_{nm}z - 2\mu\,\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}\,z}{\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}\,c - \dfrac{\gamma_{nm}\,c}{\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}\,c}} \frac{\alpha_n}{\gamma_{nm}^2} b_{nm} \cos\alpha_n\,x \sin\beta_m y, \tag{35}$$

$$\frac{E}{1+\mu}(w - w_0) = \sum_{n,m} \frac{[2(1-\mu)+\gamma_{nm}c\,\mathrm{th}\gamma_{nm}\,c]\,\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}z - \gamma_{nm}z\,\mathrm{sh}\gamma_{nm}z}{\mathrm{sh}\,\gamma_{nm}\,c - \dfrac{\gamma_{nm}\,c}{\mathrm{ch}\,\gamma_{nm}\,c}} \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}} \cos\alpha_n\,x \cos\beta_m y,$$

unde w_0 va trebui să fie precizat prin anumite conditii de rezemare.

Tensiunile pe planele de separaţie sînt date de

$$\sigma_x(x, y, \pm c) = \mp p(x, y) \mp (1-2\mu) \sum_{n,m} \left(\frac{\beta_m}{\gamma_{nm}}\right)^2 b_{nm} \cos\alpha_n\,x \cos\beta_m y \pm$$

$$\pm \sum_{n,m} \frac{\alpha_n^2 + \mu\beta_m^2}{\gamma_{nm}^2} \frac{4\gamma_{nm}\,c}{\mathrm{sh}\,2\gamma_{nm}\,c - 2\gamma_{nm}\,c} b_{nm} \cos\alpha_n\,x \cos\beta_m y, \tag{36}$$

$$\sigma_y(x, y) \pm c) = \mp p(x, y) \mp (1-2\mu) \sum_{n,m} \left(\frac{\alpha_n}{\gamma_{nm}}\right)^2 b_{nm} \cos\alpha_n\,x \cos\beta_m y \pm$$

$$\pm \sum_{n,m} \frac{\beta_m^2 + \mu\alpha_n^2}{\gamma_{nm}^2} \frac{4\gamma_{nm}\,c}{\mathrm{sh}\,2\gamma_{nm}\,c - 2\gamma_{nm}\,c} b_{nm} \cos\alpha_n\,x \cos\beta_m y,$$

$$\tau_{xy}(x, y \pm c) = \mp (1-2\mu) \sum_{n,m} \frac{\alpha_n\beta_m}{\gamma_{nm}^2} b_{nm} \sin\alpha_n\,x \sin\beta_m y \mp$$

$$\mp (1-\mu) \sum_{n,m} \frac{4\gamma_{nm}\,c}{\mathrm{sh}\,2\gamma_{nm}\,c - 2\gamma_{nm}\,c} \frac{\alpha_n\beta_m}{\gamma_{nm}^2} b_{nm} \sin\alpha_n\,x \sin\beta_m y.$$

De asemenea, forma deformată a planelor de separație este dată de

$$w\,(x,\,y\pm c)=w_0+\frac{2(1-\mu^2)}{E}\sum_{n,m}\frac{1}{\mathrm{th}\gamma_{nm}c-\dfrac{\gamma_{nm}c}{\mathrm{ch}^2\gamma_{nm}c}}\frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}}\cos\alpha_n x\cos\beta_m y. \qquad (37)$$

10. În cazul unor sarcini locale, putem face un studiu analog înlocuind dezvoltările în serie Fourier prin integrale Fourier.

11. Rezultatele obținute mai sus pot folosi pentru calculul plăcilor continue pe una sau două direcții, generalizînd soluția dată de Fr. Dischinger [2] pentru grinda perete continuă pe multe reazeme. Aceste rezultate vor fi mai puțin corecte pentru zona reazemelor de margine ale plăcii, pentru care trebuie făcut un studiu special.

De asemenea, putem utiliza formulele de mai sus la calculul plăcilor plane cu o singură deschidere pe cele două direcții, dînd soluții analoage cu cele date de N. G. Filon [3] și M. Ribière [9] pentru grinda dreaptă.

12. În același timp, rezultatele expuse permit să se studieze unele probleme puțin atacate pînă în prezent : studiul exactității punerii condițiilor pe contur (în special, pentru placa liberă, noțiunea de forță tăietoare generalizată) ; studiul aproximației care se face reducînd problema plăcii plane la planul ei median ; studiul încastrării în cazul plăcilor încastrate etc.

Primită la redacție la 5 mai 1958.

О РАСЧЕТЕ ПРОЧНОСТИ ТОЛСТЫХ ПЛОСКИХ ПЛАСТИН

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе предлагается метод расчета бесконечных толстых плоских пластин, находящихся под действием периодической нагрузки в обоих направлениях. Приводятся результаты при различных случаях нагружения, согласно свойствам симметрии и антисимметрии относительно осей координат.

Разбирается сходимость рядов, и даются практические формулы для плоскостей раздела. Полученные результаты являются обобщением известных уже результатов для плоской упругой полосы. Приведенные формулы могут быть использованы для расчета бесконечных пластин и для расчета однопролетных пластин в обоих направлениях.

SUR LE CALCUL DE RÉSISTANCE DES PLAQUES PLANES ÉPAISSES

RÉSUMÉ

On expose une méthode pour le calcul des plaques planes épaisses infinies, actionnées par un chargement périodique sur les deux directions. On donne des résultats, pour divers cas de chargement, d'après les propriétés de symétrie ou d'antisymétrie par rapport aux axes des coordonnées.

On discute ensuite la convergence des séries, et on donne des formules pratiques pour les plans de séparation. Les résultats obtenus sont une généralisation des résultats connus pour la bande élastique plane. On peut appliquer les formules exposées au calcul des plaques continues et à celui des plaques avec une seule ouverture dans les deux directions.

BIBLIOGRAFIE

1. L. BONNEAU, *L'équation de Lagrange et les plaques rectangulaires*. Ann. des Ponts et Chaussées, **125**, *4*, 403 (1955).
2. FR. DISCHINGER, *Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens*, Abn. Intern. Ver. für Brückenbau u. Hochbau, **I**, 69 (1932).
3. N. G. FILON, *On an Approximate Solution for the Bending of a Beam of Rectangular Cross-Section under any System of Load. Phil.* — Trans. A., **206**, 63 (1903).
4. B. G. GALERKIN, *Sur l'équilibre d'une plaque circulaire épaisse et d'une plaque en forme de secteur circulaire*, C. R. Acad. Sci. Paris, **194**, 1440 (1932).
5. Б. Г. ГАЛЕРКИН, Напряженное состояние при изгибе прямоугольной плиты по теории толстых плит и теории плит тонких. Тр. Ленинградского ин — та соор. 2,22 (1935).
6. K. GIRKMANN, *Flächentragwerke*, Viena (1956).
7. G. R. KIRCHHOFF, *Gesammelte Abhandlungen*, Leipzig (1882).
8. M. MIȘICU, *On the Solving of the Spatial Problem of the Theory of Elasticity. Application to the Theory of Plates*. Rev. de Méc. Appl., **II**, *1*, 171 (1957).
9. M. RIBIÈRE, *Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles* (*Thèse*). Paris (1889).
10. P. P. TEODORESCU, *Sur une solution générale du problème en espace de la théorie de l'élasticité*. XIe Congrès Intern. de Méc. Appl. Bruxelles, **V**, 155 (1956).
11. — *Asupra calculului semispațiului elastic sub acțiunea unor sarcini periodice*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3*, 831 (1957).
12. — *Asupra unor probleme spațiale ale teoriei elasticității*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *4*, 1101 (1957).
13. — *Ueber die Berechnung des elastischen Halbraumes unter oertlicher Belastung*. Bull. Math., I, 4, 49 (1957).
14. S. WOINOWSKI-KRIEGER, *Der Spannungszustand in dicken elastischen Platten*. Ing. Archiv, *4*, 203 (1933).

ASUPRA TORSIUNII UNOR BARE CILINDRICE CU SECȚIUNE DUBLU CONEXĂ

DE

FL. DINCĂ și N. BOICU

1. Problema torsiunii barelor cu secțiune normală multiplu conexă, spre deosebire de aceea a barelor cu secțiune normală simplu conexă, a fost puțin cercetată. Dintre lucrările recent apărute cităm lucrarea lui V. I. Iakovleva [1] care tratează bara de contur exterior exagon regulat și lucrarea lui D. I. Șerman [2] care tratează printr-o metodă personală problema barei patratice ambele cu gol circular interior. O bibliografie mai completă în problema torsiunii barelor cilindrice cu conexiune multiplă se găsește în cartea lui N. I. Mushelișvilli [3] și în lucrarea lui D. I. Șerman [2].

Lucrarea de față dă soluția problemei torsiunii barelor cu conexiune dublă în cazul în care se cunoaște funcția de transformare conformă a domeniului dublu conex al secțiunii normale a barei, pe coroana circulară.

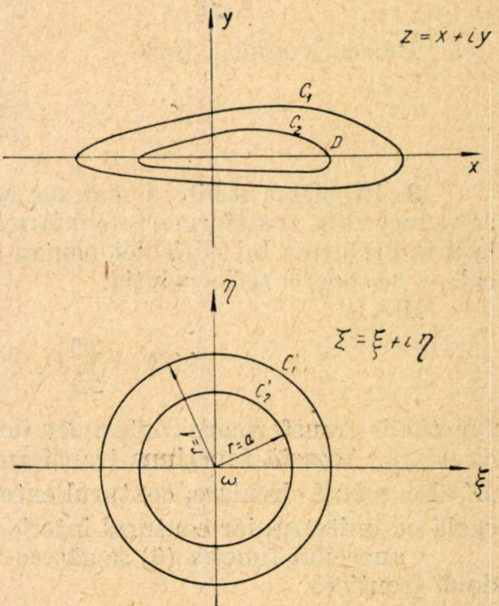


Fig. 1

2. Problema torsiunii unei bare cilindrice de contur exterior C_1 cu gol axial de contur C_2 revine la a determina o funcție $F(z)$ olomorfă în domeniul D al secțiunii transversale a barei (fig. 1) care pe frontiere satisface condițiile

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{i}F(z)\right] = \frac{z\bar{z}}{2} + k_j \quad \text{pe } C_j, \qquad j = 1, 2, \tag{1}$$

$$z = x + iy.$$

k_j sînt constante reale valoarea uneia fiind arbitrară iar a celeilalte fiind determinată prin condiția de uniformitate a funcției

$$\operatorname{Im}\left[\frac{1}{i}F(z)\right].$$

Cu funcția de torsiune $F(z)$ se exprimă, conform formulelor generale ale teoriei torsiunii barelor cilindrice, rigiditatea și eforturile.

Rigiditatea este dată de :

$$D = \mu\,(D_0 + I_p). \tag{2}$$

În relația de mai sus I_p este momentul polar de inerție al secțiunii transversale a barei

$$I_p = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy, \tag{3}$$

ar D_0 este dat de formula

$$D_0 = -\frac{1}{4}\int_{C_1} 2\operatorname{Re}F(z)\,d\,(z\bar{z}) + \frac{1}{4}\int_{C_2} 2\operatorname{Re}F(z)\,d\,(z\bar{z}). \tag{4}$$

Efortul complex este

$$X_z - iY_z = \frac{\mu M}{D}\left(\frac{dF}{dz} - i\bar{z}\right). \tag{5}$$

3. Problema schițată mai sus este o problemă a lui Dirichlet care se reduce prin transformarea conformă a domeniului D pe coroana circulară la problema lui Dirichlet pentru coroana circulară și deci pe această cale i se poate scrie soluția.

Fie,

$$Z(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_p\,\zeta^p,\quad \zeta = \xi + i\eta \tag{6}$$

funcția de transformare conformă a domeniului dublu conex D pe coroana circulară. Această funcțiune transformă conform domeniul D pe domeniul D' al coroanei circulare, conturul exterior C_1 în cercul exterior C_1' de rază egală cu unitatea, iar conturul interior C_2 în cercul interior C_2' de rază a.

Cunoscînd funcția (6) se găsesc valorile funcției de torsiune pe cele două frontiere

$$\begin{aligned} \frac{z\bar{z}}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}[L_{1p}\cos p\theta + M_{1p}\sin p\theta]\ \text{pe}\ C_1', \\ \frac{z\bar{z}}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}[L_{2p}\cos p\theta + M_{2p}\sin p\theta] + k_2\ \text{pe}\ C_2', \end{aligned} \tag{7}$$

unde θ este argumentul lui ζ în planul transformat, iar L_{1p}, L_{2p}, M_{1p}, M_{2p} sînt daţi de relaţiile

$$
\begin{aligned}
L_{1p} &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (\overline{C}_r\, C_{r+p} + C_r\, \overline{C}_{r+p})\,; \quad M_{1p} = i \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (\overline{C}_r\, C_{r+p} - C_r\, \overline{C}_{r+p}),\\
L_{2p} &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} a^{2|r|+p} (\overline{C}_r\, C_{r+p} + C_r\, \overline{C}_{r+p})\,; \quad M_{2p} = i \sum_{r=-\infty}^{+\infty} a^{2|r|+p} (\overline{C}_r\, C_{r+p} - C_r\, \overline{C}_{r+p}).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Să scriem funcţia căutată $f\,(\zeta)$ sub forma

$$
\frac{1}{i} f\,(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_p\, \zeta^p + A \ln \zeta \tag{9}
$$

cu coeficienţii a_p de forma

$$
a_p = \alpha_p + i\beta_p \tag{10}
$$

iar A o constantă reală.

Impunînd părţii reale a funcţii (9) condiţiile la limită (1), ţinînd seama de relaţiile (7) se obţin următoarele expresii pentru α_p, β_p, k_2 şi A

$$
\begin{gathered}
A = 0, \quad k_2 = \frac{L_{10}}{2} - \frac{L_{20}}{2},\\
\alpha_p = \frac{M_{1p} - a^p\, M_{2p}}{2\,(1 - a^{2p})}\,; \quad \beta_p = \frac{L_{1p} - a^p\, L_{2p}}{2\,(1 - a^{2p})},\\
\alpha_{-p} = \frac{a^p\,(M_{1p}\, a^p - M_{2p})}{2\,(1 - a^{2p})}\,; \quad \beta_{-p} = \frac{a^p\,(L_{2p} - a^p\, L_{1p})}{2\,(1 - a^{2p})},
\end{gathered}
\tag{11}
$$

cu care funcţia $f\,(\zeta)$ este pe deplin determinată.

Ca urmare, funcţia (10) cu coeficienţii astfel determinaţi satisface tuturor condiţiilor impuse. Ea este în plus, absolut şi uniform convergentă în coroana circulară şi pe frontierele acesteia, fiind majorată de seria numerică convergentă cu termen general $|L_{1p}| + |M_{1p}|$.

Să mai observăm că pentru $a = 0$ se regăsesc formulele care dau funcţia de torsiune pentru bara cu secţiune simplu conexă în cazul în care este cunoscută dezvoltarea tayloriană a funcţiei care transformă conform domeniul secţiunii pe cercul unitar (I. S. Sokolnikoff [4]).

4. Să aplicăm rezultatele precedente la cazul în care funcţia de transformare conformă a domeniului dublu conex pe coroana circulară coincide cu funcţia care transformă conform secţiunea plină a barei pe cercul unitar.

Fie

$$
z = z\,(\zeta) \tag{12}
$$

funcţia care transformă conform secţiunea plină a barei pe cercul unitar. Cercului de rază $a < 1$ îi corespunde prin (12) o curbă închisă ; dacă a este destul de apropiat de unitate în virtutea continuităţii funcţiei (12), curba închisă care se obţine este destul de apropiată ca formă de forma conturului exterior. Dacă dimpotrivă $a \leqslant 1$ curba C_2 care se obține din cercul de rază a nu mai este asemănătoare conturului exterior, însă și în acest caz se obțin domenii dublu conexe care prezintă interes practic.

Se poate întîmpla ca seria Taylor corespunzătoare funcției (12) să fie foarte lent convergentă. Pentru acest caz, dacă se cunoaște soluția torsiunii barei cilindrice cu secțiune plină, soluția pentru bara cu conexiune dublă, poate fi obținută cu serii foarte rapid convergente, după cum se vede în cele ce urmează:

Fie $f_1(\zeta)$, funcția de torsiune D_1, rigiditatea, $(X_z - iY_z)$' efortul complex, corespunzătoare secțiunei pline, $(f(z)$, D, $X_z - iY_z$, mărimile similare corespunzătoare secțiunii dublu conexe; δf, δD, $\delta(X_z - - Y_z)$, diferența dintre ultimele mărimi și cele dintîi. Aceste diferențe au expresiile

$$\delta f(\zeta) = \sum_{p=0}^{\infty} a^p \left\{ \frac{M_{1p}a^p - M_{2p} + i\,(L_{1p}\,a^p - L_{2p})}{1 - a^{2p}} \zeta^p + \right.$$

$$\left. + \frac{M_{1p}\,a^p - M_{2p} - i\,(L_{1p}\,a^p - L_{2p})}{1 - a^{2p}} \frac{1}{\zeta^p} \right\}, \tag{13}$$

$$\delta D_0 = -\frac{1}{4}\int_{C_1} [\delta f(\zeta) - \delta\,\overline{f(\zeta)}]\, d\,(z\,\bar{z}) + \frac{1}{4}\int_{C_2} [f(\zeta) + \overline{f(\zeta)}]\, d\,(z\bar{z})$$

$$\delta D = \delta D_0 - I_{2p}$$

unde I_{2p} este momentul polar de inerție al domeniului interior curbei C_2.

Analog

$$\delta\,(X_z - iY_z) = \frac{D_1}{D_1 + \delta D}\,(X_z - iY_z)_1 + \frac{\mu M}{D_1 + \delta D}\,\frac{f'(\zeta)}{z'(\zeta)}. \tag{14}$$

Se observă din (13) că există o convergență foarte puternică deoarece peste descreșterea coeficienților seriilor care reprezintă mărimile în cazul secțiunii pline, se presupune descreșterea seriei geometrice în $a<1$ și deci pentru un calcul suficient de precis sînt necesari puțini termeni în seriile (13).

5. *Aplicații.* Au fost aplicate rezultatele precedente la cazul în care funcția (12) este dată de integrala Schwartz-Cristoffel care transformă conform, interiorul poligonului regulat cu n — laturi pe interiorul cercului unitar. Integrala lui Schwartz-Cristoffel este

$$z\,(\zeta) = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt[n]{(1 - t^n)^2}}. \tag{15}$$

Dezvoltînd în serie de puteri sub semnul integralei, după unele transformări se obține

$$Z\,(\zeta) = \int_0^3 \left\{ 1 + \frac{2}{n} t^n + \ldots + \left\{ 1 - \frac{n-2}{n} - \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots \frac{(n-2)\,2\,\ldots\,[n\,(2-k) - 2]}{n^k\,k\,!} \right\} t^k + \ldots \right\} dt. \tag{16}$$

Seria sub semnul integralei fiind absolut și uniform convergentă pentru $t \leqslant 1$ se poate integra termen cu termen. Prin urmare, funcția de transformare va fi dată de seria absolut și uniform convergentă pentru $|\zeta| \leqslant 1$

$$z(\zeta) = \zeta + \frac{2}{n}\frac{\zeta^{n+1}}{n+1} + \ldots + \left\{1 - \frac{n-2}{n} - \ldots - \right.$$

$$\left. - \frac{(n-2)\ldots\ [n(z-k)-z]}{n^k\, k!}\right\}\frac{\zeta^{kn+1}}{kn+1} + \ldots \tag{17}$$

Cu funcția de transformare conformă (17) s-au calculat rigiditatea la torsiune și eforturile maxime (care apar la mijloacele laturilor) în cazurile patratului, exagonului, toate avînd secțiune plină (în tabelă mărimile D_1 și $(X_z - Y_z)_1$).

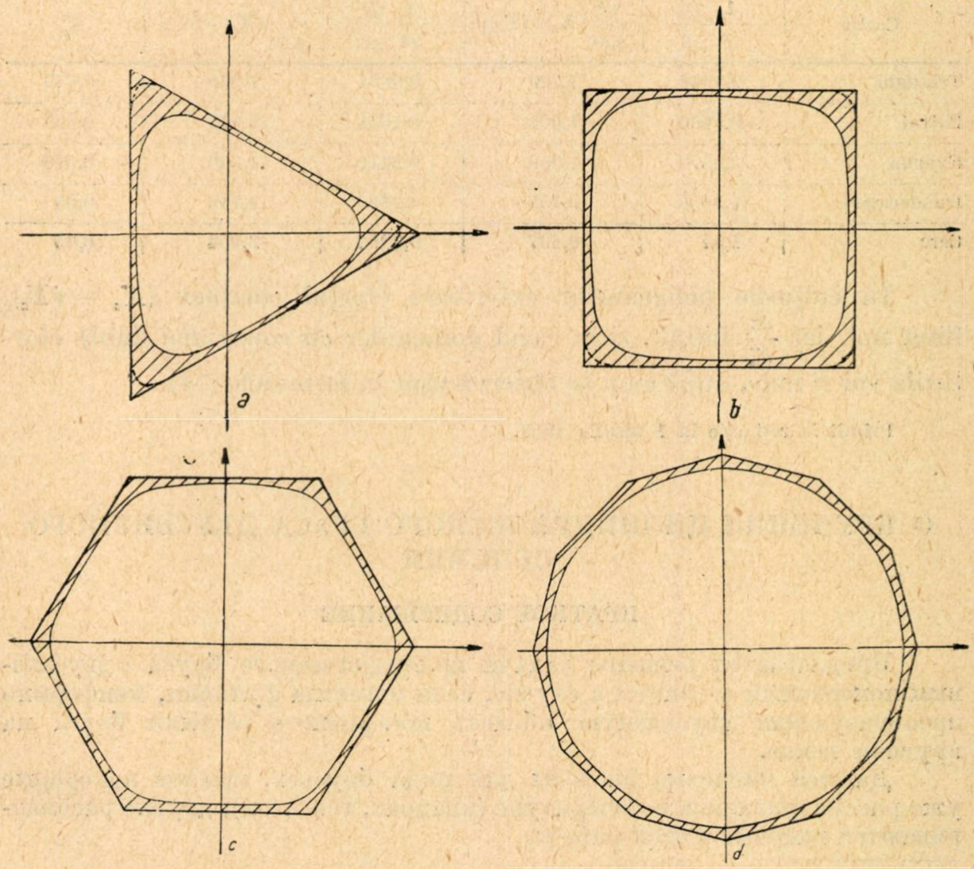


Fig. 2

S-a completat tabela cu rezultatele pentru triunghiul echilateral, calculate cu ajutorul soluției exacte, atît pentru comparație cît și pentru a fi utilizate în formulele (13) pentru bara dublu conexă.

Au fost tratate apoi cazurile acelorași figuri însă dublu conexe, curbele interioare fiind obținute prin transformarea cu formula (17) a cercului de rază $a = 0{,}95$*).

S-au obținut bare cu secțiunile din figura 2 *a*, *b*, *c*, *d*.

Rigiditățile și modulele eforturilor maxime, care apar la mijloacele laturilor exterioare, sînt notate în tabela de mai jos. În această tabelă prin r s-a notat raza cercului circumscris conturului exterior, iar prin δ_m^n grosimea la mijlocul laturei poligonului.

Tabelă

Cazul	$\frac{1}{r^4}\frac{D_1}{\mu}$	$\frac{r^3}{\mu M}(X_z - iY_z)_1$	$\frac{1}{r^4}\frac{D}{\mu}$	$\frac{r^3}{\mu M}(X_z - iY_z)$	δ_m^n
Triunghi	0,1946	3,720	0,0861	7,240	0,019
Patrat	0,5666	1,808	0,1621	5,921	0,029
Exagon	1,0372	1,056	0,2416	4,360	0,037
Duodecagon	1,4630	0,755	0,2890	3,796	0,05
Cerc	1,57	0,637	0,2904	2,904	0,05

În colțurile poligoanelor exterioare efortul complex $(X_z - iY_z)_1$ fiind nul, iar $\frac{dz}{d\zeta}$ infinit, și în cazul domeniilor cu conexiune dublă eforturile vor fi nule, după cum se observă ușor în formulele (14).

Primit la redacție la 1 aprilie 1958.

О КРУЧЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО БРУСА ДВУСВЯЗНОГО СЕЧЕНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Предлагается решение задачи цилиндрического бруса с двусвязным поперечным сечением в случае, если известна функция, конформно преобразующая двусвязную область поперечного сечения бруса на круглом венце.

Даются числовые расчеты для ряда брусьев, причем некоторые уже рассматривались в литературе (квадрат, гексагон), другие рассматриваются впервые в этой работе.

---

*) Cu ajutorul formulelor generale stabilite în prima parte a lucrării, se poate utiliza în mod asemănător, funcția care transformă conform domeniul exterior unei curbe închise pe exteriorul cercului unitar. În acest fel, se poate trata fără dificultate bara cilindrică circulară cu gol interior poligonal; de asemenea, se poate trata problema torsiunii paletelor de turbină cu gol interior, folosind în mod judicios funcțiile de transformare utilizate în aerodinamică.

SUR LA TORSION DES BARRES CYLINDRIQUES À SECTION DOUBLEMENT CONNEXE

RÉSUMÉ

Dans ce travail, on donne la solution du problème de la torsion des barres cylindriques à section transversale doublement connexe, lorsque la fonction qui donne la transformation conforme du domaine doublement connexe de la section transversale de la barre, sur la couronne circulaire, est connue.

On fait des applications numériques pour une série de barres, dont certaines ont déjà été étudiées par d'autres auteurs (à section carrée, hexagonale) et les autres sont étudiées pour la première fois dans ce travail.

BIBLIOGRAFIE

1. В. И. ЯКОВЛЕВА, *О кручении некоторых полых призматических стержней.* ПМ, Акад. Наук Украинской ССР. **III**, *3* (1956).
2. Д. И. СЕРМАН, Про один метод розвязания действия задачи кручения.
3. Н. И. МУШЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва, 1954.
4. I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity (with the collaboration of R. D. Specht)*. Second Edition, Mc Gaw Hill Book, New York-London, 1956.
5. L. V. KANTOROVICI, V. I. KRÎLOV, *Metode de aproximaţie ale analizei superioare.*

DELIMITAREA INTERVALULUI DE EXISTENȚĂ A FRECVENȚELOR FUNDAMENTALE DE OSCILAȚIE LA CLĂDIRILE ÎNALTE SUPUSE ACȚIUNII SEISMICE

DE

MIHAIL IFRIM

La rezolvările în care se utilizează procedee aproximative de calcul este foarte indicată cunoașterea gradului de aproximare ce se face, sau mai precis, determinarea abaterilor pe care le dau formulările aproximative în raport cu valorile exacte. De aceea, este de mare importanță stabilirea limitelor în care pot exista mărimile exacte ale problemei, studiate prin prisma unor relații mai simple.

Referitor la problema calculului frecvenței fundamentale de oscilație (ω) pentru clădirile constituite din cadre etajate și supuse acțiunii sarcinilor seismice, în lucrarea [1] s-au stabilit expresii simple care dau valori (ω) mai mari decît cele reale, dar apropiate de acestea. La baza stabilirii formulelor respective a stat principiul conservării energiei aplicat sistemelor oscilante după teoria emisă în secolul trecut de Lord Rayleigh.

Pentru a avea controlul complet al valorilor ce se pot obține prin diverse procedee de calcul pentru frecvența oscilațiilor libere, s-a ivit necesitatea determinării și limitei inferioare a domeniului în care este cuprinsă frecvența reală. Astfel stabilit prin expresii simple limitele intervalului de existență a valorii exacte, calculatorul are în permanență controlul gradului de aproximare.

Pe de altă parte, rezolvarea prin metode analitice exacte a acestei probleme pentru cadrele avînd un număr mare de grade de libertate dinamice devine foarte complicată și de aceea în cele mai multe cazuri calculul se face prin încercări. De obicei, se pornește cu valori inițiale ale frecvențelor proprii urmînd a se determina acea valoare care satisface condiția de rezonanță. Chiar și în acest caz, stabilirea intervalului de existență a frecvenței fundamentale este de mare importanță, întrucît ne oferă valori inițiale apropiate de frecvența exactă, eliminînd astfel o serie de tatonări inutile. De asemenea, dacă s-a calculat deja valoarea exactă (ω_{ex})

se poate verifica dacă s-au strecurat eventual greşeli pe parcursul calculului, în cazul cînd acea valoare nu se încadrează în intervalul stabilit.

Faţă de ipotezele simplificatoare ce se introduc în calculul elastic în general şi complexitatea fenomenului fizic, utilizarea unor formulări aproximative este justificată. Prin urmare, aplicarea în calculul numeric direct a expresiilor limită, a mediei lor sau a unei valori cuprinse între ele este recomandabilă; alegerea de la caz la caz constituie o chestiune specifică fiecărei probleme în parte.

1. FUNDAMENTAREA TEORETICĂ A PROBLEMEI

La baza stabilirii valorilor limită inferioară şi limită superioară, care definesc intervalul în care este cuprinsă valoarea exactă a frecvenţei a stat principiile energetice de calcul aplicate la studiul oscilaţiilor libere.

Determinarea limitei superioare ($\omega_{l\mathrm{sup}}$) s-a făcut în lucrarea [1] utilizîndu-se metoda Rayleigh. Limita inferioară ($\omega_{l\mathrm{inf}}$) se va stabili prin aplicarea teoriei lui Dunkerly, în cuprinsul acestui studiu. Ambele procedee de calcul sînt cunoscute din dinamica elementară [2].

O dată cunoscute valorile $\omega_{l\mathrm{sup}}$ şi $\omega_{l\mathrm{inf}}$ pot fi scrise inegalităţile

$$\omega_{\mathrm{ex}} < \omega_{l\mathrm{sup}}, \tag{1.1}$$

$$\omega_{\mathrm{ex}} > \omega_{l\mathrm{inf}}. \tag{1.1'}$$

★

Se va demonstra succint inegalitatea (1.1).

Pentru un sistem oscilant, deformata reală se poate reprezenta totdeauna printr-o serie de funcţii arbitrare de forma

$$Z(x) = A_1 Z_1(x) + A_2 Z_2(x) + \ldots + A_K Z_K(x) + \ldots$$

unde

$Z_K(x)$ — funcţii arbitrare,

A_K — coordonată generalizată care precizează schimbarea formei sistemului în timp, definind deformaţiile sale.

Se poate scrie energia cinetică maximă a sistemului sub forma următoare:

$$C = \omega^2 \; \Phi_1(A_K)$$

şi de asemenea energia potenţială maximă

$$P = \Phi_2(A_K),$$

în funcţie de coordonatele generalizate ale sistemului.

Prin aplicarea principiului conservării energiei şi neglijînd disipaţiile de orice natură, obţinem

$$C = P,$$

sau

$$\omega^2 \Phi_1(A_K) = \Phi_2(A_K).$$

De unde rezultă frecvența oscilațiilor proprii de ordinul r

$$\omega_r^2 = \frac{\Phi_2(A_K)}{\Phi_1(A_K)}, \tag{1.2}$$

adică tocmai cunoscuta expresie a lui Rayleigh. Relația (1.2) a stat la baza expresiilor obținute în lucrarea [1].

Dacă în expresia (1.2) se introduce deformata dinamică $Z(x)$ reală, valoarea frecvenței obținută este exactă.

Pentru o poziție oarecare a sistemului oscilant, energia totală a sistemului (E) este constantă, adică

$$\Phi_2(A_K) - \omega_r^2\, \Phi_1(A_K) = E.$$

Cum $A_K = \varphi_K(t)$ rezultă

$$\frac{\partial}{\partial A_K}(E) = 0,$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial A_K}[\, \Phi_2(A_K) - \omega_r^2 \Phi_1(A_K)] = 0,$$

$$\frac{\partial\, \Phi_2(A_K)}{\partial A_K} - \omega_r^2 \frac{\partial\, \Phi_1(A_K)}{\partial A_K} = 0.$$

Ținînd seama de (1.2), avem

$$\frac{\partial\, \Phi_2(A_K)}{\partial A_K} - \frac{\Phi_2(A_K)}{\Phi_1(A_K)} \cdot \frac{\partial\, \Phi_1(A_K)}{\partial A_K} = 0,$$

sau

$$\Phi_1(A_K)\frac{\partial\, \Phi_2(A_K)}{\partial A_K} - \Phi_2(A_K)\frac{\partial\, \Phi_1(A_K)}{\partial A_K}.$$

Pe de altă parte

$$\frac{\partial}{\partial A_K}(\omega_r^2) = \frac{\partial}{\partial A_k}\left[\frac{\Phi_2(A_K)}{\Phi_1(A_K)}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial A_K}\left[\frac{\Phi_1(A_K)\dfrac{\partial\, \Phi_2(A_K)}{\partial A_K} - \Phi_2(A_K)\dfrac{\partial\, \Phi_1(A_K)}{\partial A_K}}{\Phi_1^2(A_K)}\right].$$

Luînd în considerare dezvoltările de mai sus, rezultă în final

$$\frac{\partial}{\partial A_K}(\omega_r^2) = 0,$$

de unde

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial A_K} = 0. \tag{1.3}$$

Relaţia (1.3) obţinută prin intermediul lui (1.2) *în care s-a considerat deformata reală a sistemului* demonstrează că valoarea exactă a frecvenţei (ω_r) este totdeauna minimă faţă de orice alte valori (ω) obţinute prin intermediul unor curbe diferite de cea reală.

Aşadar orice valoare (ω) care se obţine cu ajutorul formulei (1.2) şi prin intermediul unor curbe $Z(x)$ arbitrare, diferite de cea reală, va fi mai mare decît valoarea exactă a frecvenţei oscilaţiilor proprii a sistemului respectiv.

Rezultă deci următoarele concluzii :

a. *Calculul pe bază energetică dă valori ale frecvenţelor totdeauna mai mari decît cele reale sau cel mult egale.*

b. *Cînd curba* $Z(x)$ *este identică cu deformata dinamică reală, atunci frecvenţa calculată cu formula* (1.2) *este exactă.*

★

Se va demonstra în continuare existenţa inegalităţii (1.1′).

Pentru aceasta se va nota cu $C_1, C_2, \ldots, C_n$ energia cinetică a maselor $M_1, M_2, \ldots, M_n$ pentru $\omega = 1$ ($C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$) iar cu P energia potenţială a întregului sistem.

Conform principiului conservării energiei şi presupunînd că utilizăm deformata reală $Z(x)$ corespunzătoare tuturor maselor, obţinem

$$\omega_{\mathrm{ex}}^2 = \frac{P}{C} = \frac{P}{C_1 + C_2 + \ldots + C_n},$$

sau

$$\frac{1}{\omega_{\mathrm{ex}}^2} = \frac{C}{P} = \frac{C_1}{P} + \frac{C_2}{P} + \ldots + \frac{C_n}{P},$$

$$\frac{1}{\omega_{\mathrm{ex}}^2} = \frac{1}{\overline{\omega}_1^2} + \frac{1}{\overline{\omega}_2^2} + \ldots + \frac{1}{\overline{\omega}_n^2}.$$

Valorile $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots$ etc. vor fi mai mari în valoare decît frecvenţele exacte $\omega_1, \omega_2, \ldots$ a sistemelor cu un singur grad de libertate luate separat. Acest lucru este valabil, întrucît la calculul mărimilor $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots$ s-a presupus deformata corespunzătoare sistemului cu toate masele, care în realitate este diferită de cea corespunzătoare sistemelor cu un grad de libertate. De aceea se pot scrie inegalităţile

$$\begin{gathered} \overline{\omega}_1 > \omega_1, \\ \overline{\omega}_2 > \omega_2, \\ \vdots \\ \overline{\omega}_n > \omega_n, \end{gathered}$$

sau adunînd pe verticală

$$\frac{1}{\overline{\omega}_1^2} + \frac{1}{\overline{\omega}_2^2} + \ldots + \frac{1}{\overline{\omega}_n^2} < \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_n^2},$$

notînd cu

$$\frac{1}{\omega_{l\,\mathrm{inf}}^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_n^2}, \tag{1.4}$$

se obține

$$\frac{1}{\omega_{\mathrm{ex}}^2} < \frac{1}{\omega_{l\,\mathrm{inf}}^2}$$

și deci regăsim inegalitatea (1.1′)

$$\omega_{l\,\mathrm{inf}} < \omega_{\mathrm{ex}}.$$

Prin urmare frecvența obținută prin relația (1.4) dă o valoare mai mică decît cea exactă.

De aici tragem următoarea concluzie :

c. *La un sistem cu mai multe grade de libertate solicitate de mase concentrate, suma inverselor pătratelor frecvențelor corespunzătoare fiecărei mase, este mai mare decît inversul pătratului frecvenței exacte a aceluiași sistem* încărcat cu toate masele (această concluzie este valabilă cînd există și mase distribuite).

2. DETERMINAREA EXPRESIEI LIMITĂ INFERIOARĂ A FRECVENȚEI

Se vor expune în cele ce urmează dezvoltările analitice corespunzătoare aplicării procedeului lui Dunkerley pentru clădirile constituite din cadre etajate (figura 1) în următoarele ipoteze :

— masele sînt concentrate la nivelul fiecărui etaj,

— clădirea este încastrată într-o fundație pe un teren rigid,

— oscilațiile clădirii sînt numai transversale (orizontale),

— cadrele au riglele de rigiditate infinită și stîlpii elastici.

Aceste ipoteze, specifice calculului dinamic al clădirilor supuse acțiunii sarcinilor seismice, au fost luate în considerație și în lucrarea[1] în care s-a stabilit valoarea limită superioară a frecvenței, față de cea obținută prin calcule matematice exacte.

Formula (1.4) mai poate fi scrisă sub forma

$$\frac{1}{\omega_{l\,\mathrm{inf}}^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_i^2},$$

sau

$$\omega_{l\,\mathrm{inf}} = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_i^2}}}. \tag{2.1}$$

S-a notat cu ω_i valoarea frecvenței oscilațiilor proprii pentru sistemul din figura 1, încărcat de data aceasta numai cu cîte o masă $M_i = \frac{F_i}{g}$ la nivelul fiecărui etaj i.

Prin urmare cadrul din figura 1 va fi descompus în i sisteme cu un singur grad de libertate (fig. 2), fiecăruia corespunzîndu-i o frecvență ω_i exact calculată.

Pentru sistemul din figura 2, cu un singur grad de libertate, valoarea frecvenței exacte se poate calcula după teoria dinamică cunoscută

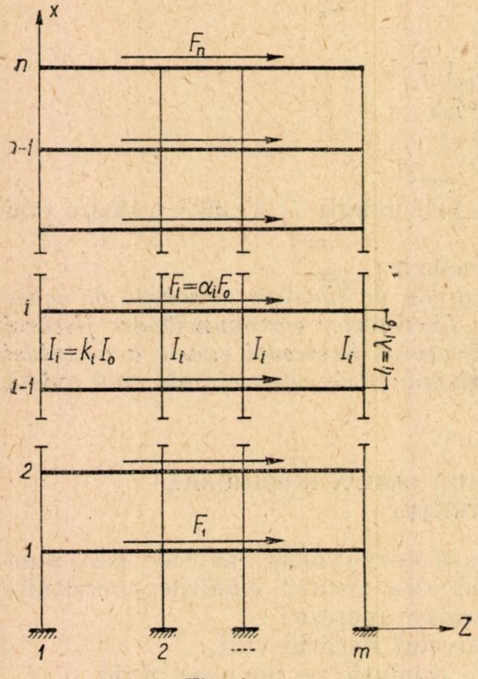

x
n
F_n
n-1
i
$F_i=\alpha_i F_0$
$I_i=k_i I_0$
I_i
I_i
I_i
$l_i=\lambda_i l_0$
i-1
2
F_1
1
1
2
----
m
Z

Fig. 1

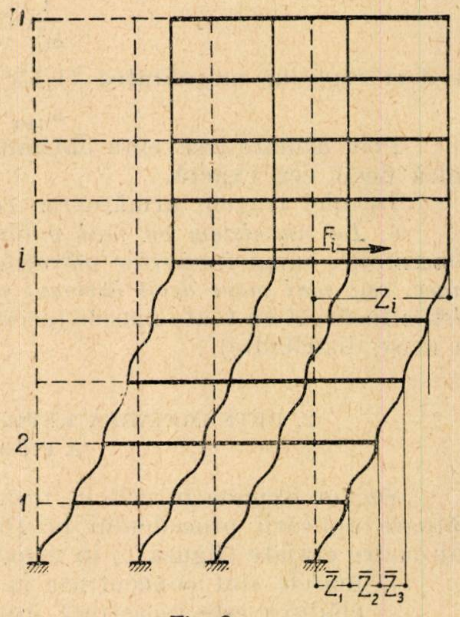

n
i
F_i
Z_i
2
1
$\overline{Z}_1$
$\overline{Z}_2$
$\overline{Z}_3$

Fig. 2

(de obicei, se scrie o ecuație d'Alembert pe direcția gradului de libertate) rezultînd

$$\omega_i^2 = \frac{g}{Z_i^{st}} \,. \tag{2.2}$$

Prin urmare va trebui apreciată deplasarea statică Z_i produsă de forța F_i aplicată lateral (fig. 2), și anume

$$Z_i = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \ldots + \overline{Z}_i,$$

dar, în conformitate cu figura 2, avem

$$\overline{Z}_1 = \frac{F_i\, l_1^3}{12\, mEI_1}\,;\ \overline{Z}_2 = \frac{F_i\, l_2^3}{12\, mEI_2}\,;\ \ldots\,;\ \overline{Z}_i = \frac{F_i\, l_i^3}{12\, mEI_i}\,.$$

Deci

$$Z_i = \frac{F_i\, l_1^3}{12\, mEI_1} + \frac{F_i\, l_2^3}{12\, mEI_2} + \ldots + \frac{F_i\, l_i^3}{12\, mEI_i} = \frac{F_i}{12\, mE}\left[\frac{l_1^3}{I_1} + \frac{l_2^3}{I_2} + \ldots + \frac{l_i^3}{I_i}\right],$$

sau

$$Z_i = \frac{\alpha_i F_0}{12\, m\, E} \sum_{j=1}^{i} \frac{(\lambda_j\, l_0)^3}{k_j\, I_0} = \frac{F_0\, l_0^3}{12\, mEI_0}\, \alpha_i \sum_{j=1}^{i} \frac{\lambda_j^3}{k_j}$$

şi în definitiv

$$Z_i = Z_0\,\alpha_i \sum_{j=1}^{i} q_j, \tag{2.3}$$

în care s-a notat cu

$$Z_0 = \frac{F_0\, l_0^3}{12\, mEI_0}$$

$$q_j = \frac{\lambda_j^3}{k_j}$$

l_0, I_0, F_0 — cantităţi arbitrare faţă de care se raportează valorile l_i, I_i, F_i prin coeficienţii λ_i, k_i, α_i corespunzători ($l_i = \lambda_i l_0$; $I_i = k_i\, I_0$; $F_i = \alpha_i\, F_0$).

n — numărul etajelor,

m — numărul stîlpilor.

Înlocuind în relaţia (2.2) expresia (2.3), se obţine

$$\omega_i^2 = \frac{g}{Z_0 \alpha_i \sum\limits_{j=1}^{i} q_j}. \tag{2.4}$$

Revenind la formula (2.1) şi luînd în considerare (2.4), avem

$$\omega_{l\,\mathrm{inf}} = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\dfrac{g}{Z_0 \alpha_i \sum\limits_{j=1}^{i} q_j}}}} = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{Z_0}{g} \alpha_i \sum\limits_{j=1}^{i} q_j}},$$

sau

$$\omega_{l\,\mathrm{inf}} = \sqrt{\frac{g}{Z_0 \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \sum\limits_{j=1}^{i} q_j}}. \tag{2.5}$$

Urmărind figura 3, constatăm că expresia de la numitor este tocmai deplasarea statică a ultimului etaj pentru cadrul încărcat lateral cu toate sarcinile F_i. Prin urmare, formula (2.5) mai poate fi scrisă sub forma

$$\omega_{l\,\mathrm{inf}} = \sqrt{\frac{g}{Z_n^{\max}}}\;{}^{*)}. \tag{2.6}$$

---

*) La acest rezultat se putea ajunge printr-o cale mai rapidă. Relaţia (2.1) se va transforma în modul umător ţinînd seama de (2.2) :

$$\omega_{l\,\mathrm{inf}} = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\dfrac{g}{Z_i}}}} = \sqrt{\frac{g}{\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i}} = \sqrt{\frac{g}{Z_n^{\max}}},$$

întrucît

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_i + \ldots = Z_n^{\max}$$

($Z_n^{\max}$ a rezultat prin suprapunerea efectelor).

După cum se observă, s-a obținut formula lui Geiger (2.6), *aplicată sistemelor în cadre cu un număr nelimitat de grade de libertate dinamice.*

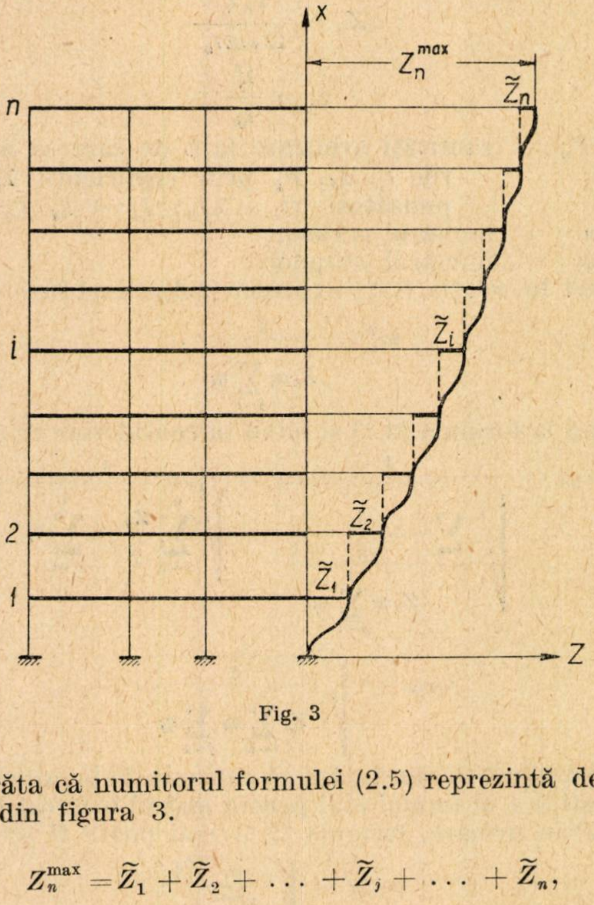

x
Z_n^{max}
$\widetilde{Z}_n$
n
$\widetilde{Z}_i$
i
$\widetilde{Z}_2$
2
$\widetilde{Z}_1$
1
Z

Fig. 3

Se va arăta că numitorul formulei (2.5) reprezintă deplasarea $Z_n^{\max}$ a sistemului din figura 3.

$$Z_n^{\max} = \widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2 + \ldots + \widetilde{Z}_j + \ldots + \widetilde{Z}_n,$$

unde

$$\widetilde{Z}_1 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i\, l_1^3}{12\, mEI_1} = \frac{F_0\, l_0^3}{12\, mEI_0} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\lambda_1^3}{k_1},$$

$$\vdots$$

$$\widetilde{Z}_j = \frac{\sum\limits_{i=j}^{n} F_i\, l_j^3}{12\, mEI_j} = \frac{F_0\, l_0^3}{12\, mEI_0} \sum_{i=j}^{n} \alpha_i \frac{\lambda_j^3}{k_j}.$$

$$\vdots$$

Înlocuind, avem

$$Z_n^{\max} = \frac{F_0 l_0^3}{12\, mEI_0}\left[\sum_1^n \alpha_i q_1 + \sum_2^n \alpha_i q_2 + \dots + \sum_{i=j}^n \alpha_i q_j + \dots\right] =$$

$$= Z_0\,[(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\, q_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n)\, q_2 + \dots + (\alpha_j + \alpha_{j+1} + \dots + \sigma_n)\, q_j + \dots]$$

adică

$$Z_n^{\max} = Z_0 \sum_{j=1}^n q_j \sum_{k=j}^n \alpha_k,$$

sau grupînd în alt mod

$$Z_n^{\max} = Z_0\,[\alpha_1 q_1 + \alpha_2 (q_1 + q_2) + \dots + \alpha_j (q_1 + q_2 + \dots + q_j) + \dots]$$

rezultă

$$Z_n^{\max} = Z_0 \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^i q_j. \tag{2.7}$$

Aşadar, valoarea limită inferioară a frecvenţei fundamentale de vibraţie pentru cadrele de tipul celui din figura 1, va fi

$$\omega_{l\,\mathrm{inf}} = \sqrt{\frac{g}{Z_0 \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i \sum\limits_{j=1}^j q_j}} = \sqrt{\frac{EI_0}{M_0 l_0^3} \cdot \frac{12\, m}{\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i \sum\limits_{j=1}^i q_j}} \quad (M_i = \alpha_i F_0 = \alpha_i M_0),$$

sau aducînd la o formă asemănătoare expresiilor stabilite în lucrarea [1] se poate scrie

$$\omega_{l\,\mathrm{inf}} = \xi \sqrt{\frac{EI_0}{M_0 l_0^3}}, \tag{2.8}$$

unde

$$\xi = \sqrt{\frac{12\, m}{\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i \sum\limits_{j=1}^i q_j}} = 3{,}465 \sqrt{\frac{m}{\alpha_1 q_1 + \alpha_2 (q_1 + q_2) + \dots + \alpha_n (q_1 + \dots + q_n)}}. \tag{2.9}$$

Pe baza celor de mai sus se poate formula teorema următoare: *Expresia stabilită pentru limita inferioară a frecvenţei fundamentale de vibraţie, pentru structurile elastice care respectă ipotezele enunţate aici este identică cu formula lui Geiger aplicată aceluiaş caz.* Adică

$$\omega_{l\,\mathrm{inf}} = \omega_{\mathrm{Geiger}}.$$

3. LIMITA SUPERIOARĂ A FRECVENŢEI ŞI DELIMITAREA INTERVALULUI DE EXISTENŢĂ A VALORII ω_{2x}

Se vor lua în considerare rezultatele obţinute în [1] pentru aprecierea valorii limită superioară a frecvenţei ($\omega_{l\,\mathrm{sup}}$). La obţinerea lui $\omega_{l\,\mathrm{sup}}$ calculul s-a făcut în două ipoteze.

În ipoteza cînd deformata dinamică Z (x) coincide cu cea statică s-a obținut :

$$Z_i = Z_0 \sum_{j=1}^{i} q_j \sum_{k=j}^{n} \alpha_K \quad (j = 1, 2, \ldots i) \tag{3.1}$$

și

$$Z_i = Z_0 \sum_{j=1}^{i} (n - j + 1)\, q_j \tag{3.1'}$$

$$(\text{cînd } \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1)$$

iar frecvența

$$\omega_{l\,\mathrm{sup}} = \xi_I \sqrt{\frac{EI_0}{M_0\, l_0^3}}, \tag{3.2}$$

unde

$$\xi_I = 3{,}465 \sqrt{m \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i} q_j \sum\limits_{k=j}^{n} \alpha_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left[\sum\limits_{j=1}^{i} q_j \sum\limits_{k=j}^{n} \alpha_k\right]^2}} \tag{3.3}$$

și

$$\xi_I = 3{,}465 \sqrt{m \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i} (n - j + 1)\, q_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left[\sum\limits_{j=1}^{i} (n - j + 1) q_j\right]^2}} \tag{3.3'}$$

$$(\text{cînd } \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1).$$

În ipoteza cînd deformata dinamică se asimilează cu o variație liniară în cazul primului mod de oscilație, s-au obținut următoarele rezultate

$$Z_i = Z_n^{\max} \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} l_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} l_j} = Z_n^{\max} \frac{l_0}{L} \sum_{j=1}^{i} \lambda_j,$$

în această expresie $Z_n^{\max}$ se calculează prin intermediul formulei (2.7).

Tratîndu-se cazul practic cînd planșeele sînt dispuse la egală distanță ($\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 1$ iar $L = nl_0$) și notînd cu

$$\overline{q}_j = \frac{1}{k_j}$$

se obține

$$\overline{\omega}_{l\,\mathrm{sup}} = \overline{\xi}_I \sqrt{\frac{EI_0}{M_0\, l_0^3}}, \tag{3.4}$$

unde

$$\xi_I = 6\sqrt{\frac{m\,.\,n}{(2n+1)\,[\alpha_1\bar{q}_1 + \alpha_2(\bar{q}_1 + \bar{q}_2) + \ldots + \alpha_n(\bar{q}_1 + \ldots + \bar{q}_n)]}} \tag{3.5}$$

și

$$\overline{\xi}_I = 6\sqrt{\frac{m\,.\,n}{(2n+1)[n\bar{q}_1 + (n-1)\,\bar{q}_2 + (n-2)\,\bar{q}_3 + \ldots + \bar{q}_n]}} \tag{3.5'}$$

(cînd $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$).

Se constată că

$\overline{\xi}_I > \xi_I$ în cazul construcțiilor flexibile,

$\overline{\xi}_I < \xi_I$ în cazul construcțiilor mai puțin flexibile.

Cu toate acestea, valorile ξ_I și $\overline{\xi}_I$ sînt foarte apropiate între ele.

Inegalitățile (1.1) și (1.1′) se mai pot scrie și astfel

$$\omega_{l\,\mathrm{inf}} < \omega_{\mathrm{ex}} < \omega_{l\,\mathrm{sup}},$$

sau

$$\xi < \xi_{\mathrm{ex}} < \xi_I, \tag{3.6}$$

$$\xi < \xi_{\mathrm{ex}} < \overline{\xi}_I. \tag{3.6'}$$

Referindu-ne mai întîi la inegalitatea (3.6) se obține un coeficient η care delimitează domeniul în care poate exista mărimea ω_{ex}

$$\omega_{l\,\mathrm{sup}} = \eta\,\omega_{l\,\mathrm{inf}} \qquad (\eta \geqslant 1).$$

Deci

$$\eta = \frac{\xi_I}{\xi} = \sqrt{\frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i} q_j \sum\limits_{k=j}^{n}\alpha_K\right]\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\sum\limits_{j=1}^{i} q_j}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\sum\limits_{j=1}^{i} q_j \sum\limits_{k=j}^{n}\alpha_k\right]^2}} \tag{3.7}$$

sau

$$\eta = \sqrt{\frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i}(n-j+1)\right]\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i} q_j}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\sum\limits_{j=1}^{i}(n-j+1)\,q_j\right]^2}} \tag{3.7'}$$

(cînd $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$).

Referitor la inegalitatea (3.6′) se pot scrie relațiile

$$\omega_{l\,\mathrm{inf}} = \overline{\eta}\,\omega_{l\,\mathrm{sup}} \qquad (\overline{\eta} \geqslant 1).$$

Deci

$$\overline{\eta} = \frac{\overline{\xi}_I}{\xi} = \sqrt{\frac{36\,\dfrac{m.n}{(2n+1)\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\sum\limits_{j=1}^{i}\bar{q}_j}}{12\,\dfrac{m}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\sum\limits_{j=1}^{i}\bar{q}_j}}},$$

sau

$$\overline{\eta} = \frac{\overline{\xi}_I}{\xi} = \sqrt{\frac{3n}{2n+1}}. \tag{3.8}$$

Formula (3.8) a fost dedusă în lucrarea [3] cînd s-a căutat să se adapteze formula lui Geiger la calculul frecvenței fundamentale a cadrelor etajate, prin intermediul unui coeficient de corecție. Aceeași formulă, obținută mai apoi de autor cu intenția de a stabili departajarea valorilor limită a frecvenței fundamentale, datorită identității ei cu coeficientul de corecție stabilit în [3], a sugerat coincidența dintre formula Geiger și Dunkerley, ambele aplicate problemei de față.

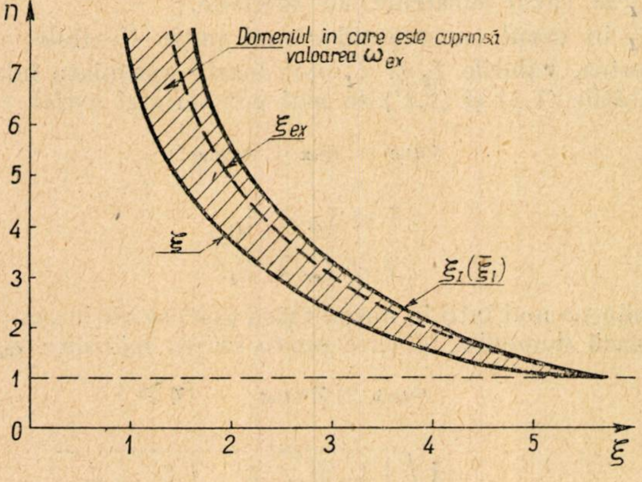


Fig. 4

În lucrarea [3] se găsesc întabulate valorile $\overline{\eta}$ funcție de numărul etajelor n.

Cu aceeași ocazie, s-au calculat coeficienții $\overline{\eta}_r$ *reduși* arbitrar din $\overline{\eta}$ prin intermediul cărora se pot obține valorile mai exacte ale frecvenței

$$\omega_{ex} \simeq \overline{\eta}_r \omega_{l\,inf}.$$

În figura 4 este reprezentată funcția $\xi\,(n)$ în cazul unor situații reale întîlnite în practică. Din aceeași figură reiese și variația intervalului η funcție de n.

Diferența dintre $\omega_{l\,inf}$ și $\omega_{l\,sup}$ se poate calcula în procente astfel

$$\varepsilon = \frac{\omega_{l\,sup} - \omega_{l\,inf}}{\omega_{l\,inf}} 100\,\%.$$

Considerînd valoarea $\overline{\omega}_{l\,sup}$ rezultă

$$\varepsilon = 100\,(\overline{\eta} - 1)\%.$$

Aceste valori se găsesc întabulate în [3]. Se constată o plafonare a abaterilor dintre $\omega_{l\,\text{inf}}$ şi $\omega_{l\,\text{sup}}$ pentru clădirile cu $n \geqslant 10$ la $\varepsilon \simeq 20\%$ (teoretic pentru $n \to \infty$, $\varepsilon = 22{,}8\%$).

Urmărind figura 4 se remarcă că pentru $n = 1$ toţi coeficinţii ξ sînt egali între ei. Rezultă $\eta = \overline{\eta} = 1$ adică $\omega_{l\,\text{inf}} = \omega_{\text{ex}} = \omega_{l\,\text{sup}}$ întrucît ne aflăm în cazul unui sistem cu un singur grad de libertate.

Prin urmare, frecvenţa limită superioară se obţine cu expresiile (3.2) sau (3.4) iar cea limită inferioară prin intermediul lui (2.6) (în care $Z_n^{\max}$ se calculează cu formula (2.7)), sau cu relaţia (2.8) asemănătoare celor de la calculul limitei superioare. De asemenea, se pot folosi coeficienţii η (3.7) şi $\overline{\eta}$ (3.8).

4. CAZUL CLĂDIRILOR CU VARIAŢIE DE FORMĂ PE ÎNĂLŢIME

În practică se pot întîlni clădiri constituite din cadre a căror formă variază pe verticală şi avînd momentele de inerţie, la acelaşi nivel, de valori diferite (fig. 5). Şi în acest caz, se pot folosi la calculul frecvenţei fundamentale de vibraţie expresiile stabilite anterior, avînd în vedere observaţiile ce se vor expune în cele ce urmează.

Se introduce notaţia următoare pentru momentele de inerţie corespunzătoare unui stîlp oarecare:

I_{ij} — momentul de inerţie a stîlpului de pe linia i şi coloana j,

$$I_{ij} = k_{ij} I_0. \tag{4.1}$$

Momentul de inerţie total a stîlpilor la nivelul i va fi

$$\sum I_{ij} = I_{i1} + I_{i2} + \dots + I_{ij} + \dots$$

Expresiile momentelor de inerţie totală la nivelul fiecărui etaj se vor calcula raportate la factorii m şi I_0 adică faţă de numărul stîlpilor de la parter (m) şi momentul de inerţie arbitrar (I_0).

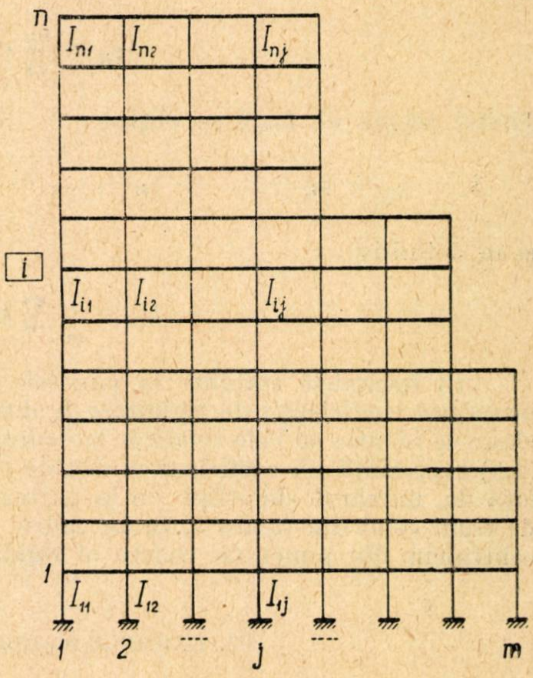


Fig. 5

$$\sum I_{ij} = (k_{i1} + k_{i2} + \dots + k_{ij} + \dots) I_0 = m(\rho_{i1} + \rho_{i2} + \dots + \rho_{ij} + \dots) I_0.$$

Dacă se notează

$$\sum \rho_{ij} = k_i \tag{4.2}$$

se obțin succesiv relațiile

$$
\begin{aligned}
\sum I_{1j} &= m\,k_1\,I_0,\\
\sum I_{2j} &= m\,k_2\,I_0,\\
&\vdots\\
\sum I_{ij} &= m\,k_i\,I_0,\\
&\vdots\\
\sum I_{nj} &= m\,k_n I_0,
\end{aligned}
$$

unde

$$
\begin{aligned}
m\,\rho_{i1} &= k_{i1},\\
m\,\rho_{i2} &= k_{i2},\\
&\vdots\\
m\,\rho_{ij} &= k_{ij},\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

deci

$$\rho_{ij} = \frac{k_{ij}}{m}\,.$$

Ținînd seama de (4.2) se obține

$$k_i = \rho_{i1} + \rho_{i2} + \dots + \rho_{ij} + \dots = \frac{k_{i1}}{m} + \frac{k_{i2}}{m} + \dots + \frac{k_{ij}}{m} + \dots$$

și în definitiv

$$k_i = \frac{1}{m} \sum k_{ij}. \tag{4.2'}$$

În formulele stabilite la punctele 1 și 2 din această lucrare se vor introduce coeficienții de rigiditate k_i din expresia (4.3), calculele conducîndu-se identic cu cele referitor la cadrele din figura 1. De fapt expresia (4.3) reprezintă un coeficient mediu de rigiditate a stîlpilor de la nivelul i față de numărul de stîlpi de la parter. Prin urmare, se reduce cadrul de tipul celui din figura 5, la un cadru asemănător cu cel din figura 1, echivalent din punct de vedere al rigidității.

5. EXEMPLIFICAREA TEORIEI

Pentru a avea o privire de ansamblu asupra aplicării considerațiilor teoretice enunțate, privind calculul frecvenței fundamentale de vibrație, s-au considerat șase tipuri de structuri a căror caracteristici sînt trecute în tabela 1. În tabela 2 sînt calculate valorile coeficientului ξ corespunzătoare limitei inferioare (2.8), limitei superioare (3.2), (3.4) și mărimei

Tabela 1

	Caracteristicile construcției																	
$m = 3$	$\lambda_i = \frac{l_i}{l_0}$						$k_i = \frac{I_i}{I_0}$						$\alpha_i = \frac{F_i}{F_0}$					
n	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
1	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—
2	1	1	—	—	—	—	1	0.6	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—
3	1	1	1	—	—	—	1	1	0.6	—	—	—	1	1	1	—	—	—
4	1	1	1	1	—	—	1	1	0.6	0.6	—	—	1	1	1	1	—	—
5	1	1	1	1	1	—	1	1	0.6	0.6	0.4	—	1	1	1	1	1	—
6	1	1	1	1	1	1	1	1	0.6	0.6	0.4	0.4	1	1	1	1	1	1

exacte a primei frecvențe. De asemenea, sînt calculate și abaterile pe care formulele deduse în acest studiu le dau față de valoarea calculată exact din punct de vedere matematic, utilizînd matricea reacțiunilor corespunzătoare metodei deplasărilor. Tabela 2 prezintă succint toate aspectele ce se pot ivi în această privință pentru cele șase structuri luate în considerație.

Fără a trage concluzii generale stricte, totuși, bazați și pe alte rezolvări anterioare [1], [3], se pot formula următoarele observații :

— coeficienții ξ_I și $\bar{\xi}_I$ sînt apropiați ca valoare între ei și se găsesc în preajma mărimii ξ_{ex} ;

— în general, pentru structurile mai puțin elastice avem $\bar{\xi}_I < \xi_I$ iar pentru cele flexibile $\bar{\xi}_I > \xi_I$;

— pentru clădirile avînd pînă în jurul a opt etaje, se pot folosi coeficienții ξ_I, $\bar{\xi}_I$ direct sau ușor reduși cu 1—5% funcție de numărul etajelor ;

— pentru clădirile cu un număr de etaje în jur de 10 sau mai mare, se poate folosi o medie dintre ξ și ξ_I sau dintre ξ și $\bar{\xi}_I$;

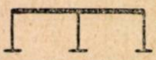
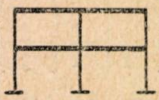
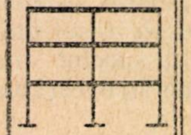
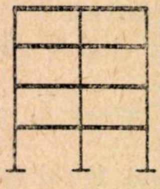
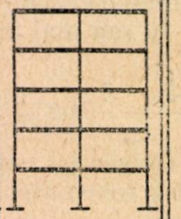
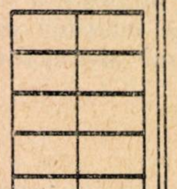
— cu cît numărul etajelor crește, eroarea $\varepsilon = \frac{\xi_{ex} - \xi}{\xi_{ex}} 100\%$ descrește și prin urmare aplicarea directă a formulei lui Geiger își capătă valabilitatea aproape integrală, intrucît valoarea exactă a frecvenței este mult mai apropiată de limita inferioară ;

— ipoteza riglelor infinit rigide (sau cum se mai numește a clădirilor forfecate) dă satisfacție mai ales pentru clădirile de înălțime medie a căror raport dintre înălțime (L) și bază (B) este mai mic sau egal cu 5, adică [4]

$$\frac{L}{B} \leqslant 5.$$

În figura 6 este trasată funcția $\xi(n)$, pentru exemplele din tabela 2 care pledează în favoarea observațiilor menționate mai sus. Tot în tabela 2 sînt calculate erorile $\varepsilon_I = \frac{\xi_I - \xi_{ex}}{\xi_{ex}} 100\%$ și $\bar{\varepsilon}_I = \frac{\bar{\xi}_I - \xi_{ex}}{\xi_{ex}} 100\%$.

TABELA 2

FORMA CADRULUI	n	COEFICIENȚI ξ				ABATERI				
		ξ (2.9)	ξ EXACT	ξ' (3,3')	$\bar{\xi}$ (3,5')	η (3,7')	$\bar{\eta}$ (3,8)	ε %	ε_I %	$\bar{\varepsilon}_I$ %
	1	6	6	6	6	1	1	0	0	0
	2	3,125	3,405	3,410	3,425	1,092	1,096	8,29	0,15	0,59
	3	2,325	2,595	2,605	2,625	1,123	1,135	10,55	0,39	1,15
	4	1,730	1,955	1,965	2,000	1,155	1,155	11,50	0,52	2,29
	5	1,335	1,510	1,535	1,560	1,151	1,168	11,25	1,66	3,31
	6	1,090	1,225	1,260	1,285	1,155	1,177	11,05	2,85	4,89

Aplicarea formulelor de calcul deduse în cuprinsul acestui studiu au avantajul că evită întocmirea unor sisteme de ecuații și rezolvarea lor. Pe lîngă aceasta, o asemenea rezolvare implică o serie întreagă de încercări de lungă durată, ceea ce poate înlesni strecurarea de greșeli pe parcursul calculului.

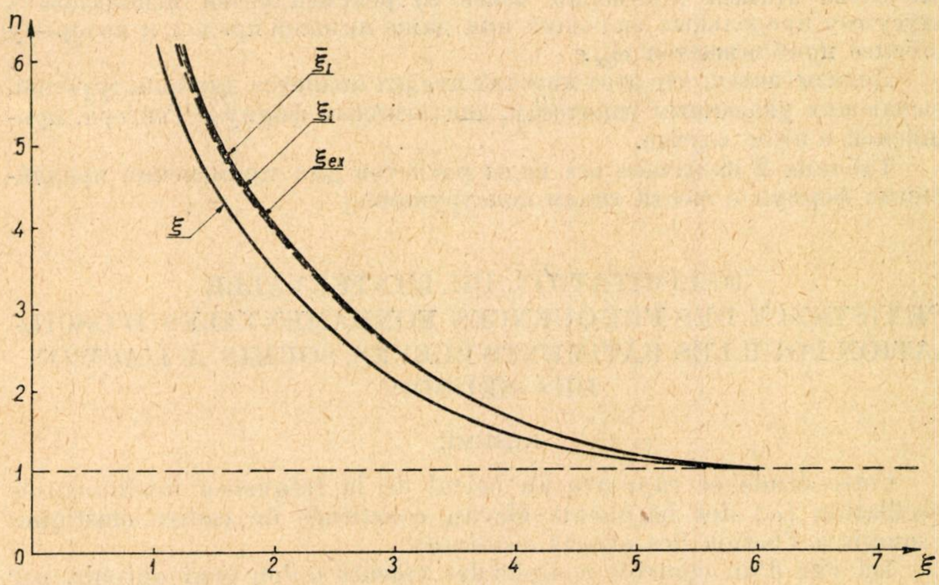


Fig. 6

Formulele stabilite pot da o imagine clară asupra influenței caracteristicilor statico-geometrice ale structurii asupra frecvențelor proprii. De asemenea, prin folosirea acestor formule se economisește mult timp de lucru iar controlul rezultatelor este în permanență asigurat.

Primit la redacție la 29 martie 1958.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИАПАЗОНА СУЩЕСТВОВАНИЯ ОСНОВНЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЯ В ПОДВЕРГАЮЩИХСЯ СЕЙСМИЧЕСКИМ ВЛИЯНИЯМ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЯХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Работа относится к расчету основных частот колебания (ω) высотных, построенных из упругих рам зданий, подвергающихся действию сейсмических нагрузок.

Для обеспечения полного контроля получаемых путем различных способов расчета значений относительно частоты свободных колебаний в настоящей работе определяются нижняя (2.6) или (2.8) и верхняя (3.2) или (3.4) границы области, в которые она включается (рис. 4).

При практическом расчете выражения частот (3.2) (для гибких конструкций) и (3. 4) (для менее гибких конструкций) могут быть использованы непосредственно или в слегка заниженном виде. При увеличении количества этажей (примерно более 9) рекомендуется использовать полусумму предельных значений или даже нижний предел, к которому наиболее приближается ω_{ex}.

Доказывается, что этот нижний предел является для конструкций, отвечающих указанным гипотезам, аналогичным формуле Гейгера, применяемой в этом случае.

Таблица 2 включает все виды расчетов для применения предложенных формул к шести типам конструкций.

DÉLIMITATION DE L'INTERVALLE D'EXISTENCE DES FRÉQUENCES FONDAMENTALES D'OSCILLATION POUR LES BÂTIMENTS ÉLEVÉS, SOUMIS À L'ACTION DES SÉISMES

RÉSUMÉ

Cette étude se rapporte au calcul de la fréquence fondamentale d'oscillation (ω) des bâtiments élevés, constitués de cadres élastiques et soumis à l'action des efforts sismiques.

En vue d'un contrôle complet des valeurs qu'on peut obtenir, par divers procédés de calcul, pour la fréquence des oscillations libres, on détermine dans ce travail les limites, inférieure (2.6) ou (2.8) et supérieure (3.2) ou (3.4), du domaine de cette fréquence (fig.4).

Pour le calcul pratique, on peut faire usage des expressions des fréquences (3.2) (pour les constructions flexibles) et (3.4) (pour les constructions moins flexibles) soit directement, soit en les réduisant légèrement. Lorsque le nombre d'étages augmente (au-dessus de 8, environ), on recommande d'utiliser la demi-somme des valeurs limites ou même la limite inférieure, dont ω_{ex} se rapproche beaucoup.

On démontre que cette limite inférieure est, pour les structures qui respectent les hypothèses énoncées, identique à la formule de Geiger appliquée au même cas.

Le tableau 2 comprend tous les aspects de calcul concernant l'application des formules proposées, à six types de structures.

BIBLIOGRAFIE

1. MIHAIL IFRIM, *Calculul dinamic al cadrelor elastice pe baza principiului conservării energiei.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, *2*, 393 (1957).
2. ODONE BELLUZZI, *La stabilità dell'equilibrio elastico. Le vibrazioni. Scienza delle costruzioni.* Bologna, **IV** (1955).
3. MIHAIL IFRIM, *Precizări în legătură cu aplicarea formulei lui Geiger la calculul primei frecvențe proprii de vibrație ale clădirilor în cadre.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, *4*, 1197 (1957).
4. MARIO G. SALVADORI, *Earthquake Stresses in Shear Buildings.* Proceedings ASCE, **79**, *177* (1953).

ASPECTE CARACTERISTICE ALE DEZVOLTĂRII PROCESULUI DE ELECTRO-OSMOZĂ ÎN PĂMÎNTURILE COMPRESIBILE

DE

R. J. BALLY și I. ANTONESCU

În studiile geotehnice, pentru explicarea și interpretarea în calcul a procesului de electro-osmoză, se recurge la ipoteza clasică a stratului dublu, elaborată de Helmholtz. Pornind de la această ipoteză, se ajunge la o relație liniară între viteza curentului de circulație electro-osmotică și gradientul de potențial electric.

Pentru simplificare, se admite în mod curent că datele caracteristice ale pămîntului, care intervin în relația respectivă, sînt constante, în limitele obișnuite de dezvoltare a electro-osmozei. Notînd cu e gradientul de potențial electric (raportul între diferența de potențial U și lungimea probei l), viteza și debitul curentului electro-osmotic printr-o probă de pămînt de secțiune A sînt date de expresiile

$$v_e = k_e \cdot e \tag{1}$$

și

$$q_e = v_e \cdot A. \tag{2}$$

Valoarea k_e a fost denumită ,,coeficient de permeabilitate electro-osmotică''.

Relația (1) arată că pentru scurgerea electro-osmotică se admite o lege similară cu scurgerea provocată de un gradient hidraulic și exprimată prin legea lui Darcy.

În studiile care tratează despre acțiunea simultană a gradientului hidraulic și a celui electric, paralelismul dintre cele două fenomene reiese deosebit de clar [1], [2], [3], [4], [5]. Efectul sumat al celor două gradiente apare ca o sumă vectorială a vitezelor —gravitațională v_g și electro-osmotică v_e— :

$$v_t = v_g + v_e = k.i + k_e \,.\, e, \tag{3}$$

în care k este coeficientul de permeabilitate (Darcy) și i gradientul hidraulic.

În ultimii ani, o dată cu dezvoltarea studiului procesului de electro-osmoză în pămînturile compresibile, unii cercetători [6], [7], [8], printre care și autorii prezentei lucrări, au ajuns la concluzia că, pentru o înțelegere mai completă și o interpretare în calcul corespunzătoare a fenomenului, ipoteza stratului dublu apare prea schematică. Rezultatele studiilor asupra acestei probleme, efectuate de către colectivul de geotehnică al Institutului de mecanică aplicată, vor fi expuse în cele ce urmează*).

Pentru punerea în evidență a aspectelor caracteristice dezvoltării procesului de electro-osmoză în pămînturile compresibile, s-au executat în laborator încercări pe probe de diferite dimensiuni, alcătuite din pămînturi diferite — de la loess pînă la argilă grasă. Pe baza lor s-au putut trage următoarele concluzii :

a) În pămînturile compresibile, procesul de electro-osmoză se dezvoltă neuniform, atît în timp, cît și în spațiu (considerînd diferite puncte din interiorul probei tratate).

b) Procesul de electro-osmoză nu se reduce la un transport de apă de la anod la catod, ci este însoțit de o reducere a umidității și porozității pămîntului.

c) Diversele tipuri de pămînturi (loess, argilă) se comportă în mod diferit sub acțiunea curentului electric continuu.

Pornind de la aceste constatări, se poate afirma că fenomenul examinat poate fi divizat în trei procese distincte :

— drenarea (reducerea umidității) pămîntului;
— îndesarea (reducerea porozității) pămîntului;
— transportul apei prin pămînt.

Transportul presupune circulația apei de la anod la catod prin pămînt, în așa fel încît cantitatea de apă ieșită la catod să fie egală cu cea intrată la anod, deci umiditatea pămîntului să nu se schimbe**).

Experiența a arătat însă că, o dată cu transportul moleculelor de apă prin pămînt, trecerea curentului electric face ca la catod să iasă o cantitate de apă mai mare decît cea intrată la anod, chiar dacă pămîntul este alimentat permanent cu apă la anod. Dacă materialul este suficient de umed, reducerea umidității este însoțită și de îndesare.

Cele trei procese menționate, de drenare, îndesare și transport, nu pot fi deci separate, ca manifestare, unele de altele. Executînd însă experiențele în anumite condiții, se poate pune în evidență unul sau altul din aceste procese.

---

*) Așa cum rezultă din lucrările de specialitate apărute în ultimii ani [9], [10], problema dezvoltării ipotezei stratului dublu și a interpretării în calcul a procesului electro-osmotic în funcție de concepțiile actuale asupra structurii mediilor coloidale preocupă, în general, pe cercetătorii fenomenului de electro-osmoză și nu este limitată numai la aspectele geotehnice.

**) Procesele electro-osmotice nu pot fi reduse numai la deplasarea apei ; ele sînt însoțite de fenomene chimice care implicit duc la schimbarea compoziției pămîntului [6]. În mod curent se presupune însă că ne oprim cu studiul transportului electro-osmotic într-o fază în care procesul chimic de transformare a pămîntului este încă într-un stadiu incipient, neintervenind schimbări calitative în compoziția și proprietățile materialului.

Astfel, executînd experiențele cu un pămînt cu schelet relativ rigid, cu umiditate redusă și fără introducere de apă la anod, se poate pune în evidență electrodrenarea. Introducînd probele într-un aparat care permite simultan comprimarea și tratarea lor electrică (electroedometru) și supunîndu-le, după consolidarea sub o anumită sarcină, trecerii curentului electric, se poate pune în evidență procesul de electroîndesare, perioada de tratare cu curent electric fiind marcată prin reluarea procesului de tasare. Oprirea curentului duce din nou la stabilizarea tasării, iar o nouă închidere a circuitului la reînceperea tasării. În sfîrșit, punerea în evidență a procesului de electrotransport se poate face prin tratarea unor probe cu schelet rigid, menținîndu-se în tot timpul experienței apă la anod. Se constată că valorile cantităților de apă intrate la anod și ieșite la catod sînt practic egale. Procesul se menține staționar un timp destul de îndelungat, debitul apei rămînînd constant, iar umiditatea medie finală a pămîntului fiind egală cu cea inițială.

În ceea ce privește aplicarea relației (1) la pămînturile compresibile, sînt de făcut următoarele observații :

Relația respectivă aplicată între două puncte situate la distanța l (gradientul electric care acționează asupra sistemului fiind e), sau exprimă o medie a dezvoltării fenomenului între cele două puncte, sau presupune o dezvoltare uniformă a procesului pe întreg intervalul l. Într-adevăr, viteza de circulație electro-osmotică este considerată constantă, iar variația căderii de potențial, liniară (gradient constant). Relația (1) nu ține seama de compresibilitatea pămîntului, considerîndu-l drept un mediu poros și nedeformabil. De altfel, însăși ipoteza stratului dublu electric, care stă la baza acestei relații, apare, în lumina concepțiilor actuale asupra miceliilor coloidale, ca un model prea schematic, deoarece reduce întregul complex de absorbție la o peliculă de lichid de grosime neglijabilă, purtătoare de sarcini electrice. Nu se face distincție între apa adsorbită din jurul particulelor și apa liberă din zona centrală a porilor.

Ținînd seama de aceste constatări, vom încerca să completăm schema stratului dublu, astfel încît să prindă aspectele esențiale ale condițiilor în care electro-osmoza se dezvoltă în pămînturile compresibile și să permită modelarea proceselor menționate. În acest sens vom avea în vedere următoarele elemente (fig. 1) :

a) Faptul că grosimea complexului de adsorbție este apreciabilă, putînd ajunge la ordinul de mărime al dimensiunilor porilor.

b) Prezența în pămînt a două categorii de apă : liberă (alcătuită din molecule dispuse haotic în masa de lichid) și adsorbită (cu moleculele orientate).

c) Mobilitatea scheletului pămînturilor compresibile.

d) Neuniformitatea porilor pămîntului.

Pentru înțelegerea mai în amănunt a felului în care se desfășoară procesele electro-osmotice, trebuie să ținem seama de caracteristicile alcătuirii complexului de adsorbție al particulelor.

Astfel, spre deosebire de moleculele apei libere, care au o distribuție haotică, moleculele de apă legată sînt orientate, oscilînd în jurul unei anumite poziții, determinată de situația lor față de particula solidă şi de cationii din complex. Din cauza intensităţii ridicate a cîmpului, de forţe existent în jurul particulelor, mobilitatea moleculelor de apă legată este mult redusă, ceea ce face ca viscozitatea apei adsorbite să fie ridicată. S-a constatat că mobilitatea ionilor complexului de adsorbţie este mult mai redusă decît în cazul unei soluţii apoase obişnuite. Tot pe seama acţiunii cîmpului de forţe electromoleculare se poate pune şi variaţia rezistivităţii electrice a pămîntului în funcţie de umiditate : pentru umidităţi corespunzătoare stării plastice, rezistivitatea nu variază substanţial ; de îndată ce umiditatea scade sub limita de frămîntare, valoarea rezistivităţii creşte foarte repede.

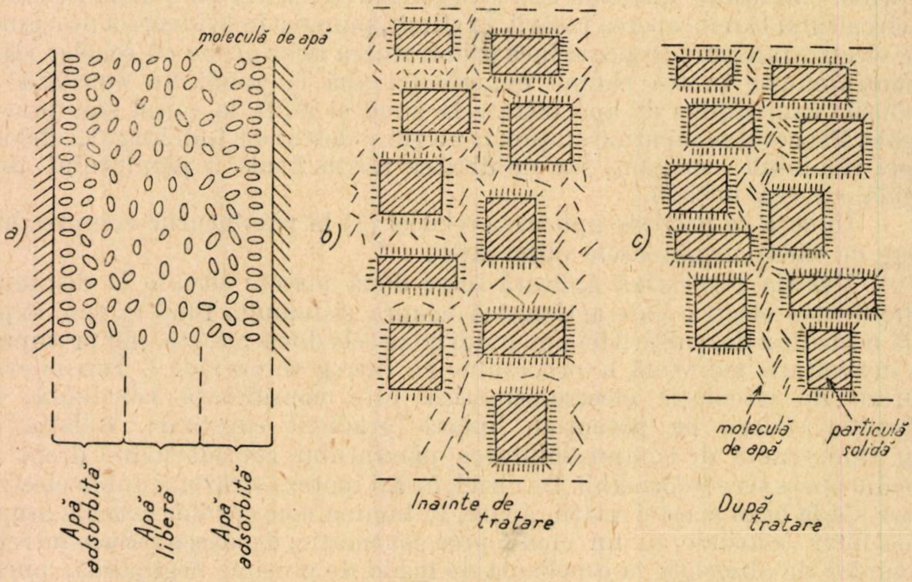


Fig. 1. — Schema dezvoltată a complexului de adsorbţie.

Orientarea cîmpului de forţe electromolecular este bine stabilită în jurul miceliilor de argilă, privite izolat unele de altele. În masa de pămînt acest cîmp nu mai are o orientare unitară, deoarece distribuirea particulelor fine în interiorul pămîntului este haotică. Situaţia nu se schimbă nici dacă luăm în considerare acţiunea cîmpului gravitaţional. Acesta, deşi are o direcţie bine precizată, este mult mai puţin intens decît cel electromolecular şi nu poate impune o orientare de ansamblu cîmpului sumat de forţe (electromolecular + gravitaţional).

Prin introducerea a doi electrozi în pămînt şi stabilirea unei diferenţe de potenţial între ei, ia naştere un cîmp electric, orientat, ca şi cel gravitaţional, însă mult mai puternic decît acesta. Intensitatea lui este comparabilă cu a cîmpului electromolecular al particulelor, ceea ce rezultă din faptul că este capabil să schimbe orientarea unei părţi din moleculele de apă ale complexului de adsorbţie şi să pună în mişcare cationii hidrataţi, deplasîndu-i de la anod spre catod.

În pămînt există în mod normal atît apă liberă, cît și adsorbită. Cîmpul electric acționează numai asupra complexului de adsorbție; prezența apei libere, care trebuie antrenată o dată cu cea adsorbită, constituie deci o frînă în dezvoltarea electro-osmozei. În aceeași ordine de idei, dacă se reprezintă diagrama vitezelor de deplasare a apei printr-un canal capilar în pămînt, se constată că, sub acțiunea cîmpului electric, vitezele sînt mult mai mari spre periferie, în zona apei adsorbite; sub acțiunea unei presiuni hidraulice, care antrenează în primul rînd apa liberă, vitezele sînt mai mari în centrul canalului, scăzînd spre margini, ceea ce arată, că, în acest din urmă caz apa adsorbită este cea care frînează mișcarea apei libere (fig. 2).

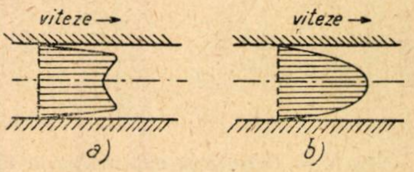


Fig 2. — Viteza de circulație a apei sub acțiunea unui gradient electric (*a*)și hidraulic (*b*).

Procesul de electro-osmoză se dezvoltă în pămînt în mod neuniform datorită microneomogenității pămîntului. În golurile de dimensiuni prea mari predomină apa liberă; acțiunea cîmpului electric este insuficientă pentru a o antrena. În porii prea mici, viscozitatea apei crește mult datorită intensității cîmpului electromolecular al particulelor; circulația electro-osmotică este și în acest caz stînjenită. La pămînturile compresibile, în măsura îndesării lor, unii pori mai mari se micșorează, favorizînd intensificarea electro-osmozei, iar alții mai mici, micșorîndu-se și mai mult, fac ca acest proces să se încetinească. Prin urmare, se poate afirma că desfășurarea proceselor electro-osmotice în pămînturile compresibile este variabilă în timp și spațiu.

Considerentele de mai sus se concretizează în următoarele ipoteze:

I. Cîmpul de forțe generat de diferența de potențial electric aplicată între doi electrozi înfipți în pămînt provoacă, pe lîngă procesul de electro-osmoză, o redistribuire a cîmpului de forțe existent în complexul de adsorbție și comunică acestui cîmp, inițial haotic, o orientare de ansamblu.

II. Prezența apei libere în pămînt și microneomogenitatea pămîntului fac ca procesul de electro-osmoză să se dezvolte neuniform: în același timp și în aceeași zonă din pămînt, intensitatea procesului electro-osmotic în pori alăturați diferă cu mărimea porilor și raportul dintre volumul de apă legată și apa liberă cuprinsă în ei (procesul putînd avea loc chiar numai în unii dintre pori).

★

În vederea verificării experimentale a ipotezelor enunțate, s-a recurs la unele consecințe deduse din considerarea lor.

A. Între acțiunea cîmpului gravitațional (sau a celui datorit unei presiuni hidraulice) și a unui cîmp electric exterior, asupra apei din pămînt, există un paralelism, marcat prin efectul comun de deplasare a apei, precum și prin analogia relațiilor analitice dintre gradientele respective și vitezele de filtrație rezultate prin aplicarea lor. Aceasta a făcut pe cercetătorii care au studiat acțiunea simultană a ambelor cîmpuri să sumeze efectele lor, considerîndu-le independente unul de altul, conform relației (3).

Cele două gradiente se influențează însă reciproc, în sensul că apariția cîmpului electric, provocînd modificarea cîmpului de forțe din pămînt, reduce influența forței de atracție dintre particule și moleculele periferice ale stratului de apă adsorbită și permite antrenarea lor în mișcare de către gradientul hidraulic (fig. 3). Pornind de la aceste considerente, se poate formula următoarea ipoteză :

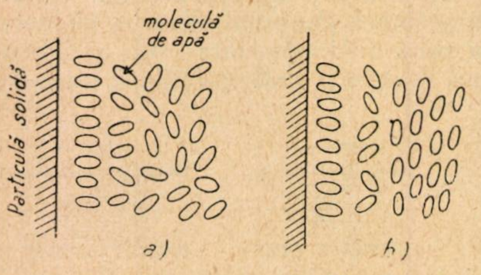

moleculă de apă
Particulă solidă
a)
b)

Fig. 3. — Orientarea moleculelor de apă sub acțiunea unui cîmp electric exterior.

Ca urmare a restructurării cîmpului de forțe din interiorul complexului de adsorbție prin apariția unui cîmp electric exterior, intensitatea (viteza) curentului de filtrație sub acțiunea cîmpului gravitațional și electric este mai mare decît suma intensităților (vitezelor) curentelor provocate de fiecare gradient în parte, dacă ar acționa separat

$$\alpha = \frac{q_{ei}}{q_e + q_i} > 1 \qquad (4)$$

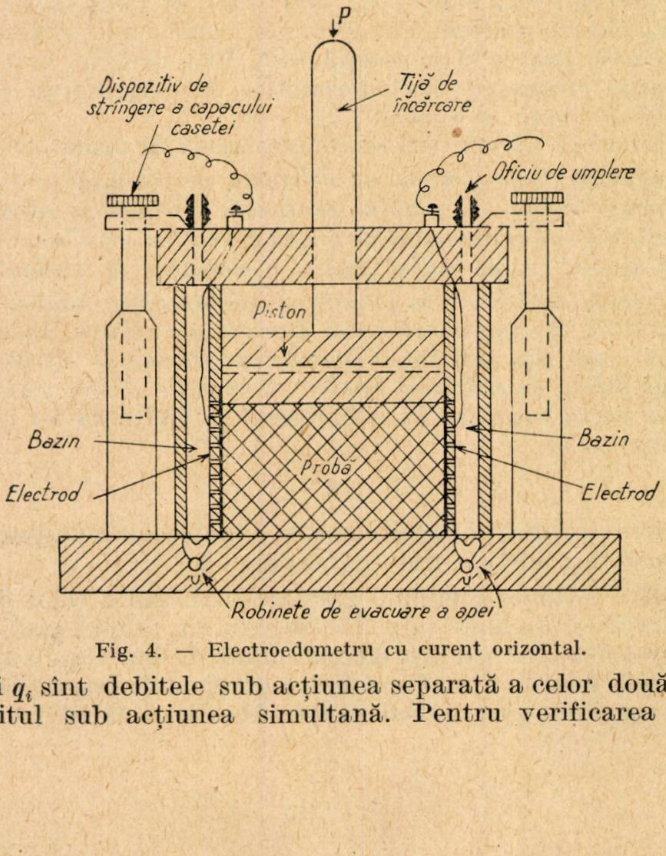

P
Dispozitiv de stríngere a capacului casetei
Tijă de încărcare
Oficiu de umplere
Piston
Bazin
Electrod
Probă
Bazin
Electrod
Robinete de evacuare a apei

Fig. 4. — Electroedometru cu curent orizontal.

în care q_e și q_i sînt debitele sub acțiunea separată a celor două gradiente, iar q_{ei} debitul sub acțiunea simultană. Pentru verificarea relației (4) s-a realizat în laboratorul de geotehnică al I. M. A. un tip de electroedometru reprezentat în figura 4. El se caracterizează prin faptul că presiunea mecanică se transmite vertical, iar gradientul electric acţionează orizontal, electrozii fiind plasaţi lateral. În acest mod se evită inconvenientele semnalate la alte tipuri de eletroedometre (evacuarea dificilă a gazelor, pătrundere defectuoasă a apei în probă) şi se permite o modelare mai corectă a situaţiilor întîlnite în practică.

Cu acest aparat au fost executate mai multe serii de probe, cu pămînturi cuprinse, din punct de vedere granulometric, între borchişul (nisip fin argilos) de la Filipeştii de Pădure, şi argila grasă de Teişani.

Încercările efectuate au dus la următoarele concluzii :

1. La toate pămînturile tratate, valoarea α din relaţia (4) a fost găsită supraunitară ($\alpha = 1{,}14 - 1{,}72$)*) (tabela 1).

2. În cazul loessului de Brăila, cu care s-au făcut încercări cu diferiţi gradienţi electrici şi hidraulici, creşterea valorii gradientului electric (exprimată prin creşterea densităţii de curent) a provocat o creştere a valorii α (fig. 5) ; pe de altă parte, variaţia gradientului hidraulic între 20 şi 35 nu a avut o influenţă sensibilă asupra valorii α.

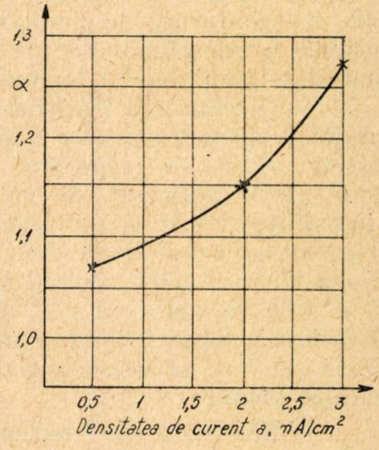


Fig. 5. — Variaţia coeficientului α în funcţie de densitatea de curent.

Tabela 1

Valorile coeficientului α pentru diferite pămînturi

Felul pămîntului	q_i cm³/h	q_{ei} cm³/h	q_e cm³/h	α
Argilă Pantelimon	0,48	3,73	2,40	1,29
Argilă Jimbolia	2,12	7,00	2,30	1,58
Argilă Teişani	0,06	1,23	0,86	1,34
Caolin spălat	0,35	8,60	5,07	1,58
Argilă marnoasă Lechinţa	0,43	4,20	2,75	1,32
Argilă roşie Constanţa	0,10	1,62	1,16	1,28
Argilă Socola — Iaşi	0,27	5,20	2,75	1,32
Lut Constanţa-faleză	0,16	1,63	1,16	1,24
Loess Brăila	1,60	11,50	8,50	1,14
Borchiş Filipeştii de Pădure	1,28	5,40	2,76	1,34

---

*) Dacă se scoate în evidenţă influenţa gradientului electric asupra celui hidraulic, se poate determina un alt coeficient [10] :

$$K_{\Phi e} = \frac{q_{ei} - q_e}{q_i}. \tag{5}$$

Valorile acestui coeficient, calculat cu expresia (5) au oscilat între 1,88 şi 10,10.

3. La pămînturile cu coeficienți de permeabilitate extrem de scăzuți, care, pentru începerea procesului de filtrație, necesită aplicarea unui gradient hidraulic inițial s-a constatat că prezența cîmpului electric face ca aplicarea unui gradient hidraulic să fie totuși simțită, chiar pentru valori mai mici ale gradientului. Aceste constatări confirmă ipoteza enunțată mai sus, asupra transformării de către cîmpul electric a unei părți din apa adsorbită în apă liberă, prin slăbirea influenței acțiunii forțelor electromoleculare.

B. Analiza procesului de electro-osmoză în pămînturile compresibile, în conformitate cu ipotezele I și II, duce la concluzia existenței posibile a unor fenomene de inerție în dezvoltarea acestui proces. Avem în vedere următoarele fenomene :

— Declanșarea filtrației electro-osmotice numai prin aplicarea unui gradient electric superior unei anumite valori minime (gradient electric inițial). Valoarea respectivă este condiționată de necesitatea aplicării unui efort suficient de mare pentru a învinge rezistența datorită viscozității ridicate a apei legate și inerției masei de apă liberă. Fenomenul este similar cu rezistența pasivă datorită frecării statice, pentru depășirea căreia trebuie mărit efortul necesar punerii în mișcare a unui corp pînă la o valoare egală cu cea corespunzătoare frecării maxime. Gradientul electric inițial este analog cu gradientul inițial din legea lui Darcy generalizată și cu efortul inițial de lunecare constatat la pămînturile vîscozo-plastice.

— Existența unei perioade de amorsare a curentului electro-osmotic pînă la atingerea stării de regim. Această perioadă este condiționată de consumul de energie necesar redistribuirii particulelor în noul cîmp de forțe creat prin aplicarea potențialului electric și de dezvoltarea neuniformă a electro-osmozei în porii neegali ai pămîntului.

— Creșterea neproporțională a debitului electro-osmotic în raport cu creșterea gradientului electric. Creșterea valorii rezistenței la mișcare opusă de peliculele complexului de adsorbție, pe măsură ce ne apropiem de suprafața nucleului mineral, precum și rezistența inegală datorită prezenței apei libere, în funcție de mărimea porilor, face ca volumul de apă pus în mișcare să depindă de mărimea gradientului electric. Creșterea gradientului are drept urmare nu numai o creștere proporțională a vitezei electro-osmotice și implicit a debitului electro-osmotic, ci și o creștere suplimentară a debitului, datorită antrenării în mișcare a unor noi pelicule de apă. Din această cauză, relația (2) ar trebui pusă sub forma :

$$q_e = v_e \cdot A + q_{es}, \tag{6}$$

în care debitul suplimentar este

$$q_{es} = f(e). \tag{7}$$

Considerentele de mai sus conduc la următoarea ipoteză :

În funcție de compoziția și umiditatea pămîntului este posibil să existe un gradient electric minim (gradientul electric inițial), necesar declanșării procesului de electro-osmoză. Amorsarea curentului electro-osmotic, dezvol-

Tabela 2

Caracteristicile geotehnice și electro-osmotice ale pămînturilor experimentate

Felul pămîntului	Compoziția granulometrică (%)					Limita de		Ind. plast.	Umid. max. mol.	ρ Ω cm	k cm/s	k_e cm²/sV	c mAh/cm³
	peste 0,05 mm	0,05-0,01 mm	0,01 – 5μ	5—2μ	sub 2μ	curgere	frămîntare						
Argilă Pantelimon	1	17	7	11	64	45,4	13,8	31,6	14,6	1 500	$1{,}06 \times 10^{-7}$	$0{,}60 \times 10^{-5}$	30,0
Argilă Jimbolia	0	15	23	27	35	51,0	17,2	33,8	24,6	1 350	$4{,}45 \times 10^{-7}$	$0{,}91 \times 10^{-5}$	22,6
Argilă Teișani	5	18	13	21	43	136,0	21,3	114,7	22,2	374	$1{,}38 \times 10^{-8}$	$0{,}89 \times 10^{-5}$	84,0
Caolin spălat	5	15	16	22	42	91,0	29,0	62,0	26,0	2 300	$7{,}3 \times 10^{-7}$	$0{,}82 \times 10^{-5}$	14,8
Argilă marnoasă Lechința	9	40	11	13	27	47,0	18,4	28,6	15,8	1 400	$1{,}24 \times 10^{-7}$	$0{,}56 \times 10^{-5}$	26,2
Argilă roșie Constanța	1	4	10	10	75	82,2	24,9	57,3	—	5 500	$2{,}8 \times 10^{-8}$	$0{,}88 \times 10^{-5}$	62,0
Argilă Socola—Iași	1	13	14	24	38	68,0	20,1	47,9	—	1 150	$9{,}2 \times 10^{-7}$	$0{,}98 \times 10^{-5}$	26,2
Lut Constanța-faleză	5	33	13	12	37	30,0	12,5	17,5	—	2 390	—	$1{,}38 \times 10^{-5}$	14,4
Loess Brăila	10	53	6	8	23	31,5	13,1	18,4	—	3 060	—	$0{,}95 \times 10^{-5}$	17,0

tarea lui pînă la un stadiu de echilibru, necesită un anumit timp, condiționat de consumul de energie necesar restructurării unor elemente componente ale complexului de adsorbție și de antrenarea succesivă în mișcare a apei din orizonturi peliculare supuse la forțe de adsorbție de diferite intensități și din pori de mărimi neegale.

Trebuie subliniat însă că fenomenele de inerție în procesul de electroosmoză nu se constată la orice fel de pămînturi argiloase și în orice stare de umiditate și îndesare a lor. Această observație este necesară pentru a preveni elaborarea unor concluzii negative, nejuste, din încercarea de verificare a acestor fenomene pe un pămînt oarecare și într-o stare fizică în care ele nu ar avea o dezvoltare sensibilă.

Pentru verificarea experimentală a ipotezei de mai sus s-au efectuat determinări destinate să dovedească existența gradientului electric inițial și a unei relații neliniare între gradientul aplicat și debitul electroosmotic, pentru valori foarte mici ale gradientului. Determinările au fost făcute pe 9 tipuri de pămînturi, indicate în tabela 2. Electroedometrul folosit a fost de tipul celui din figura 4, la care însă bazinul lateral de reținere a apei scurse la catod a fost micșorat și prevăzut cu un tub gradat în așa fel ca să permită măsurarea unor cantități de apă electrodrenată deosebit de mici (de ordinul a 0,05 – 0,10 cm^3).

Rezultatele obținute sînt cuprinse în tabela 3.

Tabela 3

Studiul fenomenelor de inerție electro-osmotică

Felul pămîntului	Apă electrodrenată (cm^3)				$\frac{Q_{0,1}}{Q_{0,05}}$ seria I	$\frac{Q_{0,1}}{Q_{0,05}}$ seria II
	seria I		seria II			
	$a = 0{,}05$ mA/cm^2	$a = 0{,}1$ mA/cm^2	$a = 0{,}05$ mA/cm^2	$a = 0{,}1$ mA/cm^2		
Argilă Pantelimon	0,00	0,90	0,60	0,10	∞	6,0
Argilă Jimbolia	0,00	0,80	0,50	0,10	∞	5,0
Argilă Teișani	0,00	0,27	0,27	0,00	∞	∞
Caolin spălat	0,00	0,63	0,90	0,10	∞	9,0
Argilă marnoasă Lechința	0,10	0,80	0,87	0,10	8,0	8,7
Argilă roșie Constanța	0,00	0,80	0,80	0,10	∞	8,0
Argilă Socola—Iași	0,00	0,63	0,51	0,00	∞	∞
Lut Constanța—faleză	0,10	0,30	1,00	0,00	3,0	∞
Loess Brăila	0,11	0,76	0,83	0,30	6,9	2,8

Din examinarea tabelei 3 rezultă că, pentru densitatea de 0,05 mA/cm^2 cantitatea de apă drenată electric este practic neglijabilă, în timp ce pentru 0,1mA/cm^2 se constată o drenare apreciabilă. Raportul cantităților de apă drenată pentru 0,1 și respectiv 0,05 mA/cm^2 este în orice caz mai mare decît 2, ceea ce dovedește existența relației neliniare între gradient și debit, presupusă inițial. S-a constatat de asemenea că, pentru aceeași densitate de curent, cantitatea drenată diferă după modul în care se succed densitățile aplicate, deci variația în timp a curentului influențează asupra desfășurării proceului de drenare.

În vederea stabilirii valorii gradientului inițial, s-au executat, cu loess de Brăila, două cicluri de probe în electroedometru, cu intensități de curent diferite. S-a obținut un gradient inițial de aproximativ 0,12V/cm. Studiile experimentale pe probe mici asupra fenomenelor de inerție în electro-osmoză comportă dificultăți, din cauza căderii lor de potențial reduse și a cantităților mici de apă drenată. Pentru a se evita parțial aceste inconveniente, s-au făcut încercări cu probe mai mari — 10 × 10 × 10 cm — precum și cu probe de lungimi diferite — 10 și 50 cm. Rezultatele experiențelor, efectuate pe caolin și pe loess de Brăila, au dus la concluzii analoage celor expuse mai sus. S-a mai observat, cu această ocazie, că pentru drenarea unui volum unitar de apă este necesar un consum de electricitate mai mare în cazul probelor mai lungi, decît la cele mai scurte, deși gradientul electric este același. De asemenea, consumul unitar de electricitate a rezultat mai mare, atunci cînd tratarea s-a făcut cu densități de curent reduse, decît atunci cînd s-au folosit densități de curent mai ridicate. Aceste constatări confirmă ipotezele enunțate mai înainte și anume : la probele mai lungi, fenomenele de inerție sînt mai pronunțate, deoarece cantitatea totală de apă liberă este mai mare; de aici, un consum specific de electricitate mai ridicat (tabela 4).

Tabela 4

Influența lungimii probelor

Felul pămîntului	Lungimea cm	*I* mA	Timp ore	*I. t* mAh	*Q* cm^3	*I.t/Q* mAh/cm^3
Caolin	50	50	70	3 500	108	32,4
Caolin	10	50	70	3 500	278	12,6
Loess	50	50	46	2 300	168	13,7
Loess	10	50	46	2 300	200	11,5

Creșterea densității de curent produce antrenarea în mișcare a unei cantități sporite de apă, deci rezultă un consum unitar mai redus decît la densități de curent mici (tabela 5).

Tabela 5

Influența densității de curent

Felul pămîntului	Lungimea cm	*I* mA	Timp ore	*I.t* mAh	*Q* cm^3	*I.t/Q* mAh/cm^3
Caolin	10	10	50	500	11,5	43,5
Caolin	10	50	50	2500	90,0	27,8

★

În cadrul studiului comportării pămîntului la trecerea curentului electric continuu este necesară definirea unor coeficienți caracteristici, specifici proceselor de această natură. Coeficienții respectivi pot fi definiți în conformitate cu relația (1), avînd în vedere faptul că este o relație foarte simplă, care se verifică, în prima aproximație, în cazurile curente. În cazul cînd efectul principal este transportul electro-osmotic, acești coeficienți sînt rezistivitatea electrică ρ și coeficientul de permeabilitate electro-osmotică k_e.

Rezistivitatea caracterizează comportarea generală a pămîntului la trecerea curentului electric.

Coeficientul k_e caracterizează pămîntul în ceea ce privește rezistența opusă la scurgerea electro-osmotică a apei, și reprezintă viteza aparentă de circulație a apei prin pămînt sub acțiunea unui gradient electric unitar.

În afara acestor coeficienți, în vederea aplicațiilor practice ale fenomemului, este necesar a se defini un coeficient care să exprime randamentul procesului de electro-osmoză, dependența dintre consumul de electricitate și cantitatea de apă pusă în mișcare. Un astfel de coeficient poate fi consumul specific de electricitate, definit drept cantitatea de electricitate necesară eliminării din pămînt pe cale electro-osmotică, a unui volum unitar de apă. Unitățile sale pot fi : coulombi/cm^3, mAh/cm^3 etc. Spre deosebire de alți indici folosiți în scopuri analoage, ca de exemplu consumul specific de energie electrică, exprimat în kWh/m^3, indicele propus nu depinde de datele geometrice ale masivului tratat sau de alte condiții experimentale, ci numai de carateristicile pămîntului. Din această cauză, acest indice poate fi socotit ca o caracteristică a pămîntului.

Considerarea coeficienților ρ, k_e și c drept caracteristici ale pămînturilor a necesitat o verificare, care constă în delimitarea domeniului de variație a valorilor respective, prin determinarea lor pe un număr ridicat de probe, pe diferite tipuri de pămînturi. Această verificare s-a făcut folosindu-se o metodă unică de tratare (probe cilindrice de 5 cm înălțime, densitate de curent de 2mA/cm^2, timp de tratare 5 ore).

Rezultatele obținute sînt reprezentate în figurile 6, 7, și 8. Din examinarea lor se pot deduce următoarele :

1. La marea majoritate a pămînturilor examinate, rezistivitatea a avut valori între 500 și 3 000 Ω cm. Este de observat că limitele de variație sînt relativ largi, în funcție de natura, porozitatea și umiditatea materialului. Ele concordă cu cele indicate în literatură.

2. Coeficienții de permeabilitate electro-osmotică k_e au apărut cu valori grupate între 0,5 și $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm^2/sV. Se constată că domeniul de variație este incomparabil mai restrîns decît al coeficientului de permeabilitate hidraulică k. Din punct de vedere al aplicațiilor practice, rămîne totuși necesar să se determine valoarea respectivă k_e pentru fiecare caz în parte. Gama de variații indicată în literatură este ceva mai largă decît cea găsită în laborator, datorită probabil metodelor variate de determinare folosite de diferiții autori.

3. Consumul specific de electricitate c s-a grupat, la cele mai multe dintre pămînturi, între 2,5 și 15 mAh/cm^3.

S-a căutat să se stabilească anumite relații cel puțin calitative între coeficienții electro-osmotici și respectiv indicele de plasticitate sau de granulozitatea pămîntului. Deși numărul încercărilor efectuate este considerat insuficient, totuși se poate afirma că, în general, pămînturile cu plasticitate ridicată au o rezistivitate electrică mai scăzută ; dimpotrivă valoarea consumului specific de electricitate a fost mai mare la pămînturile mai plastice decît cele mai puțin plastice (tabela 6).

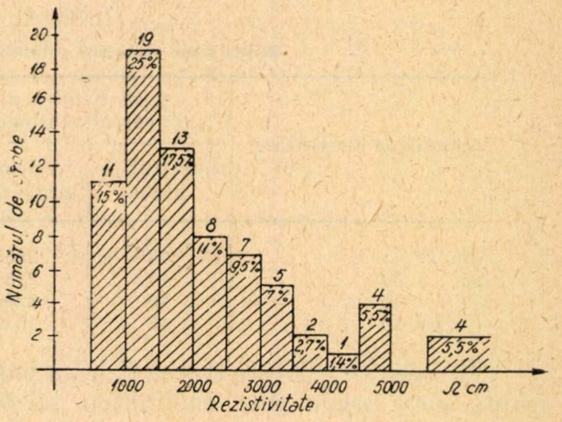


Fig. 6. — Domeniul de variaţie a rezistivităţii electrice a pămînturilor.

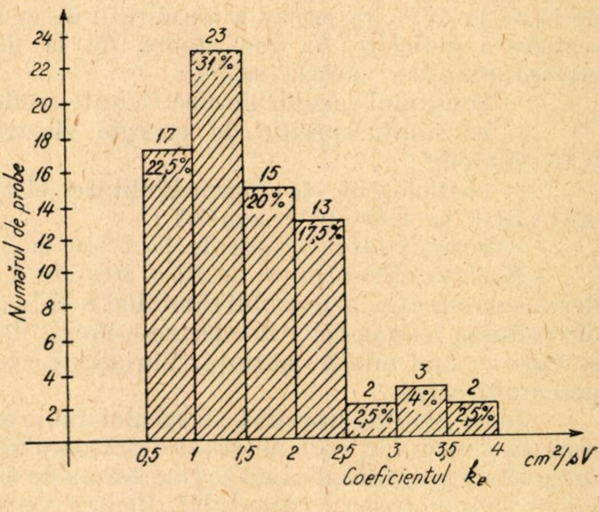


Fig. 7. — Domeniul de variaţie al coeficientului k_e 10^5.

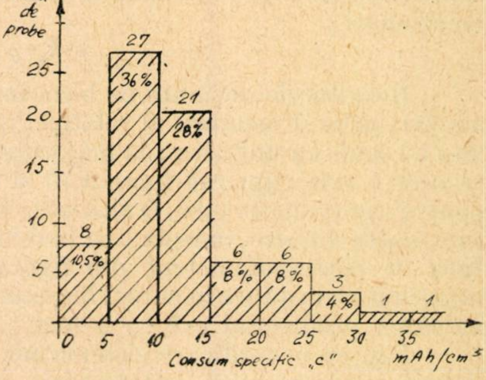


Fig. 8. — Domeniul de variaţie al consumului specific de electricitate.

Tabela 6

Relația dintre plasticitate și indicii electro-osmotici

Indicele de plasticitate	Rezistivitatea ρ (în curent continuu)		Consumul specific de electricitate c	
	numărul de probe	valoarea medie Ω cm	numărul de probe	valoarea medie mAh/cm³
sub 20	13	2855	13	8,69
20 ... 30	17	2180	18	10,73
30 ... 40	16	1293	17	14,22
peste 40	15	1549	15	16,76

În ceea ce privește starea fizică a pămîntului, pe baza unor încercări asupra unor argile albe, caolinitice, aflate în diferite stări de îndesare, umiditate și consistență, s-a constatat că, pentru o creștere a porozității de la 56 la 69%, respectiv a umidității de la 43,4 la 71,3%, însoțite de o scădere a indicelui de consistență de la 0,86 la 0,59, caracteristicile electro-osmotice variază astfel:

— consumul specific de electricitate scade de la 15,7 la 8,3 mAh/cm^3;

— consumul specific de energie electrică scade de la 0,165 la 0,10 Wh/cm^3;

— coeficientul de permeabilitate electro-osmotică crește de la $0{,}84 \cdot 10^{-5}$ la $1{,}40 \cdot 10^{-5}$ cm^2/sV;

— rezistivitatea crește de la 2 340 la 2 640 Ω cm.

Rezultatele obținute arată o creștere a porozității, însoțită de scăderea consistenței, materialul rămînînd însă în domeniul plastic, favorizează dezvoltarea fenomenelor de electro-osmoză, deoarece circulația apei legate se face cu mai multă ușurință. Variația rezistivității este redusă și deci nesemnificativă.

Între ipoteza teoretică a stratului dublu asupra procesului de electroosmoză și modul în care acesta se desfășoară în realitate pot exista deosebiri între altele prin faptul că nu se ține seama de uscarea și îndesarea pămîntului în timpul trecerii curentului. Pentru verificarea corespondenței între concluziile teoretice și realitate s-a pornit de la relația dintre coeficienții menționați

$$c \cdot k_e \cdot \rho = 1. \tag{8}$$

Rezultatele obținute pe baza încercărilor amintite au arătat că întradevăr, primul membru al relației (8) are valori foarte apropiate între ele, deși nu egale cu unitatea: la majoritatea pămînturilor, valoarea produsului respectiv este cuprinsă între 0,70 și 0,95, frecvența maximă fiind atinsă pentru aproximativ 0,80. O altă serie de experiențe, pe zece tipuri de pămînturi foarte diferite, începînd cu borchiș și terminînd cu argilă grasă, executate în electroedometrul din figura 4 în care starea probei a putut fi menținută constantă în cursul încercării, a dus la rezultate și mai apropiate: valoarea produsului $c \cdot k_e \cdot \rho$ a fost cuprinsă între 0,76 și 0,83.

Pentru o verificare sistematică a relației dintre coeficienții electroosmotici și compoziția pămîntului, s-au făcut încercări cu amestecuri de nisip fin uniform și argilă albă caolinitică, în proporții variate, mergînd de la 2,5% pînă la 100% argilă (în total 10 amestecuri). S-a căutat ca materialul să fie adus în aceeași stare de porozitate (circa 40%) și de saturare. S-au făcut de asemenea determinări și cu indice de consistență constant (0,60). S-a constatat că, în funcție de proporția de argilă atît consumul specific de electricitate c, cît și cel de energie electrică C_a, scad, atunci cînd scade procentajul de argilă, ating o valoare minimă pentru 20% argilă și apoi reîncep să crească (fig. 9). Acest rezultat confirmă ipotezele enunțate asupra frînării procesului electro-osmotic pe de o parte de către viscozitatea ridicată a apei adsorbite (la amestecurile bogate în argilă), pe de alta de cantitatea mare de apă liberă care trebuie antrenată (la amestecurile bogate în nisip), stabilind în cazul amestecurilor experimentate, randamentul maxim pentru o proporție de circa 20% argilă și 80% nisip. Considerentele expuse pot constitui în parte o explicație atît a domeniului

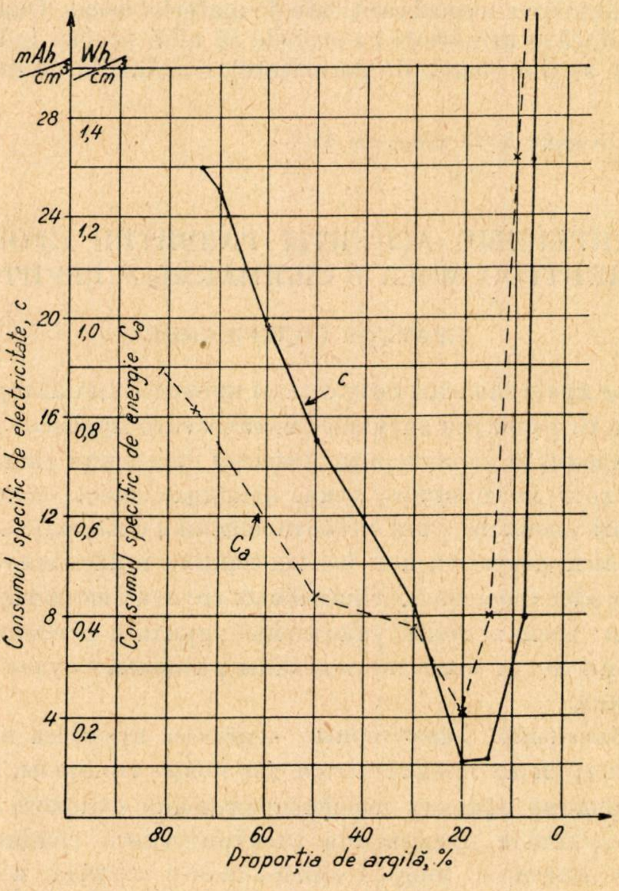


Fig. 9. — Consumul specific de electricitate și de energie pentru diferite amestecuri de nisip cu argilă caolinitică.

limitat de variație a consumului specific, și mai ales a coeficientului de permeabilitate electro-osmotică, precum și a deosebirilor constatate între variația acestui coeficient și a celui de permeabilitate hidraulică.

Este de subliniat că rezultatele arătate au fost obținute pe probe de pămînt de egală porozitate, realizată prin modelarea unor cilindri de volum impus, folosind mereu aceeași cantitate de material uscat. Dacă porozitățile diferă (de ex. dacă se urmărește ca probele să aibă același indice de consistență, fără a se ține seama de porozitate), concluziile de mai sus nu mai sînt valabile.

Primit la redacție la 28 noiembrie 1957.

ХАРАКТЕРНЫЕ АСПЕКТЫ РАЗВИТИЯ ПРОЦЕССА ЭЛЕКТРООСМОСА В СЖИМАЕМЫХ ГРУНТАХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В статье представлены результаты проведенных авторами исследований в области развития электроосмотического процесса в сжимаемых грунтах. Приводятся характерные аспекты поведения сжимаемых грунтов при проходе постоянного тока, неподдающиеся толкованию при помощи схемы двойного слоя и соотношения Гельмгольца, в том виде, в каком они используются при исследованиях в настоящее время.

Процесс электроосмоса в сжимаемых грунтах включает три различных действия: дренаж воды, уплотнение грунта и протекание воды через грунт; они могут быть исследованы раздельно путем соответствующей методики.

Для объяснения характерных аспектов процесса электроосмоса в сжимаемых грунтах предлагаются две новые гипотезы. Первая относится к побочному эффекту перераспределения силового поля внутри грунта в результате применения электрического градиента. Вторая относится к влиянию микронеоднородности грунта и присутствия свободной и адсорбированной воды на неравномерное развитие процесса электроосмоса в грунте.

Для экспериментальной проверки этих гипотез рассматривается одновременное действие электрического и гидравлического градиентов на перемещение воды в грунте, а также и некоторые явления инерции в развитии процесса электроосмоса в сжимаемых грунтах (исходный электрический градиент, влияние силы тока на удельный расход электроэнергии).

В заключение приводятся данные относительно характерных электроосмотических коэффициентов грунтов.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Развернутая схема адсорбционного комплекса.

Рис. 2. — Скорость циркуляции воды под влиянием электрического (*a*) и гидравлического (*b*) градиентов.

Рис. 3. — Ориентация молекул воды под влиянием внешнего электрического поля.

Рис. 4. — Электроэдометр с горизонтальным током.

Рис. 5. — Изменение коэффициента α в зависимости от плотности тока.

Рис. 6. — Область изменения удельного сопротивления грунтов электрическому току.

Рис. 7. — Область изменения коэффициента k_c.

Рис. 8. — Область изменения удельного расхода электроэнергии.

Рис. 9. — Удельный расход электроэнергии при различных смесях песка с каолиновой глиной.

ASPECTS CARACTÉRISTIQUES DE LA MARCHE DU PHÉNOMÈNE D'ÉLECTRO-OSMOSE DANS LES TERRES COMPRESSIBLES

RÉSUMÉ

L'article expose les résultats des études entreprises par les auteurs au sujet de la marche du phénomène électro-osmotique dans les terres compressibles. On y décrit des aspects caractéristiques du comportement des terres compressibles lors du passage du courant continu, aspects qui ne peuvent être interprétés à l'aide du schéma à double couche et de la relation de Helmholtz, de la même manière que dans les études antérieures.

Le phénomène électro-osmotique dans les terres compressibles, comporte trois actions distinctes : le drainage de l'eau, le tassement de la terre et le transport de l'eau à travers la terre. Ces actions peuvent être étudiées séparément, par des méthodes adéquates.

Deux nouvelles hypothèses ont été émises afin d'expliquer les aspects caractéristiques du phénomène d'électro-osmose dans les terres compressibles. La première se rapporte à l'effet supplémentaire de redistribution du champ des forces à l'intérieur de la terre, comme suite de l'application du gradient électrique. La seconde a trait à l'influence de la micro-non-homogénéité de la terre et de la présence de l'eau libre et absorbée, sur la marche non uniforme de l'électro-osmose dans la terre.

En vue d'une vérification expérimentale de ces hypothèses, on examine l'action simultanée d'un gradient électrique et d'un gradient hydraulique sur le déplacement de l'eau à travers la terre, ainsi que certains phénomènes d'inertie au cours de la marche du processus d'électro-osmose dans les terres compressibles (gradient électrique initial, influence de l'intensité du courant sur la consommation spécifique d'électricité).

En conclusion, on presente des données sur les coefficients électro-osmotiques caractéristiques des terres.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Schéma développé du complexe d'absorption.

Fig. 2. — Vitesse de circulation de l'eau sous l'action d'un gradient électrique (*a*) et hydraulique (*b*).

Fig. 3. — Orientation des molécules d'eau sous l'action d'un champ électrique extérieur.

Fig. 4. — Electro-édomètre à courant horizontal.

Fig. 5. — Variation du coefficient α en fonction de la densité du courant.

Fig. 6. — Domaine des variations de la résistivité électrique des terres.

Fig. 7. — Domaine des variations du coefficient k_c.

Fig. 8. — Domaine des variations de la consommation spécifique d'électricité.

Fig. 9. — Consommation spécifique d'électricité et d'énergie pour différents mélanges de sable et d'argile kaolinitique.

BIBLIOGRAFIE

1. W. SCHAAD, R. HAEFELI, *Elektrokinetische Erscheinungen und ihre Anwendungen in Bodenmechanik.* Schweizerische Bauzeitung, *16—18* (1947).
2. A. BELLUIGI, *Vollständige Entwässerung des wassergehaltigen Bodens durch Elektroosmose.* Die Bautechnik, *1* (1957).
3. A. B. BRIDGEWATER, *The occurrence of electrokinetic phenomena in soils.* Civil Engineering, **45**, 526—529 (1950).
4. К. М. ПОЛИВАНОВ, А. В. НЕТУШИЛ и др., *Применение электроосмотического воздействия в гидротехнических сооружениях.* Электричество, *8* (1951).
5. Н. М. БУРДАК, *Электроосмотическое воздействие на фильтрацию грунтовых вод.* Диссертация. Москва (1952).
6. В. С. ШАРОВ, *Механизм действия электрического тока на искусственное закрепление грунтов.* Москва (1952).
7. Б. П. ГОРБУНОВ, *О применении электроосмоса для обезвоживания намытых лессовидных грунтов.* Труды Ин-та Сооружений АН Узб. ССР, Ташкент.
8. Г. М. ЛОМИЗЕ, А. В. НЕТУШИЛ, *Применение электроосмоса при водопонижении.* Гидротехническое строительство, *3* (1956).
9. H. R. KRUIT, *Colloid Science*, Amsterdam, 1952.
10. * * * *Электрокинетические свойства капиллярных систем.* Издат. Акад. Наук СССР, Москва, 1956.

NOTE

ASUPRA ANALOGIEI SARCINILOR TERMICE ÎN PROBLEMA TERMOELASTICĂ A ÎNVELITORILOR SUBŢIRI*)

DE

LIVIU LIBRESCU

În această notă continuăm o lucrare anterioară de termoelasticitate a învelitorilor subţiri [1].

Considerînd că este util — aceasta pentru cazul cînd se dau condiţiile geometrice pe contur — vom prezenta în prima parte a lucrării metoda de rezolvare a problemei termoelastice în deplasări, iar în partea a doua vom expune, pentru cazul termoelastic, metoda de rezolvare aproximativă, bazată pe ipotezele proprii teoriei fără momente.

1. Reducerea formală a ecuaţiilor de echilibru elastic a învelitorilor subţiri aflate în prezenţa unui cîmp de temperatură neuniform, la ecuaţiile de echilibru elastic a învelitorilor în care cîmpul de temperatură neuniform este nul

În acest scop reluăm ideea analogiei *sarcinilor termice* sub forma schiţată de S. G. Vinokurov [2].

Vom porni de la ecuaţiile de echilibru elastic a învelitorilor, sub forma dată de A. L. Goldenweiser [3], ecuaţii ce-şi menţin forma şi în cazul unui cîmp de temperatură neuniform

$$\nabla_{\alpha} T^{\beta\alpha} - b^{\beta}_{\alpha} N^{\alpha} = - F^{\beta}, \tag{1}$$

$$b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \nabla_{\lambda} N^{\lambda} = F^{3}, \tag{1'}$$

$$\nabla_{\lambda} L^{\omega\lambda} - N^{\omega} = c^{\omega\lambda} M_{\lambda}, \tag{1''}$$

$$- c^{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + c^{\varphi}_{\alpha} b_{\varphi\beta} L^{\alpha\beta} = 0. \tag{1'''}$$

În aceste relaţii $T^{\alpha\beta}$ sînt componentele tensorului eforturilor tangenţiale; N^{α} — componentele tensorului eforturilor transversale; $L^{\alpha\beta}$ — componentele tensorului moment; F^{α}, F^{3} — componentele vectorului forţelor masice şi sarcinilor exterioare; M^{α} — componentele vectorului momentelor exterioare ; $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — coeficienţii primei, respectiv celei de a doua forme fundamentale a suprafeţei mediane nedeformate ; $c^{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$ — componentele contravariante respectiv covariante ale tensorului antisimetric definit astfel*)

---

*) Comunicare prezentată la Sesiunea ştiinţifică a Academiei R.P.R., Filiala Timişoara, din 30 ianuarie — 2 februarie 1958.

$$c^{12} = -c^{21} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad c^{\alpha\alpha} = 0$$

$$c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a}, \quad c_{\alpha\alpha} = 0.$$

Exprimînd în ecuaţiile de echilibru (1), (1′) şi (1‴) pe N^{ω} prin

$$N^{\omega} = \nabla_{\lambda} L^{\omega\lambda} - c^{\omega\lambda} M_{\lambda}, \tag{2}$$

acestea devin

$$\nabla_{\alpha} T^{\beta\alpha} - b^{\beta}_{\omega} \nabla_{\lambda} L^{\omega\lambda} = -F^{\beta} - b^{\beta}_{\omega} c^{\omega\lambda} M_{\lambda}, \tag{3}$$

$$b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \nabla_{\omega} \nabla_{\lambda} L^{\omega\lambda} = F^{3} + c^{\omega\lambda} \nabla_{\omega} M_{\lambda}, \tag{3′}$$

$$-c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + c^{\cdot\lambda}_{\alpha} b_{\lambda\beta} L^{\alpha\beta} = 0. \tag{3″}$$

Ţinînd seama în ecuaţiile de echilibru (3) de relaţiile fizice deduse în [1] şi date sub forma**)

$$T^{\omega\gamma} = \underset{*}{T}^{\omega\gamma} - \frac{2\,Eh}{1-\nu} \alpha T a^{\omega\gamma} \tag{4}$$

$$L^{\omega\gamma} = \underset{*}{L}^{\omega\gamma} - \frac{2}{3} \frac{Eh^{3}}{1-\nu} \alpha (a^{\omega\gamma} T' - b^{\omega\gamma} T), \tag{4′}$$

unde

$$\underset{*}{T}^{\omega\gamma} = \frac{2\,Eh}{1-\nu^{2}} (a^{\omega\alpha} a^{\gamma\beta} + \nu c^{\omega\alpha} c^{\gamma\beta}) p_{\alpha\beta} \tag{5}$$

şi

$$\underset{*}{L}^{\omega\gamma} = \frac{2\,Eh^{3}}{3(1-\nu^{2})} (a^{\omega\alpha} a^{\gamma\beta} + \nu c^{\omega\alpha} c^{\gamma\beta}) q_{\alpha\beta} \tag{5′}$$

reprezintă componentele tensorului eforturilor tangenţiale, respectiv componentele tensorului moment, date în absenţa cîmpului de temperatură neuniform ($p_{\alpha\beta}$ şi $q_{\alpha\beta}$ reprezintă deformaţiile tangenţiale, respectiv cele de încovoiere a suprafeţei mediane a învelitoarei). Se obţin ecuaţiile

$$\nabla_{\alpha} \underset{*}{T}^{\beta\alpha} - b^{\beta}_{\omega} \nabla_{\lambda} \underset{*}{L}^{\omega\lambda} = -F^{\beta} - b^{\beta}_{\omega} c^{\omega\lambda} M_{\lambda} + \frac{2\,Eh}{1-\nu} \alpha a^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} T -$$

$$-\frac{2}{3} \frac{Eh^{3}}{1-\nu} \alpha b^{\beta}_{\omega} \nabla_{\lambda} (a^{\omega\lambda} T' - b^{\omega\lambda} T), \tag{6}$$

---

*) În aceste expresii cît şi în cele ce vor urma, indicii greci pot lua valorile 1, 2.

**) Eucuaţiile fizice au fost deduse în cadrul următoarelor ipoteze :

a) Ipoteze Love-Kirchoff ;

b) nulităţii componentei σ^{33} a tensorului tensiune ;

c) luării în considerare a termenilor ce conţin pe h la puterea cea mai mică ;

d) independenţei constantelor elastice E, ν şi a coeficientului de dilatare liniară α cu temperatura ;

e) luării funcţiei de temperatură $t(x^{i})$ sub forma $t(x^{i}) = T(x^{\alpha}) + x^{3} T'(x^{\alpha})$.

$$b_{\alpha\beta}\, \underset{*}{T}^{\alpha\beta} + \nabla_\omega \nabla_\lambda \underset{*}{L}^{\omega\lambda} = F^3 + c^{\omega\lambda} \nabla_\omega M_\lambda + \frac{4\, Eh}{1-\nu} H\, \alpha\, T +$$

$$+ \frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\nu}\, \alpha \nabla_\omega \nabla_\lambda (a^{\omega\lambda}\, T' - b^{\omega\lambda} T), \tag{6'}$$

$$- c_{\alpha\beta}\, \underset{*}{T}^{\alpha\beta} + c_\alpha^{\cdot\lambda}\, b_{\lambda\beta} \underset{*}{L}^{\alpha\beta} = \frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\nu}\, \alpha\, c_\alpha^{\cdot\lambda}\, b_{\lambda\beta} (a^{\alpha\beta}\, T' - b^{\alpha\beta}\, T). \tag{6''}$$

Asimilînd funcţiile de temperatură din membrul drept cu nişte sarcini fictive exterioare — sarcini termice — şi avînd în vedere semnificaţia lui $\underset{*}{T}^{\alpha\beta}$ şi $\underset{*}{L}^{\alpha\beta}$ expusă mai sus, putem spune că problema termoelastică a fost redusă formal la o problemă elastică echivalentă. Alegînd drept necunoscute principale componentele v^λ, w ale vectorului deplasare, sistemul complet de ecuaţii se obţine înlocuind în primele trei ecuaţii de echilibru (6), (6') eforturile $\underset{*}{T}^{\alpha\beta}$ şi momentele $\underset{*}{L}^{\alpha\beta}$ prin deformaţii (5) şi (5'). Utilizînd în ecuaţiile astfel obţinute relaţiile ce leagă componentele tensorilor de deformaţie a suprafeţei mediane, de componentele vectorului deplasare

$$p_{\alpha\beta} = \nabla_\beta\, v_\alpha + b_{\alpha\beta}\, w + c_{\beta\alpha}\, \delta, \tag{7}$$

$$q_{\alpha\beta} = \nabla_\beta (\nabla_\alpha\, w - b_\alpha^\lambda\, v_\lambda) - c_{\lambda\alpha}\, b_\beta^\lambda\, \delta, \tag{7'}$$

unde

$$\delta = -\frac{1}{2}\, c^{\alpha\beta}\, \nabla_\alpha\, v_\beta, \tag{7''}$$

se obţine astfel sistemul complet în componentele v^λ, w ale vectorului deplasare*)

$$a^{\alpha\gamma}\, \nabla_\alpha \nabla_\gamma\, v^\beta + \nu c^{\beta\omega}\, c^{\alpha\gamma}\, \nabla_\alpha \nabla_\gamma v_\omega + \nabla_\alpha b^{\alpha\beta}\, w + \nu a^{\alpha\beta} \nabla\, Hw -$$

$$- \frac{1}{2} c^{\alpha\beta} c^{\pi\lambda} \nabla_\alpha \nabla_\pi\, v_\lambda - \frac{1}{2} \nu c^{\alpha\beta}\, c^{\pi\lambda} \nabla_\alpha \nabla_\pi\, v_\lambda - \frac{h^2}{3}\Big[\, b^{\beta\rho}\; a^{\pi\lambda} \nabla_\lambda \nabla_\pi \nabla_\rho\, w +$$

$$+ \nu\, b_\omega^\beta\, c^{\lambda\pi}\, c^{\omega\rho}\, \nabla_\lambda \nabla_\pi \nabla_\rho\, w - b^{\beta\rho}\; a^{\lambda\pi}\, \nabla_\lambda \nabla_\pi\, b_\rho^\varphi\, v_\varphi + \frac{1}{2}\, b^{\beta\rho}\; c_{\varphi\rho}\, c^{\lambda\theta}\, \nabla_\lambda\, b^{\varphi\lambda}\, \nabla_\gamma\, v_\theta +$$

$$+ \frac{1}{2}\, \nu\, b_\varphi^\beta\; c^{\lambda\pi}\, c^{\gamma\theta}\, \nabla_\lambda\, b_\pi^\varphi\, \nabla_\gamma\, v_\theta \Big] = - \frac{1-v^2}{2Eh} (F^\beta - b_\omega^\beta\, c^{\omega\lambda}\, M_\lambda) + (1+\nu)\, \alpha a^{\alpha\beta}\, \nabla_\alpha\, T -$$

$$- \frac{1+\nu}{3}\, \alpha\, h^2\, b_\alpha^\beta\, \nabla_\lambda (a^{\alpha\lambda}\, T' - b^{\alpha\lambda}\, T), \tag{8}$$

$$b^{\pi\rho}\, \nabla_\pi\, v_\rho + 2\; (2H^2 - K)\, w + \nu\, Ha^{\pi\rho}\, \nabla_\pi\, v^\rho + 2\, \nu\, H^2\, w +$$

$$+ \frac{h^2}{3}\Big[\, a^{\omega\rho}\, a^{\pi\lambda}\, \nabla_\omega \nabla_\lambda \nabla_\pi \nabla_\rho\, w + \nu\, c^{\omega\rho}\, c^{\lambda\pi}\, \nabla_\omega \nabla_\lambda \nabla_\pi \nabla_\rho\, w - a^{\lambda\pi}\, \nabla_\omega \nabla_\lambda \nabla_\pi\, b^{\varphi\omega}\, v_\varphi -$$

$$- \nu\, c^{\omega\rho}\, c^{\lambda\pi}\, \nabla_\omega \nabla_\lambda \nabla_\pi\, b_\rho^\varphi\, v_\varphi + \frac{1}{2}\; a^{\omega\rho}\, c_{\varphi\rho}\, c^{\theta\gamma}\, \nabla_\omega \nabla_\lambda\, b^{\varphi\lambda}\, \nabla_\theta\, v_\gamma +$$

$$+ \frac{1}{2}\, \nu\, c^{\lambda\pi}\, c^{\theta\gamma}\, \nabla_\omega \nabla_\lambda\, b_\pi^\omega\; \nabla_\theta\, v_\gamma \Big] = \frac{1-v^2}{2\mathrm{E}h} (F^3 + c^{\omega\lambda}\, \nabla_\omega\, M_\lambda) + 2\, (1+\nu)\, \alpha\, HT +$$

$$+ \frac{h^2}{3} (1+\nu)\, \alpha\, \nabla_\omega\; \nabla_\lambda (a^{\omega\lambda}\, T' - b^{\omega\lambda}\, T). \tag{8'}$$

---

*) Acest sistem (8) a fost alcătuit fără ca să verifice ecuaţia de echilibru (6''), ecuaţie ce în principiu rămîne neverificată. Datorită însă faptului că relaţiile fizice care au fost utili-

Expresiile din ecuaţiile (8) pot fi puse sub o formă mai simplă, ţinînd seama de teorema privind schimbarea ordinei de diferenţiere covariantă, în baza căreia rezultă relaţiile :

$$a^{\beta\lambda} a^{\alpha\omega} \nabla_\lambda \nabla_\omega \nabla_\beta \nabla_\alpha = \triangle \triangle - K \triangle - K^\alpha \nabla_\alpha$$

$$c^{\beta\lambda} c^{\alpha\omega} \nabla_\lambda \nabla_\omega \nabla_\beta \nabla_\alpha = - K \triangle - K^\alpha \nabla_\alpha$$

unde $\triangle = a^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$ este operatorul Laplace generalizat, iar $K_\alpha = \frac{\partial K}{\partial x^\alpha}$, unde K este curbura gausiană a suprafeţei mediane, dată de relaţia

$$K = \frac{1}{2} c^{\alpha\beta} c^{\gamma\delta} b\alpha\gamma\, b\beta\delta.$$

Prin găsirea componentelor v^λ, w, datorită relaţiilor (7) şi (7'), se găsesc componentele deformaţiilor tangenţiale şi de încovoiere a suprafeţei mediane a învelitoarei şi datorită relaţiei (4) şi (5), componentele $T^{\alpha\beta}$şi $L^{\alpha\beta}$. Ecuaţia (2) permite în final găsirea componentelor tensorului eforturilor N^α.

2. Teoria fără momente. Cazul termoelastic

Teoria fără momente a învelitorilor subţiri aflate în prezenţa unui cîmp de temperatură neuniform se bazează pe aceleaşi ipoteze ca şi în cazul problemei elastice a acestora.

Aceste ipoteze aşa cum le-a formulat A. L. Goldenweiser [4] se bazează pe presupunerea că în primele trei ecuaţii de echilibru (1) şi (1'), componentele tensorului eforturilor transversale N^α sînt nule şi că în a şasea ecuaţie de echilibru (1'''), componentele tensorului moment sînt nule.

Vom îmbrăţişa de asemenea punctul de vedere expus de A. L. Goldenweiser, după care calculul învelitorilor fără momente este terminat atunci cînd pe lîngă eforturile tangenţiale se pot determina sau se demonstrează posibilitatea determinării componentelor vectorului deplasare. De aceea, la baza determinării tabloului stării de tensiune în teoria fără momente vor sta ecuaţiile :

a) Ecuaţiile de echilibru

$$\nabla_\alpha T^{\beta\alpha} = - F^\beta \tag{9}$$

$$b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = F^3, \tag{9'}$$

$$c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \tag{9''}$$

b) Relaţiile fizice

$$p_{\alpha\beta} = \frac{1}{2Eh} (a_{\alpha\lambda} a_{\beta\theta} - \nu c_{\lambda\alpha} c_{\beta\theta}) T^{\lambda\theta} + \frac{\alpha T}{1 - \nu} (a_{\lambda\alpha} a_{\beta\theta} - \nu c_{\lambda\alpha} C_{\beta\theta}) a^{\lambda\theta}. \tag{10}$$

c) Ecuaţiile geometrice

$$\nabla_\beta v_\alpha + b_{\alpha\beta} w + c_{\beta\alpha} \delta = p_{\alpha\beta}, \tag{11}$$

---

zate în alcătuirea sistemului (8). nu contrazic ecuaţia de echilibru (6''), abstracţie făcînd de termeni de ordinul de mărime a lui $\frac{h^2}{R}$, se poate totuşi afirma că soluţiile ecuaţiilor (8) nu vor contrazice această ecuaţie (în limitele preciziei Love-Kirchhoff).

unde

$$\delta = -\frac{1}{2} c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta .$$

În părțile din dreapta ale acestor ecuații sînt trecute mărimile care la rezolvarea sistemului dat sînt cunoscute, deoarece, acestea fie că sînt date (componentele sarcinii exterioare, funcția de temperatură) fie că se determină prin rezolvarea sistemului precedent.

În continuare, pentru determinarea mărimilor $L^{\alpha\beta}$ și N^δ care au fost neglijate în ecuațiile de echilibru se utilizează relațiile

$$q_{\alpha\beta} = \nabla_\beta (\nabla_\alpha w - b_\alpha^\lambda v_\lambda) - c_{\lambda\alpha} b_\beta^\lambda \delta \tag{12}$$

și

$$L^{\omega\gamma} = \frac{2\,Eh^3}{(3\,(1-\nu^2)} a^{\omega\alpha} a^{\gamma\beta} + \nu\, c^{\omega\alpha} c^{\gamma\beta})\, q_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu} (a^{\omega\gamma} T' - b^{\omega\gamma} T). \tag{13}$$

relația (2) permițînd aflarea lui N^ω. Aceste ultime operațiuni au caracterul unor operațiuni de control, permițînd a aprecia în funcție de micimea mărimilor $L^{\alpha\beta}$ și N^δ validitatea teoriei fără momente. În ceea ce privește găsirea tabloului stării de tensiune în teoria fără moment, atunci cînd se dau condițiile la limită (problema transformării și alegerii condițiilor la limită în trecere de la teoria cu momente la teoria fără momente se menține întocmai ca în cazul elastic), este evident că vom deosebi aceleași cazuri ca în [4].

a) Cazul cînd se dau pe contur o condiție statică și una geometrică (acestea tangențiale).

În acest caz, urmînd succesiunea calculelor recomandată de A. L. Goldenweiser, se rezolvă problema statică, fie rezolvînd ecuațiile de echilibru (9), pe baza condiției statice date, fie, aceasta pentru curburi gausiene pozitive sau negative, ecuația dedusă în [5]

$$c^{\varphi\mu} c^{\delta\omega} \nabla_\mu K^{-1} b_{\varphi\delta} \nabla_\omega \eta + 2H\eta + \frac{1}{2} c^{\mu\gamma} \nabla_\mu \frac{1}{\sqrt{a}} K^{-1} b_{\gamma\delta} \bar{n} \int_0^{x^\delta} \bar{F}\, dx^\delta - \\ - \frac{c^{\alpha\beta}}{2\sqrt{a}} \bar{r}^\alpha \int_0^{x^\beta} \bar{F}\, dx^\beta = 0 \tag{14}$$

unde

$$T^{\alpha\beta} = c^{\beta\mu} c^{\alpha\gamma} \nabla_\mu \left(c^{\delta\omega} K^{-1} b_{\gamma\delta} \nabla_\omega \eta - \frac{1}{2\sqrt{a}} K^{-1} b_{\gamma\delta}\, \bar{n} \int_0^{x^\delta} \bar{F}\, dx^\delta \right) - \\ - c^{\beta\mu} b_\mu^\alpha \eta - \frac{1}{2\sqrt{a}} \bar{r}^\alpha \int_0^{x\beta} \bar{F}\, dx^\beta .$$

Se continuă apoi cu rezolvarea ecuațiilor geometrice (11) pe baza condiției geometrice date.

b) Cazul cînd se dau două condiții geometrice pe contur (tangențiale).

Acest caz este rațional a fi tratat pe baza ecuațiilor de echilibru fără momente în deplasări, sistem ce se obține urmînd același drum ca cel folosit pentru obținerea sistemului (8). Acest sistem dat de relațiile .

$$a^{\alpha\gamma} \nabla_\alpha \nabla_\gamma v^\beta + v c^{\beta\omega} c^{\alpha\gamma} \nabla_\alpha \nabla_\gamma v_\omega + \nabla_\alpha b^{\alpha\beta} w + \nu a^{\alpha\beta} \nabla_\alpha H w - \\ - \frac{1}{2} c^{\alpha\beta} c^{\pi\lambda} \nabla_\alpha \nabla_\pi v_\lambda - \frac{1}{2} \nu\, c^{\alpha\beta} c^{\pi\lambda} \nabla_\alpha \nabla_\pi v_\lambda = - \frac{1-\nu^2}{2\,Eh} F^\beta + (1+\nu)\, \alpha a^{\alpha\beta} \nabla_\alpha T. \tag{15}$$

$$b^{\pi\rho} \nabla_\pi v_\rho + 2\,(2H^2 - K)\, w + \nu H a^{\pi\rho} \nabla_\pi v_\rho + 2\nu\, H^2 w = \\ = \frac{1-\nu^2}{2\,Eh} F^3 + 2\,(1+\nu)\, \alpha H T \tag{15'}$$

se vede că se poate obţine prin acelaşi formalism matematic ca şi în cazul elastic şi anume, presupunînd în ecuaţiile (8), mărimea h^2 egal cu zero (grosime nulă), în timp ce mărimea $2Eh$ (rigiditatea la întindere şi forfecare) este considerată finită.

c) Cazul cînd se dau două condiţii statice pe contur. Caz în care soluţia în general nu se poate obţine.

Concludem că metoda analogiei *sarcinilor termice* permite în cazul stării de tensiune globală reducerea formală a problemei termoelastice la o problemă elastică echivalentă (conform şi lucrării [1]), iar în cazul teoriei fără momente cu ambele condiţii geometrice pe contur date, la o problemă elastică echivalentă în deplasări.

Primit la redacţie la 12 martie 1958.

BIBLIOGRAFIE

1. L. LIBRESCU, *Asupra problemei termoelastice a învelitorilor subţiri de formă arbitrară.* Comunicările Academiei R.P.R. **VIII**, *8* (1958) (sub tipar).
2. С. Г. ВИНОКУРОВ, *Температурные напряжения в пластинках и оболочках.* Изв. Казанского филиала Акад. Наук СССР, Сер. Физ. — Матем. и техн. наук, **3** (1953).
3. А. Л. ГОЛДЕНВЕЙСЕР, *Качественное исследование напряженного состояния тонкой оболочки.* Прикл. Матем. Механ., **XI**, 6 (1945).
4. А. Л. ГОЛДЕНВЕЙСЕР, *Теория упругих тонких оболочек.* Москва, 1953.
5. L. LIBRESCU, *Une nouvelle manière de formuler le problème des coques minces élastiques.* Revue de mécanique appliquée, 8, *2* (1958).

RECENZII

F. J. MEISTER, *Akustiche Messtechnik der Gehörprüfung* (Tehnica măsurătorii acustice a controlului auzului). *Verlag* G. Braun, Karlsruhe, 1954, 191 pag.

Această lucrare succintă se ocupă, după cum spune şi titlul, cu tehnica măsurătorii acustice a controlului auzului. Este deci o carte scrisă în special în ajutorul tehnicienilor care lucrează în domeniul controlului auzului.

Dacă totuşi, ne ocupăm aici de ea, aceasta se datoreşte conţinutului ei bogat, care depăşeşte cu mult domeniul controlului auzului şi oferă specialiştilor în electroacustică multe aspecte interesante.

Introducerea cărţii ne arată importanţa domeniului şi precizează problemele sale principale. Primul capitol tratează despre urechea omenească ca indicator al sunetului. Cu ajutorul unei descrieri foarte scurte a structurii anatomice a organului auzului, se cercetează mai îndeaproape procesele mecanice din membrana bazilară, pe baza unui model simplificat al melcului. Imaginea este completată prin considerarea potenţialelor cochleare şi a transmiterii acestora pe calea nervoasă, pentru explicarea transformării proceselor mecanice în procese ale sistemului nervos.

Partea următoare se ocupă cu bazele tehnicii măsurătorilor pentru auzul tonal. Se introduc mai întîi, cu mijloace simple, mărimile fundamentale acustice, ca viteza sunetului, presiunea, intensitatea, frecvenţa etc. şi se fundamentează totodată sistemul de măsură în decibeli.

Cu explicaţiile necesare se stabileşte ca ,,prag normal al audibilităţii'' presiunea de 2.10^{-4} microbar. Urmează redarea curbelor cunoscute ale intensităţii egale a sunetului pentru auzul mono- şi biauricular şi deducţia legii lui Weber-Fechner pentru senzaţii de intensitate a sunetului, ale cărei limite de valabilitate sînt cercetate îndeaproape.

Rezultatele experimentale existente despre pragurile de diferenţiere a senzaţiilor de intensitate şi de nivel tonal sînt examinate în legătură cu controlul auzului. În sfîrşit se tratează şi transmisia sunetului prin oasele craniului către interiorul urechii şi se introduce un ,, prag al conductivităţii prin oase''. În legătură cu acesta se constată că conductivitatea prin oase este cu aproximativ 40 dbel inferioară celei prin aer.

Capitolul următor este dedicat determinării pragurilor de audibilitate. Metodele medicale mai vechi cu diapazonul sînt tratate critic, ţinîndu-se seama de caracteristica direcţională cunoscută acum a diapazonului şi de dependenţa intensităţii sunetului acestui instrument de distanţa la ureche. În continuare se indică măsurătorile fundamentale cu diapazonul şi se cercetează mai deaproape legătura dintre durata auzului şi degradarea acestuia. În cele din urmă se arată că pentru obţinerea unor rezultate mai exacte este necesar să se recurgă la surse de sunete perfecţionate.

Capitolul care urmează este dedicat acestor noi surse de sunet. Este vorba de generatori RC și de buzere, al căror domeniu de frecvențe este reglabil continuu între aproximativ 16 și 18 000 Hz. Tehnica determinării pierderii auzului cu ajutorul unor astfel de aparate şi instalaţii auxiliare (încăperi cu pereţi absorbanţi) este descrisă în mod amănunţit. Ea constă în simpla înregistrare a răspunsurilor „da" şi „nu" ale celor examinaţi, la depăşirea în sus sau în jos a pragului de audibilitate şi este deci expusă posibilităţilor de erori subiective. Pentru o cît mai eficace eliminare a acestora au fost dezvoltate metodele de măsurare prin depăşirea pragurilor.

În capitolul următor sînt descrise unele dintre aceste metode. Toate sînt caracterizate printr-o înregistrare mai fină a indicaţiilor celui examinat, iar unele au domenii de aplicare, care depăşesc cu mult pe acela al controlului auzului. Astfel, de exemplu, metoda comparării intensităţii sunetului cu ajutorul unui sunet etalon sau măsurarea prin acoperire, care, cu modificări corespunzătoare, ar putea fi de mare folos în acustica spaţiilor.

Urmează un capitol dedicat proceselor de oboseală din ureche, de care nu ne vom ocupa aici. Mai departe se descrie foarte detailat controlul auzului vorbirii. Bineînţeles, preocuparea principală a autorului este îndreptată spre detectarea şi măsurarea defectelor auzului, dar şi aici indicaţiile sale pot fi extinse şi asupra altor domenii ale acusticii. În primul rînd intră şi aici în consideraţie acustica spaţiilor, de exemplu cu privire la controlul obiectiv al auzului vorbirii, bineînţeles limitat la urechea normală.

Se menţionează numai capitolul scurt referitor la controlul simulanţilor. În schimb, partea următoare, care se ocupă cu aparate moderne de îmbunătăţire a auzului şi de controlul lor, este de un interes foarte larg, în special pentru protecţia auzului în încăperi zgomotoase. Metodele dezvoltate aici şi aparatele descrise au valabilitate acustică generală şi prezintă cititorului multe amănunte interesante în acest domeniu atît de puţin cunoscut.

Ultimul capitol tratează despre extinderea posibilă a audiometriei asupra unor probleme speciale, de interes deosebit fiind mai ales unele încercări cu cobai expuşi zgomotului de încăperi industriale.

În încheiere putem spune că această carte prezintă cititorului într-o formă concisă şi clară, un material bogat şi valoros la nivelul actual al tehnicii.

L. Hamburger

PAUL GRODZINSKI, *A practical Theory of Mechanisms* (O teorie practică a mecanismelor). Emmot & Co. Ltd., Manchester, 1947, 166 pag., 211 fig.

Cartea lui P. Grodzinski este o lucrare de iniţiere în fundamentele teoriei mecanismelor. Fără să intre în studiul lor cinematic şi dinamic, autorul clasifică şi descrie mecanismele folosite în construcţia de maşini.

Dealtfel, aşa cum se arată şi în prefaţă, scopul urmărit de autor este de a face numai o introducere în principiile de bază ale teoriei mecanismelor.

El insistă în mod special asupra înrudirii care există între diferitele mecanisme, căutînd să scoată la iveală modul în care acestea derivă unele din altele.

În cadrul fiecărei grupe studiate se expun şi avantajele şi dezavantajele diferitelor mecanisme, în comparaţie cu mecanismele care pot îndeplini aceeaşi funcţie, însă fac parte din altă grupă.

Planul cărţii urmăreşte clasificarea mecanismelor făcută de Reuleaux, pe care autorul o consideră ca satisfăcătoare pentru scopul urmărit.

În primul capitol, se prezintă clasificarea mecanismelor și se dau indicații privind analiza structurală și modurile de reprezentare ale mecanismelor.

Capitolul al doilea, se ocupă cu mecanismele cu șurub, dîndu-se o clasificare foarte clară a lor și un număr de exemple care ilustrează modul în care pot fi folosite aceste mecanisme în practică.

În capitolul al treilea, se studiază mecanismele cu bare articulate : mecanismul patrulater, ca mecanism de bază, și celelalte mecanisme derivate din acesta : mecanismul bielă-manivelă, mecanismele cu culisă, mecanismele cu traiectorie rectilinie, mecanismele cu două cuple de translație etc.

Mecanismele cu came sînt descrise în capitolul al patrulea. În afară de camele plane sînt prezentate și camele spațiale (sferice și cilindrice).

Capitolul al cincilea cuprinde descrierea mecanismelor cu roți dințațe, simple și epicicloidale și a mecanismelor cu roți de fricțiune. Se indică și metodele de determinarea rapoartelor de transmitere pentru trenurile de roți dințate

În capitolul al șaselea sînt prezentate transmisiile prin curea și transmisiile hidraulice, descriindu-se cîteva tipuri realizate (Lauf-Thoma, Sturm, Enor).

Ultimul capitol este consacrat mecanismelor cu mișcare intermitentă : roți cu clicheți, mecanisme cu cruce de Malta și cu roți stea etc.

Prin modul în care este scrisă, concis și clar, cu un număr mare de figuri, cartea lui P. Grodzinski reușește să dea o privire de ansamblu asupra principalelor mecanisme utilizate în practică. Ea poate fi consultată cu folos de inginerii proiectanți, constituind în același timp un punct de plecare pentru aprofundarea problemelor legate de studiul teoriei mecanismelor.

Const. Petrescu

OTTO KRAEMER, *Getriebelehre* (Teoria mecanismelor). Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1950, 239 pag.

După cum se menționează și în prefață, lucrarea urmărește să expună construcțiile grafice ale cinematicii și să arate cele mai importante mecanisme, pentru a permite rezolvarea problemelor tipice în acest domeniu.

Atît din modul de tratare cît și din însăși organizarea materialului pe capitole, rezultă un pronunțat caracter practic și intuitiv, redactarea fiind deosebit de clară și precisă.

Astfel se începe cu descrierea mecanismului patrulater și a problemelor sale de bază (ca „model favorit al teoriei mecanismelor”) și după cîteva noțiuni asupra cuplelor urmează tratarea cinematicii, care ocupă mai bine de jumătate din cuprins (nouă capitole). Aici, pe lîngă metodele de determinare a parametrilor cinematici, se dau curbele și pozițiile importante în mișcarea relativă, într-o formă care sugerează problemele de sinteză, fără ca acestea să intre în obiectul cărții.

Celelalte capitole (X—XIV) expun cele mai frecvente mecanisme întîlnite în tehnică : mecanisme cu cercuri cardanice, mecanismul paralelogram și antiparalelogram, mecanismul bielă-manivelă cu derivatele sale mai importante, mecanismele cu manivelă și culisă și camele plane.

Cu mici excepții cerute de importanța cazului, lucrarea nu se ocupă decît de aspectele cinematice ale mecanismelor plane de bază. Deși s-au evitat, din motive de extindere, domenii mai largi ca angrenajele sau problemele de dinamică, socotim că ele s-ar fi putut ataca sub o formă care să nu depășească sensibil volumul, îmbogățind astfel conținutul cărții. De altfel, chiar urmărirea scopului propus, îndeamnă pe autor să iasă din limitele cinematicii la mecanismul bielă-manivelă, atingînd problema maselor și a forțelor.

În același sens, lipsa expunerii unei clasificări și a noțiunilor de compunere și descompunere a mecanismelor este regretabilă, întrucît ar lărgi mult sfera de aplicație a cunoștințelor — de altfel atît de legat redate.

Ținem să atragem atenția că nivelul de tratare se bucură de dubla calitate, greu de realizat, de a face cartea interesantă atît celor cu cultură matematică, fără ca să apară greoaie pentru cei mai puțin versați.

Deosebit de interesantă este tratarea pe exemple tipice a problemelor enunțate și demonstrate concis, accentuarea terminologiei consacrate precum și claritatea și măsura folosirii calculului analitic și grafic. În acest fel, lucrarea reușește să formeze imagini limpezi atît asupra chestiunilor expuse, în sine, cît și asupra importanței și locului lor în ansamblul disciplinei.

Față de precizia și în general modul reușit de expunere ar fi fost de dorit ca lucrarea să cuprindă un cadru mai larg al acestui domeniu tehnic.

E. Bugaiewski

ROY BAINER, R. A. KEPNER, E. L. BARGER, *Principles of Farm Machinery* (Principiile de construcție ale mașinilor agricole). Ferguson Foundation, Agricultural Engineering Series. John Wiley & Sons, Inc., New York, Chapman & Hall, Ltd. London., 1955, 571 pag.

Mărirea producției agricole la hectar și reducerea prețului de cost al produselor agricole este strîns legată de mecanizarea agriculturii.

Un număr mare de tehnicieni sînt astăzi angrenați fie direct, fie indirect, în mecanizarea agriculturii. Lucrarea de față nu se adresează direct cadrelor de specialitate din acest domeniu, ea se adresează studenților de la diverse facultăți cu scopul de a-i informa asupra unor probleme principale și generale de mecanizarea agriculturii.

Pentru atingerea acestui obiectiv, autorii au elaborat lucrarea sub forma unei sinteze a lucrărilor din acest domeniu. Cunoștințele necesare cititorului pentru a putea consulta lucrarea sînt minime, cum ar fi de exemplu, cunoștințe din domeniul mecanicii statice, puține cunoștințe din teoria mecanismelor etc. Nu se cer cunoștințe din domeniul rezistenței materialelor.

Într-un prim capitol, lucrarea ne arată care sînt problemele de cercetare și perspectivele de dezvoltare a construcției de mașini agricole : principiile care stau la baza proiectării mașinilor agricole și a unei intreprinderi model de exploatare a mașinilor agricole. Tot în acest capitol, autorii se ocupă și de metodologia de experimentare a mașinilor agricole, atît în laborator cît și pe teren.

Un alt capitol se ocupă de aspectul economic al problemei, se face o analiză a prețului de cost al producției agricole mecanizate și a diverșilor factori componenți (costul reparațiilor, al întreținerii, al combustibilului, al ungerii, amortizarea etc.). Tot în acest capitol se dau indicații asupra posibilităților de formare a agregatelor de mașini agricole și de cuplarea lor la tractor.

Un capitol special se ocupă de materialele de construcție a mașinilor agricole (caracteristici, tratamente etc.).

Autorii se ocupă mai pe larg de transmiterea puterii la diversele organe active ale mașinilor agricole, tratînd pe larg transmisia prin curele și cu lanț. Se arată diversele tipuri de lanțuri și curele, caracteristicile lor și metodele de calcul. În același capitol, autorii se ocupă de acționările hidraulice.

În capitolul patru, autorii fac o analiză a forței la arat, arătînd cu această ocazie, care sînt componentele acestei forțe și metodele de măsurare a ei.

Autorii rezervă cîteva capitole pentru tratarea problemelor legate de procesul tehnologic de arat. Se tratează probleme legate de felul cum trebuie făcută arătura și comportarea solului în procesul de arat. În funcție de aceasta se arată diversele tipuri de organe active ale mașinilor de arat și materialele din care sînt făcute.

Ca metode de organizare a materialului prezentat, autorii s-au orientat după ciclul normal de efectuare a muncilor agricole. După capitolul referitor la mașinile de arat, autorii prezintă mașinile pentru întreținerea terenurilor, spre exemplu diversele tipuri de grape, tăvălugi etc. În aceeași ordine, în capitolele următoare, autorii tratează problemele legate de însămînțare. Se descriu diverse metode de însămînțat, cerințele agrotehnice, funcțiunile mecanice ale mașinilor de însămînțat etc.

După aceasta, se tratează problemele legate de întreținerea culturilor (prășitul, răritul etc.).

Un capitol special se ocupă de diversele metode de administrare a îngrășămintelor și de mașinile care efectuează aceste operații.

Urmează apoi recoltarea. Autorii se ocupă în mod separat de recoltarea, transportul și depozitarea fînului, arătînd diversele metode și mașini adecvate pentru această operație. Înainte de a trece la tratarea completă a problemei recoltării, lucrarea analizează într-un alt capitol diversele metode de curățirea și sortarea semințelor. Acest capitol se ocupă de diversele principii care stau la baza curățirii și sortării (separarea pe baza greutăților specifice, separarea pe baza caracteristicilor suprafețelor semințelor etc.).

Mașinilor de recoltat cereale le este rezervat în lucrare un spațiu corespunzător importanței lor. Se descriu diverse tipuri de combine și dezvoltarea lor. Se trece apoi la analizarea mașinilor de recoltat, cu caracteristici speciale, cum sînt : mașinile de recoltat bumbac, mașini pentru recoltarea tuberculelor (cartofi, sfeclă etc.), recoltarea cepei, și altele.

Autorii se ocupă și de problemele legate de combaterea dăunătorilor din agricultură, rezervînd un capitol pentru tratarea principiilor care stau la baza pulverizării și împrăștierii de fungicide și insecticide. Se descriu aparatele și metodele pentru efectuarea acestor operații.

În încheiere se tratează problema transportului produselor agricole.

Fiecare capitol din lucrare este completat cu un număr interesant de probleme cu caracter didactic, care au ca scop aprofundarea mai temeinică de către cititori, a cunoștințelor din domeniul tratat. Pentru cei ce doresc să cunoască mai pe larg unele probleme din lucrare, autorii dau pe capitole bogate referințe bibliografice.

Considerăm că, prin felul cum a fost expus materialul de către autori, lucrarea este interesantă și își atinge scopul propus de a da noțiuni generale legate de probleme de mecanizarea agriculturii.

Cr. Pelecudi, C. Florescu, N. Zelingher

A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity* (Elasticitate teoretică). Clarendon Press, Oxford, 1954, 442 pag.

Redactarea unui tratat general de teoria elasticității este astăzi o încercare destul de dificilă și de temerară, dat fiind multitudinea studiilor întreprinse în această direcție. De aceea, credem, că de la lucrarea clasică, în prezent depășită, a lui A. E. H. Love nu s-au mai publicat decît monografii cu caracter pedagogic sau care se ocupă cu anumite aspecte particulare ale problemei.

Cartea profesorilor A. E. Green dela Universitatea din Durham (Anglia) și W. Zerna de la Școala politehnică din Hamburg (R. F. Germană) nu este de asemenea un tratat general.

Ea se ocupă în special de trei aspecte, foarte moderne de altfel, ale problemelor elastice : cazul deformaţiilor finite, aplicarea funcţiilor de variabilă complexă la probleme bidimensionale şi teoria învelitorilor subţiri (cazul micilor deformaţii — teoria infinitezimală), omiţînd alte capitole, cum sînt : răsucirea şi încovoierea barelor cilindrice, metodele energetice de calcul, problemele de stabilitate elastică etc. De asemenea se mai fac cîteva menţiuni în legătură cu problemele spaţiale ale unor corpuri izotrope şi cu anizotropie exagonală. Autorii menţionează lipsurile indicate mai sus şi le explică prin faptul că au vrut să dea o lucrare care să nu aibă o întindere prea mare, prin faptul că aceste capitole sînt tratate şi în alte lucrări şi prin faptul că au dorit să poată prezenta pe larg unele aspecte moderne ale teoriei elasticităţii şi unele metode noi de calcul, ceea ce — de altfel — au reuşit pe deplin.

Primul capitol este intitulat *Preliminarii matematice* şi redă, într-o formă succintă şi simplă, rezultatele cele mai importante din domeniul calculului vectorial şi tensorial, din domeniul geometriei suprafeţelor, funcţiilor olomorfe, funcţiilor de clase H şi H^* şi integralelor Fourier.

Capitolul al II-lea ne introduce în teoria generală a elasticităţii. Se introduc şi se dezvoltă noţiunile de efort unitar şi de deformaţie ; se dă o deosebită atenţie precizării legăturii dintre aceste mărimi, căutîndu-se o fundamentare matematică a unor consideraţii de ordin fizic. Autorii arată cum se pot ataca problemele prin introducerea unui potenţial elastic şi cum se poate aplica principiul lucrului mecanic virtual şi metodele variaţionale de calcul în cazul corpurilor în echilibru şi în mişcare.

Capitolele III şi IV aduc o contribuţie a autorilor la studiul deformaţiilor finite ale corpurilor elastice. După o trecere în revistă a unor rezultate generale se prezintă cîteva probleme speciale : forfecare şi răsucire simplă, diferite solicitări pe un tub cilindric în echilibru sau în mişcare de rotaţie, studiul barei cilindrice pline etc. De asemenea, şi aceasta este deosebit de interesant, se arată cum se pot suprapune micile deformaţii peste deformaţiile finite, dîndu-se mai multe exemple de calcul, cum estec azul unei stări de tensiune plană generalizată, suprapusă peste o întindere finită. Este demn de remarcat faptul că în aceste capitole ies în evidenţă avantajele notaţiei tensoriale folosită de autori.

În capitolul V se reia teoria generală a elasticităţii pentru cazul micilor deformaţii, dîndu-se rezultate atît pentru corpurile izotrope cît şi pentru cele anizotrope. Se arată cum se poate folosi potenţialul elastic şi în special se arată cum se pot folosi funcţiile armonice. În particular, se tratează cazul în care este suficientă utilizarea unei singure funcţii armonice.

Capitolul VI, intitulat *Starea de deformaţie plană* ne introduce într-o a doua parte a acestei cărţi în care se face un studiu mai detaliat. După punerea în problemă şi indicarea metodei de rezolvare în eforturi cu ajutorul funcţiei lui Airy, autorii trec la folosirea metodei funcţiilor de variabilă complexă, metodă pe care o expun pe larg cu toate particularităţile ei. Se arată cum se utilizează potenţialul complex pentru corpurile izotrope şi pentru corpurile ortotrope ; de asemenea, se arată importanţa folosirii transformărilor conforme. Autorii folosesc mult rezultatele date de Kolosov în această problemă precum şi importantele lucrări ale lui Musheli$\c{s}$vili pe care le citează mereu şi a căror traducere în limba engleză*) le-a folosit foarte mult, după cum mărturisesc în prefaţă.

În capitolul VII se prezintă teoria plăcilor plane, destul de succint de altfel. Se studiază încovoierea transversală după teoria lui Reissner şi se indică posibilităţile de integrare prin folosirea unui potenţial complex. Se mai dau rezultate în legătură cu plăcile anizotrope şi cu problema stării de tensiune plană generalizată.

---

*) *Singular Integral Equations*, Australia 1949 şi *Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, P. Noordhoff, Olanda, 1953.

Capitolele VIII şi IX se ocupă de probleme plane particulare pentru corpuri izotrope şi anizotrope. Se aplică potenţialul complex pentru cazul plăcii infinite acţionată de o sarcină concentrată sau în interiorul căreia s-a efectuat o gaură de formă circulară sau eliptică. De asemenea, se arată cum se pot rezolva prima şi a doua problemă fundamentală a teoriei elasticităţii pentru semiplanul elastic; de asemenea, problema mixtă, atît în cazul corpului izotrop cît şi în cazul corpului anizotrop. Se utilizează în mod sistematic metoda funcţiilor de variabilă complexă. Trebuie să menţionăm şi studiul cazurilor în care avem crăpături în interior.

Capitolul X ne introduce într-o a treia problemă dezbătută mai pe larg de către autori, problema învelitorilor subţiri. Acest capitol cuprinde teoria generală de încovoiere: studiul relaţiilor geometrice, al eforturilor şi al deformaţiilor precum şi indicarea diferitelor aproximaţii care se fac. Este interesantă utilizarea lucrului mecanic virtual şi a potenţialului elastic. De asemenea, menţionăm ecuaţiile aproximative de echilibru care sînt date precum şi discuţia făcută asupra condiţiilor la limită.

Capitolul XI cuprinde pe scurt teoria învelitorilor de mică curbură, iar capitolul XII ne dă date în legătură cu teoria de membrană. Este interesant de remarcat că autorii nu dezvoltă mult acest ultim capitol, ţinînd seama de faptul că începe să fie din ce în ce mai depăşit de studiile moderne, mai exacte.

Capitolele XIII şi XIV tratează problema plăcilor cilindrice subţiri şi a plăcilor de rotaţie. Se dau rezultate generale şi indicaţii de rezolvare.

Cu toate că lucrarea de mai sus este intitulată *Elasticitate teoretică*, ea cuprinde destule aplicaţii pentru a putea prezenta interes şi pentru cei care se ocupă de partea practică a unor asemenea probleme. Trebuie să menţionăm că autorii caută să folosească metode moderne de calcul iar utilizarea limbajului tensorial dă posibilitatea unei expuneri mai succinte şi unei lecturi deosebit de plăcute.

Autorii folosesc un material bibliografic deosebit de bogat. În afară de lucrări personale sînt citate multe lucrări publicate în diferite ţări. Este interesant de observat că este folosită destul de mult literatura sovietică, ceea ce nu se întîmplă totdeauna în cărţile publicate în apus. De exemplu, pentru probleme de corpuri anizotrope, autorii citează în deosebi pe S. G. Lehniţchi şi pe I. S. Sokolnikoff şi îşi exprimă părerea de rău că nu pot fi totdeauna la curent cu literatura din ţările est-europene.

Prin structura ei, lucrarea lui A. E. Green şi W. Zerna poate fi folosită cu succes de un cerc larg de cititori, atît de cei care caută probleme practice cît şi de cei pe care îi interesează probleme teoretice. Remarcăm de asemenea faptul că sînt sugerate multe posibilităţi de cercetare viitoare, deci cartea prezintă un interes deosebit pentru cercetătorii ştiinţifici.

P. P. Teodorescu.

PIERRE DUBAS, *Calcul numérique des plaques et des parois minces* (Calculul numeric al plăcilor şi al grinzilor pereţi). Ed. Leeman, Zürich, 1955, 176 pag.

Elementele de construcţie plane (plăci şi grinzi-pereţi) joacă un rol important, alături de structurile clasice alcătuite din bare.

Teoria generală este pusă la punct încă din secolul trecut, însă soluţiile problemelor particulare necesită cunoştinţe de matematici superioare şi diferă de la caz la caz. Multe cazuri de rezemare şi încărcare n-au găsit o rezolvare matematică satisfăcătoare sau nu pot fi tratate analitic.

În asemenea cazuri, apare necesară utilizarea calculului numeric; principiul metodelor numerice rezidă în înlocuirea ecuaţiilor diferenţiale care guvernează un fenomen fizic, printr-un sistem de ecuaţii liniare. Asemenea metode au fost larg utilizate în literatura tehnică, însă cu puţine excepţii, se găsesc disparate, sub formă de articole, în diferite reviste.

În mod obişnuit se aplică *diferenţele finite* a căror semnificaţie matematică constă în aproximarea unui arc de curbă reprezentativă a funcţiei necunoscute — între $n + 1$ puncte consecutive — printr-un arc de parabolă de gradul n (de obicei se ia $n = 1$ sau $n = 2$).

O ameliorare a acestei metode o constituie metoda bazată pe proprietăţile *poligonului funicular*. „Ecuaţia ei reprezintă echivalentul unei ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea, care leagă într-o grindă momentul încovoietor de sarcina care îl provoacă. Această metodă de statică aplicată a fost pusă la punct de profesorul F. Stüssi care a utilizat-o pentru rezolvarea a numeroase probleme guvernate de ecuaţii diferenţiale cu o singură variabilă. Extinderea metodei la probleme cu două dimensiuni a fost schiţată în principiu. Lucrarea de faţă îşi propune să aplice, în mod sistematic, metoda poligonului funicular la plăci şi la grinzile-pereţi, stabilind procedeele de calcul şi redînd cîteva exemple." (p. 9 şi 10).

Cartea cuprinde cinci capitole.

Primul capitol constituie o succintă prezentare a relaţiilor de bază din teoria grinzilor-pereţi şi a plăcilor, scoţînd în evidenţă analogia dintre ecuaţiile care intervin în cele două cazuri. În încheierea capitolului se examinează *problema mixtă* a deformaţiilor mari şi a voalării.

Capitolul al doilea cuprinde expunerea aspectului fizic şi matematic al problemei generale. Pentru rezolvarea ecuaţiilor care intervin, autorul a stabilit trei procedee de calcul : procedeul explicit sau formal, procedeul implicit şi procedeul semiformal. Schemele corespunzătoare sînt detaliate în continuare, dînd o atenţie deosebită conturului.

În capitolele 3 şi 4 se studiază aplicarea metodei poligonului funicular la plăcile plane, respectiv grinzile-pereţi. Teoria este frumos ilustrată de exemple numerice detaliate, precum şi de diagramele mărimilor statice. Probleme de importanţă practică cum ar fi sarcini concentrate, liniare, hidrostatice, sarcini parţiale, diferite cazuri de rezemare, plăci în formă de paralelogram, eforturile din contracţie în cordoanele de sudură, lăţimea activă a tălpilor grinzilor, voalarea etc. figurează în cuprinsul aceloraşi capitole.

Ultimul capitol, foarte redus ca întindere, îşi propune să examineze, în baza unor exemple numerice concrete, precizia metodei poligonului funicular şi să sugereze extinderile posibile ale cîmpului său de aplicare.

Aşa cum reiese şi din lucrare, poate însă nu suficient de pregnant, interpretarea matematică a metodei poligonului funicular este interpolarea funcţiei necunoscute reale printr-o funcţie reprezentată de o parabolă de gradul al patrulea, spre deosebire de metoda diferenţelor finite, la care obişnuit se ia parabola de gradul al doilea. În această situaţie este evident de la început că aproximaţia este mult mai bună decît în primul caz.

Lucrarea este redactată deosebit de clar şi sistematizat şi are meritul de a fi pus la punct una din metodele de calcul numeric într-un vast domeniu din teoria elasticităţii. Consultarea ei va fi deosebit de utilă pentru un cerc larg de ingineri şi de cercetători din diferitele discipline tehnice.

Mircea Soare

ALF PFLÜGER, *Elementare Schalenstatik* (Statica elementară a plăcilor curbe subţiri). Springer-Verlag, Ed. a II-a, Berlin, 1957, 112 pag.

În domeniul plăcilor curbe subţiri s-au scris şi se continuă să se publice un număr impresionant de lucrări, atît cu caracter teoretic, cît şi ca prezentări de construcţii executate. Ele sînt constituite în covîrşitoarea majoritate din articole, răspîndite pe un număr întins de ani şi apărute în cele mai variate reviste şi limbi de pe suprafaţa globului. În general, fiecare asemenea lucrare presupune că cititorul este bine familiarizat cu problemele de bază şi în consecinţă se ocupă cu anumite aspecte particulare sau speciale.

Urmărirea lor este foarte dificilă şi ele sînt aproape total inaccesibile unui începător sau inginerului practician, preocupat de cîteva construcţii simple.

Lucrări cu caracter mai larg decît întinderea unui articol şi care să-şi propună tocmai prezentarea simplă şi cît mai uşor de înţeles a elementelor de bază din teoria plăcilor curbe subţiri lipsesc aproape total în literatura tehnică, după cunoştinta noastră.

În acest sens trebuie menţionată în primul rînd apariţia cărţii lui Alf Pflüger *Statica elementară a plăcilor curbe subţiri.*

O primă ediţie a cărţii, apărută în 1948 şi intitulată *Introducere în statica plăcilor curbe subţiri* se adresa în primul rînd studenţilor. Ea s-a bucurat de o binemeritată apreciere.

Ulterior textul a fost revăzut şi adăogit, astfel încît el să intereseze şi pe inginerii practicieni, pentru calculul construcţiilor simple din acest domeniu.

Aşa cum menţionează autorul în prefaţă, cartea a fost gîndită să cuprindă prezentarea simplă şi cît mai uşor de înţeles a elementelor de bază din teoria plăcilor curbe subţiri.

Primul capitol (Introducere) cuprinde bazele calculului : geometria suprafeţelor, ipoteze.

Capitolul al doilea tratează teoria de membrană a suprafeţelor de rotaţie, cu particularizarea formulelor generale pentru sferă, con şi cilindru.

Capitolul al treilea expune teoria încovoierii simetrice la suprafeţele de rotaţie, cu particularizare la rezervoarele cilindrice şi cupola sferică.

Capitolele patru şi cinci prezintă teoria de membrană la plăcile cilindrice şi la plăcile curbe subţiri de formă oarecare (cu particularizare la paraboloidul hiperbolic încărcat cu zăpadă).

Ultimul capitol intitulat *Particularităţi ale stării de eforturi* stabileşte corelaţia dintre eforturi, momente şi eforturile unitare, precum şi variaţia eforturilor în jurul unui punct.

În încheierea cărţii, o anexă cuprinde sub forma unei prezentări excelente, un mare număr de soluţii din teoria de membrană.

Trebuie subliniată în mod deosebit figurarea acestei anexe care caracterizează spiritul de sinteză al autorului, atît de bine relevat şi de lucrarea sa anterioară *Probleme de instabilitate ale elastostaticii* (*Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1950, 339 p.).

Cazuri mai grele şi speciale din teoria plăcilor curbe subţiri, cum ar fi teoria încovoierii nesimetrice la plăci cilindrice sau probleme de instabilitate, nu sînt tratate.

Scopul urmărit în lucrare este realizat deplin, cartea constituind un excelent îndreptar pentru cei care vor să-şi însuşească noţiunile de bază din teoria plăcilor curbe subţiri.

Mircea Soare

П. Д. Евдокимов, *Прочности оснований и устойчивость гидротехнических сооружений на мягких грунтах* (Rezistenţa pămînturilor de fundaţie şi stabilitatea construcţiilor hidrotehnice pe pămînturi moi). Госэнергоиздат, Москва-Ленинград. 1956, 268 pag., 174 fig., 27 tabele.

А. А. Ничипорович, Н. И. Хрусталев, *Устойчивость бетонных содонапорных сооружений на нескальных грунтах* (Stabilitatea construcţiilor de beton de retenţie a apei pe pămînturile nestîncoase). Госиздат лит. по строительству и архитектуре, Москва, 1957, 188 pag., 103 fig., 37 tabele.

Importantele complexe hidroenergetice amplasate în albia inferioară a fluviilor, marile construcţii portuare executate în U.R.S.S. în condiţii dificile de fundare, pe pămînturi nestîncoase, au făcut ca problema capacităţii portante a masivelor de pămînt, solicitate de sarcini înclinate, centrice şi excentrice să devină una din principalele preocupări ale geotehnicienilor sovietici. De această problemă se ocupă numeroase institute de proiectare şi cercetări ştiinţifice, catedre ale institutelor de învăţămînt superior. În particular, două mari institute sovietice de cercetări ştiinţifice urmăresc problema capacităţii portante şi a stabilităţii construcţiilor hidrotehnice încă din anii 1933—1935: Institutul Unional de cercetări ştiinţifice hidrotehnice „Vedeneev" din Leningrad, (VNIIG) şi cel pentru alimentare cu apă, canalizare, construcţii hidrotehnice şi hidrogeologie inginerească din Moscova (VODGEO). Cartea lui Niciporovici şi Hrustalev expune rezultatele studiilor întreprinse la VODGEO în problema menţionată, între 1946—1954; cartea lui Evdokimov se referă la lucrările efectuate la VNIIG, în special cele întreprinse sub conducerea autorului cărţii.

Ambele cărţi au drept punct de pornire o analiză a metodelor existente de determinarea capacităţii portante a masivelor de pămînt. Concluziile celor două analize sînt similare.

Metodele existente de calcul (metode bazate pe delimitarea zonelor plastice prin folosirea relaţiilor deduse pentru medii liniar deformabile, cele care admit suprafeţe de rupere de formă prestabilită, cele care admit ipoteza stării de eforturi limită) duc la rezultate foarte dispersate. Pentru acelaşi caz, valorile deduse cu diverse metode pot fi de mai multe ori mai mari unele decît celelalte. În acelaşi timp, aceste valori sînt de mai multe ori mai mici decît valorile deduse experimental.

Explicaţia neconcordanţelor constatate se pare că trebuie căutată pe de o parte în faptu[1] că metodele existente de calcul nu redau suficient de corect procesul de rupere a masivului de pămînt, pe de altă parte în faptul că indicii utilizaţi pentru caracterizarea rezistenţei pămîntului (unghiul de frecare internă şi coeziunea) nu ar fi corespunzători.

Pentru rezolvarea problemei, colectivele de cercetători din ambele institute s-au orientat pe lîngă dezvoltarea calculelor teoretice, spre o foarte largă activitate experimentală. Toate studiile au avut în vedere problema plană. La VODGEO experimentarea s-a făcut în canale plane şi în centrifugă. La VNIIG s-au utilizat, pe lîngă canalele plane, bazine experimentale; de asemenea s-au făcut un număr de încercări pe plăci mari (mergînd pînă la 12 m^2), în gropile de fundaţii ale unor construcţii hidrotehnice; încercările în bazine experimentale şi pe teren s-au efectuat cu grupe de trei plăci identice aşezate una lîngă alta şi supuse aceloraşi solicitări, astfel încît placa centrală să lucreze în condiţiile problemei plane.

Majoritatea încercărilor s-au făcut pe nisipuri.

Criteriul de modelare utilizat a fost cel rezultat din condiţia ca sistemul de ecuaţii format din cele două ecuaţii de echilibru şi condiţia de plasticitate Mohr-Rankine să fie similare atît pentru model cît şi pentru construcţia reală. Rezultă condiţiile

$$\rho_{\text{nat.}} = \rho_{\text{model}}\,; \quad N = \frac{\sigma_n}{\gamma_n\, b_n} = \frac{\sigma_m}{\gamma_m\, b_m}\,; \quad \frac{\sigma_n}{c_n} = \frac{\sigma_m}{c_m}$$

în care ρ = unghiul de frecare internă,
N = cifra de modelare,
σ = efortul unitar,
γ = greutatea volumetrică a pămîntului,
b = lăţimea tălpii de fundaţie,
c = coeziunea.

Niciporovici a verificat experimental aceste condiţii de modelare şi le-a găsit juste.

Unul dintre obiectivele studiilor întreprinse a fost determinarea modului de rupere a masivului de pămînt (zona afectată de rupere). Încercările au scos în evidenţă că, în funcţie de solicitările aplicate, se deosebesc trei moduri de rupere: lunecare pe suprafaţa de contact construcţie—masivul de pămînt; rupere de adîncime, cuprinzînd numai o parte din suprafaţa tălpii fundaţiei: rupere cuprinzînd întreaga talpă a fundaţiei.

Un alt obiectiv al studiilor experimentale a fost verificarea metodelor de calcul existente şi stabilirea unor noi metode mai adecvate.

Experienţele au confirmat neconcordanţa dintre valorile teoretice şi cele experimentale. Este însă de observat că relaţia $\tau_{cr} = f(\sigma)$, în care σ este efortul normal aplicat pe suprafaţa masivului, iar τ_{cr} este efortul orizontal aplicat în acelaşi loc şi care produce pierderea stabilităţii reprezentată grafic pentru diferite metode, dă curbe asemănătoare ca formă, dar foarte deosebite ca mărime. Diferenţa maximă se constată pentru $\tau_{cr} = 0$; $\sigma = \sigma_{cr}$ (curbele pornesc din origine şi descriu un arc care reintersectează axa σ în punctul σ_{cr}).

Dacă însă în constatarea calitativă a fenomenului de pierderea stabilităţii şi în aprecierea metodelor existente, cele două lucrări ajung la constatări similare, în ceea ce priveşte recomandările pentru noi metode de calcul, ele ajung la concluzii deosebite.

Din experienţă rezultă că, pentru valori relativ mici ale lui N, relaţia $\tau_{cr} = f(\sigma)$ este de forma

$$\tau_{cr} = \sigma \operatorname{tg} \varphi.$$

Drept limita pînă la care este valabilă această relaţie, Evdokimov recomandă: N_{cr} = cifra critică de modelare = 16 sin φ (pentru materiale necoezive).

Niciporovici indică următoarea relaţie:

$$\sigma_{\text{limită}} = 3 \gamma b \operatorname{tg} \varphi.$$

Încărcarea verticală pe suprafaţa masivului pînă la care se menţine relaţia liniară între efortul orizontal de rupere şi încărcarea verticală rezultă de mai mult de trei ori mai mare din condiţia lui Evdokimov decît din condiţia lui Niciporovici.

Pentru încărcări mai mici decît această limită, ruperea se produce prin lunecarea construcţiei pe talpa fundaţiei. Pentru încărcări mai mari, se produce ruperea de adîncime. Zona din talpa fundaţiei afectată de rupere, creşte o dată cu creşterea lui σ şi cuprinde întreaga talpă pentru $\sigma = \sigma_{cr}$.

Pentru încărcări mai mari decît $\sigma_{\text{limită}}$, Evdokimov recomandă o metodă de calcul grafo-analitic, bazată pe ipoteza stării integrale de eforturi limită. Niciporovici propune o metodă empirică, de altfel foarte simplă şi care nu presupune, în afară de cunoaşterea caracteristicilor mecanice şi greutatea volumetrică a pămîntului, decît mărimea sarcinei critice (determinată pe model).

Este de remarcat că, în general, construcţiile hidrotehnice se pare că se situează în zona de proporţionalitate $\tau_{cr} = f(\sigma)$.

Pe lîngă principalele probleme expuse mai sus, lucrările recenzate mai ating diverse aspecte legate de capacitatea portantă a masivelor de pămînt (determinarea rezistenţei la tăiere, influenţa excentricităţii, a stratificaţiei terenului, a formei tălpii fundaţiei etc.).

Apariţia simultană a celor două lucrări analizate, scoate în evidenţă atenţia deosebită acordată de geotehnicienii sovietici problemei capacităţii portante a fundaţiilor construcţiilor hidrotehnice.

Faptul că două colective studiind independent unul de altul, fiecare cu metode proprii de lucru, problema capacităţii portante, ajung la concluzii similare cu privire la aspecte esenţiale ale acestor probleme, prezintă o mare importanţă pentru dezvoltarea mai departe a cercetărilor în domeniul respectiv. În ceea ce priveşte metodele de calcul propuse, ele apar ca foarte utile pe de o parte pentru orientarea în continuare a cercetărilor, pe de altă parte ca metode inginereşti de apreciere a capacităţii portante, în faza actuală de rezolvare a aproblemei.

R. J. Bally

A. W. BISHOP şi D. J. HENKEL: *The measurement of soil properties in the triaxial test* (Măsurarea proprietăţilor pămîntului prin încercarea triaxială). Londra, Edward Arnold, 1957, 190 pag., 129 fig.

Problema rezistenţei la tăiere preocupă actualmente în mod deosebit pe cercetătorii din domeniul mecanicii pămînturilor. Valoarea practică şi corespondenţa cu realitatea a teoriilor şi calculelor referitoare la stabilitatea masivelor de pămînt depind în mare măsură de justeţea determinărilor coeficienţilor rezistenţei la tăiere. Metodele de determinare prin forfecare directă folosite de la început, nu au dat, în multe privinţe, rezultate satisfăcătoare; de aceea, atenţia cercetătorilor s-a îndreptat asupra unor metode prin care probele de pămînt să fie puse în situaţii cît mai apropiate de cele reale. Printre acestea a căpătat extindere în ultimii ani încercarea la compresiune triaxială.

Faţă de răspîndirea actuală a utilizării metodei, se resimţea lipsa unei lucrări de specialitate, care să prezinte în mod documentat aparatul triaxial şi metodele de încercare respective. Această lipsă a fost remediată prin apariţia lucrării prof. A. W. Bishop şi D. J. Henkel.

Autorii, a căror activitate se desfăşoară în cadrul Universităţii din Londra, sînt cunoscuţi prin numeroasele lucrări apărute în revistele de specialitate, precum şi prin comunicările ţinute la ultimele congrese internaţionale de geotehnică şi fundaţii. Printre altele, ei au publicat valoroase studii cu privire la încercările în aparatul triaxial.

Volumul apărut spre sfîrşitul anului 1957 are un caracter monografic, prezentînd în mod succint, însă cuprinzător, ansamblul de probleme legate de determinările de laborator în celula triaxială.

Lucrarea este împărţită în patru părţi, prima dintre acestea ocupîndu-se cu probleme introductive, principii şi generalităţi. Se explică pe scurt fenomenul de consolidare, precum şi noţiunea de supraconsolidare a pămînturilor argiloase, expunerea fiind însoţită de diagrame calitative sugestive. În continuare, se descriu tipurile de încercări triaxiale: nedrenate (în sistem închis), consolidate-nedrenate şi drenate (în sistem deschis), arătîndu-se caracteristicile fiecăruia şi rezultatele care pot fi obţinute. În aceeaşi parte a lucrării sînt enumerate problemele practice la a căror soluţionare încercarea respectivă poate fi de mare folos: stabilitatea taluzelor, rambleelor şi zidurilor de sprijin; stabilitatea masivelor de nisip sau pietriş supuse la acţiunea hidrodinamică; stabilitatea fundaţiilor şi rambleelor aşezate pe argilă saturată, precum şi a pereţilor excavaţiilor nesprijinite sau sprijinite cu palplanşe; prevenirea ridicării (umflării) fundului săpăturilor adînci în argilă; problemele legate de umpluturile impermeabile supuse acţiunii hidrodinamice.

În încheierea acestei părţi se expun principalele avantaje şi dezavantaje ale încercării, arătîndu-se influenţa efortului principal intermediar, a schimbării de direcţie a eforturilor principale, a contracţiei marginale a probelor şi a duratei de încercare.

Partea a doua a lucrării cuprinde descrierea elementelor principale ale aparatului triaxial, începînd cu celula propriu-zisă de încercare, pentru probe cu diametru de aproximativ 4 şi 10 cm, şi continuînd cu dispozitivele pentru controlul presiunii laterale în celulă. Se parcurg diferitele soluţii adoptate: utilizarea unui rezervor de aer, prevăzut cu o supapă pentru reducerea presiunii, folosirea unei mici prese hidraulice sau a unui manometru autocompensator cu mercur, pentru care se dau ample detalii constructive. Se trece apoi la descrierea aparaturii pentru măsurarea presiunii apei din pori, pentru care de asemenea se preconizează un dispozitiv cu mercur. Deformaţiile probelor în timpul încercării se măsoară cu o aparatură introdusă în circuitul de măsură a presiunii în celulă. Se atrage atenţia asupra necesităţii de a se ţine seama de deformaţiile proprii ale celulei la diferite presiuni şi în timp, prezentîndu-se ca exemplu o curbă de tarare. Expunerea se încheie cu prezentarea diferitelor dispozitive de încărcare şi a unui sistem de drenaj lateral al probelor încercate.

Partea a treia tratează despre executarea încercărilor curente. Se începe cu modul de preparare a probelor neturburate, turburate sau compactate, dîndu-se detalii referitoare la fiecare tip de pămînt, inclusiv cele necoezive, la care pregătirea se face cu precauţii speciale. Se au în vedere diferite condiţii de încercare şi de măsurare a elementelor experimentale. Pentru fiecare caz în parte, expunerea este ilustrată cu tabele de valori obţinute în experienţele efectuate de autori. Rezultatele sînt date în funcţie de proprietăţile de bază ale pămînturilor analizate.

Ultima parte se ocupă cu încercările speciale. Se descriu pe rînd, încercările în sistem deschis, pe argile saturate, cu efortul principal maxim menţinut constant şi cu cel minim descrescînd pînă la rupere; încercări în sistem închis, pe pămînturi nesaturate, în aceleaşi condiţii; încercări în care cedarea este provocată de creşterea presiunii apei din pori. Se tratează apoi despre probele de întindere, la care este necesar un dispozitiv special, precum şi despre probele cu consolidare anizotropică.

O atenţie deosebită este acordată măsurării raportului dintre variaţia presiunii apei din pori şi variaţia efortului principal maxim în diferite condiţii de încercare, executării încercărilor sub volum constant şi determinării valorii reale a unghiului de frecare internă şi a coeziunii pămîntului.

Expunerea cuprinsă în cele patru părţi este urmată de cîteva anexe, care cuprind, între altele, modul în care trebuie aplicate corecţiile datorite rezistenţei membranei de cauciuc în care sînt cuprinse probele în timpul încercărilor şi ale drenurilor laterale din hîrtie de filtru, caracteristicile inelelor dinamometrice folosite de autori, însoţite de exemple de curbe de tarare, influenţa frecării dispozitivului de încărcare axială a probei, date asupra vitezei de efectuare a încercărilor şi corecţiile necesare în cazul în care, între probă şi membrana de cauciuc învăluitoare, pătrunde aer.

Lucrarea este însoţită de o bogată bibliografie referitoare la problemele tratate, de o listă a principalilor producători de aparatură specială, un indice de materii şi o tabelă de conversie a unităţilor de măsură englezeşti în unităţi metrice.

Prin expunerea clară, simplă şi totuşi la un nivel ştiinţific ridicat, prin modul extrem de îngrijit în care este organizat materialul expus, în sfîrşit, prin marele număr de figuri, scheme şi diagrame explicative, lucrarea prof. Bishop şi Henkel poate fi de mare ajutor geotehnicienilor din ţara noastră, unde aparatele de compresiune triaxială au devenit în ultimul timp destul de numeroase, însă exploatarea lor nu este încă total pusă la punct.

Studierea acestei lucrări şi aplicarea bogatei experienţe pe care o cuprinde vor putea sta la baza executării unei întinse game de încercări în acest domeniu, din care cercetătorii de specialitate nu vor avea decît de cîştigat.

I. Antonescu

M. GIQUEAUX ET A. OUDART, *Aide-mémoire des fonctions analytiques* (Formular pentru funcţii analitice). Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liège, 1958, 35 pag.

În această broşură sînt redate principalele rezultate obţinute în teoria funcţiilor de variabilă complexă. Aceste rezultate care, într-un curs de nivel universitar, sînt expuse pe larg, în lucrarea de faţă sînt redate în mod succint pentru a se putea atinge scopul broşurii, şi anume de „aide-mémoire”.

Prezentarea este clară şi concisă.

B. H.

CĂRȚI PRIMITE LA REDACȚIE

Fr. D. MURNAGHAN, *Equaçoes diferenciais*. Centro Tecnico de Aeronautica, Sao José dos Campos 1955, 401 pag.

Fr. D. MURNAGHAN, *Calculo avançado*. Centro Tecnico de Aeronautica, Sao José dos Campos 1954, 476 pag.

J. FARINHA, *Sobre a convergencia nas fracçoes continuas de elementos complexos*. Coimbra 1953, 130 pag.

F. WOLF, *Grundzüge der Physik*. Vol. I, II. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1949, 388 + 565 pag.

P. D. RACHE, *Lições de mecanica geral*. Vol. I, II, III. Curso da Escola de Engenharia da Universidade da Minas Geraes. Bello Horrizonte. 1929, 328 + 253 + 245.

M. DAMASIEWICZ, *Mechanika teoretyczna dla praktykow*. Panstwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa 1956, 377 pag.

CARRIÈRE, *Méthodes théoriques d'étude des écoulements supersoniques*. Centre d'Etudes Supérieures de France, 1957, vol. I, II, III, 292 pag.

* * *, *Boundary Layer Effects in Aerodynamics*. Proceedings of a Symposium held at the Național Physical Laboratory on 31-st March and 1-st April 1955, London, Her Majesty's Stationary Office, 1955.

W. B. BROWER, *The Application of the Electric Analogy to Two-dimensional Problems in Aeronautics*. Rensselaer Polytechnic Institute, Research Division Troy, 1953, 109 pag.

* * *, *50 Jahre Grenzschichtforschung* (sub redacția H. Görtler, W. Tollmien). F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1955, 498 pag.

L. ESCANDE, *Barrages*. Vol. I, II, III, Actualités Scientifiques et Industrielles, Hydraulique Paris, 1937, 93 + 11 + 76 pag.

L. ESCANDE, *Hydraulique générale*. E. Privat, Librairie-Editeur, Toulouse Vol. I. 1947, 315 pag. Vol. II. 1948, 365 pag. Vol. III. 1950, 380 pag.

L. ESCANDE, *Compléments d'hydraulique*. Part. I. Toulouse, Ed. Privat, Librairie-Editeur, 1947, 220 pag. Part. II, Paris, Ed. Dunod, 1951, 248 pag.

L. ESCANDE, *Méthodes nouvelles pour le calcul des chambres d'équilibre*. Ed. Dunod, Paris, 1950, 557 pag.

L. ESCANDE, *Nouveaux compléments d'hydraulique*. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, Paris, Part. I, 1953, 232 pag. Part. II. 1955, 274 pag.

L. ESCANDE, *Etude de quelques écoulements comportant la formation d'une veine de courant*. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, Paris, 1946, 164 pag.

L. ESCANDE, *Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau dans les chambres d'équilibre*. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, Paris, 1943, 263 pag.

J. NOUGARO, *Etude théorique et expérimentale de la propagation des intumescences dans les canaux découverts*. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, Paris, 1953, 155 pag.

S. GERBER, *Etude théorique et expérimentale de la stabilité des chambres d'équilibre situées en aval d'une galérie en charge alimentée par un canal à écoulement libre*. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, Paris, 1956, 119 pag.

J. TLUSTY, *Avtokolebaniia v metallorejuscih stankah*. Moscova, Maşghiz, 1957, 394 pag.

R. BURTON, *Vibration and Impact*. Addison Wesley Publ. Comp. Inc., Reading, Mass, 1958, 310 pag.

* * *, *Razvitie Teorii Trenia i Iznașivania*. Trudî Sovesciania po Voprosam Teorii Treniia i Iznaşivania. 15—17 noiembrie 1954, Izdat. Akad. Nauk SSSR., Moscova, 1957.

* * *, *Ghidroturbostroenie* (redactat de N. N. Kovalev) Maşghiz, Moscova, 1957, 387 pag.

* * *, *Razvedka i rasrabotka neftianih i gazovih mestorojdenii*. Tom I. Gostoptehizdat. Moscova, 1958, 309 pag.

* * *, *Pererabotka nefti*. Gostoptehizdat, Moscova, 1958, 288 pag.

* * *, *Neftianoe Mașinostroenie*. Vol 3. Gostoptehizdat, Moscova, 1958, 222 pag.

G. PRIKEL, *Tiefbohrgeräte*. Springer-Verlag, Wien, 1957, 305 pag.

* * *, *Aufwand, Leistung, Wirtschaftlichkeit neuzeitlicher Werkzeugmaschinen*, (redactat de H. Opitz) Verlag W. Girardet. Essen 1953, 188 pag.

S. JOHN, *Die Fernmessung*. I. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1951, 101 pag.

J. BIERMANNS, *Energieübertragung auf grosse Entfernungen*. Verlag G. Braun. Karlsruhe 1949, 280 pag.

W. BÜTOW, *Relais und Schutzschaltungen in elektrischen Hochspannungsanlagen*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1954, 144 pag.

P. BÖNING, *Kleines Lehrburch der elektrischen Festigkeit*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1955, 162 pag.

H. PROBST, *Hochspannungsgeräte und -schaltanlagen*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1953, 196 pag.

W. BEETZ, *Tarifgeräte und Schaltuhren*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1954, 110 pag.

W. KRAUS, *Messungen des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes bei freier Konvektion*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1955, 147 pag.

R. RICHTER, *Lehrbuch der Wicklungen elektrischer Maschinen*. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1952, 162 pag.

ERATĂ

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:
583 și 584		figurile 42 și 44 sînt inversate	
648	2 de jos	cu	ca
695	(1)	k	h
698	6	0,2	0,02
700	8	în funcție de P_m	în funcție de P_{m-1}
702	(53)	$\overline{N}_m^{m-1}$	$\underline{\overline{N}}_m^{m-1}$
702	(55)	$\overline{N}_n^{n-}$	$\underline{\overline{N}}_n^{n-1}$
702	(58)	$\underline{M}_n^{n-1}\,\underline{N}_n^{n-1} - \underline{\overline{M}}_n^{n-1}\,\underline{\overline{N}}_n^{n-1}$	$\overline{M}_n^{n-1}\,\underline{\overline{N}}_n^{n-1} - \underline{\overline{M}}_n^{n-1}\,\overline{N}_n^{n-1}$
708	23	neglijabil	neneglijabil
717	(46) și (47)	$\alpha\frac{1}{8}$	$\alpha^{\frac{1}{8}}$

C. 1589.

2537
VIII

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

4
ANUL IX
1958

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

4
ANUL IX
1958

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

- ACADEMICIAN N. PROFIRI;
- A. BELEȘ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
- CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
- A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
- R. BOGDAN, conferențiar la Institutul de petrol, gaze și geologie, București;
- N. TIPEI, conferențiar la Institutul politehnic, București;
- M. ARCAN, conferențiar la Institutul de construcții, București.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

APARE DE 4 ORI PE AN

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ « TRAIAN VUIA »

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul IX, nr. 4 1958

SUMAR

STUDII ŞI CERCETĂRI

MECANICĂ ANALITICĂ

Pag.

VICTOR VÂLCOVICI, Asupra legăturilor olonome şi neolonome 811

AEROMECANICĂ

ELIE CARAFOLI şi BEATRICE HOROVITZ, Probleme mixte ale aripilor triunghiulare, prevăzute cu placă normală, în curent supersonic (Aripi cruciforme) 819

ELIE CARAFOLI şi ADRIANA NĂSTASE, Studiul aripilor triunghiulare subţiri cu simetrie forţată în curent supersonic 833

N. TIPEI şi C. GUŢĂ, Asupra mişcării avionului pe o traiectorie dată 855

ŞT. N. SĂVULESCU, Consideraţii asupra unor soluţii din cazul stratului limită compresibil nepermanent 867

HIDROMECANICĂ

L. ESCANDE, Cercetări asupra evacuatorilor de ape mari 881

D. DUMITRESCU şi DAN GH. IONESCU, Metode numerice pentru studiul mişcărilor axial-simetrice ale fluidelor perfecte 919

T. OROVEANU, Asupra unei clase de scurgeri prin medii poroase neomogene . . . 937

H. PASCAL, O metodă aproximativă pentru studiul dislocuirii ţiţeiului de către apă în regim nestaţionar 945

ION VLADIMIRESCU, Calculul debitelor de viitură a bazinelor mici prin hidrograful indicial în a doua aproximaţie 957

S. HÎNCU, Determinarea lungimii de stabilizare a mişcării turbulente a fluidelor în canale largi şi conducte circulare sub presiune 973

UNGERE—FRECARE—UZURĂ

D. ISĂCESCU, GH. VASILCA, V. CALCAN şi AL. NICA, Unele proprietăţi funcţionale ale unui material plastic pe bază de furfurol-fenol, ca material pentru lagăre 983

V. N. CONSTANTINESCU, Stabilitatea mişcării lagărelor circulare lubrificate în regim turbulent 997

REZISTENȚA MATERIALELOR—ELASTICITATE

Pag.

AUGUSTIN PETRE, Bare curbe cu pereți subțiri 1013
LADISLAU NEMETI, Starea elasto-plastică în tuburi fretate 1023
V. MANEA, Torsiunea arborelui gol cu caneluri radiale exterioare sau interioare 1035

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

RADU PRIȘCU și MIHAI CONSTANTINESCU, Calculul barajelor arcuite prin metoda rețelelor 1049

TRATAMENTE MECANICE ȘI PRELUCRAREA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

M. POPOV, I. MITRICĂ și E. DECIU, Studiu comparativ al parametrilor geometrici ai cuțitelor de strung armate cu plăcuțe mineralo-ceramice și din carburi metalice 1077

REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE

D. MANGERON și R. BOGDAN, Studii, cercetări și perspective în domeniul teoriei mașinilor și mecanismelor în Republica Populară Romînă 1093

RECENZII 1099

CĂRȚI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE 1111

Index alfabetic pentru 1958 1113

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

REVISTA «STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ»

cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviaţie, mecanica fluidelor, ventilaţie, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacţie, construcţii de avioane, utilizarea energiei eoliene).

— Construcţii de maşini (rezistenţa materialelor, cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul ale diferitelor maşini, automatizare, studiul suprafeţelor, tratamente mecanice şi prelucrarea mediilor solide continue).

— Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

— Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de executarea lucrărilor de construcţii).

— Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 de pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată ,,Traian Vuia", Bucureşti, str. C. Mille, nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome IX, nº 4 1958

SOMMAIRE

ÉTUDES ET RECHERCHES

MÉCANIQUE ANALYTIQUE

Page
VICTOR VÂLCOVICI, Sur les liaisons holonomes et non holonomes 811

AÉROMÉCANIQUE

ELIE CARAFOLI et BEATRICE HOROVITZ, Les problèmes mixtes des ailes triangulaires, pourvues d'une plaque normale, en courant supersonique. (Ailes cruciformes). 819
ELIE CARAFOLI et ADRIANA NĂSTASE, L'étude des ailes triangulaires minces, à symétrie forcée, en courant supersonique 833
N. TIPEL et C. GUȚĂ, Sur le mouvement de l'avion sur une trajectoire donnée 855
ȘT. N. SĂVULESCU, Considérations sur certaines solutions pour le cas de la couche limite compressible non permanente 867

HYDROMÉCANIQUE

L. ESCANDE, Studies on hydraulic structures for the removal of floods 881
D. DUMITRESCU et DAN GH. IONESCU, Méthodes numériques pour l'étude des mouvements à symétrie axiale des fluides parfaits 919
T. OROVEANU, Sur une classe d'écoulements à travers les milieux poreux non homogènes 937
H. PASCAL, Une méthode approximative pour l'étude du délogement du pétrole brut par l'eau en régime non stationnaire 945
ION VLADIMIRESCU, Calcul des débits de crue des petits bassins à l'aide de l'hydrographe indiciel, en seconde approximation 957
S. HÎNCU, Détermination de la longueur de l'établissement du mouvement turbulent des fluides dans les canaux larges et dans les conduites circulaires sous pression 973

LUBRIFICATION — FROTTEMENT — USURE

D. ISĂCESCU, GH. VASILCA, V. CALCAN et AL. NICA, Quelques propriétés fonctionnelles d'un matériel plastique, fabriqué à base de résine furfurol-phénolique, employé à la fabrication des coussinets 983

Page

V. N. CONSTANTINESCU, La stabilité du mouvement des paliers circulaires lubrifiés en régime turbulent 997

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX — ÉLASTICITÉ

AUGUSTIN PETRE, Barres courbes à parois minces 1013
LADISLAU NEMETI, Etat élasto-plastique dans les tuyaux frettés 1023
V. MANEA, Torsion de l'arbre creux à cannelures radiales extérieures ou intérieures 1035

MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS

RADU PRIŞCU et M. CONSTANTINESCU, Le calcul des barrages voûtés par la méthode des réseaux 1049

TRAITEMENTS MÉCANIQUES ET TRAVAIL DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

M. POPOV, I. MITRICĂ et E. DECIU, Etude comparée des paramètres géométriques des outils de coupe en céramique et à base de carbures métalliques 1077

RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

D. MANGERON et R. BOGDAN, Research in the field of machines and mechanisms carried out in the Rumanian People's Republic. Future outcome 1093

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 1099

LIVRES REÇUS À LA RÉDACTION 1111

Index alphabétique pour l'année 1958 1113

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

LA REVUE « ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE »

comprend des études de mécanique appliquée, notamment:

— Mécanique générale (élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques).

— Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction, construction des avions, utilisation de l'énergie éolienne).

— Constructions mécaniques (résistance des matériaux, cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des différentes machines, automatisation, étude des surfaces, traitements mécaniques et travail des milieux solides continus).

— Technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radio-actifs en technique).

— Statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction).

— Hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés dactylographiés, en trois exemplaires; les formules seront écrites à l'encre et d'une manière lisible.

Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliographiques seront mentionnées spécialement à la fin de l'article. Elles doivent être aussi complètes que possible, comprenant, par exemple pour les périodiques, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers seront rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia » de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 15, rue Constantin Mille, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ «ТРАЯН ВУЯ»

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том IX, № 4 1958

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ И ИССЛЕДОВАНИЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА Стр.

ВИКТОР ВЫЛКОВИЧ, О голономных и неголономных связях 811

АЭРОМЕХАНИКА

ЭЛИЕ КАРАФОЛИ и БЕАТРИС ХОРОВИЦ, Смешанные задачи треугольных крыльев, оснащенных перпендикулярной пластиной, в сверхзвуковом потоке (крестообразные крылья) 819
ЭЛИЕ КАРАФОЛИ и АДРИАНА НЭСТАСЕ, Исследование тонких треугольных крыльев с принудительной симметрией в сверхзвуковом потоке 833
Н. ТИПЕЙ и К. ГУЦЭ, О движении самолета по заданной траектории 855
Ш. Н. СЭВУЛЕСКУ, К вопросу некоторых решений в случае сжимаемого неустановившегося пограничного слоя 867

ГИДРОМЕХАНИКА

Л. ЭСКАНД, Исследование паводковых водосбросов 881
Д. ДУМИТРЕСКУ и ДАН Г. ИОНЕСКУ, Численные методы исследования осесимметричных движений идеальных жидкостей 919
Т. ОРОВЯНУ, Об одном классе фильтрации в неоднородной пористой среде 937
Г. ПАСКАЛ, Приближенный метод изучения вытеснения нефти водой в нестационарном режиме 945
ИОН ВЛАДИМИРЕСКУ, Расчет дебитов паводковых вод малых водоемов при помощи гидрографа показателей во втором приближении . 957
С. ХЫНКУ, Определение длины стабилизации турбулентного движения жидкостей в широких каналах и круглых напорных трубопроводах 973

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

Д. ИСЭЧЕСКУ, Г. ВАСИЛКА, В. КАЛКАН и А. НИКА, Некоторые функциональные свойства одного пластического материала на основе фурфурол-феноловой смолки в качестве материала для подшипников 983

Стр.

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Устойчивость движения круговых подшипников, смазываемых в турбулентном режиме 997

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — УПРУГОСТЬ

АУГУСТИН ПЕТРЕ, Изогнутые тонкостенные стержни 1013

ЛАДИСЛАУ НЕМЕТИ, Упруго-пластическое состояние труб с хомутиковым соединением 1023

В. МАНЯ, Кручение пустотелого вала с внутренними или наружными радиальными шлицами 1035

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

РАДУ ПРИШКУ и МИХАЙ КОНСТАНТИНЕСКУ, Расчет арочных плотин по методу сеток 1049

МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

М. ПОПОВ, И. МИТРИКЭ и Е. ДЕЧУ, Сравнительное исследование геометрических параметров токарных резцов, оснащенных минерало-керамическими пластинками и пластинками из металлических карбидов 1077

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

Д. МАНДЖЕРОН и Р. БОГДАН, Исследования и перспективы в области машин и механизмов в РНР 1093

РЕЦЕНЗИИ 1099

КНИГИ, ПОСТУПИВШИЕ В РЕДАКЦИЮ В ПОРЯДКЕ КНИГООБМЕНА 1111

Алфавитный указатель за 1958 год 1113

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ЖУРНАЛ «ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ»

содержит нижеследующие разделы прикладной механики:

— Общую механику (упругость, пластичность, вибрации и удары, устойчивость элгктрические и гидравлические аналогии).

— Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, реактивные двигатели, самолетостроение, использование энергии ветра).

— Машиностроение (сопротивление материалов, кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механическая обработка сплошных твердых сред).

— Технику измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

— Статику и динамику сооружений (методы статического и динамичекого расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, геотехника, устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ, и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных и зарубежных сотрудников.

Статьи следует редактировать в джатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным данным проблемы.

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указывать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста для каждого экземпляра нужно представить резюме на румынском и, если возможно, на русском и французском языках. Резюме должно в среднем составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных авторов, редактированным на русском, английском, французском или немецком языке.

Рукописи предпровождаются в адрес: Институт прикладной механики «Траян Вуя», Бухарест, ул. Константин Милле № 15, район Г. Георгиу-Деж.

ASUPRA LEGĂTURILOR OLONOME ȘI NEOLONOME

DE

VICTOR VÂLCOVICI

Cu altă ocazie [1], [2] am arătat că expresia

$$f(q, \dot{q}, t) = 0, \tag{1}$$

q fiind simbolul coordonatelor lui Lagrange$(q^1, q^2, \ldots, q^s)$ și $\dot{q}$ al derivatelor lor în raport cu timpul t, care se folosește de obicei pentru a exprima o „legătură" în mecanica sistemelor, este lipsită de fundament fizic.

Am dat legăturilor forma

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_{ij}\, d\bar{r}_i + \alpha_j\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

atunci cînd este vorba de legături (olonome sau neolonome) cărora li s-ar supune sistemul (A) de puncte A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (vectori de poziție $\bar{r}_i$), $\bar{\alpha}_{ij}$ fiind funcții vectoriale, α_j funcții scalare de argumentele t, $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n$; $\dot{\bar{r}}_1, \ldots, \dot{\bar{r}}_n$; $\ddot{\bar{r}}_1, \ldots, \ddot{\bar{r}}_n$ [7].

În acest studiu ne propunem să aprofundăm generalizarea ce se impune de la sine, și pe care am lăsat-o la o parte în lucrările menționate.

1. PROCESUL DE MIȘCARE ÎN MECANICĂ

Pornim de la ideea care stă la baza mecanicii, și anume că orice deplasare finită a unui punct material oarecare A cu masa m, din poziția P într-o alta Q, este rezultatul unei succesiuni de deplasări infinitezimale $d\bar{r}$, care se deduc una din alta, cu ajutorul legii fundamentale (legea a doua a lui Newton). Aceasta înseamnă în ultima analiză că trebuie să imprimăm punctului A, în fiecare poziție, o accelerație egală cu valoarea forței $\bar{F}$ în această poziție, împărțită la masa punctului A, pentru a obține viteza punctului în poziția sa învecinată. Astfel, plecînd de la poziția „inițială"

P, determinată de vectorul (cunoscut) $\bar{r}_0$, punctul A va descrie deplasarea $d\bar{r}$ în intervalul de timp dt, cu viteza „inițială" $\bar{v}_0$ (cunoscută), ajungînd în poziția P'. Dacă am cunoaște viteza $\bar{v}$ a punctului A în poziția P', i-am putea determina poziția P'' după un alt interval de timp dt, procedînd ca mai sus; dar viteza în punctul P' va fi dată de viteza $\bar{v}_0$, căreia va trebui să-i adăugăm variația $\bar{a}_0\, dt$, $\bar{a}_0$, fiind accelerația lui A în punctul P, care va fi, de altfel, egală cu $\bar{F}_0/m$, și așa mai departe.

Acest proces ne dă o descriere intimă a mișcării punctului material A plecînd din poziția sa inițială P; procesul este realizabil întru totul, în condițiile obișnuite ale mecanicii și în ipoteza că mișcarea nu este supusă nici unei legături.

Intervenția legăturilor necesită axiome noi, pentru a ajunge la o descriere acceptabilă a mișcării, în special, principiul liberării și acela al lucrului virtual. Aceste două principii introduc două noțiuni noi în mecanică: primul introduce noțiunea (plauzibilă din punct de vedere fizic) de *reacție a legăturii*; al doilea face apel la noțiunea de *deplasare virtuală*.

Mecanismul deducerii deplasărilor *reale* $d\bar{r}$ ia un aspect mult mai complicat din cauza apariției reacțiilor de legătură, care rămîn necunoscute pînă la sfîrșitul problemei. Procesul descris mai sus nu mai este posibil, adică nu se mai poate determina deplasarea corespunzătoare $d\bar{r}$ plecînd de la o poziție oarecare P', deoarece valoarea accelerației nu mai este dată de legea fundamentală, ca mai sus. Dacă nu există nici o legătură, $d\bar{r}$ poate fi ales cu ajutorul legii fundamentale a mecanicii, luînd în considerare direcțiile posibile; dar dacă există una sau mai multe condiții de legătură, nu mai avem dreptul să considerăm, pentru această alegere, toate direcțiile posibile; în afară de aceasta, ecuația fundamentală nu mai este în stare să realizeze o alegere justă.

2. CONDIȚII DE LEGĂTURĂ

Din această scurtă analiză se vede că ar fi preferabil să se indice prin relațiile de legătură care sînt condițiile cărora le sînt supuse deplasările $d\bar{r}$, întrucît acestea din urmă sînt modificate de către legături. Urmează de aici că este mai natural de conceput relațiile de legătură ca funcții locale ale cantităților infinitezimale $d\bar{r}$, dt,

$$f\,(d\bar{r},\ dt) = 0,$$

deci de dq, dt,

$$f\,(dq,\ dt) = 0,$$

iar nu ca funcții globale de forma (1).

Admițînd această concepție cu privire la forma legăturilor, va trebui să luăm cele m legături ale unui sistem (A) sub forma

$$f_j\,(d\bar{r}_1, \ldots, d\bar{r}_n, \ldots, dt) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{3}$$

coeficienții structurii f_j fiind funcții de $\bar{r}$, $\dot{\bar{r}}$, $\ddot{\bar{r}}$, și t. În spațiul configurațiilor vom avea respectiv

$$f_j(dq^1, \dots, dq^s, dt) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{4}$$

coeficienții fiind funcții de q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ și t.

Presupunem că funcția f_j admite o dezvoltare de forma

$$f_j = f_{j1} + f_{j2} + \dots, \tag{5}$$

unde s-a notat cu f_{jk} ($k = 1, 2, \dots$) o formă omogenă de gradul k în raport cu argumentele arătate în (3) sau (4); ipoteza este plauzibilă, dat fiind că argumentele sînt cantități infinitezimale. Din același motiv relația de legătură (3) sau (4) se va putea reduce la ecuația

$$f_{jk_j} = 0.$$

f_{jk_j} fiind primul termen în dezvoltarea (5).

Deducem că cele m legături ale sistemului vor fi exprimate prin

$$f_{jk_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \tag{6}$$

Dacă în special $k_j = 1$, ($j = 1, 2, \dots, m$), relațiile (3) și (4) vor lua forma

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_{ij}\, d\bar{r}_i + \alpha_j\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{7}$$

respectiv

$$\sum_{i=1}^{s} c_{ij}\, dq^i + c_j\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \tag{8}$$

coeficienții $\bar{\alpha}_{ij}$, $\bar{\alpha}_j$, fiind funcții de $\bar{r}$, $\dot{\bar{r}}$, $\ddot{\bar{r}}$, t și c_{ij}, c_i funcții de q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$, t. Deocamdată nu impunem acestor funcții nici o condiție de regularitate; se va vedea mai departe, care sînt condițiile care ar fi suficiente pentru nevoile impuse de tratarea problemei.

3. DIFERENȚA DINTRE FORMA VECHE ȘI FORMA ACTUALĂ A RELAȚIILOR DE LEGĂTURĂ

Menționăm cu acest prilej că formele (7) și (8) ale legăturilor au fost utilizate în mod frecvent chiar și înainte, întrucît erau aproape impuse de forma infinitezimală a ecuației fundamentale a mecanicii

$$\sum (-m_i \bar{a}_i + \bar{F}_i)\, \delta\bar{r}_i = 0, \tag{9}$$

pe care o vom pune, scurtînd-o, sub forma

$$\sum \bar{\Phi}_i\, \delta\bar{r}_i = 0, \tag{10}$$

însemnînd cu $\bar{\Phi}$ „vectorul lui d'Alembert",

$$\bar{\Phi}_i = -m_i \bar{a}_i + \bar{F}_i; \tag{11}$$

am notat cu $\bar{a}_i$ accelerația în punctul A_i, cu $\bar{F}_i$ rezultanta forțelor active aplicate în punctul A_i și cu $\delta\bar{r}_i$ deplasarea virtuală a lui A_i. Ecuația fundamentală (9) nu este decît expresia unei reuniri a principiului lui d'Alembert și a aceluia a lucrului virtual, folosită de Lagrange în *Mécanique analytique* („principiul lui d'Alembert-Lagrange").

Dar expresia deplasării virtuale $\delta\bar{r}_i$ se găsește făcînd $t = \text{const.}$ (deci $dt = 0$) în expresia deplasării reale dr_i. În consecință, vom obține condițiile cărora va trebui să le satisfacă deplasările virtuale $\delta\bar{r}_i$ făcînd $dt = 0$ în (7),

$$\sum \bar{\alpha}_{ij}\, \delta\bar{r}_i = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{12}$$

În spațiul configurațiilor ecuația (9) va fi înlocuită prin

$$\sum_{i=1}^{s} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - Q_i \right) \delta q^i = 0\,, \tag{13}$$

T fiind expresia energiei cinetice a sistemului ca funcție de q, $\dot{q}$, t și Q_i componenta după q a forței active. Deplasările δq_i vor fi supuse condițiilor

$$\sum_{i=1}^{s} c_{ij}\, \delta q^i = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{14}$$

obținute din (8) prin același procedeu. Vom pune și ecuația (14) sub o formă prescurtată,

$$\sum_{i=1}^{s} \Psi_i\, \delta q^i = 0, \tag{15}$$

notînd cu Ψ_i ceea ce corespunde vectorului lui d'Alembert în spațiul configurațiilor,

$$\Psi_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{16}$$

Diferența dintre forma (7) a legăturilor și aceea avînd același aspect, folosită înainte, constă în faptul că funcțiile $\bar{\alpha}_{ij}$, α_j, care erau considerate ca depinzînd numai de $\bar{r}$ și de t, reprezintă aici funcții de $\bar{r}$, $\dot{\bar{r}}$, $\ddot{\bar{r}}$ și t; în consecință, trecînd de la forma infinitezimală (7) la forma finită (cu ajutorul împărțirii prin dt)

$$\sum_{i} \bar{\alpha}_{ij}\, \dot{\bar{r}}_i + \bar{\alpha}_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{17}$$

nu mai dăm peste o formă liniară în $\dot{\bar{r}}_i$ a legăturii neolonome, cum era cazul înainte ([3], [4], [5], [6]), ci peste o formă foarte generală — funcție oarecare de $\dot{\bar{r}}$ și chiar de $\ddot{\bar{r}}$ — adică legătură neolonomă, de clasa a doua după denumirea utilizată de Hamel.

O observație similară vom face cu privire la forma (8); aceasta ar deveni (împărțită prin *dt*)

$$\sum_{i=1}^{s} c_{ij}\dot{q}^i + c_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{18}$$

și, bineînțeles, s-ar putea să nu fie liniară în $\dot{q}^i$.

Mai este de semnalat și o altă diferență între cele două feluri de a prezenta legăturile, cea veche și cea actuală, observînd mai întîi că se obișnuia, după cum am arătat mai sus, să se formuleze legături sub formă finită,

$$f(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}, t) = 0 \text{ și } f(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0. \tag{19}$$

S-a văzut mai sus că formele (7) și (8) sînt ușor convertibile în formele (19). Reciproca este de asemenea adevărată, cu alte cuvinte relațiile (19) se pot converti de asemenea formal în formele (7) sau (8), dacă se face abstracție de condițiile de regularitate ale funcțiilor $\bar{\alpha}_{ij}$, α_j, c_{ij}, c_j. Totuși, nu putem trage concluzia că cele două forme ale legăturilor, (7) sau (8) pe de o parte și (19) pe de alta, sînt echivalente între ele. Într-adevăr putem prezenta formele (19) prin relațiile (7) sau (8) în mai multe feluri, astfel încît soluțiile care ar rezulta ar putea fi diferite unele de altele. Ca exemplificare, să luăm relația

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - k = 0,$$

pe care o putem pune sub forma (7) în mai multe feluri, de pildă

$$\dot{x}\,dx + \dot{y}\,dy - kdt = 0,$$

sau

$$\dot{x}\,dx + (\dot{y}^2 - k)\,dt = 0.$$

Deplasările virtuale reprezentate prin δx, δy, vor fi supuse în primul caz condiției

$$\dot{x}\,\delta x + \dot{y}\,\delta y = 0,$$

în al doilea caz, condiției

$$\dot{x}\,\delta x = 0.$$

În fiecare din aceste două cazuri vom avea, evident, pentru problema mecanică corespunzătoare, în general o altă soluție.

Această nedeterminare va dispare admițînd, așa cum am făcut de la început, că forma naturală a legăturii nu este dată de relațiile (19), ci de relații infinitezimale (7) sau (8) dintre deplasări și *dt*. De altfel, nu se cunoaște problemă *naturală* în mecanică în care să se prezinte legături sub formă finită, chiar de la început, afară de unele sisteme olonome.

Cît despre soluția problemei de mecanică supusă condițiilor de legături (7) sau (8) ea este găsită exact prin procedeul folosit de obicei, cu ajutorul multiplicatorilor lui Lagrange. Vom avea deci ecuațiile

$$\overline{\Phi}_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \overline{\alpha}_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{20}$$

sau

$$\Psi_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{21}$$

Cele $3n$ ecuații scalare deduse din (20), împreună cu ecuațiile (17), obținute prin relațiile de legătură (7), constituie un sistem de $3n + m$ ecuații diferențiale ordinare pentru cele $3n + m$ necunoscute scalare: $3n$, componentele vectorilor $\bar{r}_i$, și λ_j. În mod analog, cele s ecuații (21) împreună cu ecuațiile (18) obținute prin relațiile de legătură (8) constituie un sistem de $s + m$ ecuații diferențiale ordinare pentru necunoscutele $q^1, q^2, \ldots, q^s, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

4. CAZUL FORMELOR INFINITEZIMALE NELINIARE

Pînă acum am presupus că cele m ecuații ale sistemului se exprimă prin m forme liniare (7) sau (8). Am văzut, însă, mai sus că expresiile generale (3) sau (4) ale legăturilor duc la forme (6) de un grad oarecare, astfel încît cazul formelor liniare (7) sau (8), apare ca un caz cu totul particular ($k_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$).

Revenind la forma generală (6) ca expresie a relațiilor legăturilor, problema pare să ia, la prima vedere, un aspect mult mai complicat.

În realitate nu este așa, deoarece ecuația fundamentală a dinamicii, (10) sau (15), este o formă liniară față de cantitățile infinitezimale $\delta\bar{r}_i$ sau δq_i. Urmează deci că o relație de legătură (6) de un grad superior primului, nu poate influența ecuația (10) sau (15); în consecință, am putea-o considera ca inexistentă. Cu alte cuvinte, singurele legături care contează pentru problema de mecanică vor fi acelea care se exprimă prin forme liniare, (7) sau (8), adică acelea ale legăturilor (3) sau (4) a căror dezvoltare tayloriană începe cu grup liniar de termeni.

Este necesar să menționăm, ceea ce de altfel am făcut mai sus, că forma liniară a legăturilor ne-a fost sugerată de forma similară a ecuației fundamentale (9) sau (13), bazată pe principiul lucrului virtual; în măsura în care acesta are o valabilitate generală în mecanică, se poate admite forma liniară a legăturilor ca universal valabilă. Există, totuși, cazuri singulare de probleme care nu se supun principiului lucrului virtual. Pentru aceste cazuri izolate va trebui să luăm precauții speciale în ce privește expresiile legăturilor.

CONCLUZIE

Analizînd procesul mișcării unui sistem de puncte materiale găsim că, condițiile care stabilesc legăturile ar trebui să fie exprimate prin relații între deplasările infinitezimale și intervalul dt de timp. Examenul amănunţit al unei astfel de relaţii arată că aceasta trebuie să se reducă la o formă liniară de argumente (deplasări infinitezimale şi *dt*), coeficienţii acestei forme fiind funcţii de timpul *t*, de poziţiile, vitezele şi acceleraţiile punctelor materiale care constituie sistemul considerat.

Urmează de aici că distincţia ce se face de obicei între legăturile olonome şi cele neolomone [5] este cu totul neînsemnată, întrucît în orice caz ecuaţiile mişcării se scriu la fel, cu ajutorul multiplicatorilor lui Lagrange.

Primită la redacţie la 17 iulie 1958.

О ГОЛОНОМНЫХ И НЕГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЯХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривая связи как ограничение класса бесконечно малых перемещений и, следовательно, как функциональное условие этих величин, анализируют формы, которые могут принять связи в этом представлении. Допуская, что основное уравнение динамики выражается — как это, впрочем, всеобще принято — линейной формой функции от виртуальных перемещений системы, приравненной нулю, при помощи принципа виртуальной работы, приходят к заключению, что всякая связь выразится аналогичной линейной формой, приравненной нулю, причем коэффициенты формы являются функциями времени, положений координат скоростей и ускорений. Отсюда вытекает, что обычно принимающееся различие между голономными и неголономными связами является нецелесообразным, так как уравнения движения пишут во всех случаях одинаково, используя, например, лагранжевы умножители.

SUR LES LIAISONS HOLONOMES ET NON HOLONOMES

RÉSUMÉ

Considérant les liaisons comme une restriction des déplacements infinitésimaux, donc comme une condition fonctionnelle de ces grandeurs, l'auteur analyse les formes que peuvent prendre les liaisons dans cette conception. En admettant que l'équation fondamentale de la dynamique s'exprime — ainsi qu'il est universellement admis — par une forme linéaire des déplacements virtuels du système, égalée à zéro, à l'aide du principe du travail virtuel, on aboutit à la conclusion que toute liaison sera exprimés sous une forme linéaire analogue, égalée à zéro, les coefficients de cette forme étant des fonctions du temps, des positions, des vitesses et des accélérations. Il s'ensuit que la distinction que l'on fait d'habitude entre les liaisons holonomes et celles non holonomes est inopérante ; la raison en est que les équations du mouvement s'écrivent dans tous les cas de la même façon, en utilisant, par exemple, les multiplicateurs de Lagrange.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

BIBLIOGRAFIE

1. V. Vâlcovici, C. R. Paris, **243**, 1012 (1956).
2. — Ver. d. Sächs Akad. Wiss., Leipzig, **102** (1958).
3. P. Woronetz, Math. Ann. **70**, 410 (1911).
4. G. Hamel, Math. Ann. **92**, 33, (1924).
5. — Math. Ann. **111**, 94, (1935).
6. — *Teoretische Mechanik*, J. Springer, Berlin, 1940.
7. M. Kerner, Prace **38**, 1, (1931).

PROBLEME MIXTE ALE ARIPILOR TRIUNGHIULARE, PREVĂZUTE CU PLACĂ NORMALĂ, ÎN CURENT SUPERSONIC

(ARIPI CRUCIFORME)

DE

ELIE CARAFOLI și BEATRICE HOROVITZ

INTRODUCERE

În lucrările noastre anterioare [1], [2], am studiat în mod detaliat, problemele directe care se pun în cazul aripilor triunghiulare prevăzute cu placă normală.

În articolul de față ne propunem să studiem anumite probleme mixte care se pot pune în cazul scurgerilor omogene de ordin superior în jurul aripilor cruciforme, și vom da unele aplicații referitoare la acestea.

Rezultatele generale obținute în acest articol au fost comunicate la *Congresul Național de Mecanică Rațională și Aplicată* care a avut loc în Jugoslavia la Opatija (Abazzia), în iunie 1958.

Problemele mixte pe care le vom trata sînt definite prin următoarele date impuse pe aripă și pe placă :

a) presiunile pe aripă și forma plăcii (incidența sau panta) ;

b) forma aripii (incidența sau panta) și presiunile pe placă.

În primul caz se caută incidența sau panta aripii și distribuția presiunilor pe placă, iar în al doilea caz se caută incidența sau panta plăcii și distribuția presiunilor pe aripă.

În conformitate cu teoria micilor perturbații, se știe că distribuția presiunilor este proporțională componentei axiale u a vitezei de perturbație, forma aripii este funcție de componenta w normală pe aripă iar forma plăcii funcție de componenta v normală pe placă.

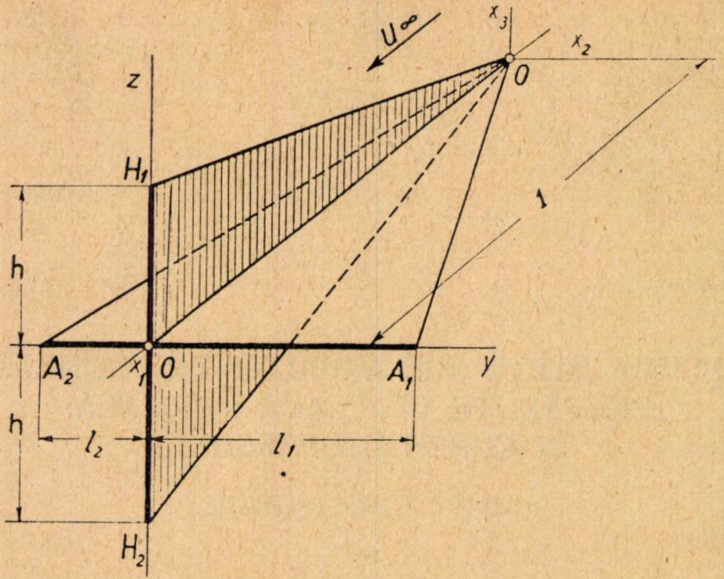


Fig. 1

Următoarele notații și formule vor fi utilizate în cele ce urmează :

$Ox_1\,x_2\,x_3$	sistem de axe legat de aripă (vezi figura) ;
$Oyz\,(r,\ \theta)$	sistem de axe definit în planul $x_1 = 1$ (vezi figura) ;
$\Phi\,(x_1,\ x_2,\ x_3)$	funcție omogenă de ordinul n care reprezintă potențialul vitezei de perturbație ;
$\Phi_{pqr} = \dfrac{\partial^{p+q+r}\,\Phi}{\partial x_1^p\,\partial x_2^q\,\partial x_3^r}$	derivate de ordinul $0 \leqslant p + q + r \leqslant n$;
$u = \Phi_{100},\ v = \Phi_{010},\ w = \Phi_{001}$	viteze de perturbație ;
$Br = \dfrac{2\rho}{1+\rho^2},\ \theta = \Theta,\ (B^2 = M_\infty^2 - 1)$	transformarea geometrică a lui Busemann, aplicată planului Oyz ;
$O\eta\zeta\,(\xi = \eta + i\zeta = \rho e^{i\theta})$	sistem de axe, definit în planul Busemann ;
$Bx = \dfrac{2\xi}{1+\xi^2},\quad X^2 = x^2 + \mathfrak{h}^2,\ \left(\mathfrak{h}^2 = \dfrac{h^2}{1 - h^2B^2}\right)$	funcții de transformări succesive ale planului ξ în planele auxiliare x și X ;
$F_{pqr} = \Phi_{pqr} + i\Phi'_{pqr},\ (p + q + r = n)$	funcții analitice de variabilele complexe ξ, x, X, sau oricare altă variabilă convenabil aleasă ;
$C_p = \dfrac{p - p_\infty}{{}^1/_2\ \rho_\infty U_\infty^2} = -\dfrac{2u}{U_\infty}$	coeficient de presiune.

În planul x, relațiile de compatibilitate care leagă funcțiile $F_{pqr} = \Phi_{pqr} + i\,\Phi'_{pqr}, (p+q+r=n)$ pot fi enunțate scriind că expresiile de forma

$$(-1)^q x^q \left(\frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\right)^r dF_{n-q-r,\,q,\,r}, \qquad (1)$$

$$(0 \leqslant q + r \leqslant n)$$

sînt egale.

Funcțiile u, v, w, omogene de ordinul $n-1$, satisfac formula lui Euler scrisă sub următoarele forme :

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, u = \mathcal{Re} \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q\, x^q F_{n-q,\,q,\,0}, \qquad (2a)$$

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, w = \mathcal{Re} \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q\, x^q F_{n-q-1,\,q,\,1}, \qquad (2b)$$

pentru punctele de pe aripă, și

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, u = \mathcal{Re} \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r \left(\frac{-ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\right)^r F_{n-r,\,0,\,r}, \qquad (3a)$$

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, v = \mathcal{Re} \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r \left(\frac{-ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\right)^r F_{n-r-1,\,1,\,r}, \qquad (3b)$$

pentru punctele de pe placă.

CAZUL ÎN CARE SÎNT DATE PRESIUNEA PE ARIPĂ ȘI VITEZA NORMALĂ PE PLACĂ

În acest caz, după cum am enunțat mai sus, studiem problema mixtă în care se dă componenta u pe aripă și componenta v pe placă.

Vom considera că expresiile acestor viteze sînt date sub forma unui polinom omogen de ordinul $n-1$,

$$u = \sum_{q=0}^{n-1} u_{n-q-1,\,q}\, x_1^{n-q-1} x_2^q \qquad (4)$$

pe aripă, și

$$v = \sum_{r=0}^{n-1} v_{n-r-1,\,r}\, x_1^{n-r-1} x_3^r \qquad (5)$$

pe placă.

Constantele $u_{n-q-1,\,q}$, $v_{n-r-1,\,r}$ pot lua valori diferite pe porțiuni din aripă, respectiv din placă.

În cazul aripii subțiri, u ia valori egale și de semn contrar pe extrados și intrados, iar în cazul aripii de grosime simetrică, u ia valori egale și de același semn ; pe placa subțire v ia valori egale și de același semn pe ambele fețe, pe cînd pe placa de grosime simetrică v ia valori egale și de semn contrar.

Problema pe care ne-o punem constă în a determina componenta w pe aripă, astfel ca să se poate determina pînă la urmă forma ei, și componenta u pe placă, necesară pentru calculul presiunilor. În acest scop, vom aplica formulele (2b) și (3a) și pentru aceasta trebuie să găsim expresiile funcțiilor $F_{n-q-1.q.1}$, respectiv $F_{n-r.0.r}$.

Comparînd formulele (4) și (5) cu partea reală a formulelor (2a) și (3b), rezultă

$$d\Phi_{n-q.q.0} = 0, \tag{6}$$

pe aripă, și

$$d\Phi_{n-r-1.1.r} = 0, \tag{7}$$

pe placă.

Utilizînd relațiile de compatibilitate, obținem

$$d\Phi'_{n-q-1.q.1} = 0, \tag{8a}$$

pe aripă, și

$$d\Phi'_{n-r.0.r} = 0, \tag{8b}$$

pe placă.

Este ușor de văzut că funcția $F_{n-1.0.1}$ este singura funcție $F_{n-q-r.q.r}$ care admite, în sensul analogiei hidrodinamice [3], aripa și placa drept linie de curent ($d\Phi'_{n-1.0.1} = 0$) și care se găsește în cele două expresii necunoscute (2b) și (3a).

Utilizînd din nou relațiile de compatibilitate

$$dF_{n-q-1.q.1} = \frac{dF_{n-1.0.1}}{(-x)^q}, \tag{9a}$$

$$dF_{n-r.0.r} = \left(\frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{ix}\right)^{r-1} dF_{n-1.0.1} \tag{9b}$$

formulele (2b) și (3a) pot fi puse sub forma

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, w = \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\, (-x)^q \int_{\text{cercul Mach}}^{\text{aripă}} \frac{dF_{n-1.0.1}}{x^q}, \tag{10a}$$

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, u = \mathcal{R}e \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^{r} \left(\frac{-ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\right)^r \int_{\text{cercul Mach}}^{\text{placă}} \left(\frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{ix}\right)^{r-1} dF_{n-1.0.1}. \tag{10b}$$

Remarcăm deci că problema determinării componentelor w și u se reduce la a găsi expresia funcției $F_{n-1.0.1}$.

În problema directă, determinarea funcției u pe aripă și pe placă a fost redusă la aceea a funcției F_{n00} a cărei parte imaginară este constantă pe aripă și pe placă ; această proprietate ne-a permis să o determinăm într-un mod foarte simplu, utilizînd o analogie hidrodinamică.

În cele ce urmează, vom expune condițiile la limită pe care trebuie să le satisfacă funcția $F_{n-1,0,1}$ și vom arăta, în același timp, echivalența care există între aceste condiții și cele ale funcției F_{n00} din problema directă. Ținînd seama de această echivalență, nu este necesar să determinăm direct expresia funcției $F_{n-1,0,1}$; este suficient să cunoaștem funcția echivalentă F_{n00} din problema directă [2] și să luăm în considerație formulele respective.

Determinarea funcției $F_{n-1,0,1}$. Vom studia mai întîi comportarea funcției $F_{n-1,0,1}$ în jurul bordurilor subsonice ale plăcii și ale aripii, precum și în jurul unei muchii așezate pe aripă, care separă regiuni cu diferite distribuții de presiuni.

Pentru comportarea în jurul bordurilor subsonice ale plăcii, fie H_1 și H_2, vom considera două cazuri : placa subțire și placa de grosime simetrică. Dat fiind că pe placă problema este directă, u, v, w au aceeași comportare la bordurile plăcii în problema mixtă, ca și în problema directă. Ținînd seama de considerațiile făcute pentru F_{n00} din problema directă, rezultă că $F_{n-1,0,1}$ trebuie să conțină singularitățile $\frac{1}{(x \pm i\mathfrak{h})^{q-\frac{1}{2}}}$ $(q = 1, 2, \ldots, n)$ în planul x sau $\frac{1}{X^{2p-1}}$ $(p = 1,2,\ldots,n)$ în planul X, pentru cazul aripii *subțiri*, și singularitățile $\ln (x \pm i\mathfrak{h})$, $\frac{1}{(x \pm i\mathfrak{h})^p}$ $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$ în planul x sau $\ln X$, $\frac{1}{X^{2p}}$, $(p = 1, 2, \ldots, n\text{-}1)$ în planul X, în cazul plăcii *groase*.

Pentru comportarea în jurul unei muchii care separă pe aripă două regiuni cu distribuții diferite de presiuni, vom presupune că în punctul $y = l$, $\Phi_{n-q,q,0}$ trece de la valoarea $u^{(1)}_{n-q-1,q}$ la valoarea $u^{(2)}_{n-q-1,q}$. Rezultă că $F_{n-q,q,0}$, deci și $F_{n-1,0,1}$ conțin singularitățile $\ln (x-l)$, $\frac{1}{(x-l)^p}$, $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$ în planul x, sau $\ln (X-L)$, $\frac{1}{(X-L)^p}$, $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$ în planul X ca și funcția F_{n00} din problema directă în cazul unei muchii care separă pe aripă două regiuni cu distribuții diferite de incidență.

În problema mixtă bordul subsonic al unei aripi *subțiri* joacă rolul unei muchii, fiindcă separă o regiune unde $\Phi_{n-q,q,0} = 0$ de o altă regiune unde $\Phi_{n-q,q,0} = \text{const.} \neq 0$; în problema directă, se știe că bordul subsonic al unei aripi *groase* joacă rolul unei muchii.

Comportarea în jurul bordului subsonic al unei aripi groase, care separă o regiune unde $\Phi_{n-q-1,q,1} = \text{const.} = 0$ de o altă regiune unde $\Phi_{n-q,q,0} = \text{const.} \neq 0$, este aceeași cu cea din problema directă în jurul bordului subsonic al unei aripi *subțiri*, care separă o regiune unde $\Phi_{n-q-1,q,1} = \text{const.} \neq 0$ de o regiune unde $\Phi_{n-q,q,0} = \text{const.} = 0$. Rezultă deci că în problema mixtă u, v, și w au, în jurul bordului subsonic al unei aripi *groase*, aceeași comportare ca în problema directă în jurul bordului subsonic al unei aripi *subțiri*. Rezultă că funcția $F_{n-1.0.1}$ trebuie să conțină în punctul $y = l_1$, corespunzător bordului subsonic A_1, exact ca și F_{n00} din problema directă, singularitățile $\frac{1}{(x-l_1)^{p-\frac{1}{2}}}$, $(p=1, 2, \ldots, n)$ în planul x, sau $\frac{1}{(X-L_1)^{p-\frac{1}{2}}}$, $(p=1, 2, \ldots, n)$ în planul X.

Pe de altă parte, vom observa din formulele (10a) și (10b) că este necesar, pentru ca w și u să aibă valori finite în punctul $x = 0$ $(X = \pm \mathfrak{h})$, ca $F_{n-1.1.0}$ să nu aibă singularități în acest punct.

Utilizînd relațiile de compatibilitate scrise sub forma

$$dF_{n-1.0.1} = i\sqrt{1 - B^2 x^2}\, dF_{n-1.1.0}, \tag{11}$$

rezultă că și funcția $F_{n-1.1.0}$ nu trebuie să aibă, nici ea, singularități în origine.

Această funcție $F_{n-1.1.0}$ se găsește în (2a) și (3b) și partea ei reală, constantă pe aripă și pe placă, trebuie să aibă aceeași valoare și, prin urmare, trebuie să se ia în (4) și (5)

$$u_{n-2.1} = v_{n-1.0}, \quad (n \geqslant 2), \tag{12}$$

pentru ca funcția $F_{n-1.1.0}$ să nu aibă singularități logaritmice în $x = 0$ $(X \pm \mathfrak{h})$.

Pentru $n = 1$, componenta $v = \Phi_{010}$ trebuie să ia aceeași valoare constantă pe aripă și pe placă.

Ținînd seama de rezultatele obținute în problema directă [2], vom determina expresia funcției $F_{n-1.0.1}$ punînd în evidență contribuția fiecărui bord al sistemului aripă-placă.

Astfel, de exemplu :

1) Contribuția bordului subsonic A_2 $(X = -L_2)$, al unei aripi *groase*, considerînd bordul A_1 $(X = L_1)$ de asemenea subsonic, va fi

$$f^{(2)}_{n-1,0,1} = \frac{a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-2} X^{n-2} + a_{n-1} X^{n-1}}{(X + L_2)^{n-1}} \sqrt{\frac{L_1 - X}{X + L_2}}\,; \tag{13a}$$

de asemenea, contribuția bordului subsonic A_1, considerînd bordul A_2 de asemenea subsonic, va fi

$$f^{(1)}_{n-1,0,1} = \frac{b_0 + b_1 X + \ldots + b_{n-2} X^{n-2} + b_{n-1} X^{n-1}}{(X - L_1)^{n-1}} \sqrt{\frac{X + L_2}{L_1 - X}}\,. \tag{13b}$$

Formulele (13a) și (13b) sînt, de asemenea, valabile cînd A_1 în primul caz, și A_2, în al doilea, sînt supersonice, dacă înlocuim pe L_1 în (13a), respectiv pe L_2 în (13b), prin $1/\mathfrak{B}$ $(1/\mathfrak{B}^2 = 1/B^2 + \mathfrak{h}^2)$. În cazul aripii cu ambele borduri subsonice, efectul acestora are următoarea expresie :

$$f_{n-1,0,1} = \frac{c_0 + c_1 X + \ldots + c_{2n-1} X^{2n-1}}{(X - L_1)^{n-1} (X + L_2)^{n-1} \sqrt{(X + L_2)(L_1 - X)}}\,. \tag{14}$$

2) Contribuția bordului subsonic A $(X = L)$ al unei aripi subțiri este dată de expresia

$$f_{n-1,0,1} = q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X + 1/\mathfrak{B})(1/\mathfrak{B} - L)}{(X - L)\, 2/\mathfrak{B}}} + \frac{q_0 + q_1 X + \ldots + q_{n-2} X^{n-2}}{(X - L)^{n-1}} \sqrt{1/\mathfrak{B}^2 - X^2}. \tag{15}$$

3) Contribuția bordurilor subsonice ale plăcii *subțiri* este dată de relația

$$f_{n-1,0,1} = \frac{d_0 + d_1 X + \ldots + d_{2n-2} X^{2n-2}}{X^{2n-1}} \sqrt{(X + L_2)(L_1 - X)}, \tag{16}$$

în cazul aripii *groase* cu bordurile subsonice A_2 și A_1. În cazul cînd unul sau ambele borduri ale aripii sînt supersonice, se înlocuiește, respectiv, L_1 sau L_2, sau L_1 și L_2, prin $1/\mathfrak{B}$. În cazul aripii subțiri formula (16) este valabilă înlocuind, bineînțeles, L_1 și L_2 prin $1/\mathfrak{B}$.

4) Contribuția bordurilor subsonice ale plăcii *groase* este dată de formula

$$f_{n-1,0,1} = Q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X + L_2) L_1}{X (L_1 + L_2)}} + \\ + \frac{a_0 + a_1 X + \ldots + a_{2n-3} X^{2n-3}}{X^{2n-2}} \sqrt{(X + L_2)(L_1 - X)}, \tag{17}$$

în cazul aripii *groase* cu ambele borduri A_2 și A_1 subsonice. În cazul cînd unul sau ambele borduri sînt supersonice, se înlocuiește, respectiv, L_1 sau L_2, sau L_1 și L_2, prin $1/\mathfrak{B}$. În cazul aripii subțiri formula (17) este valabilă înlocuind L_1 și L_2 prin $1/\mathfrak{B}$.

5) Ținînd seama de rezultatele obținute în problema directă, putem scrie de asemenea efectul unui bord supersonic al unei aripi *groase*; această contribuție este dată de formula

$$f_{n-1,0,1} = q \left(\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X + L_2)(1/\mathfrak{B} - L_1)}{(X - L_1)(1/\mathfrak{B} + L_2)}} + i \frac{\pi}{2} \right) + \\ + \frac{a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-2} X^{n-2}}{(X - L_1)^{n-1}} \sqrt{(X + L_2)(1/\mathfrak{B} - X)}, \tag{18a}$$

considerînd bordul A_1 $(X = L_1)$ supersonic și A_2 $(X = -L_2)$ subsonic.

Formula

$$f_{n-1,0,1} = q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X + 1/\mathfrak{B})(L_1 + L_2)}{(X + L_2)(L_1 + 1/\mathfrak{B})}} + \\ + \frac{a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-2} X^{n-2}}{(X + L_2)^{n-1}} \sqrt{(X + 1/\mathfrak{B})(L_1 - X)} \tag{18b}$$

reprezintă efectul bordului supersonic A_2, bordul A_1 fiind subsonic.

Dacă ambele borduri ale aripii groase sînt supersonice, contribuția unui bord, fie A_2 $(X = -L_2)$, are expresia (15), în care punem $L = -L_2$:

$$f_{n-1,0,1} = q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X+1/\mathfrak{B})(1/\mathfrak{B}+L_2)}{(X+L_2)\,2/\mathfrak{B}}} + \\ + \frac{a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-2} X^{n-2}}{(X+L_2)^{n-1}} \sqrt{1/\mathfrak{B}^2 - X^2}.$$

Contribuția unui bord supersonic al unei aripi subțiri fie A_2 $(X = -L_2)$ este dată de aceeași formulă.

Vom da mai jos expresia funcției $F_{n-1,0,1}$ în cîteva cazuri concrete de aplicații :

— pentru o aripă groasă, cu ambele borduri subsonice, prevăzută cu placă groasă

$$F_{n-1,0,1} = q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{L_1(X+L_2)}{X(L_1+L_2)}} + \\ + \frac{a_0 + a_1 X + \ldots + a_{4n-3} X^{4n-3}}{X^{2n-2}(X-L_1)^{n-1}(X+L_2)^{n-1}\sqrt{(X+L_2)(L_1-X)}}; \tag{19}$$

— pentru o aripă groasă, cu un bord subsonic $(X = -L_2)$ și celălalt supersonic $(X = L_1)$, prevăzută cu o placă groasă,

$$F_{n-1,0,1} = \frac{a_0 + a_1 X + \ldots + a_{4n-4} X^{4n-4}}{X^{2n-2}(X-L_1)^{n-1}(X+L_2)^{n-1}} \sqrt{\frac{1/\mathfrak{B} - X}{X+L_2}} + \\ + q_1 \left(\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X+L_2)\,(1/\mathfrak{B}-L_1)}{(X-L_1)\,(1/\mathfrak{B}+L_2)}} + i\,\frac{\pi}{2} \right) + q_0 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X+L_2)\,1/\mathfrak{B}}{X(1/\mathfrak{B}+L_2)}}; \tag{20}$$

— pentru o aripă groasă, cu ambele borduri supersonice, prevăzută cu placă groasă,

$$F_{n-1,0,1} = \frac{a_0 + a_1 X + \ldots + a_{4n-5} X^{4n-5}}{X^{2n-2}(X-L_1)^{n-1}(X+L_2)^{n-1}} \sqrt{1/\mathfrak{B}^2 - X^2} + \\ + q_2 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X+1/\mathfrak{B})\,(1/\mathfrak{B}+L_2)}{(X+L_2)\,2/\mathfrak{B}}} + q_1 \left(\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X+1/\mathfrak{B})\,(1/\mathfrak{B}-L_1)}{(X-L_1)2/\mathfrak{B}}} + i\,\frac{\pi}{2} \right) + \\ + q_0 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{X+1/\mathfrak{B}}{2X}}. \tag{21}$$

Aplicație pentru $n = 1$. Vom trata acum un exemplu complet pentru a arăta modul în care se pot aplica rezultatele generale obținute mai sus, luînd pentru simplificare $n = 1$.

Vom considera o aripă subțire A_2A_1 prevăzută cu o placă subțire H_1H_2, sistemul aripă-placă fiind total cuprins în interiorul conului *Mach.*

Vom presupune, deocamdată, că pe extradosul aripii $u = u_2$ la stînga plăcii, și $u = u_1$ la dreapta plăcii, iar pe placă $v = v_1$.

Utilizînd formulele (15) și (16) obținem

$$F_{001} = W = \frac{q_1}{\pi} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B}X)(1 - \mathcal{B}L_1)}{2\mathcal{B}(X - L_1)}} + \frac{q_2}{\pi} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B}X)(1 + \mathcal{B}L_2)}{2\mathcal{B}(X + L_2)}} + \\ + a_0 \frac{\sqrt{1 - \mathcal{B}^2 X^2}}{X}.$$

Pentru a determina constantele q_1, q_2 și a_0 vom proceda în modul următor :

1) Ținînd seama de expresia lui W, rezultă singularități logaritmice de forma $\ln (X \pm 1/\mathcal{B})$ în $U = F_{100}$ și $V = F_{010}$. Pentru a evita această incompatibilitate fizică, vom impune $\left(\frac{dW}{dX}\right)_{X = \pm 1/\mathcal{B}} = 0$ și vom obține următoarele două relații :

$$q_1 \sqrt{\frac{1 + \mathcal{B}L_1}{1 - \mathcal{B}L_1}} + q_2 \sqrt{\frac{1 - \mathcal{B}L_2}{1 + \mathcal{B}L_2}} + 2\,\pi a_0 = 0,$$

$$q_1 \sqrt{\frac{1 - \mathcal{B}L_1}{1 + \mathcal{B}L_1}} + q_2 \sqrt{\frac{1 + \mathcal{B}L_2}{1 - \mathcal{B}L_2}} - 2\pi a_0 = 0.$$

2) În punctul $X = L_1$, u trece pe axa reală de la valoarea $u = 0$ din dreapta, la valoarea $u = u_1$ din stînga ; utilizînd relația de compatibilitate între funcțiile U și W și integrînd pe un semicerc cu centrul în $X = L_1$ de la un punct $L_1 + \varepsilon$ pînă la un punct $L_1 - \varepsilon$, se obține

$$u_1 = \mathcal{R}e \int_c \frac{ix}{\sqrt{1 - B^2 x^2}}\, dW = \frac{q_1 l_1}{2\sqrt{1 - B^2 l_1^2}},$$

de unde rezultă

$$q_1 = \frac{2u_1 \sqrt{1 - B^2 l_1^2}}{l_1}.$$

Utilizînd din nou relația de compatibilitate care există între U și V, este ușor de văzut că în punctul $X = L_1$, v trece de la valoarea $v = 0$ la $v = -\frac{u_1}{l_1}$ pe porțiunea din aripă din dreapta plăcii.

Trebuie să luăm deci pe placă $v_1 = -\frac{u_1}{l_1}$ pentru ca v să nu aibă salt în $X = + \mathfrak{h}$.

Pentru o valoare dată u_1, v_1 $\left(v_1 = -\frac{u_1}{l_1}\right)$ tinde spre infinit dacă l_1 tinde spre zero ; de aceea, se impune o nouă restricție, și anume pentru $v = v_1$ pe placă, trebuie să se ia $u = u_1 = -v_1 l_1$ pe aripă în dreapta plăcii.

3) Placa fiind subțire, trebuie să avem $v = v_1$ pe ambele fețe ale plăcii. Utilizînd relația de compatibilitate între V și W, se vede că v nu are salt în $X = 0$.

Pe aripă în stînga plăcii, trebuie să luăm de asemenea $v = v_1$, condiție necesară pentru ca v să nu aibă salt în $X = -\mathfrak{h}$.

Vom impune, de asemenea, ca în punctul $X = -L_2$, v să treacă de la $v = v_1$ la $v = 0$; vom obține astfel

$$v_1 = \mathcal{R}e \int_c -\frac{i\,dW}{\sqrt{1 - B^2x^2}} = \frac{q_2}{2\sqrt{1 - B^2l_2^2}},$$

și prin urmare

$$q_2 = 2v_1\sqrt{1 - B^2l_2^2}.$$

Deducem în plus că pe aripă, în stînga plăcii, u ia valoarea

$$u_2 = \frac{q_2l_2}{2\sqrt{1 - B^2l_2^2}} = v_1l_2.$$

Observăm că in problema mixtă pe care ne-am pus-o pentru a nu avea imcompatibilități fizice, sîntem forțați să renunțăm la generalitatea problemei.

În continuare, din relațiile obținute mai sus rezultă înlocuind q_1 și q_2 prin valorile lor respective,

$$a_0 = \frac{v_1}{\pi}\frac{B}{\mathfrak{B}}(L_1 + L_2).$$

Putem scrie în cele din urmă

$$W = -\frac{2v_1}{\pi}\left[\sqrt{1 - B^2l_1^2}\,\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1 + \mathfrak{B}X)(1 - \mathfrak{B}L_1)}{2\mathfrak{B}(X - L_1)}} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{1 - B^2l_2^2}\,\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1 + \mathfrak{B}X)(1 + \mathfrak{B}L_2)}{2\mathfrak{B}(X + L_2)}}\right] + \frac{v_1}{\pi}\frac{B}{\mathfrak{B}}(L_1 + L_2)\frac{\sqrt{1 - \mathfrak{B}^2X^2}}{X}.$$

Avînd expresia lui W, rezultă

$$\frac{dU}{dX} = \frac{iv_1(L_1 + L_2)}{\pi}\frac{L_1L_2 + (L_1 - L_2)X}{(X - L_1)(X + L_2)X^2}\sqrt{X^2 - \mathfrak{h}^2}$$

de unde, prin integrare, se obține expresia lui U,

$$U = \frac{iv_1l_2}{\pi}\ln\frac{\mathfrak{h}^2 + XL_2 - \sqrt{(X^2 - \mathfrak{h}^2)(L_2^2 - \mathfrak{h}^2)}}{X + L_2} +$$
$$+ \frac{iv_1l_1}{\pi}\ln\frac{\mathfrak{h}^2 - XL_1 + \sqrt{(X^2 - \mathfrak{h}^2)(L_1^2 - \mathfrak{h}^2)}}{L_1 - X} + i\frac{v_1(L_1 + L_2)}{\pi}\frac{\sqrt{X^2 - \mathfrak{h}^2}}{X}.$$

Făcînd $\mathfrak{h}$ să tindă către 0, obținem W în cazul unei aripi subțiri avînd $u = v_1l_2$ pe segmentul $\overline{A_2O}$ și $u = -v_1l_1$ pe segmentul $\overline{OA_1}$ (problema indirectă).

Făcînd $l_1 = l_2 = l$ și pe urmă $l \to 0$, vom obține U în cazul plăcii subțiri izolate cu $v = v_1$ pe partea superioară, și $v = -v_1$ pe partea inferioară (problema directă).

CAZUL ÎN CARE SÎNT DATE PRESIUNEA PE PLACĂ ȘI VITEZA NORMALĂ PE ARIPĂ

În cele ce urmează, vom studia problema mixtă în care se dă w pe aripă și u pe placă, ambele viteze fiind puse sub forma unor polinoame omogene de ordinul $n - 1$; astfel vom avea pe aripă

$$W = \sum_{q=0}^{n-1} w_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q \qquad (22$$

și pe placă

$$u = \sum_{r=0}^{n-1} u_{n-r-1,r}\, x_1^{n-r-1}\, x_3^r. \qquad (23)$$

Constantele $w_{n-q-1,q}$, $u_{n-r-1,r}$ pot lua valori diferite pe porțiuni din aripă, respectiv din placă.

Problema constă în a determina viteza u pe aripă și viteza v pe placă.

Ținînd seama de condițiile indicate mai sus, rezultă din formulele (2b) și (3a)

$$d\,\Phi_{n-q-1,q,1} = 0, \qquad (24)$$

pe aripă, și

$$d\,\Phi_{n-r,0,r} = 0, \qquad (25)$$

pe placă.

Utilizînd relațiile de compatibilitate, se obține $d\,\Phi'_{n-1,1,0} = 0$ pe aripă și pe placă.

Prin urmare, în această problemă ca și în cea precedentă, găsim o funcție, $F_{n-1,1,0}$, care admite aripa și placa drept linii de curent ; pe de altă parte, aceeași funcție se găsește în expresiile căutate, a lui u pe aripă și a lui v pe placă, respectiv (2a) și (3b).

Formulele (2a) și (3b) pot fi scrise sub următoarea formă :

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, u = \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q x^q \int_{\text{cercul Mach}}^{\text{aripă}} \frac{dF_{n-1,1,0}}{(-x)^{q-1}}, \qquad (26)$$

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, v = \mathcal{R}e \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r \left(\frac{-ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\right)^r \int_{\text{cercul Mach}}^{\text{placă}} \left(\frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{ix}\right)^r dF_{n-1,1,0}. \qquad (27)$$

Se vede prin urmare, că problema se reduce la determinarea funcţiei $F_{n-1.1.0}$.

Problema la limită care se pune pentru $F_{n-1.1.0}$ este analoagă problemei puse pentru $F_{n-1.0.1}$ în problema mixtă anterioară. Ca şi în această ultimă problemă, vom introduce o restricţie în ceea ce priveşte coeficienţii din expresiile (22) şi (23). Într-adevăr, vom considera

$$w_{n-1.0} = u_{n-2.1}, \quad (n \geqslant 2) \, ; \tag{28}$$

rezultă în acest caz că funcţia $\Phi_{n-1.0.1}$, constantă pe aripă şi pe placă, nu prezintă salt de valoare în punctele $X = \pm \mathfrak{h}$. Pentru $n = 1$ această restricţie priveşte componenta $w = \Phi_{001}$. Impunînd această restricţie rezultă că funcţia $F_{n-1.0.1}$ precum şi funcţia $F_{n-1.1.0}$ sînt analitice în aceleaşi puncte $X = \pm \mathfrak{h}$.

Se construieşte funcţia $F_{n-1.1.0}$ pe aceeaşi cale pe care a fost făcută construcţia funcţiei $F_{n-1.0.1}$ din problema precedentă, şi anume ţinînd seama de efectul fiecărui bord al sistemului aripă-placă.

— Deoarece pe aripă problema este directă, contribuţia unui bord al aripii este identică contribuţiei aceluiaşi bord din expresia funcţiei F_{n00} din problema directă. Astfel contribuţia unui bord subsonic A_2 $(X = -L_2)$ al unei aripi *subţiri* este dată de formula (13a), considerînd bordul A_1 $(X = L_1)$ de asemenea subsonic. Formula (13b) reprezintă efectul bordului subsonic A_1, bordul A_2 fiind de asemenea subsonic. Contribuţia ambelor borduri subsonice ale aripii subţiri este dată de formula (14).

Formulele (18a) şi (18b) reprezintă respectiv, contribuţia bordului supersonic A_1 al aripii subţiri, bordul A_2 fiind subsonic şi contribuţia bordului supersonic A_2, bordul A_1 fiind subsonic ; efectul bordului supersonic al unei aripi subţiri sau groase celălalt bord fiind de asemenea supersonic, este dat pentru A_2 şi A_1 respectiv de (18a), (18b) cu $L_2 = 1/\mathfrak{B}$ în prima şi $L_1 = 1/\mathfrak{B}$ în a doua formulă. Contribuţia unui bord subsonic sau supersonic al unei aripi groase, este dată de formula (15).

— În ceea ce priveşte comportarea funcţiei $F_{n-1.1.0}$ în jurul bordurilor plăcii, se remarcă, ţinînd seama de condiţiile la limită date, că această comportare în jurul bordului unei plăci portante, în problema noastră, este analoagă comportării funcţiei F_{n00} din jurul bordului unei aripi groase din problema directă ; în ceea ce priveşte comportarea în jurul bordului unei plăci de portanţă nulă, aceasta este analoagă comportării funcţiei F_{n00} în jurul bordului unei aripi subţiri din problema directă. Astfel efectul bordului unei plăci portante este dat de formula (17) în cazul aripii *subţiri* cu ambele borduri A_2 şi A_1 subsonice.

În cazul cînd unul sau ambele borduri sînt supersonice se înlocuieşte respectiv L_1 sau L_2, sau, L_1 şi L_2, prin $1/\mathfrak{B}$. În cazul aripii groase formula (17) este valabilă înlocuind bineînţeles pe L_1 şi L_2 prin $1/\mathfrak{B}$.

Contribuţia bordurilor subsonice ale plăcii de portanţă nulă, este dată de relaţia (10) în cazul aripii groase, înlocuind bineînţeles L_1 şi L_2 prin $1/\mathfrak{B}$.

Vom da acum expresia funcţiei $F_{n-1.1.0}$ în cîteva cazuri concrete de aplicaţii, făcînd suma efectelor bordurilor de atac ale aripii şi ale plăcii :

— pentru o aripă delta subţire cu incidenţă antisimetrică avînd ambele borduri subsonice şi fiind prevăzută cu placă portantă,

$$F_{n-1.1.0} = q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{X+L}{2X}} + \frac{a_0 + a_1 X + \ldots + a_{4n-3} X^{4n-3}}{X^{2n-2}(X^2 - L^2)^{n-1} \sqrt{L^2 - X^2}} ; \qquad (29)$$

— pentru o aripă groasă cu ambele borduri subsonice prevăzută cu o placă de portanţă nulă,

$$F_{n-1.1.0} = \frac{a_0 + a_1 X + \ldots + a_{4n-4} X^{4n-4}}{X^{2n-1} (X + L_2)^{n-1} (X - L_1)^{n-1}} \sqrt{1/\mathfrak{R}^2 - X^2} +$$

$$+ q_2 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X + 1/\mathfrak{B})(1/\mathfrak{B} + L_2)}{(X + L_2)\, 2/\mathfrak{B}}} + q_1 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X + 1/\mathfrak{B})\, (1/\mathfrak{B} - L_1)}{(X - L_1)\, 2/\mathfrak{B}}} . \qquad (30)$$

Înlocuind acum expresiile funcţiei $F_{n-1.1.0}$ în formula (26) respectiv (27), vom obţine soluţia generală a problemei mixte pe care ne-am propus s-o studiem.

Primită la redacţie la 15 mai 1958.

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ТРЕУГОЛЬНЫХ КРЫЛЬЕВ, ОСНАЩЕННЫХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ПЛАСТИНОЙ, В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

(КРЕСТООБРАЗНЫЕ КРЫЛЬЯ)

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе рассматриваются некоторые смешанные задачи, возникающие в случае однородного обтекания высшего порядка крыльев, оснащенных нормальной пластиной.

Эти смешанные задачи ставятся следующим образом:

а) при заданных давлениях на крыло и угле атаки (или наклона) пластины ищут угол атаки (или наклона) крыла и давления на пластину;

б) при заданных угле атаки (или наклона) крыла и давлениях на пластину ищут давления на крыло и угол атаки (или наклона) пластины.

Исследование проводится в рамках теории малых возмущений. Задача заключается либо в задании пары значений — осевой составляющей *u* и нормальной составляющей на пластине *v* — и нахождении пары значений нормальной составляющей на крыле *w* и осевой составляющей *u*, либо в задании второй пары значений и нахождении первой пары.

Поскольку обтекание принято однородным порядка n, применяется формула Эйлера и некоторые соотношения совместимости; таким образом, задача определения неизвестных составляющих сводится к определению некоторых производных порядка n потенциала возмущений.

Эти производные обладают такими свойствами, выведенными из граничных условий задачи, что их определение можно произвести весьма простым способом.

LES PROBLÈMES MIXTES DES AILES TRIANGULAIRES, POURVUES D'UNE PLAQUE NORMALE, EN COURANT SUPERSONIQUE (AILES CRUCIFORMES)

RÉSUMÉ]

Les auteurs étudient dans ce travail quelques problèmes mixtes, qui peuvent être posés dans le cas des écoulements homogènes d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires pourvues d'une plaque normale.

Ces problèmes mixtes sont définis comme suit :

a) les pressions sur l'aile et l'incidence (ou la pente) de la plaque étant données, on cherche l'incidence (ou la pente) de l'aile ainsi que la pression sur la plaque;

b) l'incidence (ou la pente) de l'aile et la pression sur la plaque étant données, on cherche les pressions sur l'aile et l'incidence (ou la pente) de la plaque.

L'étude est faite dans le cadre de la théorie des petites perturbations. Le problème consiste donc soit à donner un couple de valeurs — la composante axiale u et la composante normale sur la plaque v — et à chercher le couple de valeurs — la composante normale sur l'aile w et la composante axiale u —, soit à donner le deuxième couple de valeurs et à chercher le premier.

L'écoulement étant considéré homogène d'ordre n, on applique la formule d'Euler et certaines relations de la compatibilité, de sorte que le problème de la détermination des composantes inconnues est ramené à celui de la détermination de dérivées d'ordre n du potentiel des perturbations.

Ces dérivées ont des propriétés déduites des conditions à la limite du problème, qui permettent de les déterminer d'une façon très simple.

BIBLIOGRAFIE

1. Elie Carafoli, Beatrice Horovitz, *L'écoulement supersonique autour d'une aile à disque axial*. Revue de Mécanique Appliquée, I, *1* (1956).
2. — *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour d'une aile triangulaire à plaque normale*. Revue de Mécanique Appliquée, II, *2* (1957).
3. E. Carafoli, *High-Speed Aerodynamics*. Ed. tehnică, București, 1956.

STUDIUL ARIPILOR TRIUNGHIULARE SUBȚIRI CU SIMETRIE FORȚATĂ ÎN CURENT SUPERSONIC

DE

ELIE CARAFOLI și ADRIANA NĂSTASE

CONSIDERAȚII INTRODUCTIVE

În lucrarea de față se dezvoltă studiul aripilor triunghiulare subțiri în ipoteza că variația incidenței pe aripă are o simetrie forțată, pe care o vom defini mai jos.

Să considerăm în acest sens o aripă triunghiulară raportată la un sistem de referință $O x_1 \, x_2 \, x_3$, cu originea în vîrful aripii, cu axa $O x_1$ dirijată după direcția curentului neperturbat U_∞, planul $O x_1 \, x_2$ fiind cel definit de bordurile de atac $O A_1$ și $O A_2$, în care se admite că este cuprinsă întreaga aripă, presupusă foarte aplatizată (fig. 1).

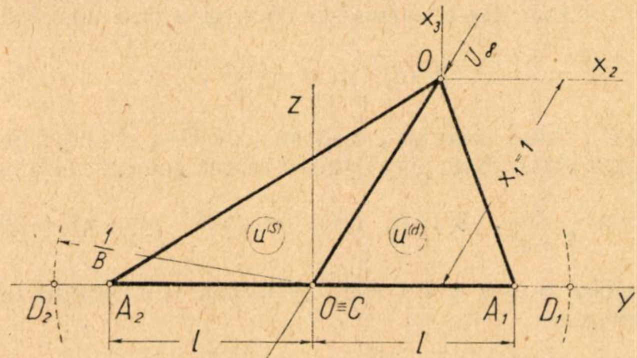


Fig. 1

În cazul scurgerii omogene de ordin n [5], viteza verticală de perturbație w este reprezentată sub forma unui polinom omogen de ordin $(n-1)$,

$$w_{(x_1, \, x_2)} = \sum_{q=0}^{n-1} w_{n-q-1, \, q} \, x_1^{n-q-1} \, x_2^{q} . \tag{1}$$

Evident că aripa este simetrică dacă admite planul $Ox_1\,x_3$ ca plan de simetrie. În acest caz, w satisface relația

$$w_{(x_1\,,\,x_2)} = w_{(x_1\,,\,-x_2)}\,. \tag{2}$$

Se observă ușor că simetria vitezei verticale se poate obține în două feluri : fie considerînd în (1) numai termenii pari ($q = 2\,\varkappa$), în care caz se obține expresia

$$w_{(x_1,\,x_2)} = \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} w_{n-2\varkappa-1,\,2\varkappa}\; x_1^{n-2\varkappa-1}\; x_2^{2\varkappa}\,, \tag{3}$$

care definește aripa cu *simetrie naturală*, fie considerînd în (1) numai termenii impari ($q = 2\,\varkappa + 1$), în care caz se obține expresia

$$w_{(x_1,\,x_2)} = \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} (\pm)\, w_{n-2\varkappa-2,\,2\varkappa+1}\, x_1^{n-2\varkappa-2}\; x_2^{2\varkappa+1}\,, \tag{4}$$

în care luăm semnul ($+$) pentru coeficienții lui w din dreapta aripei ($x_2 > O$) și semnul ($-$) pentru coeficienții lui w din stînga aripei ($x_2 < O$). Acest caz definește tocmai aripa cu *simetrie forțată*.

Aripa cu simetrie forțată se deosebește calitativ de aripa cu simetrie naturală prin aceea că prezintă o muchie ce se proiectează în planul $O\,x_1x_2$ după segmentul $O\,C$, plasat pe axa $O\,x_1$ (muchie pe centru).

Înainte de a trece la calculul efectiv, vom indica variabilele curente și planele folosite în cursul lucrării. Astfel, raportîndu-ne la figura 1, vom considera planul fizic $O\,y\,z$ normal pe $O\,x_1$ și avînd coordonatele

$$y = \frac{x_2}{x_1}\,, \quad z = \frac{x_3}{x_1}\,, \tag{5}$$

axele $O\,y$ și $O\,z$ fiind paralele, respectiv cu $O\,x_2$ și $O\,x_3$; planul auxiliar $\omega\;\eta\;\zeta$, dedus din planul fizic prin transformarea geometrică a lui Busemann

$$B\,r = \frac{2\rho}{1+\rho^2}\,, \quad \theta = \theta, \quad (r^2 = y^2 + z^2, \quad \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2), \tag{6}$$

și planul auxiliar $x = y + i\;\mathfrak{z}$ (fig. 2) dedus din planul lui Busemann prin transformarea

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2}\,, \quad (\xi = \eta + i\,\zeta), \tag{7}$$

care are proprietatea de a reproduce urma aripei în adevărată mărime prin tăietura $[-l,\ l]$, iar conul Mach prin tăieturile $\left[-\infty,\,-\frac{1}{B}\right]$ și $\left[\frac{1}{B}\,,\,+\infty\right]$.

În acest ultim plan, ne propunem să determinăm viteza axială de perturbație, pe care o vom nota cu u, și care intră în formula coeficientului de presiune

$$C_p = -2\frac{u}{U_\infty}, \tag{8}$$

coeficient de care vom avea nevoie pentru a determina caracteristicile aerodinamice ale aripii (portanță, rezistență, momente aerodinamice).

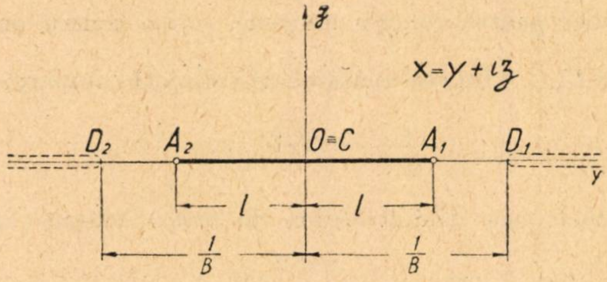


Fig. 2

Pentru calculul lui u ne vom referi la două lucrări anterioare [1] [3], în care s-a dat soluția problemei în cazul general, precum și metoda de calcul. Vom trece peste detaliile acestei metode și vom da mai jos expresia vitezei u pentru o aripă simetrică subțire cu muchie pe centru

$$U_{n-1} = \frac{u}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\left[\frac{\sum\limits_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_{2q}\, x^{2q}}{\sqrt{l^2-x^2}} + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_{2q}\, x^{2q} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{l^2}{x^2}}\right] \tag{9}$$

În această formulă s-a ținut seamă că $A_0 = 0$, deoarece u trebuie să fie finit în origină, întrucît muchia de pe centru se proiectează în planul $Ox_1\, x_2$, după Ox_1, deci nu perturbă curentul principal. Urmează acum să determinăm constantele din expresia de mai sus. Pentru aceasta vom da mai jos notațiile și formulele curent utilizate :

$$\Phi\ (x_1,\ x_2,\ x_3), \tag{10}$$

potențialul de viteze, funcție omogenă de ordin n;

$$\Phi_{p,q,r} = \frac{\partial^{(p+q+r)}\Phi}{\partial x_1^p\, \partial x_2^q\, \partial x_3^r}, \tag{11}$$

derivatele de ordin $(p+q+r) \leqslant n$ ale potențialului;

$$u = \Phi_{1,0,0},\quad v = \Phi_{0,1,0},\quad w = \Phi_{0,0,1}, \tag{12}$$

componentele vitezei de perturbație;

$$\Phi_{n-q-r,q,r},\quad \Phi'_{n-q-r,q,r}, \tag{13}$$

funcția omogenă de ordin O, respectiv funcția armonică asociată cu prima ;

$$F_{n-q-r,q,r} = \Phi_{n-q-r,q,r} + i\,\Phi'_{n-q-r,q,r}\,; \tag{14}$$

funcția analitică de variabilă complexă $x = y + i\mathfrak{z}$;

$$\frac{(n-1)!\;w}{x_1^{n-1}} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\, y^{q}\, \Phi_{n-q-1,q,1} = \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\, x^{q}\, F_{n-q-1,q,1}\,, \tag{15}$$

formula lui Euler pentru funcții omogene, scrisă pentru punctele de pe aripă.

Notînd cu U_{n-1} o funcție analitică de variabilă complexă x, vom pune

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\, U_{n-1}\,. \tag{16}$$

Vom deduce ușor, ținînd seama de prima relație (12),

$$d\,F_{1,n-1,0} = \frac{d^{n}\,U_{n-1}}{dx^{n}}\,d\,x. \tag{17}$$

Cu aceste notații și formule, vom căuta mai departe să determinăm constantele din expresia (9).

Din relațiile de compatibilitate, care impun identitatea tuturor expresiilor de forma

$$(-1)^{q}\, x^{q} \left(\frac{i\,x}{\sqrt{1-B^{2}x^{2}}}\right)^{r} d\,F_{n-q-r,q,r}\,, \tag{18}$$

unde $0 \leqslant q + r \leqslant n$, și ținînd seama de relațiile (1), (15) și (18) deducem ușor că

$$\mathcal{R}e\, i\,(-1)^{n-q} \int_{x_0}^{x_d} x^{(n-q-2)} \sqrt{1 - B^{2}x^{2}}\, \frac{d^{n}\,U_{n-1}}{dx^{n}}\, dx = \frac{(n-1)!\; w^{(d)}_{n-q-1,q}}{C_{n-1}^{q}} \tag{19}$$

unde x_0 este un punct de viteză verticală nulă (de exemplu pe cercul Mach), iar x_d, un punct oarecare pe aripă la dreapta muchiei de pe centru ($y > 0$).

Scriind o relație analogă cu (19) pentru un punct din stînga aripii și scăzînd-o din (19), obținem

$$\mathcal{R}e\, i\quad (-1)^{n-q} \int_{\Gamma} x^{(n-q-2)} \sqrt{1 - B^{2}x^{2}}\, \frac{d^{n}\,U_{n-1}}{dx^{n}}\, dx = \frac{(n-1)!\;\Delta\, w_{n-q-1,q}}{C_{n-1}^{q}} \tag{20a}$$

unde

$$\Delta\, w_{n-q-1,q} = w^{(d)}_{n-q-1,q} - w^{(s)}_{n-q-1,q}\,, \tag{20b}$$

Γ este semicercul de rază ε din jurul originei (în cazul muchiei pe centru). Vom alege în (19) drumul de integrare pe axa reală ($\mathfrak{z} = 0$). Deoarece în punctul $x = l$ $U_{n-1}^{(n)}$ are o singularitate neintegrabilă, vom ocoli punctul l cu un semicerc de rază ε. Vom pune

$$f_{(x)} = x^{n-q-2}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{d^n\,U_{n-1}}{dx^n}\,;\quad F_{(x)} = \int f_{(x)}\,dx. \tag{21}$$

Comportările lui U_{n-1} și a lui $f_{(x)}$ pe axa reală sînt date în figura 3.

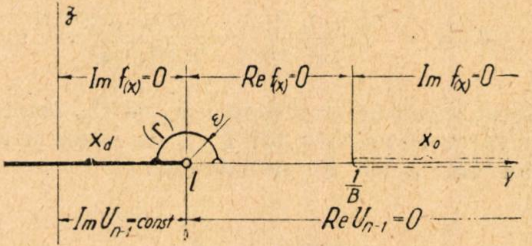


Fig. 3

Vom scrie integrala din membrul I-iu al relației (19) sub forma

$$\mathcal{R}e\; i\int_{x_d}^{x_0} f_{(x)}\,dx = \mathcal{I}m\left[\int_{x_d}^{l-\varepsilon} + \int_{\Gamma} + \int_{l+\varepsilon}^{\frac{1}{B}} + \int_{\frac{1}{B}}^{x_0}\right] f_{(x)}\,dx. \tag{22}$$

Avem însă succesiv

$$\mathcal{I}m\int_{\frac{1}{B}}^{x_0} f_{(x)}\,dx = 0, \tag{23a}$$

$$\mathcal{I}m\int_{x_d}^{l-\varepsilon} f_{(x)}\,dx = 0, \tag{23b}$$

$$\int_{\Gamma} f_{(x)}\,dx = F_{(l+\varepsilon)} - F_{(l-\varepsilon)}, \tag{23c}$$

$$\int_{l+\varepsilon}^{\frac{1}{B}} f_{(x)}\,dx = F_{\left(\frac{1}{B}\right)} - F_{(l+\varepsilon)}, \tag{23d}$$

$$\mathcal{I}m\;F_{(l-\varepsilon)} = 0, \tag{23e}$$

$$\mathcal{I}m\int_{x_d}^{x_0} f_{(x)}\,dx = \mathcal{I}m\left[F_{(l+\varepsilon)} - F_{(l-\varepsilon)} + F_{\left(\frac{1}{B}\right)} - F_{(l+\varepsilon)}\right] =$$

$$= \mathcal{I}m\;F_{\left(\frac{1}{B}\right)}. \tag{24}$$

În consecință, în (22) integrarea se va face pe intervalul $\left(l, \frac{1}{B}\right)$ de pe axa reală și se va lua apoi valoarea în punctul $\frac{1}{B}\cdot$

Ținînd seamă de (24), relațiile (19) și (20), care dau valorile coeficienților A_{2q} și C_{2q} din (9), pot fi aduse la o formă mai utilă pentru aplicații. În acest sens vom introduce următoarele notații :

$$U_{n-1}^{(n)} = \frac{D_0 + D_2 x^2 + \ldots + D_{2(n-1)} x^{2(n-1)}}{x^{n-2}(l^2 - x^2)^n \sqrt{l^2 - x^2}}, \tag{25}$$

coeficienții D_{2q} fiind legați de coeficienții A_{2q} și C_{2q} printr-un sistem liniar obținut prin derivarea efectivă a lui U_{n-1} de n ori și identificarea coeficienților puterilor lui x de la numărător.

Să punem

$$P_{(x)} = \frac{\sqrt{1-B^2 x^2}}{(l^2 - x^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} P_{(0)}^{(2p)} \tag{26}$$

și mai departe,

$$Q_{2p} = P_{(0)} D_{2p} + \frac{P''_{(0)}}{2!} D_{2(p-1)} + \cdots + \frac{P_{(0)}^{(2p)}}{(2p)!} D_0. \tag{27}$$

Cu aceste notații, relațiile (20) devin

$$Q_{k-1} = (-1)^n \frac{(n-1)!\,\Delta w_{n-k-1,k}}{\pi C_{n-1}^k} \tag{28}$$

unde

$$k = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ (2p+1),\quad p = E\left(\frac{n-2}{2}\right). \tag{29}$$

Din relațiile (28) se determină ușor coeficienții $D_0, D_2, \ldots, D_{2p}$ cu p dat de (29). De asemenea, scriind

$$\mathcal{J}_q^{[n]} = \int^{\frac{1}{B}} \frac{x^q\, dx}{(x^2 - l^2)^n Y}, \quad \mathcal{J}_{-q}^{[n]} = \int^{\frac{1}{B}} \frac{dx}{x^q (x^2 - l^2)^n Y},$$

$$\mathcal{J}_0^{[n]} = \int^{\frac{1}{B}} \frac{dx}{(x^2 - l^2)^n Y}, \tag{30}$$

unde

$$Y = \sqrt{(x^2 - l^2)(1 - B^2 x^2)}, \tag{31}$$

și punînd mai departe

$$\mu = Bl\,,$$

$$\omega_{2k}^{[n]} = l^{2(n-k-1)}\left[l^2\,\mathcal{J}_{2k}^{[n]} - \mu^2\,\mathcal{J}_{(k+1)}^{[n]}\right], \tag{32}$$

ținînd seamă și de (24), relațiile (19) devin

$$\omega_{2(p+1-q)}\,D_{2(p+1)} + \ldots + l^{2(n-p-1)}\ \omega_{2(n-1-q)}\,D_{2(n-1)} = N_{2q} \tag{33}$$

$$[q = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ (n-p-2)],$$

p fiind dat de (29), iar N_{2q} dat de expresia

$$N_{2q} = \frac{1}{l^{2\,(p+1)}}\left\{\frac{(n-1)\,!\,l^{2\,(n+q)}\ w_{n-2q-1,\,2q}}{C_{n-1}^{2q}} - \left[\omega_{2(0-q)}\,D_0 + \ldots + \omega_{2(p-q)}\,l^{2p}D_{2p}\right]\right\} \tag{34}$$

Relațiile (33) folosesc la determinarea coeficienţilor $D_{2(p+1)}, \ldots D_{2(n-1)}$. Coeficienți adimensionali $\omega_{2k}^{[n]}$ din sistemul (33) se calculează ușor, deoarece ei satisfac următoarele relații simple de recurență*)

$$\omega_{2k}^{[n]} = \omega_{2(k-1)}^{[n-1]} + \omega_{2(k-1)}^{[n]}\,, \tag{35a}$$

$$\omega_{-2k}^{[n]} = \omega_{-2(k-1)}^{[n]} - \omega_{-2k}^{[n-1]}\,, \tag{35b}$$

$$\omega_0^{[n]} = l^{2\,(n-1)}\left[l^2\,(1-\mu^2)\,\mathcal{J}_0^{[n]} - \mu^2\,\mathcal{J}_0^{[n-1]}\right]. \tag{35c}$$

Din cele expuse mai sus, se desprinde următoarea schemă de calcul a coeficienților A_{2q} și C_{2q}.

1) Se calculează derivatele de ordin n a lui U_{n-1} și se fac notațiile indicate în (25); se obține astfel un sistem liniar care leagă constantele A_{2q} și C_{2q} de D_{2k}.

2) Cu ajutorul relațiilor (28) și (33) se determină coeficienții D_{2k}.

3) Valorile lui D_{2k} astfel obținute se introduc în sistemul menționat la 1) și, prin rezolvarea lui, se găsesc coeficienții A_{2q} și C_{2q}.

Se observă că, în baza relațiilor de recurență (35), coeficienții sistemului (33), scris pentru mișcarea omogenă de ordin n, se obțin din coeficienții aceluiași sistem scris pentru mișcarea omogenă de ordin (n-1). Singurul coeficient care trebuie calculat în plus, pentru mișcarea de ordin n, este $\omega_0^{[n]}$, pentru care e necesar să se calculeze o singură integrală pe care o vom denumi integrală de bază, și anume definită în (30).

În cele ce urmează vom calcula efectiv coeficienții vitezelor de perturbație pentru mișcările omogene de ordin $n=2, 3, 4$ la aripi simetrice și apoi, prin particularizări, vom obține separat coeficienții pentru cele două tipuri de aripă cu simetrie naturală sau forțată. Evident acest calcul prezintă interes numai pentru aripile cu simetrie forțată, care formează obiectul principal al lucrării de față. Prezentarea însă într-o metodă unitară a celor două tipuri de aripă simetrică decurge în mod automat din formulele stabilite mai sus și dă posibilitatea unei verificări a calculului de față cu cel dat de alți autori [2] și [6] în cazul aripilor cu simetrie naturală.

---

*) Pentru detalii a se vedea ADRIANA NĂSTASE, *Asupra unor formule de recurență referitoare la calculul coeficienților vitezei axiale de perturbație pentru mișcările omogene de ordin superior*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, X, 1 (1959) (sub tipar).

Pentru aripile cu simetrie forțată vitezele verticale w vor fi de forma

$$n = 2, \quad w = \pm\, w_{0.1}\, x_1, \tag{36a}$$

$$n = 3, \quad w = \pm\, w_{1.1}\, x_1\, x_2 = \pm\, w_{1.1}\, x_1^2\, y, \tag{36b}$$

$$n = 4, \quad w = \pm\,(w_{2.1}\, x_1^2\, x_2 + w_{0.3}\, x_2^3) = \pm\, x_1^3\,(w_{2.1}\, y + w_{0.3}\, y^3), \tag{36c}$$

iar pentru aripi cu simetrie naturală

$$n = 2, \quad w = w_{1.0}\, x_1, \tag{37a}$$

$$n = 3, \quad w = w_{2.0}\, x_1^2 + w_{0.2}\, x_2^2 = x_1^2\,(w_{2.0} + w_{0.2}\, y^2) \tag{37b}$$

$$n = 4, \quad w = w_{3.0}\, x_1^3 + w_{1.2}\, x_1\, x_2^2 = x_1^3\,(w_{3.0} + w_{1.2}\, y^2). \tag{37c}$$

În acest caz, neexistînd muchie nu există salt pe centru, deci toți Δw în (28) vor fi nuli iar coeficienții D_{2k} (unde $k \leqslant p$) determinați cu ajutorul acestor relații vor fi nuli.

MIȘCAREA OMOGENĂ DE ORDIN n = 2

Din (9) și din (16) rezultă :

$$U_1 = \frac{C_0 + C_2 x^2}{\sqrt{l^2 - x^2}}. \tag{38}$$

Pentru derivata de ordin 2 a lui U_1 vom avea

$$U_1^{(2)} = \frac{C_0(l^2 + 2x^2) + l^2 C_2(2l^2 + x^2)}{(l^2 - x^2)^{5/2}} = \frac{D_0 + D_2 x^2}{(l^2 - x^2)^{5/2}}, \tag{39}$$

de unde deducem prin identificare,

$$C_0 = \frac{1}{3l^2}\,(2l^2 D_2 - D_0) \qquad C_2 = \frac{1}{3l^4}\,(2\, D_0 - l^2 D_2). \tag{40}$$

Din (28) obținem

$$Q_{(0)} = P_{(0)} D_0 = \frac{\Delta w_{0.1}}{\pi}, \tag{41}$$

iar din (26), pentru $n = 2$, vom avea

$$P_{(x)} = \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{(l^2 - x^2)^{5/2}}, \quad P_{(0)} = \frac{1}{l^5} \quad \text{de unde} \quad D_0 = \frac{l^5 \Delta w_{0.1}}{\pi}. \tag{42}$$

Cea de-a doua constantă D_2 se obține din (33),

$$\omega_2 \, D_2 = \frac{1}{l^2} \left(l^4 \, w_{1,0} - \omega_0 D_0 \right) = N_0 . \tag{43}$$

Rezultă mai departe
a. *pentru aripa cu simetrie naturală* ($w_{0,1} = 0$) din (40)(42) și (43) obținem

$$C_0 = \frac{2l^2 \, w_{1,0}}{3\,\omega_2}, \quad C_2 = - \frac{w_{1,0}}{3\,\omega_2}; \tag{44}$$

b. *pentru aripa cu simetrie forțată* ($w_{1,0} = 0$, $\Delta \, w_{0,1} = 2 \, w_{01}$)

$$C_0 = - \frac{2l^3 \, w_{01}}{3\pi} \cdot \frac{2\omega_0 + \omega_2}{\omega_2}, \quad C_2 = \frac{2\, l\, w_{0,1}}{3\pi} \cdot \frac{2\omega_2 + \omega_0}{\omega_2}, \tag{45}$$

iar ω_0 și ω_2 au valorile

$$\omega_0 = \frac{(2 - \mu^2)\, E - \mu^2 K}{3\,(1 - \mu^2)}, \tag{46a}$$

$$\omega_2 = - \frac{(1 - 2\mu^2)\, E + \mu^2 K}{3\,(1 - \mu^2)}, \tag{46b}$$

în care E și K sînt integralele eliptice complete de speța I-a și a II-a de modul $k = \sqrt{1 - \mu^2}$ iar $\mu = Bl$

Observație. În cazul mișcării omogene de ordin doi expresia vitezei axiale de perturbație (38) este formal aceeași la aripile cu simetrie naturală și cu simetrie forțată. Valorile numerice însă ale coeficienților C_0 și C_2 diferă.

MIȘCAREA OMOGENĂ DE ORDIN n = 3

Din (9) și din (16) rezultă

$$U_2 = \frac{C_0 + C_2 \, x^2}{\sqrt{l^2 - x^2}} + A_2 \, x^2 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{l^2}{x^2}} \cdot \tag{47}$$

Derivata de ordin 3 a lui U_2 va fi

$$U_2^{(3)} = \frac{-2\, l^7 A_2 + l^2 x^2 (9\, C_0 + 12\, l^2 C_2 + l^3 A_2) + x^4 (6C_0 + 3\, l^2 C_2 + l^3 A_2)}{x\,(l^2 - x^2)^{7/2}} =$$

$$= \frac{D_0 + D_2 \, x^2 + D_4 \, x^4}{x\,(l^2 - x^2)^{7/2}}, \tag{48}$$

De unde rezultă, identificînd cele două forme

$$A_2 = - \frac{D_0}{2l^7}, \quad C_0 = \frac{4l^2 D_4 - 3l^5 A_2 - D_2}{15\, l^2}, \quad C_2 = \frac{2\, D_2 + l^5 A_2 - 3\, l^2 D_4}{15\, l^4} . \tag{49}$$

Din (18), obținem pentru $n = 3$

$$P_{(0)}\, D_0 = -\frac{\Delta\, w_{11}}{\pi}, \quad P_{(x)} = \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{(l^2 - x^2)^{7/2}}$$

de unde $P_{(0)} = \frac{1}{l^7}$, (50)

deci

$$D_0 = -\frac{\Delta\, w_{1.1}\, l^7}{\pi}\,; \tag{51}$$

celelalte două constante D_2 și D_4 se obțin din (33)

$$\omega_0\, D_2 + l^2\, \omega_2\, D_4 = \frac{1}{l^2}\,(2\, l^8\, w_{0.2} - \omega_{-2}\, D_0) = N_0, \tag{52a}$$

$$\omega_2\, D_2 + l^2\, \omega_4\, D_4 = \frac{1}{l^2}\,(2\, l^6\, w_{2.\,0} - \omega_0\, D_0) = N_2\,. \tag{52b}$$

Acest sistem rezolvat în raport cu D_2 și D_4 dă

$$D_2 = \frac{N_2\, \omega_2 - N_0 \omega_4}{\omega_2^2 - \omega_0\, \omega_4}, \quad D_4 = \frac{N_0\, \omega_2 - N_2\, \omega_0}{l^2\, (\omega_2^2 - \omega_0 \omega_4)}\,. \tag{53}$$

Introducînd în (49), obținem coeficienții vitezelor axiale de perturbație :

a. *pentru aripa cu simetrie naturală* ($w_{1.1} = 0$)

$$A_2 = 0, \tag{54a}$$

$$C_0 = \frac{2\, l^2\, [(4\, \omega_2 + \omega_4)\, l^2\, w_{2.\,0} - (4\, \omega_0 + \omega_2)\, l^2\, w_{0\ 2}]}{15\, (\omega_2^2 - \omega_0\, \omega_4)}\,; \tag{54b}$$

$$C_2 = \frac{2\, [(2\, \omega_2 + 3\, \omega_0)\, w_{2.\,0} - (2\, \omega_4 + 3\, \omega_2)\, l^2\, w_{0.\,2}]}{15\, (\omega_2^2 - \omega_0\, \omega_4)}\,; \tag{54c}$$

b. *pentru aripa cu simetrie forțată* ($w_{0.\,2} = w_{2.\,0} = 0$, $\Delta\, w_{1.1} = 2\, w_{11}$) deducem de asemenea

$$A_2 = \frac{w_{11}}{\pi}, \quad C_0 = \frac{l^3\, w_{11}}{15\, \pi}\,(8\, \Lambda_2 - 6\, \Lambda_1 - 3), \tag{55}$$

$$C_2 = \frac{l\, w_{11}}{15\, \pi}\,(4\, \Lambda_1 - 6\, \Lambda_2 + 1), \tag{55}$$

unde am pus

$$\Lambda_1 = \frac{\omega_0\, \omega_2 - \omega_{-2}\, \omega_4}{\omega_2^2 - \omega_0\, \omega_4}, \quad \Lambda_2 = \frac{\omega_2\, \omega_{-2} - \omega_0^2}{\omega_2^2 - \omega_0\, \omega_4}\,. \tag{56}$$

Iar pentru ω_{2k} vom avea următoarele valori

$$\omega_0 = \frac{2\mu^2 K(2 - 3\mu^2) - (8 - 13\mu^2 + 3\mu^4)\, E}{15(1 - \mu^2)^2}, \tag{57a}$$

$$\omega_2 = \frac{2(1 - \mu^2 + \mu^4)\, E - \mu^2 K(1 + \mu^2)}{15(1 - \mu^2)^2}, \tag{57b}$$

$$\omega_4 = \frac{-[2(3 - 2\mu^2)\mu^2 K + (3 - 13\mu^2 + 8\mu^4)\, E]}{15(1 - \mu^2)^2}, \tag{57c}$$

$$\omega_2 = \frac{\mu^2 K(9 - 15\mu - 26\mu^2 + 15\mu^3 + 15\mu^4) - (48 + 15\mu - 73\mu^2 - 15\mu^3 + 23\mu^4)\, E}{15(1 - \mu^2)^2} \tag{57d}$$

MIŞCAREA OMOGENĂ DE ORDIN n = 4

Din (9) şi din (16) rezultă

$$U_3 = \frac{C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4}{\sqrt{l^2 - x^2}} + A_2 x^2 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{l^2}{x^2}} \cdot \tag{58}$$

Derivata de ordin 4 a lui U_3 va fi

$$U_3^{(4)} = \frac{1}{x^2(l^2 - x^2)^{9/2}} [3\, C_0 (3 l^4 x^2 + 24 l^2 x^4 + 8 x^6) +$$

$$+ 3\, C_2 l^2 (4 l^4 x^2 + 27 l^2 x^4 + 4 x^6) + 3\, C_4 (8 l^4 x^2 + 24 l^2 x^4 + 3 x^6) +$$

$$+ A_2 l^3 (2 l^6 - 15 l^4 x^2 + 9 l^2 x^4 + 4 x^6)] = \frac{D_0 + D_2 x^2 + D_4 x^4 + D_6 x^6}{x^2 (l^2 - x^2)^{9/2}} \cdot \tag{59}$$

Prin identificarea celor două forme obținem

$$A_2 = \frac{D_0}{2l^9} \tag{60a}$$

$$C_0 = \frac{-15 D_0 + 6 l^2 D_2 - 8 l^4 D_4 + 48 l^6 D_6}{630\, l^6}, \tag{60b}$$

$$C_2 = \frac{-363 D_0 - 48 l^2 D_2 + 22 l^4 D_4 - 48 l^6 D_6}{630\, l^8}, \tag{60c}$$

$$C_4 = \frac{384\, D_0 + 48 l^2 D_2 - 8 l^4 D_4 + 6 l^6 D_6}{630\, l^{10}}. \tag{60d}$$

Din (28) deducem două relații ($q = 0; 1$):

$$P_{(0)}\, D_0 = \frac{2\,\Delta w_{21}}{\pi}, \tag{61a}$$

$$P_{(0)}\, D_2 + \frac{1}{2!}\, P''_{(0)}\, D_0 = \frac{6\,\Delta w_{0\cdot 3}}{\pi}. \tag{61b}$$

Pentru $n = 4$

$$P_{(x)} = \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{(l^2 - x^2)^{9/2}} \text{ iar } P_{(0)} = \frac{1}{l^9} \text{ și } P''_{(0)} = \frac{9 - \mu^2}{l^{11}}. \tag{61c}$$

Deci

$$D_0 = \frac{2\, l^9\, \Delta w_{2.1}}{\pi},\ D_2 = \frac{l^7}{\pi}\, [6\, l^2\, \Delta\, w_{0,3} - (9 - \mu^2)\, \Delta\, w_{2,1}]. \tag{62}$$

Din relațiile (33) obținem celelalte două constante D_4 și D_6:

$$\omega_2\, D_4 + l^2\, \omega_4\, D_6 = \frac{1}{l^4}\, (2\, l^{10}\, w_{1,2} - \omega_{-2}\, D_0 - l^2 \omega_0\, D_2) = N_0, \tag{63a}$$

$$\omega_4\, D_4 + l^2\, \omega_6\, D_6 = \frac{1}{l^4}\, (6\, l^8\, w_{3,0} - \omega_0\, D_0 - l^2\, \omega_2\, D_2) = N_2. \tag{63b}$$

Sistemul (63) rezolvat în raport cu D_4 și D_6 ne dă

$$D_4 = \frac{N_2\, \omega_4 - N_0\, \omega_6}{\omega_4^2 - \omega_2\, \omega_6},\ D_6 = \frac{N_0\, \omega_4 - N_2\, \omega_2}{l_2\, (\omega_4^2 - \omega_2\, \omega_6)}. \tag{64}$$

Introducînd în (60) aceste valori vom obține coeficienții vitezelor axiale de perturbație:

a) Pentru aripa cu simetrie naturală ($w_{0.3} = w_{2.1} = 0$). Pentru simplificarea scrierii vom face următoarele notații:

$$C_0 = C_0^{(1,2)} + C_0^{(3,0)},\ C_2 = C_2^{(1,2)} + C_2^{(3,0)},\ C_4 = C_4^{(1,2)} + C_4^{(3,0)}. \tag{65}$$

Cu aceste notații avem din (60), (62) și (64):

$$C_0^{(1,2)} = \frac{8\, l^4\, w_{1,2}\, (6\, \omega_4 + \omega_6)}{315\, (\omega_4^2 - \omega_2\, \omega_6)}, \tag{66a}$$

$$C_2^{(1,2)} = \frac{-2\, l^2\, w_{1,2}\, (11\, \omega_6 + 24\, \omega_4)}{315\, (\omega_4^2 - \omega_2\, \omega_6)}, \tag{66b}$$

$$C_4^{(1,2)} = \frac{2\, w_{1,2}\, (3\, \omega_4 + 4\, \omega_6)}{315\, (\omega_4^2 - \omega_2\, \omega_6)}, \tag{66c}$$

și

$$C_0^{(3,0)} = \frac{-24\, l^2 w_{3,0}\, (6\,\omega_2 + \omega_4)}{315\,(\omega_4^2 - \omega_2\,\omega_6)}, \tag{67a}$$

$$C_2^{(3,0)} = \frac{6\, w_{3,0}\, (11\,\omega_4 + 24\,\omega_2)}{315\,(\omega_4^2 - \omega_2\,\omega_6)}, \tag{67b}$$

$$C_4^{(3,0)} = \frac{-6\, w_{3,0}\, (3\,\omega_2 + 4\,\omega_4)}{315\; l^2\,(\omega_4^2 - \omega_2\,\omega_6)}. \tag{67c}$$

b) *Pentru aripa cu simetrie forțată* ($w_{1,2} = w_{3,0} = 0,\ \Delta w_{2.1} = 2w_{2.1};\ \Delta w_{0.3} = 2w_{03}$). Pentru simplificarea scrierii vom face mai departe următoarele notații :

$$C_0 = C_0^{(2,1)} + C_0^{(0,3)}\ ;\ C_2 = C_2^{(2,1)} + C_2^{(0,3)}\ ;\ C_4 = C_4^{(2,1)} + C_4^{(0,3)}. \tag{68}$$

Coeficientul A_2 va fi dat de relația :

$$A_2 = \frac{2\,w_{21}}{\pi}. \tag{69}$$

Cu aceste notații obținem din (60), (62) și (64) :

$$C_0^{2,1} = -\frac{2\,l^3 w_{2,1}}{315\,\pi}\,[15 - 8\,\Lambda_1 + 48\,\Lambda_4 + (9 - \mu^2)(3 + 4\,\Lambda_2 - 24\,\Lambda_3)], \tag{70a}$$

$$C_2^{(2,1)} = -\frac{2\,l\,w_{2,1}}{315\,\pi}[363 + 22\,\Lambda_1 - 48\,\Lambda_4 - (9 - \mu^2)(24 + 11\Lambda_2 - 24\,\Lambda_3)], \tag{70b}$$

$$C_4^{(2,1)} = \frac{2\,w_{2,1}}{315\,\pi\,l}\,[384 + 8\,\Lambda_1 - 6\,\Lambda_4 - (9 - \mu^2)(24 + 4\,\Lambda_2 - 3\,\Lambda_3)] \tag{70c}$$

și

$$C_0^{(0,3)} = \frac{12\,l^5 w_{0.3}}{315\,\pi}\,(3 + 4\,\Lambda_2 - 24\,\Lambda_3), \tag{71a}$$

$$C_2^{(0,3)} = -\frac{12\,l^3 w_{0.3}}{315\,\pi}\,(24 + 11\,\Lambda_2 - 24\,\Lambda_3), \tag{71b}$$

$$C_4^{(0,3)} = \frac{12\,l\,w_{0.3}}{315\,\pi}\,(24 + 4\,\Lambda_2 - 3\,\Lambda_3), \tag{71c}$$

unde

$$\Lambda_1 = \frac{\omega_4\,\omega_0 - \omega_6\,\omega_{-2}}{\omega_4^2 - \omega_2\,\omega_6}, \quad \Lambda_3 = \frac{\omega_4\,\omega_0 - \omega_2^2}{\omega_4^2 - \omega_2\,\omega_6},$$

$$\Lambda_2 = \frac{\omega_2\,\omega_4 - \omega_6\,\omega_0}{\omega_4^2 - \omega_2\,\omega_6}, \quad \Lambda_4 = \frac{\omega_4\,\omega_{-2}\;\omega_2\,\omega_0}{\omega_4^2 - \omega_2\,\omega_6}, \tag{72}$$

$$\omega_0 = \frac{(48 - 128\,\mu^2 + 103\,\mu^4 - 15\,\mu^6)\,E - (24 - 61\,\mu^2 + 45\,\mu^4)\,\mu^2 K}{105\,(1 - \mu^2)^3},$$

$$\omega_2 = \frac{\mu^2 K\,(4 - 9\,\mu^2 - 3\,\mu^4) - (8 - 19\,\mu^2 + 9\,\mu^4 - 6\mu^6)\,E}{105\,(1 - \mu^2)^3},$$

$$\omega_4 = \frac{(6 - 9\,\mu^2 + 19\,\mu^4 - 8\,\mu^6)\;E - \mu^2\,(3 + 9\,\mu^2 - 4\,\mu^4)\;K}{105\,(1 - \mu^2)^3}, \tag{73}$$

$$\omega_6 = \frac{-\,[(45 - 61\,\mu^2 + 24\,\mu^4)\,\mu^2\,K + (15 - 103\,\mu^2 + 128\,\mu^4 - 48\,\mu^6)\;E}{105\,(1 - \mu^2)^3},$$

$$\omega_{-2} = \frac{(384 + 105\,\mu - 975\,\mu^2 - 210\,\mu^3 + 775\,\mu^4 + 105\,\mu^5 - 176\,\mu^6)\,E}{105\,(1 - \mu^2)^3} -$$

$$- \frac{(87 - 105\,\mu - 306\,\mu^2 + 210\,\mu^3 + 332\,\mu^4 - 105\,\mu^5 - 105\,\mu^6)\;\mu^2 K}{105\,(1 - \mu^2)^3}.$$

Observație. Coeficienții $\omega_{2k}^{[n]}$ au pentru o aripă dată valori numerice determinate. Introducînd acești coeficienți în expresiile lui A_{2q} și C_{2q} în cazul aripilor cu simetrie naturală regăsim rezultatele obținute de Lance [6] pentru acest tip de aripă. Această operație a constituit de altfel și o verificare a coeficienților $\omega_{2k}^{[n]}$ $(k > 0)$ prezentați în lucrarea de față.

CALCULUL CARACTERISTICILOR AERODINAMICE ALE ARIPILOR CU SIMETRIE NATURALĂ ȘI FORȚATĂ

1. CALCULUL COEFICIENȚILOR DE PORTANȚĂ

Pentru o aripă triunghiulară simetrică valoarea coeficientului de portanță după [2]* are următoarea expresie :

$$C_z^{(n)} = \frac{4}{(n + 1)\,l U_\infty} \int_{-l}^{l} u_{n-1}\;dy \;=\; -\;\frac{2}{(u + 1)\;l\;U_\infty} \oint U_{n-1}\;dx, \tag{74}$$

---

*) p. 672.

dar

$$\int_{-l}^{l} x^n \operatorname{argch} \sqrt{\frac{l^2}{x^2}}\, dx = \frac{l}{n+1}\int_{-l}^{l} \frac{x^n\, dx}{\sqrt{l^2-x^2}}, \tag{75}$$

$$\int_{-l}^{l} \frac{x^{2p} dx}{\sqrt{l^2-x^2}} = 2\,\pi\, l^{2p}\, \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2^p p\,!} \tag{76}$$

și, ținînd seama și de (9), obținem

$$\begin{aligned} C_z^{(n)} = &-\frac{4\pi}{(n+1)lU_\infty}\left[C_0 + \frac{1}{2}\,l^2\left(C_2 + \frac{lA_2}{3}\right) + \frac{3}{8}\,l^4\left(C_4 + \frac{lA_4}{5}\right) + \ldots\right. \\ &+ \frac{1.3.5\ldots(2p-3)}{2^{p-1}(p-1)\,!}\, l^{2(p-1)}\left(C_{2(p-1)} + \frac{l\,A_{2\,(p-1)}}{2p-1}\right) + \\ &\left. + \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2^p\cdot p\,!}\, l^{2p}\left(C_{2p} + \varepsilon\,\frac{l\,A_{2\,p}}{2p+1}\right)\right], \end{aligned} \tag{77}$$

unde

$$p = E\left(\frac{n}{2}\right), \tag{78 a}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 \text{ dacă } n \text{ este par,} \\ 1 \text{ dacă } n \text{ este impar.} \end{cases} \tag{78 b}$$

Cazuri particulare de mișcări omogene:

$$n = 2, \quad C_z^{(2)} = -\frac{4\pi}{3\,lU_\infty}\left(C_0 + \frac{1}{2}\,l^2\, C_2\right), \tag{79}$$

$$n = 3, \quad C_z^{(3)} = -\frac{\pi}{lU_\infty}\left(C_0 + \frac{1}{2}\,l^2 C_2 + \frac{1}{6}\,l^3 A_2\right), \tag{80}$$

$$n = 4, \quad C_z^{(4)} = -\frac{4\pi}{5\,lU_\infty}\left(C_0 + \frac{1}{2}\,l^2 C_2 + \frac{3}{8}\,l^4 C_4 + \frac{1}{6}\,l^3 A_2\right) \tag{81}$$

2. CALCULUL COEFICIENȚILOR DE REZISTENȚĂ

Pentru aripi triunghiulare simetrice coeficientul de rezistență va fi dat după [2] *) de următoarea formulă:

$$C_x^{(n)} = -\frac{4}{lU_\infty}\int_{OA_1A_2} \alpha\, u\, x_1\, dx_1\, dy = \frac{4}{lU_\infty^2}\int_{OA_1A_2} w\, u\, x_1\, dx_1\, dy, \tag{82}$$

---

*) pag. 673.

deoarece

$$\alpha = -\frac{w}{U_\infty} \tag{83}$$

în care u și w pe aripă ($\mathfrak{z} = 0$) se obțin din (9) și (1) sub forma

$$u = x_1^{n-1}\left[\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{C_{2p}\, y^{2p}}{\sqrt{l^2-y^2}} + \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_{2p}\, y^{2p} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{l^2}{y^2}}\right. \tag{9'}$$

și

$$w = x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} w_{n-q-1,q}\, y^q = \sum_{q=0}^{n-1} w_q , \tag{1'}$$

iar

$$q = 2\varkappa \text{ pentru aripa cu simetrie naturală,} \tag{84}$$

$$q = 2\varkappa + 1 \text{ pentru aripa cu simetrie forțată.} \tag{85}$$

Notăm $C_{x,q}^{(n)}$ coeficientul de rezistență datorit componentei w_q a vitezei verticale de perturbație ; vom avea

$$C_x^{(n)} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{x,q}^{(n)} . \tag{86}$$

Ținînd seamă că rezistența la înaintare a unei aripi simetrice este egală cu dublul rezistenței semi-aripei, vom obține din formula (82), după niște transformări simple,

$$\begin{aligned} C_{x,q}^{(n)} = \frac{8w_{n-q-1,q}}{lU_\infty^2}\int_0^1 x_1^{2n-1}\, dx_1 \Bigg[& \sum_{p=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)} C_{2\,p}\int_0^l \frac{y^{2(p+q)}dy}{\sqrt{l^2-y^2}} + \\ & + l \sum_{p=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_{2p}\int_0^l y^{2p+q} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{l^2}{y^2}}\, dy \Bigg] \cdot \end{aligned} \tag{87}$$

Ținînd seama că

$$\int_0^l y^n \operatorname{argch}\sqrt{\frac{l^2}{y^2}}\, dy = \frac{l}{n+1}\int_0^l \frac{y^n\, dy}{\sqrt{l^2-y^2}} , \tag{75'}$$

$$\int_0^l \frac{x^{2(p+q)}\, dx}{\sqrt{l^2-x^2}} = \frac{1.3.5.\ldots.(2p+2q-1)\pi l^{2(p+q)}}{(p+q)\,!\; 2^{(p+q+1)}} , \tag{88}$$

$$\int_0^l \frac{x^{2(p+q)+1}\, dx}{\sqrt{l^2-x^2}} = \frac{(p+q)\,!\; 2^{(p+q)}\; l^{2(p+q)+1}}{1.3.5.\ldots(2p+2q+1)} , \tag{89}$$

formula (87) devine :

a) în cazul aripii cu simetrie naturală ($q = 2\varkappa$ și $A_{2p} = 0$)

$$C_{x,2\varkappa}^{(n)} = \frac{4\pi l^{2\varkappa} w_{n-2\varkappa-1,2\varkappa}}{nl\,U_\infty^2} \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1.3.5\ldots(2p+2\varkappa-1) l^{2p} C_{2p}}{(p+\varkappa)!\;2^{(p+\varkappa+1)}}, \tag{90}$$

iar

$$C_x^{(n)} = \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{x,2\varkappa}^{(n)}; \tag{91}$$

b) în cazul aripii cu simetrie forțată ($q = 2\varkappa + 1$)

$$\begin{aligned} C_{x,2\varkappa+1}^{(n)} = \frac{4w_{n-\varkappa-2,2\varkappa+1}}{nl\,U_\infty^2} \Bigg[\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_{2p} \frac{(p+\varkappa)!\,2^{p+\varkappa}\, l^{2p+2\varkappa+1}}{1.3.5\ldots(2p+2\varkappa+1)} + \\ + l \sum_{p=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_{2p} \frac{(p+\varkappa)!\,2^{p+\varkappa}\, l^{2p+2\varkappa+1}}{2(p+\varkappa+1)\,1.3.5\ldots(2p+2\varkappa+1)} \Bigg] \end{aligned} \tag{92 a}$$

sau

$$C_{x,2\varkappa+1}^{(n)} = \frac{2^{\varkappa+2}\, l^{2\varkappa}\, w_{n-2\varkappa-2,2\varkappa+1}}{n\,U_\infty^2} \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{2^p\, l^{2p}\,(p+\varkappa)!}{1.3.5\ldots(2p+2\varkappa+1)} \left(\frac{lA_{2p}}{2\,(p+\varkappa+1)} + C_{2p} \right), \tag{92b}$$

cu observația

$$A_0 = A_n = 0 \quad \text{pentru } n \text{ par}, \tag{93 a}$$

$$A_0 = 0 \quad \text{pentru } n \text{ impar}, \tag{93b}$$

iar

$$C_x^{(n)} = \sum_{x=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} C_{x,2\varkappa+1}^{(n)} \tag{94}$$

Aplicînd această formulă pentru cazurile particulare de mișcări omogene $n = 2, 3, 4$ obținem următoarele valori ale coeficienților de rezistență :

$$n = 2 \qquad C_x^{(2)} = C_{x,1}^{(2)} = \frac{2w_{0,1}}{U_\infty^2} \left(C_0 + \frac{2}{3} l^2 C_2 \right), \tag{95}$$

$$n = 3, \qquad C_x^{(3)} = C_{x,1}^{(3)} = \frac{4w_{1,1}}{3U_\infty^2} \left[C_0 + \frac{2l^2}{3} C_2 + \frac{l^3}{6} A_2 \right], \tag{96}$$

$$n = 4, \qquad C_x^{(4)} = C_{x,1}^{(4)} + C_{x,3}^{(4)}, \tag{97a}$$

iar

$$C_{x,1}^{(4)} = \frac{w_{21}}{U_\infty^2}\left[C_0 + \frac{2l^2}{3}C_2 + \frac{8l^4}{15}C_4 + \frac{l^3}{6}A_2\right], \tag{97 b}$$

$$C_{x,3}^{(4)} = \frac{2w_{0,3}l^2}{U_\infty^2}\left[\frac{C_0}{3} + \frac{4l^2}{15}C_2 + \frac{8l^4}{35}C_4 + \frac{2l^3}{45}A_2\right]. \tag{97 c}$$

CALCULUL FORȚEI DE SUCCIUNE

Fenomenul de succiune apare la aripi subțiri cu borduri de atac subsonice și are ca efect o micșorare importantă a rezistenței de undă a aripei. Conform cu [2] *), forța de succiune are următoarea expresie

$$S_c = \pi\rho\sqrt{1 - M_n^2}\int A_c^2\, ds, \tag{98}$$

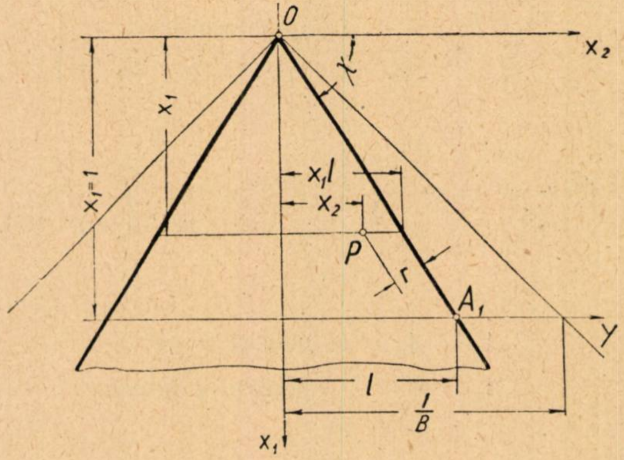


Fig. 4

unde

$$1 - M_n^2 = \frac{1 - B^2 l^2}{1 + l^2}, \tag{99}$$

$$A_c \cong \frac{u_{(x\to l)}\sqrt{r}}{\cos\chi}, \tag{100}$$

$$ds = \frac{dx_1}{\sin\chi}, \tag{101}$$

χ și r avînd semnificațiile din figura 4 ; M este un punct curent pe aripă.

---

*) pag. 579

Din (9) se vede că partea principală a vitezei în vecinătatea punctului $x = l$ va fi

$$u_{(x \to l)} \cong x_1^{n-1} \frac{\sum\limits_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_{2q}\, l^{2q}}{\sqrt{2l}\, \sqrt{l-y}} = \frac{x_1^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\sin \chi} \sum\limits_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_{2q}\, l^{2q}}{\sqrt{2l}\, \sqrt{r}} \cdot \tag{102}$$

Ținînd seama de (102), coeficientul A_c al vitezei reale dat de (102) va căpăta următoarea formă:

$$A_c \cong \frac{x_1^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\sin \chi}}{\sqrt{2l} \cos \chi} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_{2q}\, l^{2q}. \tag{103}$$

Deci forța de succiune datorită unui singur bord devine

$$\begin{aligned} S_c &= \pi \rho \sqrt{1 - M_n^2} \left(\frac{\sqrt{\sin \chi}}{\sqrt{2l} \cos \chi} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_{2q}\, l^{2q} \right)^2 \frac{1}{\sin \chi} \int_0^1 x^{2n-1}\, dx = \\ &= \frac{\pi \rho}{4\, ln \cos^2 \chi} \sqrt{\frac{1 - B^2 l^2}{1 + l^2}} \left(\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_{2q}\, l^{2q} \right)^2. \end{aligned} \tag{104}$$

Pentru aripa simetrică succiunea se datorește ambelor borduri și va avea deci valoarea dublă față de cea dată în (104).

Componenta forței de succiune pe direcția vitezei neperturbate, care este o forță propulsivă, are valoarea

$$R_s = - S_c \cos \chi_1 \tag{105}$$

și, luînd în considerație ambele borduri,

$$R_s = - \frac{\pi \rho}{2ln \cos \chi} \sqrt{\frac{1 - B^2 l^2}{1 + l^2}} \left(\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_{2q}\, l^{2q} \right)^2 \cdot \tag{106}$$

În cazurile particulare studiate componentele forțelor de succiune pe direcția vitezei vor fi

$$n = 2, \quad R_s = - \frac{\pi \rho}{4l \cos \chi} \sqrt{\frac{1 - B^2 l^2}{1 + l^2}} (C_0 + C_2\, l^2)^2, \tag{107}$$

$$n = 3, \quad R_s = - \frac{\pi \rho}{6l \cos \chi} \sqrt{\frac{1 - B^2 l^2}{1 + l^2}} (C_0 + C_2\, l^2)^2, \tag{108}$$

$$n = 4, \quad R_s = - \frac{\pi \rho}{8l \cos \chi} \sqrt{\frac{1 - B^2 l^2}{1 + l^2}} (C_0 + C_2\, l^2 + C_4\, l^4)^2. \tag{109}$$

Primită la redacție la 4 iulie 1958.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОНКИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ КРЫЛЬЕВ С ПРИНУДИТЕЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе авторы рассматривают тонкие треугольные крылья с принудительной симметрией в отношении изменения угла атаки и, следовательно, вертикальной скорости w на крыле. Кромка крыльев этого типа расположена по их оси симметрии.

Исследование проведено в рамках конических движений высшего порядка. Таким образом, изменение вертикальной компоненты w скорости возмущения на крыле принято в виде однородного многочлена высшего порядка и определено выражение осевой скорости возмущения u, являющейся пропорциональной коэффициенту давления.

На основании общей формулы этой осевой скорости u, указываются рекуррентные соотношения, относящиеся к расчету постоянных, входящих в эту формулу при переходе от однородного движения порядка (n—1) к движению порядка n, и проводятся построения решений однородных движений порядка $n = 2, 3, 4$.

Далее, проводится расчет аэродинамических характеристик (подъемной силы и волнового сопротивления) симметрических крыльев, а также силы подсоса, возникающей на кромках тонких дозвуковых крыльев. Что касается исследования крыльев с естественной симметрией, рассмотренных различными авторами, то решение их можно легко вывести из вышеустановленных общих формул.

L'ÉTUDE DES AILES TRIANGULAIRES MINCES, À SYMÉTRIE FORCÉE, EN COURANT SUPERSONIQUE

RÉSUMÉ

Les auteurs étudient dans ce travail les ailes triangulaires minces, qui présentent une symétrie forcée en ce qui concerne la variation de l'incidence (et, par conséquent, de la vitesse verticale w) sur l'aile. Les ailes de cette catégorie ont une arête située sur leur axe de symétrie.

L'étude est entreprise dans le cadre des mouvements coniques d'ordre supérieur. On a donc donné la variation de la composante vericale w de la vitesse de perturbation sur l'aile, sous la forme d'un polynôme homogène d'ordre supérieur et on a déterminé l'expression de la vitesse axiale de perturbation u, qui est proportionnelle au coefficient de pression.

Partant de la formule générale de cette vitesse axiale u, on indique un procédé de récurrence concernant le calcul des constantes, qui entrent dans son expression, lorsqu'on passe du mouvement homogène d'ordre (n — 1) à celui d'ordre n ; on fait des applications aux mouvements homogènes d'ordre $n = 2, 3, 4$.

On calcule, ensuite les caractéristiques aérodynamiques (portance et résistance d'onde) des ailes symétriques ainsi que la force de succion qui apparaît aux bords des ailes minces subsoniques. En ce qui concerne les ailes à symétrie naturelle, qui ont fait déjà l'objet des études des divers auteurs, leurs caractéristiques se déduisent directement des formules générales établies ci-dessus.

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluțiilor din mișcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale.* Comunicările Acad. R.P.R., **2**, 9—10, (1952).
2 — *High Speed Aerodynamics.* Ed. tehnică, București, 1956.
3. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique.* Revue de Mécanique Appliquée, **II**, 1, 5, (1957).
4. — *Traînée d'ailes triangulaires doublement coniques à pente variable en écoulement supersonique.* Revue de Mécanique Appliquée, **I**, *1*, 285 (1956).
5. PAUL GERMAIN, *La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul de certaines ailes Delta en régime supersonique.* La Recherche Aéronautique *7*, (1949).
6. G. N. LANCE, *The delta wing in non-uniform supersonic Stream. The Aeronautical Quarterly,* **V**, part. I, 55 (1954).
7. H. LOMAX, M. A. HEASLET, *Supersonic and transonic small perturbation theory.* W. R. Sears Editor, Princeton, 1954.

ASUPRA MIŞCĂRII AVIONULUI PE O TRAIECTORIE DATĂ

DE

N. TIPEI şi C. GUŢĂ

Evoluţiile avionului pe traiectorii curbe verticale constituie de obicei cele mai interesante cazuri de mişcare, nu numai prin faptul că sînt des întîlnite în practică, dar şi prin aceea că ele dau solicitările maxime care trebuie considerate în calculul şi dimensionarea elementelor avionului.

Studiul mişcărilor de acest gen se face, în majoritatea cazurilor, pornind de la o lege de pilotaj prescrisă. Această lege este admisă arbitrar, astfel încît să se apropie cît mai mult de situaţiile reale. Ea nu poate ţine seama, mai ales la un avion care nu a fost încercat în zbor, de calităţile de zbor ale aparatului respectiv şi, în genere, nu constituie decît o primă aproximaţie, deoarece este foarte puţin probabil că în timpul evoluţiilor reale, a căror durată este în genere foarte scurtă, pilotul să urmărească legea de comandă admisă în calcule. Din punctul de vedere al calculului însă, calea arătată duce la complicaţii şi aproximaţii deseori foarte mari; de regulă problema astfel pusă se poate rezolva numai prin metoda arcelor succesive, care, atunci cînd se caută soluţii exacte sau complete (determinarea tuturor parametrilor mişcării), conduce la operaţii fastidioase.

Apare deseori mai simplu să se plece de la traiectorii cunoscute, determinîndu-se elementele mişcării şi apoi legea de pilotaj corespunzătoare. Această lege este apoi confruntată cu procedeele practice şi, în măsura în care ele coincid, problema se poate considera rezolvată. Astfel se poate ajunge, de la început, pe căi directe, în ceea ce priveşte rezolvarea matematică, la soluţii închise care simplifică mult calculele şi au avantajul de a permite o discuţie uşoară. Evident, în forma traectoriei admise, influenţează în mod hotărîtor valoarea practică a soluţiei găsite.

În genere, majoritatea traiectoriilor verticale pot fi asimilate prin curbe simple cum ar fi conicele. Plecînd de la asemenea curbe se găsesc clase de mişcări care pot prezenta un interes practic deosebit. În acelaşi timp se pot determina curbele limită compatibile cu posibilitățile de comandă sau cu rezistența structurii aparatului. În cele ce urmează se vor examina mișcările avionului pe cele trei genuri de conice ; se remarcă, de la început, că evoluțiile pe asemenea traiectorii pot fi, din punct de vedere al pilotajului, diferite, după mărimea arcului din curba considerată care este parcurs de avion. Mai departe s-a considerat îndeosebi cazul resursei, ca fiind și cel mai interesant prin consecințele practice. Procedeul de calcul poate fi extins însă și la alte evoluții ca bucla verticală etc.

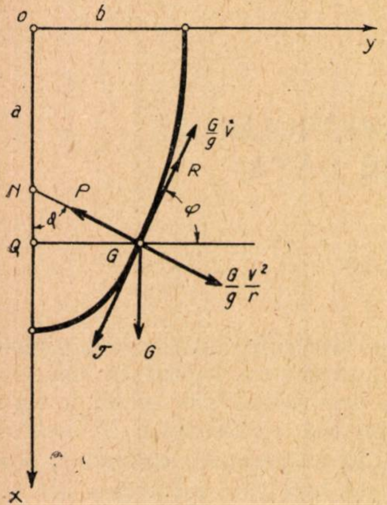


Fig. 1

Fie S suprafața portantă, ρ densitatea aerului, r raza de curbură a traiectoriei, Cx și Cz coeficienții aerodinamici ai avionului. Ecuațiile intrinseci de mișcare sînt (fig. 1)

$$\frac{G}{g}\dot{V} = \mathcal{T} - \frac{\rho}{2} S V^2 Cx - G \sin \varphi, \qquad (1)$$

$$\frac{G}{g}\frac{V^2}{r} = \frac{\rho}{2} S V^2 Cz - G \cos \varphi. \qquad (2)$$

Ecuația (2) se poate pune sub forma

$$Cz = \frac{2G}{\rho S}\left(\frac{1}{gr} + \frac{\cos \varphi}{V^2}\right). \qquad (3)$$

Luînd pentru tracțiune o variație parabolică cu viteza, se deduce

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 - K_2 V^2, \qquad (4)$$

iar

$$Cx = \varepsilon Cz, \qquad (5)$$

ε fiind finețea avionului. Se poate lua pentru Cx expresia (5), întrucît diferența între tangenta din origină la polară — finețea optimă — și dreapta care unește origina cu $Cz_{\max}$ este mică (3—4°). Aceasta permite să se ia o valoare medie $\varepsilon = \varepsilon_{\text{med}}$ pe acest interval.

Înlocuind în ecuația (1) $\dot{V} = \frac{dV^2}{2\, r d\varphi}$ și ținînd seamă de relația (4) se obține

$$\frac{dV^2}{d\varphi} + 2\left(\varepsilon + \frac{rgK_2}{G}\right)V^2 = 2\, gr\left[\frac{\mathcal{T}_0}{G} - (\varepsilon \cos \varphi + \sin \varphi)\right]. \qquad (6)$$

Ecuația (6) este generală și se integrează explicitînd pentru fiecare conică funcția $r = r\ (\varphi)$.

1. STUDIUL RESURSEI CÎND AVIONUL DESCRIE O FAMILIE DE ELIPSE

Pornind de la ecuațiile parametrice ale elipsei se deduce relația

$$\operatorname{ctg} \varphi = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \gamma. \qquad (7)$$

Expresia razei de curbură rezultă

$$r = -\frac{b^2}{a}\frac{1}{(1-K^2\sin^2\varphi)^{3/2}}\,;\quad K^2 = 1-\frac{b^2}{a^2}\,. \tag{8}$$

Ecuația (6) este liniară și neomogenă. Integrala ei este de forma

$$V^2 = e^{-\int f_1(\varphi)\,d\varphi}\left[C+\int f_2(\varphi)\,e^{\int f_1(\varphi)\,d\varphi}\,d\varphi,\right], \tag{9}$$

unde

$$\int f_1(\varphi)\,d\varphi = 2\left[\varepsilon\varphi+\frac{gK_2b^2}{aG}\left(\frac{1}{K'^2}E(\varphi,K)-\frac{K^2}{K'^2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}}\right)\right]. \tag{10}$$

Integrala din paranteză (9) nu se poate calcula prin combinații de funcții elementare în număr finit. Pentru a scrie totuși explicit $V^2 = f(\varphi, C)$ se observă că

$$\frac{rgK_2}{G} \ll \varepsilon\quad;\quad \varepsilon \cong 0{,}1.$$

Aceasta permite să se neglijeze în ecuația (6) termenul $\frac{rgK_2}{G}$ în raport cu ε.

Ecuația (6) devine, înlocuind și pe r prin expresia (8),

$$\frac{dV^2}{d\varphi}+2\,\varepsilon V^2 = 2\,g\,\frac{b^2}{a}\frac{1}{(1-K^2\sin^2\varphi)^{3/2}}\left(-\frac{\mathcal{T}_0}{G}+\varepsilon\cos\varphi+\sin\varphi\right). \tag{11}$$

Fie

$$f(\varphi) = \frac{1}{(1-K^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \sim 1 + A\sin\varphi\, e^{B\varphi}.$$

Curbele ce se obțin conțin ca parametru pe $\frac{b}{a}$ (K). Reprezentînd grafic curbele

$$f(\varphi) = \frac{1}{(1-K^2\sin^2\varphi)^{3/2}}\,, \tag{12}$$

pentru diferite valori $\frac{b}{a}$ (fig. 2) și punînd condiția ca funcția

$$f(\varphi) \sim 1 + A\sin\varphi\, e^{B\varphi} \tag{12'}$$

să treacă prin două din punctele curbelor (12), convenabil alese, se obțin constantele A, B, astfel ca diferența între cele două funcții să fie neglijabilă.

Cu acestea ecuația diferențială a mișcării devine

$$\frac{dV^2}{d\varphi} + 2\varepsilon V^2 = 2g\frac{b^2}{a}(1 + A \sin \varphi\, e^{B\varphi}) \left(-\frac{\mathcal{T}_0}{G} + \varepsilon \cos \varphi + \sin \varphi\right). \quad (13)$$

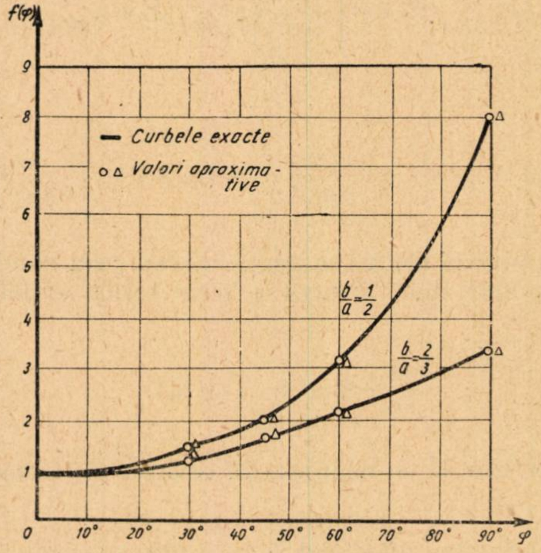


Fig. 2

Înlocuind în relația (9) această expresie și efectuînd integrările, se găsește

$$V^2 = Ce^{-2\varepsilon\varphi} + 2g\frac{b^2}{a}\left\{-\frac{\mathcal{T}_0}{G}\left[\frac{1}{2\varepsilon} + A\,\frac{(B+2\varepsilon)\sin\varphi - \cos\varphi}{1+(B+2\varepsilon)^2}\,e^{B\varphi}\right] + \right.$$

$$+ \frac{3\varepsilon\sin\varphi - (1-2\varepsilon^2)\cos\varphi}{1+4\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon A}{4}\cdot\frac{\varepsilon\sin 2\varphi - \cos 2\varphi}{1+\varepsilon^2} +$$

$$\left. + \frac{A}{2}\left[\frac{1}{B+2\varepsilon} - \frac{(B+2\varepsilon)\cos 2\varphi + 2\sin 2\varphi}{4+(B+2\varepsilon)^2}\right]e^{B\varphi}\right\}, \quad (14)$$

unde C este constanta de integrare, care se determină prin condițiile la limită. Se observă că soluția (14) nu este valabilă pentru tot arcul de elipsă $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, deoarece pentru $80° < \varphi < 90°$, relația $Cx = \varepsilon Cz$, valabilă la incidențe medii sau mari, nu se mai aplică.

Admițînd pentru acest interval $\cos\varphi \cong 0$, $\sin\varphi \cong 1$, ecuația (1), a mișcării după tangentă, va fi

$$\frac{dV^2}{G - \mathcal{T}_0 + \left(K_2 + \frac{\rho}{2}\, s\,Cx\right)V^2} = \frac{2g}{G}\,\frac{b^2}{a}\left(1 + A\sin\varphi\, e^{B\varphi}\right)d\varphi, \tag{15}$$

de unde

$$V^2 = \frac{C'(\mathcal{T}_0 - G) + \exp\left[\frac{2g}{G}\,\frac{b^2}{a}\left(K_2 + \frac{\rho}{2}\,SCx\right)\left(\varphi + A\,\frac{B\sin\varphi - \cos\varphi}{1 + B^2}\,e^{B\varphi}\right)\right]}{C'\left(K_2 + \frac{\rho}{2}\,S\,Cx\right)}. \tag{16}$$

Pentru un avion avînd $G = 600$ kg, $S = 10$ m², $Cx = 0{,}035$, luînd $\rho = 0{,}1134\ \mathrm{Kg}\,\frac{\mathrm{s}^2}{m^4}$, rezultă viteza limită de picaj $V_{pic} = 139$ m/s.

Constanta de integrare C' este determinată din condiția $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $V = V_{pic}$ cu ajutorul ecuației (16).

Rezultă astfel $C' = 1{,}27.10^{-3}\left(\frac{b}{a} = \frac{2}{3}\right)$ și $C' = 1{,}43.10^{-3}\left(\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\right)$.

Pornind de la V^2 dat de (16) pentru $\varphi = 80°$ se determină apoi valoarea constantei C din ecuația (14) care este valabilă pentru evoluțiile avionului corespunzătoare intervalului

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 80°.$$

Astfel rezultă la elipsa cu $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$, $C = 19\,000$, iar la elipsa cu $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, $C = 15\,450$.

Folosind ecuațiile (15), (3), (8) și (1), iar pentru factorul de sarcină

$$n = \frac{P}{G} = \frac{V^2}{gr} + \cos\varphi,$$

se determină complet mișcarea pe fiecare din cele două elipse considerate.

De asemenea, se pot calcula și accelerațiile

$$a_c = \frac{V^2}{r};\quad a_t = \dot{V} = \frac{g}{G}\left[\mathcal{T}_0 - \left(K_2 + \frac{\rho}{2}\,sCx\right)V^2 - G\sin\varphi\right].$$

S-au trasat astfel diagramele (fig. 3) $V = f_1(\varphi)$, $Cz = f_2(\varphi)$, $n = f_3(\varphi)$.

De asemenea, trasînd curba $\frac{r}{V} = f(\varphi)$ se poate găsi, prin integrare grafică, timpul cît durează evoluția (sau mai precis timpul cît pilotul este supus accelerațiilor $n > 5$ pînă unde rezistă în mod normal),

$$t = \int_0^{\varphi} \frac{r}{V}\, d\varphi.$$

Avînd mișcarea determinată, forțele se deduc folosind relațiile corespunzătoare.

2. STUDIUL EVOLUȚIEI AVIONULUI PE O HIPERBOLĂ ALE CĂREI AXE COINCID CU ORIZONTALA ȘI VERTICALA LOCULUI

În cazul elipsei, pentru $\varphi = \frac{\pi}{2}$ se obțin discontinuități pentru accelerații, respectiv factorul de sarcină; este de aceea avantajos uneori să se asimileze traiectoria cu o hiperbolă care permite să se realizeze o trecere de la o mișcare rectilinie la aceea curbilinie mai apropiată de cazul real. Ca și hiperbola, parabola realizează lent această trecere. De aceea se vor studia mai departe traiectorile de acest gen.

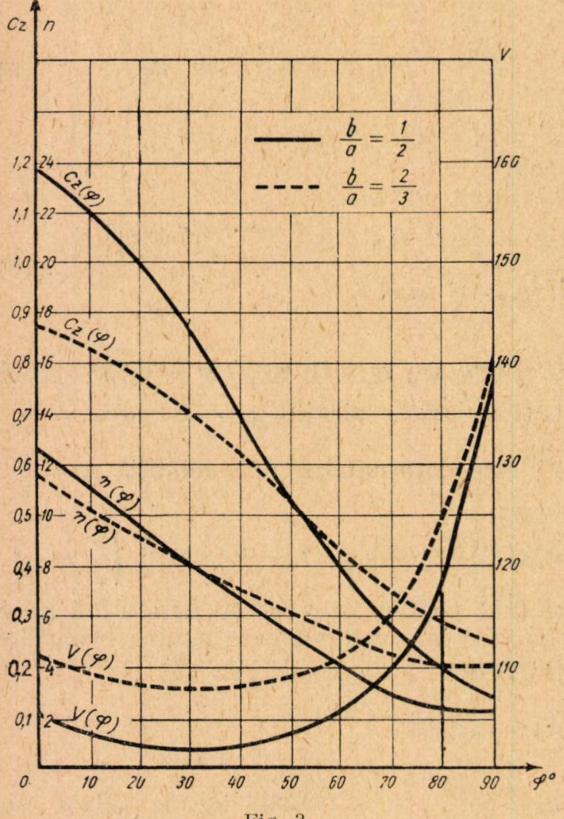


Fig. 3

Luînd diferite valori pentru parametrul hiperbolei, $p = \frac{b^2}{a}$, obținem diferite arce de hiperbolă.

Dacă picajul este înclinat cu un unghi δ, corespunzător asimptotelor, $\delta = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$, avionul va parcurge, respectînd anumite legi de pilotaj ce se deduc din studiul mișcării, arcul de hiperbolă respectiv. Pentru determinarea mișcării se procedează la fel ca și în cazul elipsei.

Fie o schimbare de variabilă determinată de ecuațiile parametrice ale hiperbolei

$$x = \frac{a}{\cos\alpha}, \quad y = b \operatorname{tg} \alpha. \tag{17}$$

Legătura între parametrul α şi unghiul de poziţie al traiectoriei φ este

$$\sin \alpha = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi. \tag{18}$$

În final se obţine raza de curbură dată tot de expresia (8), în care însă $K^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$ pentru intervalul $0 \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$ iar $p = \frac{b^2}{a}$,

$$r = p\,(1 + A' \sin \varphi\, e^{B'\varphi}). \tag{19}$$

Se observă uşor că dacă se schimbă în expresia (14) A şi B prin A' şi B', deduşi în mod analog, se obţine mişcarea avionului pe o hiperbolă, formulele stabilite în cazul elipsei fiind în întregime valabile.

3. MIŞCAREA AVIONULUI PE O HIPERBOLĂ CU AXELE ORIENTATE ORICUM, DAR CUPRINSE ÎN PLANUL VERTICAL (FIG. 4)

Expresia razei de curbură în acest caz este

$$r = \frac{p}{[1 - K^2 \sin^2 (\varphi + \mu)]^{3/2}}. \tag{20}$$

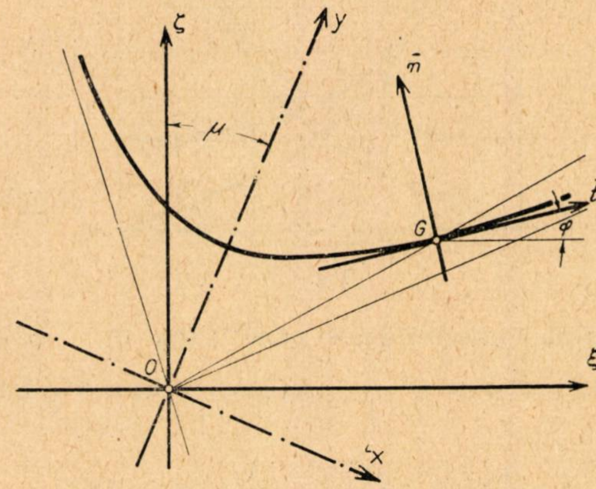


Fig. 4

Considerăm $\mu = -\frac{\pi}{4}$ şi $\frac{a}{b} = 1$, adică o hiperbolă echilateră cu una din asimptote verticală. Avionul va amorsa această traiectorie pornind de la picajul vertical. În aceste condiţii raza de curbură devine

$$r = \frac{p}{(\sin 2\varphi)^{3/2}}. \tag{21}$$

Pentru a integra ecuaţia diferenţială a mişcării se observă că se poate pune

$$\frac{1}{(\sin 2\varphi)^{3/2}} \sim \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi - 1. \tag{22}$$

Integrala ecuaţiei diferenţiale (6) va fi

$$V^2 = e^{-2\varepsilon\varphi}\left[K + 2gb\int e^{2\varepsilon\varphi}\left(\frac{\mathfrak{T}_0}{G} - \varepsilon\cos\varphi - \sin\varphi\right)(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi - 1)\,d\varphi\right]. \tag{23}$$

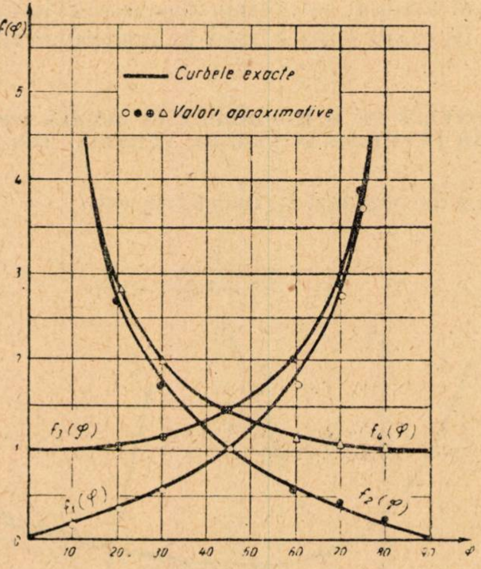


Fig. 5

Pentru calculul integralelor se pune *) (fig. 5)

$$\operatorname{tg}\varphi \sim a + b'\varphi + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \varphi} = f_1(\varphi) \qquad \text{pentru } 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$a = \frac{1}{2}\left(1 + \pi\frac{B_2}{2!}\right) - \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{2}}} = -0{,}637,$$

$$b' = \frac{1}{2} - \frac{B_2}{2!} = 0{,}416, \tag{24}$$

$$B_2 = \frac{1}{6} \text{ numărul lui Bernoulli.}$$

---

*) V. N. Constantinescu, Studii şi cercetări de mecanică aplicată, V, *3—4*, 425 (1954).

De asemenea,

$$\operatorname{ctg} \varphi \sim a + b'\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \frac{1}{\varphi} = f_2(\varphi), \tag{25}$$

$$\frac{1}{\cos \varphi} \sim A + B\varphi + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \varphi} = f_3(\varphi),$$

unde

$$A = 1 - \frac{2}{\pi} = 0{,}363\,; \qquad B = -\,0{,}231, \tag{26}$$

$$\frac{1}{\sin \varphi} \sim A' + B'\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \frac{1}{\varphi} = f_4(\varphi), \tag{27}$$

$$A' = A\,; \qquad B' = -\,0{,}273.$$

Soluția ecuației diferențiale este astfel

$$V^2 = Ke^{-2\varepsilon\varphi} + 2\,gp\Bigg\{ -\frac{\mathfrak{T}_0}{2\,G\varepsilon} + \frac{3\,\varepsilon \sin\varphi - (1 - 2\,\varepsilon^2)\cos\varphi}{1 + 4\,\varepsilon^2} +$$

$$+ \frac{\mathfrak{T}_0}{G}\cdot\left(2\,a + \frac{\pi}{2}\,b'\right)\frac{1}{2\,\varepsilon} + \left(\frac{\mathfrak{T}_0}{G} - \varepsilon\right)e^{-2\varepsilon\varphi}\,Ei\,(2\,\varepsilon\varphi) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[A' + B'\left(\frac{\pi}{2} - \varphi + \frac{1}{2\varepsilon}\right)\right] - \left(1 - \frac{\mathfrak{T}_0}{G}\right)e^{-2\varepsilon\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}\left[Ei\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)2\,\varepsilon\right] -$$

$$-\left[A + B\left(\varphi - \frac{1}{2\,\varepsilon}\right)\frac{1}{2\,\varepsilon}\right]\Bigg\}. \tag{28}$$

Constanta de integrare se determină pentru condițiile inițiale $\varphi = \varphi_0$, $V = V_{pic}$.

În acest fel mişcarea este complet definită pe hiperbolă, într-un caz mai general.

4. MIŞCAREA AVIONULUI PE O PARABOLĂ (FIG. 6)

Raza de curbură în funcție de unghiul de poziție este

$$r = \frac{p}{\cos^3 \varphi} \tag{29}$$

Ecuația diferențială de mişcare în cazul parabolei rezultă astfel :

$$\frac{dV^2}{d\varphi} + 2\,\varepsilon V^2 = 2\,gp\,(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{3/2}\left(\frac{\mathfrak{T}_0}{G} - \varepsilon\cos\varphi - \sin\varphi\right). \tag{30}$$

Pentru a integra mai uşor ecuaţia (30) se poate pune cu o foarte bună aproximaţie (fig. 7)

$$\frac{1}{\cos^3 \varphi} = (1 + \mathrm{tg}^2\, \varphi)^{3/2} \sim 1 + A\, \mathrm{tg}\, \varphi\, e^{B\varphi} = f_5(\varphi), \tag{31}$$

astfel că pentru domeniul uzual în cazul parabolei $\varphi < 70°$, rigurozitatea se păstrează.

Soluţia ecuaţiei (30) devine

$$V^2 = e^{-2\varepsilon\varphi}\left[K + 2\,gp \int e^{2\varepsilon\varphi}\,(1 + + A\, \mathrm{tg}\varphi e^{B\varphi})\left(\frac{\mathcal{T}_0}{G} - \varepsilon \cos\varphi - \sin\varphi\right) d\varphi\right] \tag{32}$$

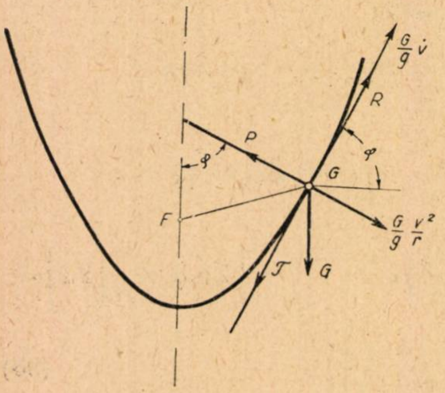


Fig. 6

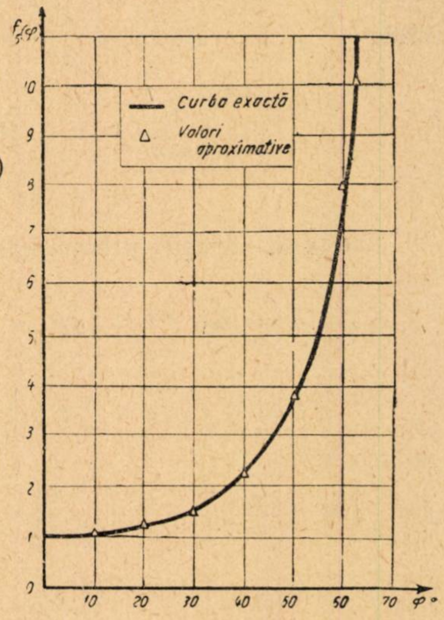


Fig. 7

sau, ţinînd seama şi de formula (26),

$$V^2 = Ke^{-2\varepsilon\varphi} + 2\,gp\left\{\frac{\mathcal{T}_0}{2G\varepsilon} - \frac{3\varepsilon \sin\varphi - (1 - 2\varepsilon^2)\cos\varphi}{1 + 4\varepsilon^2} + \right.$$

$$+ A\,\frac{(\varepsilon + B)\cos\varphi + [1 + (2\varepsilon + B)\,\varepsilon]\sin\varphi}{1 + (2\varepsilon + B)^2} - A\left[a' + b'\left(\varphi - \frac{1}{2\varepsilon + B}\right)\right]\frac{e^{B\varphi}}{2\varepsilon + B} +$$

$$+ A\,\frac{\mathcal{T}_0}{G}\left[a + b\left(\varphi - \frac{1}{2\varepsilon + B}\right)\right]\frac{e^{B\varphi}}{2\varepsilon + B} - A\left(\frac{\mathcal{T}_0}{G} - 1\right)e^{-2\varepsilon\varphi}\,.\, e^{(2\varepsilon + B)\frac{\pi}{2}}\,\cdot$$

$$\left.\cdot\, Ei\,(2\varepsilon + B)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$a' = 0{,}363 \quad , \quad b' = -\,0{,}231. \tag{33}$$

Constanta K se determină uşor cu ajutorul condiţiilor iniţiale ale mişcării.

★

Această metodă analitică are avantajul de a fi mai expeditivă decît aceea a arcelor succesive, folosită în mod curent. Cu ajutorul său se pot găsi traiectoriile compatibile cu rezistenţa mecanică a avionului şi stabili legea de pilotaj, astfel ca avionul să nu atingă în timpul evoluţiilor acceleraţii periculoase.

Avînd mişcarea determinată, se poate uşor deduce valoarea lui φ pentru care solicitările sînt maxime. Dacă se anulează derivata acceleraţiei centrifuge

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{V^2}{r}\right) = 0, \tag{34}$$

se obţine

$$\frac{dV^2}{d\varphi} = \frac{V^2}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi}. \tag{35}$$

Folosind ecuaţia (13) pentru $\frac{dV^2}{d\varphi}$, expresiile găsite pentru V^2 în diferite cazuri, precum şi relaţia $r = r(\varphi)$ admisă, se poate deduce apoi direct valoarea lui φ pentru care factorul de sarcină este maxim.

Cu ajutorul celor patru cazuri studiate, variind convenabil parametrul conicei respective, se poate acoperi cu un suficient grad de precizie totalitatea curbelor reale ce se pot obţine cu avionul evoluînd într-un plan vertical. Pentru anumite conice, rezultatele sînt în bună concordanţă cu cele obţinute prin încercări în zbor.

Primită la redacţie la 14 iunie 1958.

О ДВИЖЕНИИ САМОЛЕТА ПО ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе рассматриваются разнообразные движения самолета в вертикальной плоскости. Вместо того, чтобы принять произвольный закон пилотажа с последующим выводом прочих характеристик полета, задаются различные траектории, что очень часто приводит к значительному упрощению расчетов. Таким образом, вытекающий отсюда закон управления может быть рассмотрен с точки зрения пилотажа и возможностей самолета.

Большинство практически возможных в вертикальной плоскости движений допускает траектории, которые можно приблизить к соответствующе выбранным коническим кривым. Проводится анализ полета

самолета по всем трем родам конических кривых и устанавливаются явные формулы для динамических элементов движения. Таким образом, определяются коэффициенты нагрузки и выводится синтез всех возможных движений, которые могут быть затем рассмотрены при помощи полученных результатов.

SUR LE MOUVEMENT DE L'AVION SUR UNE TRAJECTOIRE DONNÉE

RÉSUMÉ

On examine les mouvements variés d'un avion, dans le plan vertical. Au lieu d'admettre une loi arbitraire de pilotage et en tirer des conclusions sur les autres caractéristiques du vol, on admet une trajectoire connue, ce qui simplifie souvent considérablement les calculs, sans pour cela s'écarter de la réalité. En effet, la loi de commande qui en résulte peut-être examinée ensuite, du point de vue du pilotage et des possibilités de l'avion.

La plus grande partie des évolutions pratiques possibles, dans le plan vertical, admettent des trajectoires pouvant être assimilées à des coniques convenablement choisies. Partant de cette constatation, on analyse le vol de l'avion sur les trois genres de coniques et l'on établit des formules explicites pour les éléments dynamiques du mouvement. De cette façon, on détermine les facteurs de charge et l'on donne un aperçu synthétique de l'ensemble des évolutions, qui peuvent être ensuite discutées à l'aide des résultats obtenus.

CONSIDERAŢII ASUPRA UNOR SOLUŢII DIN CAZUL STRATULUI LIMITĂ COMPRESIBIL NEPERMANENT

DE

ŞT. N. SĂVULESCU

1. Lucrarea de faţă reprezintă o extindere a metodei profilelor tip de viteză şi temperatură [1], pentru studiul stratului limită nepermanent bidimensional şi axial simetric. Ideea de bază este aceea că o variabilă de tipul

$$\eta = \frac{\int_0^y \rho u\, dy}{\int_0^\delta \rho u\, dy} \tag{1}$$

face invariantă forma profilului de viteză $\frac{u}{u_e} = u_a(\eta)$ chiar şi în cazul regimului de scurgere nepermanentă, unde existenţa fizică a unui strat limită reclamă profilele de viteză $u_a\left(\frac{y}{\delta}\right)$ de formă variată, dar care capătă în primă aproximaţie forma tip $u_a \sim \eta^n$ cu ajutorul transformării (1). În mod analog se petrec lucrurile cu funcţia adimensională a energiei $E_a = \frac{E - E_w}{E_e - E_w}$, care în prima aproximaţie devine $E_a \sim \eta_1^{n_1}$, unde η_1 este dat de formula (1) în care s-a introdus, în locul grosimii stratului limită dinamic δ, grosimea stratului limită termic δ_1. Se remarcă imediat că u_a şi E_a vor depinde în primul rînd de variabila transversală $\eta_{(1)}$ şi numai în mod secundar de variabilele x, t, care arată dezvoltarea stratului limită în spaţiu (x) şi timp (t).

Prin punerea în evidenţă a termenilor care depind în primul rînd de η, ecuaţiile de mişcare se pot pune sub forma

$$\sum_{i=1}^{p} A_i(x, t)\, Y_i(\eta, u_a, E_a) = 0, \qquad p \text{ finit}. \tag{2}$$

Urmărind metoda expusă în [2] vom căuta cazuri de mişcare exterioară care să ducă la profile de viteze şi temperaturi identice în orice secţiune a stratului limită, punînd formal

$$A_i(x, t) = K_i, \quad K_i = \text{const.} \tag{3}$$

Procedeul se justifică prin faptul că $A_i\,(x, t)$ cuprinde mărimi fizice ale condiţiilor exterioare (u_e, E_e, E_w) constante într-o secţiune a stratului limită, astfel că ecuaţia $\Sigma\, K_i\, Y_i\,(\eta, u_a, E_a) = 0$ va determina pe $u_a\,(\eta)$ şi $E_a\,(\eta)$. Ecuaţiile (3) nu sînt independente, întrucît pentru $\eta_{(1)} = 1, u_a = 1$, $E_a = 1$, avem $\Sigma\, A_i\, Y_i\,(1) = 0$. În cele ce urmează se vor examina clasele de mişcări exterioare pentru care avem soluţii de tip Crocco

$$E_a(x, t, \eta) \equiv u_a\,(x, t, \eta), \tag{4}$$

$$u_a = u_a\,(\eta) \equiv E_a = E_a\,(\eta). \tag{5}$$

2. Ecuaţiile stratului limită compresibil nepermanent în jurul unui corp de revoluţie sînt

$$\rho\,\mathfrak{R}\,\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial r}(\tau\,\mathfrak{R}) - \mathfrak{R}\,\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{6}$$

$$\rho\,\mathfrak{R}\,\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial r}[(\tau\, u + q_r)\,\mathfrak{R}] + \mathfrak{R}\,\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{R}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\,(\rho u\,\mathfrak{R}) + \frac{\partial}{\partial r}\,(\rho v\,\mathfrak{R}) = 0, \tag{8}$$

unde s-a notat

x — variabila în lungul scurgerii pe meridiana corpului,
r — variabila normală pe peretele corpului,
$R(x)$ — raza secţiunii corpului, $\mathfrak{R} = R \pm r\cos\alpha$, $\sin\alpha = \dfrac{dR}{dx}$,
t — variabila timp,
u, v — componentele vitezei după x respectiv r,
$E = C_p\, T + \dfrac{u^2}{2}$, unde T este temperatura, $i = C_p\, T$, entalpia,
ρ — densitatea, p — presiunea, legate prin relaţia $\dfrac{p}{\rho} = K\, T$,
$\tau = M\,\dfrac{\partial u}{\partial r}$ — tensiunea de frecare, M — coeficientul de viscozitate,
$q_r = \Lambda\,\dfrac{\partial T}{\partial r}$ — transferul de căldură, Λ — coeficientul de transfer.

Indicele e înseamnă exterior, w înseamnă la perete, iar a valori adimensionale. Condiţiile la limită sînt

$$r = 0, \quad u = 0, \quad v = v_w, \quad T = T_w(x, t) \text{ sau } q_r = q_{rw}(x, t), \tag{9}$$

$$r = \delta_{(1)}, \quad u = u_e, \quad T = T_e, \quad \rho_e \frac{du_e}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho_e \frac{dE_e}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t},$$

$$\frac{p}{\rho^{\varkappa}} = \text{const.}, \; q \simeq 0, \quad \tau \simeq 0.$$

Condiţiile iniţiale se precizează prin natura mişcării exterioare. Vom utiliza noile variabile independente, date de relaţiile

$$\xi = x, \quad \theta = t, \quad \eta_{(1)} = \frac{\int_0^r \rho u \mathfrak{R} \, dr}{\int_0^{\delta_{(1)}} \rho u \mathfrak{R} \, dr} = \frac{\psi(x, r, t)}{\psi_{\delta_{(1)}}(x, t)}. \tag{10}$$

Pentru a obţine expresiile $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t}$ în noile variabile, ne vom servi de observaţia că putem scrie

$$\begin{gathered} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{\rho u \mathfrak{R}}{\psi_\delta} = \frac{d\eta}{dr}. \end{gathered} \tag{11}$$

Din ultima egalitate (11) deducem prin integrare relaţia

$$\mathfrak{R}^2 - R^2 = \pm 2 \psi_\delta \cos\alpha \int_0^\eta \frac{d\eta}{\rho u} \tag{12}$$

şi din primele egalităţi vom scoate pe $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ şi $\frac{\partial \eta}{\partial x}$.

Din ecuaţia continuităţii (8) scoatem pe v sub forma

$$\rho v \mathfrak{R} = -\int_0^r \left[\mathfrak{R}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \mathfrak{R})\right] dr + \rho_w v_w R, \tag{13}$$

în care v_w reprezintă transferul de masă. Înlocuind această expresie în cele două ecuaţii (6) şi (7) obţinem două ecuaţii cuprinzînd necunoscutele u şi E. Introducînd funcţiile adimensionale $u_a = \frac{u}{u_e}$ şi $E_a = \frac{E - E_w}{E_e - E_w}$ după calcule obişnuite, obţinem sistemul transformat

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\tau \mathfrak{R}) = A\frac{\partial u_a}{\partial \theta} + B\frac{\partial u_a}{\partial \xi} + C\frac{\partial u_a}{\partial \eta} + D, \tag{14}$$

unde s-a notat

$$A = \psi_\delta \left[\frac{1}{u_a} - \frac{\dfrac{\partial u_a}{\partial \eta}}{\dfrac{\partial u_a}{\partial \theta}} \int_0^\eta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{u_a} \right) d\eta \right],$$

$$B = \psi_\delta \, u_e,$$

$$C = - u_e \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\psi_\delta}{u_e} \right) \int_0^\eta \frac{d\eta}{u_a} - u_e \frac{\partial \psi_\delta}{\partial \xi} \eta + \rho_w v_w u_e R,$$

$$D = \frac{\psi_\delta}{u_e} \left[\left(1 - \frac{1}{\rho_a u_a} \right) \frac{\partial u_e}{\partial \theta} + \left(u_a - \frac{1}{\rho_a u_a} \right) u_e \frac{\partial u_e}{\partial \xi} \right],$$

$$\tau = \frac{\rho_e M_e u_e^2}{2 \psi_\delta} \mathfrak{R} M_a \rho_a \frac{\partial}{\partial \eta} (u_a^2),$$

şi ecuaţia energiei

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} [(\tau u + q_r) \mathfrak{R}] = A_1 \frac{\partial E_a}{\partial \theta} + B_1 \frac{\partial E_a}{\partial \xi} + C_1 \frac{\partial E_a}{\partial \eta_1} + D_1 , \tag{15}$$

unde s-a notat

$$A_1 = \frac{\Delta}{u_e} \psi_{\delta_1} \left[\frac{1}{u_a} - \frac{\dfrac{\partial E_a}{\partial \eta_1}}{\dfrac{\partial E_a}{\partial \theta}} \int_0^{\eta_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{u_a} \right) d\eta_1 \right],$$

$$B_1 = \psi_{\delta_1} \Delta,$$

$$C_1 = - \Delta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\psi_{\delta_1}}{u_e} \right) \int_0^{\eta_1} \frac{d\eta_1}{u_a} - \Delta \frac{\partial \psi_{\delta_1}}{\partial \xi} \eta_1 + \rho_w v_w \Delta R,$$

$$D_1 = \frac{\psi_{\delta_1}}{u_e} \left[\frac{\partial \Delta}{\partial \theta} \frac{E_a - 1}{u_a} + u_e \frac{\partial \Delta}{\partial \xi} (E_a - 1) + \frac{\partial E_e}{\partial \theta} \frac{1}{u_a} \left(1 - \frac{1}{\rho_a} \right) + \right.$$

$$\left. + u_e \frac{\partial E_e}{\partial \xi} \left(1 - \frac{1}{\rho_a u_a} \right) \right],$$

$$\Delta = E_e - E_w, \quad P_r = \frac{C_p M}{\Lambda}, \quad \sigma = P_r - 1,$$

$$\tau u + q_r = \frac{M_e \rho_e u_e}{P_r \psi_{\delta_1}} M_a \rho_a u_a \mathfrak{R} \left[\Delta \frac{\partial E_a}{\partial \eta_1} + \sigma \frac{u_e^2}{2} \frac{\partial}{\partial \eta_1} (u_a^2) \right].$$

Mai observăm că din relația $p = K\rho T$ scoatem

$$\frac{1}{\rho_a} = E_a + \frac{u_e^2}{2\,i_e}\,(E_a - u_a^2) + \frac{E_w}{i_e}\,(1 - E_a). \tag{16}$$

Condițiile la limită pentru aceste ecuații devin

$$\begin{aligned} &\eta_{(1)} = 0,\ u_a = E_a = 0,\ E_w = E_w(\xi, \theta) \quad \text{sau} \quad q_r = q_{rw}(\xi, \theta) \\ &\eta_{(1)} = 1,\ u_a = 1,\ E_a = 1,\ \tau \approx 0,\ q_r \approx 0. \end{aligned} \tag{17}$$

3. Din ecuațiile (14) și (15) obținem prin integrare caracteristicile globale ale stratului limită sub forma

$$\begin{aligned} \tau_w\, R = {} & \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\psi_\delta\left(\int_0^1 \frac{d\eta}{u_a} - 1\right)\right] - \frac{\psi_\delta}{u_e}\frac{\partial u_e}{\partial\theta}\int_0^1 \frac{1}{u_a}\left(1 - \frac{1}{\rho_a}\right)d\eta \;+ \\ & + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\psi_\delta\, u_e\left(1 - \int_0^1 u_a\, d\eta\right)\right] - \psi_\delta\,\frac{\partial u_e}{\partial\xi}\int_0^1\left(1 - \frac{1}{\rho_a\, u_a}\right)d\eta - \rho_w\, v_w\, R, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} q_{rw}\, R = {} & \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\Delta}{u_e}\,\psi_{\delta_1}\int_0^1 \frac{1 - E_a}{u_a}\,d\eta_1\right] - \frac{\psi_{\delta_1}}{u_e}\frac{\partial E_e}{\partial\theta}\int_0^1 \frac{1}{u_a}\left(1 - \frac{1}{\rho_a}\right)d\eta_1 \;+ \\ & + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\Delta\,\psi_{\delta_1}\left(1 - \int_0^1 E_a\, d\eta_1\right)\right] - \psi_{\delta_1}\frac{\partial E_e}{\partial\xi}\int_0^1\left(1 - \frac{1}{\rho_a\, u_a}\right)d\eta_1 - \rho_w\, v_w\,\Delta\, R\int_0^1 dE_a\,. \end{aligned} \tag{19}$$

De asemenea, din relația (12) obținem

$$\delta_{(1)}\left(1 \pm \cos\alpha\,\frac{\delta_{(1)}}{2R}\right) = \frac{\psi_{\delta_1}}{\rho_e\, u_e\, R}\int_0^1 \frac{d\eta_{(1)}}{\rho_a\, u_a}\,. \tag{20}$$

Cum u_a și E_a vor avea expresiile de primă aproximație,

$$u_a \simeq \eta^n, \quad E_a \simeq \eta_1^{n_1}, \tag{21}$$

rămîne să determinăm pe ψ_δ, ψ_{δ_1}. Ecuațiile lor diferențiale, rezultate din integrarea dublă a ecuațiilor (14) și (15) astfel ca să fie îndeplinită condiția $\eta_{(1)} = 1$, $u_a = E_a = 1$, sînt următoarele :

$$F_1\frac{\partial}{\partial\theta}(\psi_\delta^2) + F_2\, u_e\frac{\partial}{\partial\xi}(\psi_\delta^2) - 2\,F_3\,\psi_\delta^2 - 2\,F_4\,\psi_\delta + F_5 = 0, \tag{22}$$

unde

$$F_1=\int_0^1\left[\int_1^\eta\left\{\int_0^\eta \frac{d\eta}{u_a}\right\}du_a\right]d\eta\,,\qquad F_2=\int_0^1\left[\int_1^\eta \eta\,du_a\right]d\eta\,,$$

$$F_3=\int_0^1\left[\int_1^\eta\left\{\frac{1}{u_a}\frac{\partial u_a}{\partial\theta}-\frac{\partial u_a}{\partial\eta}\int_0^\eta\frac{\partial}{\partial 0}\left(\frac{1}{u_a}\right)d\eta+u_e\frac{\partial u_a}{\partial\xi}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{u_e}\frac{\partial u_e}{\partial\theta}\left[\left(1-\frac{1}{\rho_a\,u_a}\right)+\frac{\partial u_a}{d\eta}\int_0^\eta\frac{\partial\eta}{u_a}\right]+\frac{\partial u_e}{\partial\xi}\left(u_a-\frac{1}{\rho_a\,u_a}\right)\right\}d\eta\right]d\eta\,,$$

$$F_4=\int_0^1\left[\int_1^\eta \rho_w\,v_w\,u_e\,R\,du_a\right]d\eta\mp M_e\,u_e\cos\alpha\int_0^1\left[\int_0^\eta\frac{d\eta}{\rho_a\,u_a}\right]M_a\,\rho_a\,d\,(u_a^2)\,,$$

$$F_5=M_e\,\rho_e\,u_e^2\,R^2\int_0^1 M_a\,\rho_a\,d\,(u_a^2)\,.$$

De asemenea, găsim

$$G_1\frac{\partial}{\partial\theta}(\psi_{\delta_1}^2)+G_2\,u_e\frac{\partial}{\partial\xi}(\psi_{\delta_1}^2)-2\,G_3\,\psi_{\delta_1}^2-2\,G_4\,\psi_{\delta_1}+G_5=0\,,\tag{23}$$

unde G_i, $i=1,\ldots,5$, sînt analoagele lui F_i.

Să observăm că funcțiile F_i și G_i se evaluează destul de ușor cu ajutorul primelor aproximații (21), în care n și n_1 se vor presupune constanți. Condițiile la limită și condițiile inițiale vor fi date de caracterul nepermanent al scurgerii exterioare. Vom pune

$$\begin{aligned}\xi&=x=0\,, & \psi_{\delta_{(1)}}&=0,\\ \theta&=t=0\,, & \psi_{\delta_{(1)}}&=\varphi_{(1)}(x)\end{aligned}\tag{24}$$

și în acest mod ecuațiile cu derivate parțiale neliniare (22) și (23) determină complet funcțiile $\psi_{\delta_{(1)}}$. Să remarcăm că, utilizînd relațiile (21), F_1 și F_2 devin constante și sistemul caracteristic se scrie sub forma

$$\frac{d\theta}{F_1}=\frac{d\xi}{F_2\,u_e}=\frac{d\,(\psi_\delta^2)}{2\,F_3\,\psi_\delta^2+2\,F_4\,\psi_\delta-F_5}\,.\tag{25}$$

Din primele două rapoarte se obține

$$\frac{d\theta}{d\xi}-\frac{F_1}{F_2}\frac{1}{u_e}=0,\qquad \theta=\theta\,(\xi,\,\alpha).\tag{26}$$

Ultimele două rapoarte dau ecuația diferențială

$$\frac{d}{d\xi}(\psi_\delta^2)-2\frac{F_3}{F_2}\frac{1}{u_e}\psi_\delta^2-2\,\frac{F_4}{F_2}\frac{1}{u_e}\psi_\delta+\frac{F_5}{F_2}\frac{1}{u_e}=0\,,\tag{27}$$

unde $\theta=\theta\,(\xi,\,\alpha)$, așa că obținem pe $\psi_\delta=\psi_\delta\,(\xi,\,\alpha,\,\beta)$, unde β este o constantă de integrare. Soluția definitivă va fi

$$\psi_\delta=\psi_\delta\,[\xi,\,\alpha\,(\xi,\,\theta)\,,\ \beta\,(\alpha)],\tag{28}$$

$\alpha\,(\xi,\theta)$ fiind scos din (26), iar $\beta\,[\alpha\,(\xi,\theta)]$ fiind o funcţie arbitrară de α. În mod analog se procedează pentru ψ_{δ_1}. Să mai remarcăm că soluţia ecuaţiei (27) se poate obţine plecînd de la soluţia ecuaţiei liniare în care $F_4 = 0$, aşa cum s-a procedat în lucrarea [3].

4. Ne interesează acum anumite cazuri particulare, pentru care vom determina clasele de mişcări exterioare corespunzătoare.

A. Să cercetăm condiţiile pentru care avem

$$u_a \equiv E_a. \tag{29}$$

Ecuaţiile (14) şi (15) devin identice pentru $P_r = 1$, dacă avem

$$D\Delta - u_e D_1 \equiv 0. \tag{30}$$

În dezvoltarea acestei expresii vom utiliza relaţiile (16) şi (29), astfel că vom obţine condiţia (30) sub forma

$$H_0\,(\xi,\theta) + H_1\,(\xi,\theta)\,u_a + H_2\,(\xi,\theta)\,\frac{1}{u_a} \equiv 0,$$

care este satisfăcută pentru $H_0 = H_1 = H_2 = 0$. Obţinem astfel sistemul de ecuaţii diferenţiale independente

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\Delta}{u_e}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\Delta}{u_e}\right)^2 + \frac{\partial E_w}{\partial\xi} = 0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial E_w}{\partial\theta} + 2\,E_w\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\Delta}{u_e}\right) = 0, \tag{32}$$

la care se adaugă ecuaţia energiei pentru mişcarea adiabatică exterioară,

$$\frac{\partial E_e}{\partial\xi} + \frac{\partial u_e}{\partial\theta} = 0. \tag{33}$$

Sistemul de mai sus determină complet mişcarea exterioară $E_e\,(\xi,\theta)$, $u_e\,(\xi,\theta)$ şi temperatura la perete $E_w\,(\xi,\theta)$ sub condiţiile la limită şi iniţiale de compatibilitate fizică $E_w > 0$, $E_e > 0$, $i_e > 0$. Să mai observăm că, în limita valabilităţii ecuaţiilor (6), (7) ca ecuaţii mediate ale scurgerii turbulente, condiţiile de mai sus dau soluţii valabile şi în cazul stratului limită turbulent compresibil. În cazul fluidului incompresibil, ecuaţiile (31), (32) şi (33) au alte forme, întrucît relaţia (16) nu mai poate fi folosită.

a) Vom căuta unele soluţii particulare ale sistemului de mai sus, punînd

$$\frac{\Delta}{u_e} = f\,(u_e), \quad E_w = g\,(u_e). \tag{34}$$

Din condiţiile de compatibilitate obţinute rezultă că

$$f(u_e) = C u_e + C_0\,(C-1)\,,\ g(u_e) = C_0\left[C\,u_e + C_0\left(C - \frac{1}{2}\right)\right],\ C,\,C_0 = \text{const.} \tag{35}$$

este singura soluţie acceptabilă pentru expresiile (34). Pentru viteza exterioară se găseşte uşor soluţia

$$u_e = \Phi\,[\,\xi - [2\,C\,u_e + C_0\,(2C - 1)]\,\theta\,], \tag{36}$$

unde Φ este o funcţie arbitrară. Se obţine de asemenea $i_e = \left(C - \frac{1}{2}\right)(C_0 + u_e)^2$ de unde rezultă $C > \frac{1}{2}$.

Separat, sistemul (31), (32) mai este verificat de $E_w = g_0 = \text{const.}$, $\frac{\Delta}{u_e} = f_0 = \text{const.}$, de unde se scoate

$$u_e = \Phi_0\,(\xi - f_0\,\theta) < f_0 + \sqrt{f_0^2 + 2\,g_0}\,, \tag{37}$$

cu Φ_0 de asemenea o funcţie arbitrară. Să mai notăm că pentru cazul nepermanent singura soluţie este $E_e = \text{const.}$, $E_w = \text{const.}$, $u_e = \text{const.}$

b) Un alt grup interesant de soluţii putem obţine scriind

$$\frac{\Delta}{u_e} = X\,(\xi)\;T\,(\theta)\;,\quad E_w = X_1\,(\xi)\;T_1\,(\theta), \qquad \begin{array}{l} T\,T_1 \neq 0, \\ X X_1 \neq 0. \end{array}$$

Introducînd în sistemul (31), (32) şi procedînd obişnuit pentru acest gen de soluţii, găsim

$$\frac{\Delta}{u_e} = (k\,\xi + k_1)\,\frac{-\,\lambda\theta + \lambda_1}{-\,k\,\lambda\theta^2 + 2k\,\lambda_1\theta + k_2}\,,\quad E_w = \frac{\lambda\,k\,\dfrac{\xi^2}{2} + k_1\,\lambda\xi + \lambda_2}{-\,k\,\lambda\theta^2 + 2\,k\,\lambda_1\theta + k_2}\,,$$

$$\lambda \geqslant 0,\; k \geqslant 0$$

$$\lambda_1\,,\, \lambda_2\,,\, k_1,\, k_2 = \text{const.}$$

Cum $E_w > 0$ pentru orice $\theta > 0$, urmează că $\lambda = 0$, aşa că avem

$$\frac{\Delta}{u_e} = \frac{k\xi + k_1}{2k\theta + k_3}\,,\; E_w = \frac{\lambda_3}{2k\theta + k_3}\,,\; u_e = (k\,\xi + k_1)^{-1}\,\mathfrak{F}\,\left[\frac{(2k\theta + k_3)^{\frac{1}{2}}}{k\xi + k_1}\right]. \tag{38}$$

Să remarcăm că soluţiile generale se obţin considerînd că parametrul k ia diferite valori, astfel că

$$\frac{\Delta}{u_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i\,\xi + k_{1i}}{2\,k_i\theta + k_{3i}}\,,\qquad E_w = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{3i}}{2k_i\,\theta + k_{3i}}\,,$$

iar u_e se deduce din ecuaţia diferenţială (33) în care se introduc valorile de mai sus.

Aplicație. Să considerăm, pentru un studiu mai detaliat, soluțiile particulare

$$u_e = \frac{U_0}{\sqrt{1 + a\theta}}, \quad E_w = \frac{E_0}{1 + a\theta}, \quad a > 0, \tag{39}$$

cu condiția $2\,E_0 > U_0^2$. Cînd $a = 0$ avem soluția banală $u_e = U_0 = \text{const.}$, $E_w = E_0 = \text{const.}$ Cazul de mai sus e interesant pentru mișcarea supersonică frînată în jurul unei plăci sau a unui con fără incidență, cînd expresiile (39) dau condiția de transfer maxim la perete, corespunzător numărului Prandtl unitar.

Obținem imediat

$$\frac{\Delta}{u_e} = \frac{0{,}5\,a\xi + C}{1 + a\theta}, \quad i_e = \frac{u_e^2}{U_0^2}\left[E_0 - \frac{U_0^2}{2} + (0{,}5\,a\xi + C)\,u_e\right].$$

Să ne ocupăm de cazul stratului limită laminar pe o placă fără succiune și să punem $\mu_e\,\rho_e = M_0$. Utilizînd prima aproximație $u_a \simeq \eta^n$ și relațiile de mai sus, ecuația diferențială a lui ψ_δ^2 devine

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\theta}(\psi_\delta^2) + \frac{2\,(1-n)}{2+n}\,u_e\,\frac{\partial}{\partial\xi}(\psi_\delta^2) + \frac{1}{u_e}\,\frac{\partial u_e}{\partial\theta}\left[\frac{2(1-n)}{2-n}\,\frac{E_w}{i_e} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{2(1-n)}{2+n}\,\frac{u_e^2}{2i_e} - 2\right]\psi_\delta^2 - \frac{2(1-n)}{n}\,M_0\,u_e^2 = 0, \end{aligned} \tag{40}$$

cu condiția la limită $\psi_\delta\,(\xi = 0) = 0$ și $\psi_\delta\,(\theta = 0) = \psi_{\delta_0}$.

Pentru $\dfrac{a\,\xi}{U_0} < 1$, soluția acestei ecuații se poate scrie aproximativ

$$\psi_\delta^2 = \frac{2+n}{n}\,M_0\,u_e\,\xi\left[1 - K\,\frac{a\,\xi}{U_0}\,\frac{u_e}{U_0}\right], \tag{41}$$

unde s-a notat

$$K = n\,\frac{2+n}{8\,(1-n)}\,\frac{\dfrac{2\,E_0}{U_0^2} - \dfrac{3\,(2-n)}{2+n}}{\dfrac{2\,E_0}{U_0^2} + (1-4\,n)\,\dfrac{2-n}{2+n}}.$$

Pentru $K \ll 1$, condiție posibilă dacă $n < \dfrac{1}{2}$, putem opri doar primul termen,

$$\psi_\delta^2 \simeq \frac{2+n}{n}\,M_0\,u_e\,\xi. \tag{42}$$

Utilizînd această relaţie în expresia (18) a coeficientului de frecare, se găseşte uşor

$$C_f \sqrt{R_{e_\xi}} = \frac{\sqrt{n\,(n+2)}}{1+n}\left[1 - \frac{1+n}{2\,(1-n)}\,\frac{a\,\xi}{U_0}\,\frac{u_e}{U_0}\,\varphi\right], \tag{43}$$

unde

$$C_f = \frac{2\,\tau_w}{\rho_e\,u_e^2},\quad R_{e_\xi} = \frac{\rho_e\,u_e\,\xi}{\mu_e},\quad \varphi = 2\,\frac{E_w}{i_e} + \frac{2\,(1-n)}{1+n}\,\frac{u_e^2}{2\,i_e} - 1.$$

Cum expresia $\varphi > 0$ în condiţiile enunţate, urmează că în lungul plăcii coeficientul de frecare va scădea. Condiţia $\frac{a\,\xi}{U_0} < 1$ corespunde unei mişcări frînate lent şi este interesant de observat că influenţa compresibilităţii apare în expresia coeficientului de frecare, contrar cazului permanent, unde această influenţă nu se manifestă pentru $P_r = 1$ şi $\mu_e\,\rho_e = \text{const}$. Din ecuaţia (19) obţinem de asemenea coeficientul de transfer :

$$\frac{q_w \sqrt{R_{e_\xi}}}{\rho_e\,u_e\,\Delta} = \frac{\sqrt{n\,(n+2)}}{2\,(1+n)}\left\{1 - \frac{1+n}{n}\,\frac{a\,\xi}{U_0}\,\frac{u_e}{U_0}\left[\frac{5-11\,n}{2\,(1-n)} - \frac{2\,n}{1-n}\,\frac{E_w}{\Delta} - \frac{n}{1+n}\,\frac{u_e^2}{\Delta} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{n}{1+n}\,\frac{u_e^2}{2\,i_e} + \frac{n}{1-n}\,\frac{E_w}{i_e}\right)\left(3 + 2\,\frac{E_w}{\Delta} - \frac{u_e^2}{\Delta}\right)\right]\right\}. \tag{43'}$$

B. Ne interesează acum soluţii pentru care $E_a = E_a\,(\eta) \equiv u_a = u_a\,(\eta)$, adică $\frac{\partial\,u_a}{\partial\,\theta} = \frac{\partial\,u_a}{\partial\,\xi} = 0$. Ecuaţiile devin

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\,(\tau\,\mathfrak{R}) = C\,\frac{\partial\,u_a}{\partial\,\eta} + D. \tag{44}$$

Pentru a analiza această situaţie să considerăm cazul stratului limită laminar bidimensional, pentru care $M_a\,\rho_a = 1$. Ţinînd seama de expresiile lui C şi D, ecuaţia (44) se poate pune sub forma

$$\sum A_i\,(\,\xi,\ \theta)\ Y_i\,(u_a = 0. \tag{45}$$

Cum $A_i\,(\,\xi,\ \theta)$ cuprinde mărimi fizice exterioare stratului limită $(u_e,\ E_e,\ E_w)$, şi $Y_i\,(u_a)$ are formele $u_a,\ \frac{1}{u_a}\int \frac{\partial n}{u_a},\ \frac{\partial u_a}{\partial\eta}$, urmează ca ecuaţia (45) e satisfăcută formal dacă punem $A_i\,(\,\xi,\ \theta) = \text{const}$. Obţinem astfel condiţiile independente

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\,(\psi_\delta^2) = K_1\,u_e,\quad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\psi_\delta}{u_e}\right)^2 = K_2,\quad \rho_w\,v_w\,\psi_\delta = K_3\,u_e,$$
$$\psi_\delta^2\left[\frac{\partial u_e}{\partial\theta}\left(1 - \frac{\Delta}{i_e}\right) - \frac{\Delta}{i_e}\,u_e\,\frac{\partial u_e}{\partial\xi}\right] = K_4 u_e^3,\quad \psi_\delta^2\,\frac{E_w}{i_e}\left(\frac{\partial u_e}{\partial\theta} + u_e\,\frac{\partial u_e}{\partial\xi}\right) = K_5\,u_e^3, \tag{46}$$

unde K_i are dimensiunile constantei $M_0 = \rho_e u_e$. Relațiile de mai sus împreună cu (31), (32), (33) determină clasele de mișcări exterioare pentru care $u_a(\eta) = E_a(\eta)$. În soluționarea acestui sistem de ecuații vom observa că E_e, E_w, i_e trebuie să fie pozitivi.

Observăm imediat că din primele trei ecuații (46) rezultă soluțiile

$$u_e = h^{-\frac{1}{2}}(\theta, \xi)\left[Z(\theta) + \frac{K_1}{2}\int h^{-\frac{1}{2}}(\theta, \xi)\, d\xi\right], \tag{47}$$
$$\psi_\delta = u_e h^{\frac{1}{2}}(\theta, \xi), \quad \rho_w v_w = K_3 h^{-\frac{1}{2}}(\theta, \xi),$$

unde s-a notat prin

$$h(\theta, \xi) = K_2\, \theta + X(\xi), \tag{48}$$

$X(\xi)$ și $Z(\theta)$ fiind două funcții arbitrare. Ele se determină complet din ultimele două relații (46) care împreună cu ecuațiile (31), (32), (33) formează condițiile de compatibilitate pentru Δ și E_w.

Aplicație. Să considerăm ca aplicație simplă cazul incompresibil fără succiune pentru care $\frac{\Delta}{i_e} = 0$, $\frac{E_w}{i_e} = 1$, astfel că ultimele două condiții (46) devin

$$\psi_\delta^2 \frac{\partial u_e}{\partial \theta} = K_4 u_e^3, \quad \psi_\delta^2 \left(\frac{\partial u_e}{\partial \theta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial \xi}\right) = K_5 u_e^3.$$

Se deduce ușor că o soluție acceptabilă este dată de $Z = 0$, $X = \text{const.}$, astfel că rămîne expresia [4]

$$u_e = \frac{b_0 \xi}{1 + b\theta}, \quad b_1 b_0 > 0, \tag{49}$$

cu condiția $\xi = 0$, $u_e = 0$. Aplicînd relațiile (22) și (18) pentru determinarea lui ψ_δ și respectiv τ_w, se găsește în cele din urmă formula frecării,

$$C_f \sqrt{R_{e_\xi}} = C_* \frac{1 - \frac{b}{b_0} \frac{1+n}{2(3-n)}}{\sqrt{1 + \frac{b}{b_0} \frac{n(2+n)}{4(1-n)(4-n)}}}, \tag{50}$$

unde s-a pus

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho_e u_e^2}, \quad R_{e_\xi} = \frac{\rho_e u_e \xi}{\mu_e}, \quad C_* = 2\frac{3-n}{1-n^2}\sqrt{\frac{n(4-n^2)}{2(4-n)}}.$$

Se observă că pentru $\frac{b}{b_0} = \frac{2(3-n)}{1+n}$ avem $\tau_w = 0$, deci desprindere. În ambele cazuri tratate se poate lua pentru n valoarea $n \simeq \frac{1}{3}$ din cazul statului limită laminar incompresibil permanent pe o placă plană, ca în lucrarea [1].

Primită la redacție la 6 iunie 1958.

К ВОПРОСУ НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЙ В СЛУЧАЕ СЖИМАЕМОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе устанавливаются условия, которым должны удовлетворять внешние параметры сжимаемого неустановившегося пограничного слоя (скорость внешнего потока, температура внешнего потока и температура у стенки) для возможности применения решения Крокко ($U_a = E_a$) в этом случае. Заданы также условия, при которых $U_a(\eta) = E_a(\eta)$, где $\eta = \frac{\psi(t, x, y)}{\psi_\delta(t, x)}$.

При помощи типовых профилей скоростей и температур рассматриваются некоторые частные случаи, для которых получены формулы трения и теплопередачи в случае единичного числа Прандтля. Отмечается интересное отличие от установившегося потока.

CONSIDÉRATIONS SUR CERTAINES SOLUTIONS POUR LE CAS DE LA COUCHE LIMITE COMPRESSIBLE NON PERMANENTE

RÉSUMÉ

L'auteur établit les conditions que doivent remplir les paramètres extérieurs de la couche limite compressible non permanente (vitesse du courant extérieur, température du courant extérieur et température à la paroi) afin de pouvoir étendre la solution de Crocco ($U_a = E_a$) à ce cas. On donne également les conditions pour lesquelles $U_a(\eta) = E_a(\eta)$, où $\eta = \frac{\psi(t, x, y)}{\psi_\delta(t, x)}$.

A l'aide de la méthode des profils type de vitesses et de températures, on examine certains cas particuliers pour lesquels on détermine les formules du frottement et du transfert de chaleur, dans le cas du nombre de Prandtl unitaire. On constate des différences intéressantes par rapport à l'écoulement permanent.

BIBLIOGRAFIE

1. Şt. N. SĂVULESCU, *Asupra determinării caracteristicilor stratului limită prin utilizarea unor profile tip de viteze şi temperaturi*. Studii şi ceretări de mecanică aplicată, **VIII**, *2*, 341 (1957).
2. — *O metodă unitară pentru studiul caracteristicilor stratului limită*. Dizertaţie. IMA, 1957.
3. — *Aplicarea metodei profilelor tip de viteze şi temperaturi la calculul stratului limită de pe un corp de revoluţie*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *4*, 975 (1957).
4. H. SCHUH, *Ueber die „ähnlichen" Lösungen der instationären laminaren Grenzschichtgleichung inkompressibler Strömung. „50 Jahre Grenzschichtforschung"*. Herausgegeben von H. Görtler und W. Tollmien. Friedr. Vieweg et Sohn, Braunschweig, 1955.

CERCETĂRI ASUPRA EVACUATORILOR DE APE MARI

DE

L. ESCANDE
MEMBRU AL ACADEMIEI DE ŞTIINŢE DIN PARIS

Trecerea viiturilor excepţionale, în dreptul retenţiilor create de barajele de înălţime mare, este una dintre problemele care preocupă în mod special pe ingineri.

O primă dificultate constă în covîrşitoarea importanţă a debitelor care trebuie evacuate; într-adevăr, nu există nici o legătură constantă între debitul viiturii „seculare" şi debitul modul al unui curs de apă. Debitul mijlociu al unui fluviu oarecare, de ordinul a 120 m^3/s, corespunde unei viituri seculare de 12 000 m^3/s, dar raportul de 100, pus în evidenţă de acest exemplu, este adeseori depăşit în unele cazuri particulare.

În lucrarea de faţă nu intenţionăm să trecem în revistă totalitatea dispozitivelor adoptate pentru evacuarea viiturilor; vom vorbi numai despre unele dintre acestea, pentru a semnala rezultatele speciale referitoare la funcţionarea lor, rezultate care au fost puse în evidenţă în cadrul cercetărilor întreprinse în ultimii ani, de către laboratoarele de hidraulică din Toulouse, din imboldul şi, în mare parte, sub conducerea lui C. Camichel, eminentul lor fondator.

BARAJE DEVERSOARE

Am început să studiem, pentru prima oară, fenomenele de deversare, cu prilejul construirii barajului de la Pinet (fig. 1).

Cu ajutorul pulberii de aluminiu, am pus în evidenţă şi am fotografiat forma traiectoriilor, precum şi suprafaţa liberă (fig. 2).

Pe modele de dimensiuni corespunzătoare, am studiat repartiţia presiunilor în diferitele puncte ale pragului. Curba de repartiţie a presiunilor pe care am obţinut-o arată că în porţiunile în care curgerea se produce în linii mari, în fire paralele, repartiţia este sensibil liniară şi

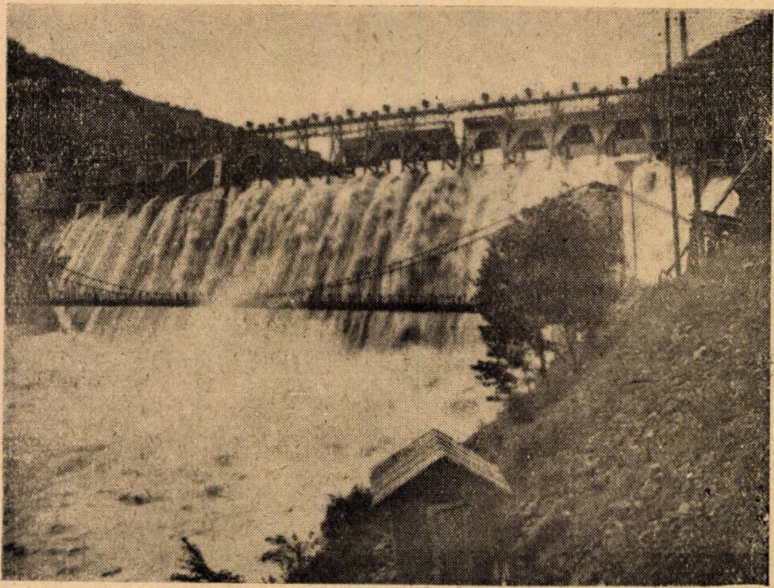


Fig. 1

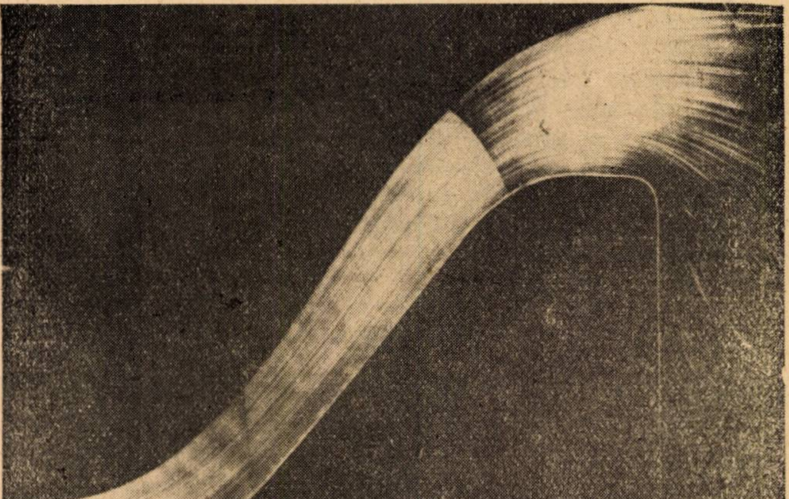


Fig. 2

că accelerațiile centrifuge provoacă variații apreciabile în regiunile cu o curbură accentuată (fig. 3).

În partea de jos a paramentului, efectul curburii se traduce printr-o sporire însemnată a presiunilor; aceasta nu poate decît să contribuie la creșterea stabilității și, din experiența construcțiilor existente, se constată că uzura cimentului datorită vitezelor și presiunilor apei, în această zonă, nu prezintă practic nici o primejdie.

Dimpotrivă, depresiunea existentă în partea superioară a paramentului aval are o influență dintre cele mai însemnate asupra coeficientului de debit, precum și asupra stabilității curgerii. În general, coeficientul de debit este cu atît mai mare, cu cît presiunea pe baraj este mai redusă. În ceea ce privește stabilitatea, dacă unele baraje sînt perfect stabile, deși corespund unor depresiuni apreciabile, la alte profile dimpotrivă, circumstanțele accidentale ce apar în timpul apelor mari, cum ar fi de exemplu trecerea arborilor sau a corpurilor plutitoare, pot provoca pătrunderi neașteptate de aer pe sub lama deversantă și, prin urmare, desprinderi și relipiri ale acesteia, susceptibile de a da naștere unor vibrații primejdioase pentru construcție.

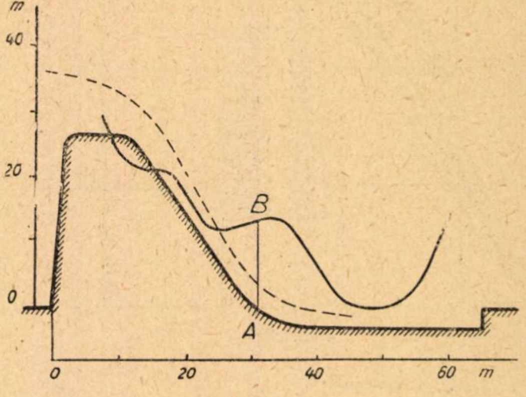


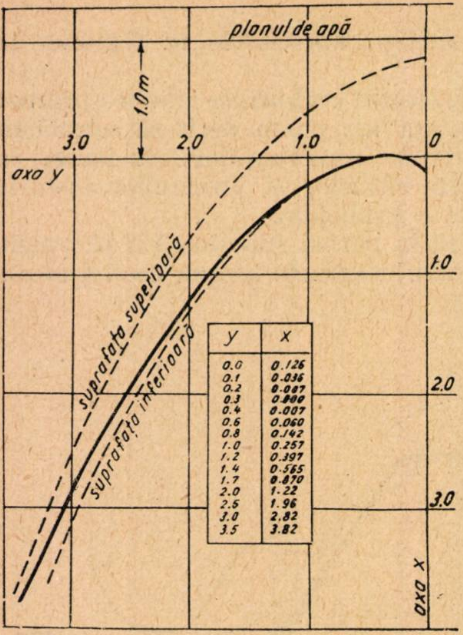
Fig. 3

O foarte bună soluție a fost găsită cu ajutorul profilului Creager, dedus din forma suprafeței libere inferioare a lamei produsă de un deversor cu muchie ascuțită și bine aerat (fig. 4); așa cum se vede din figura 5, pe acest profil Creager presiunea are pretutindeni o valoare pozitivă foarte redusă și coeficientul de debit atinge valoarea de 0,50. În sfîrșit, trebuie să semnalăm că utilizînd profile Creager pentru o sarcină superioară celei corespunzătoare determinării traseului lor, obținem praguri cu depresiune perfect stabile, al căror coeficient de debit este de ordinul 0,54.

Totodată, am analizat experimental mecanismul curgerii în interiorul lamei deversante; cunoscînd forma traiectoriilor, ne-a fost ușor să determinăm vitezele, presiunile și energia totală, cu ajutorul unor tuburi piezometrice și al unor tuburi Pitot corespunzătoare (fig. 6).

În cazul modelelor de dimensiuni mici, montate în canale vitrate, măsurătorile au fost făcute în același timp, prin metoda oronofotografică a lui Camichel și cu ajutorul microtuburilor Pitot.

Repartiția presiunilor obținute urmează o lege sensibil liniară și nu prezintă nici o particularitate specială. Dimpotrivă, energia totală rămîne constantă, exceptînd vecinătatea imediată a paramentului, în interiorul stratului limită; acest rezultat ne-a permis unele deducții care pot avea aplicații tehnice.


planul de apă
1.0m
3.0
2.0
1.0
0
axa y
suprafața superioară
suprafața inferioară
1.0
2.0
3.0
axa x

y	x
0.0	0.126
0.1	0.036
0.2	0.007
0.3	0.000
0.4	0.007
0.6	0.060
0.8	0.142
1.0	0.257
1.2	0.397
1.4	0.565
1.7	0.870
2.0	1.22
2.5	1.96
3.0	2.82
3.5	3.82

Fig. 4

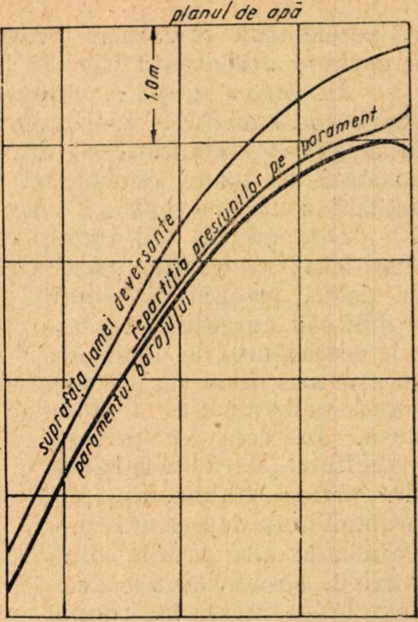

planul de apă
1.0m
suprafața lamei deversante
repartiția presiunilor pe parament
paramentul barajului

Fig. 5

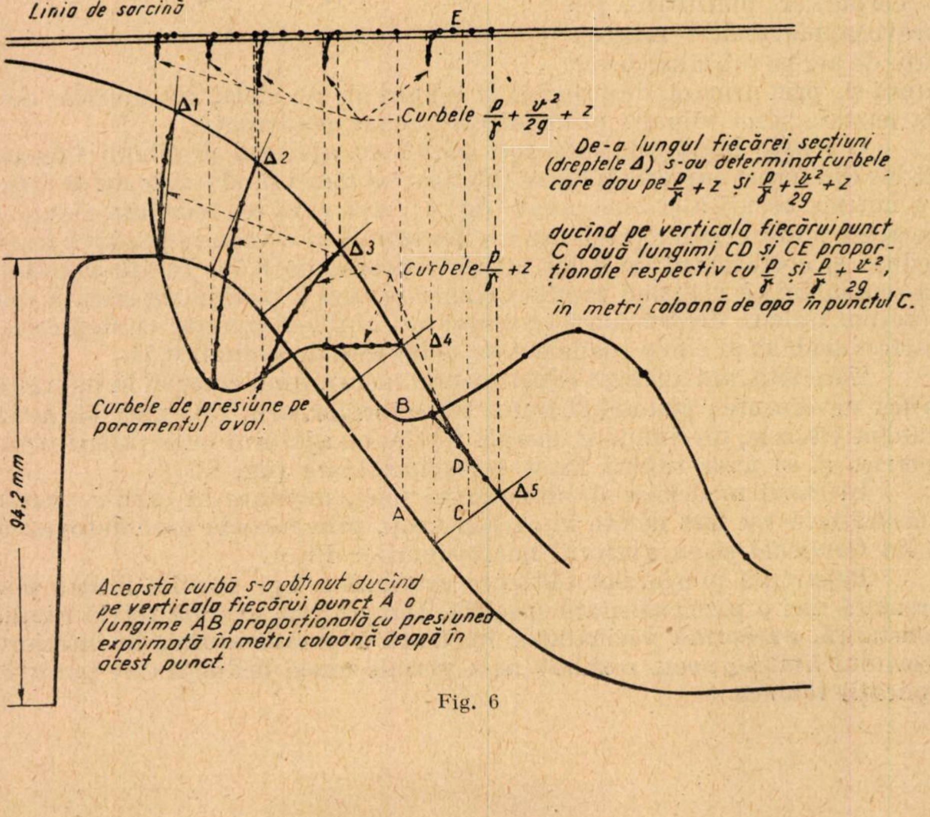

Linia de sarcină
E
Δ1
Δ2
Δ3
Δ4
Δ5
Curbele $\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}+z$
De-a lungul fiecărei secțiuni (dreptele Δ) s-au determinat curbele care dau pe $\frac{p}{\gamma}+z$ și $\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}+z$
ducînd pe verticala fiecărui punct C două lungimi CD și CE proporționale respectiv cu $\frac{p}{\gamma}$ și $\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}$, în metri coloană de apă în punctul C.
Curbele $\frac{p}{\gamma}+z$
Curbele de presiune pe paramentul aval.
B
D
A
C
94,2 mm
Această curbă s-a obținut ducînd pe verticala fiecărui punct A o lungime AB proporțională cu presiunea exprimată în metri coloană de apă în acest punct.

Fig. 6

Într-adevăr, am socotit că această absență totală de pierderi de energie trebuie să corespundă unei mișcări cu caracter irotațional; efectiv, determinarea directă a componentelor vectorului vîrtej, pornind de la proiecțiile vitezelor și de la derivatele lor parțiale, ne-a permis să constatăm că mișcarea are, într-adevăr, un potențial de viteze.

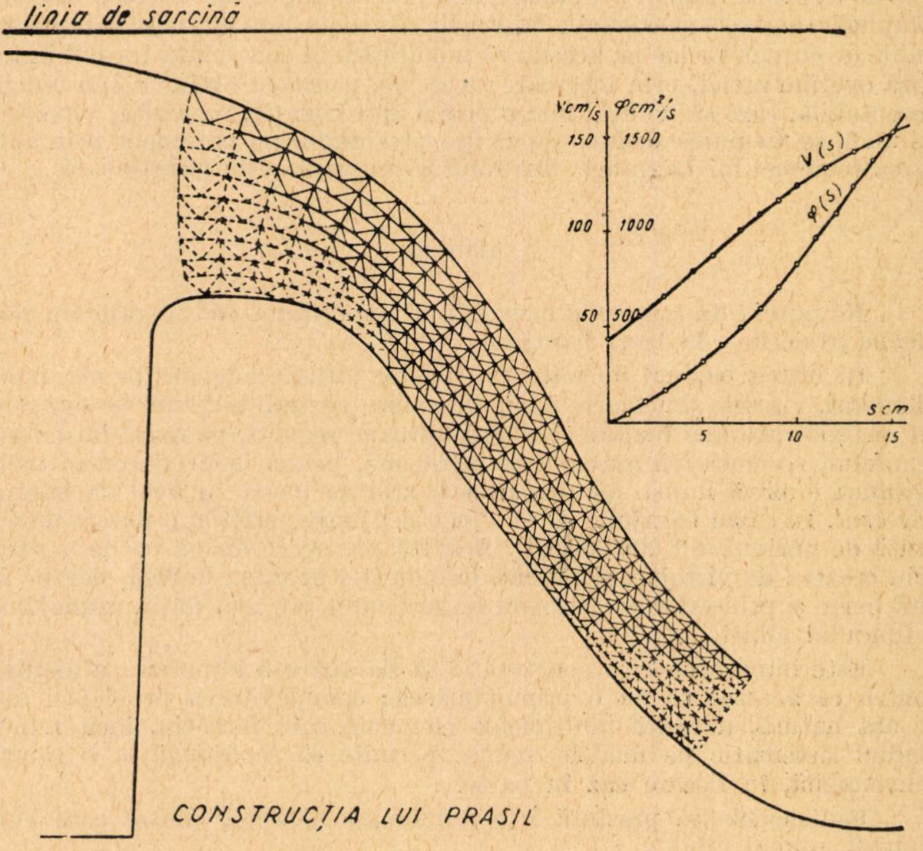


Fig. 7

În aceste condiții, am voit să verificăm dacă construcția grafică a lui Prašil, privitoare la rețelele pătratice, poate fi aplicată cu precizie în cazul de față. Se știe că rețeaua liniilor de curent și a liniilor echipotențiale ale unei mișcări plane se deduce ușor dintr-o singură traiectorie, dacă se cunoaște repartiția potențialului pe aceasta. În cazul barajelor, cunoaștem repartiția vitezelor de-a lungul traiectoriei particulare constituită de suprafața liberă, deoarece pierderea de sarcină este practic nulă și presiunea este tot timpul egală cu presiunea atmosferică. Prin integrare grafică, se trece ușor de la repartiția vitezelor la aceea a valorilor funcției potențiale.

Aplicînd această metodă la modelul Pinet (fig. 7), am constatat că traiectoriile, echipotențialele, vitezele, presiunile și debitele date de construcția lui Prašil coincid foarte bine cu valorile experimentale.

În cadrul lucrărilor de studii și proiectare, se vor putea folosi cele ce preced pentru stabilirea unui profil de baraj deversor; într-adevăr, este de ajuns să tragem prin analogie o linie de suprafață liberă probabilă, să aplicăm acesteia construcția lui Prašil, să vedem cum întîlnesc paramentul liniile de curent vecine cu acesta, să modificăm în consecință traseul inițial și să operăm astfel, prin încercări succesive, pentru a obține o construcție acceptabilă, care să ne dea, într-o primă aproximație, repartiția vitezelor, de unde se va putea deduce repartiția presiunilor pe parament prin aplicarea teoremei lui Lagrange, dat fiind că mișcarea este irotațională.

AFUIERI

Ne putem da seama cu ușurință de importanța considerabilă a problemei afuierilor, la baza barajelor.

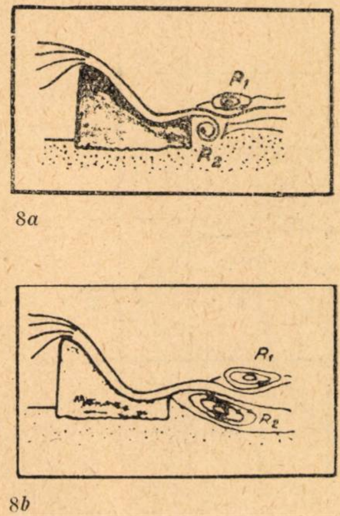
În întreg bazinul de reținere, care se întinde adeseori pe mai mulți kilometri, vitezele sînt foarte mici, din cauza creșterii secțiunii de scurgere, iar energia care mai înainte se disipa aproape regulat, pe toată întinderea remuului, se conservă aproape în întregime, pentru a-și concentra toată acțiunea erozivă numai asupra cîtorva zeci de metri în aval de barajul deversor. În cazul barajului de la Pinet se ajunge astfel la o putere deversantă de ordinul a 1 000 000 CP. Această putere se disipă pe de o parte prin crearea de vîrtejuri și mișcări de agitație în masa lichidă, dar pe de altă parte și prin atacarea, într-un fel mai mult sau mai puțin primejdios, a fundului albiei.

Este important ca o construcție să fie apărată împotriva afuierilor, pentru ca acestea să nu o primejduiască; complexitatea problemei este de așa natură, datorită multiplelor elemente care intervin, încît numai studiul sistematic pe modele reduse permite să se ajungă la o soluție convenabilă, în fiecare caz în parte.

Fenomenele se prezintă sub numeroase aspecte, dintre care vom semnala numai unul.

Atunci cînd există o reținere importantă în aval, vîna cu viteză mare, provenind din extremitatea deversorului, se afundă în masa lichidă, creînd de o parte și de alta două turbioane R_1 și R_2, ce se rotesc în sens invers unul față de celălalt; turbionul superior R_1 joacă un rol esențialmente favorabil în toate cazurile, deoarece el este complet izolat de fund, în timp ce turbionul R_2, care sapă albia, poate fi deosebit de dăunător. În unele cazuri, turbionul R_2 se stabilește într-o zonă îngustă,provocînd săpături adînci la piciorul barajului (fig. 8 *a*). Dimpotrivă, printr-o dispoziție judicioasă, și anume depărtîndu-se turbionul spre aval și dîndu-i-se prilejul să se dezvolte liber, se asigură formarea unui curent de fund, dirijat din aval către baraj și care nu încetează de a rambleia piciorul acestuia cu ajutorul materialelor aduse astfel mereu spre amonte (fig. 8 *b*).

În sfîrşit, să semnalăm un fenomen alternativ, care se produce în unele condiţii de reţinere din aval; rambleiarea zonei situate la extremitatea din aval a radierului reduce secţiunea oferită turbionului inferior ale cărui viteze se accelerează, creînd o depresiune. Cînd aceasta ajunge destul de mare, provoacă o inflexiune în jos a vînei cu mare viteză; rezultă de aici o completă spălare şi o adîncire însemnată a fundului albiei, astfel încît fenomenul poate reîncepe cu o perioadă medie destul de regulată, modificările periodice ale albiei fiind însoţite de deplasări alternative ale saltului.



8*a*

8*b*

Fig. 8

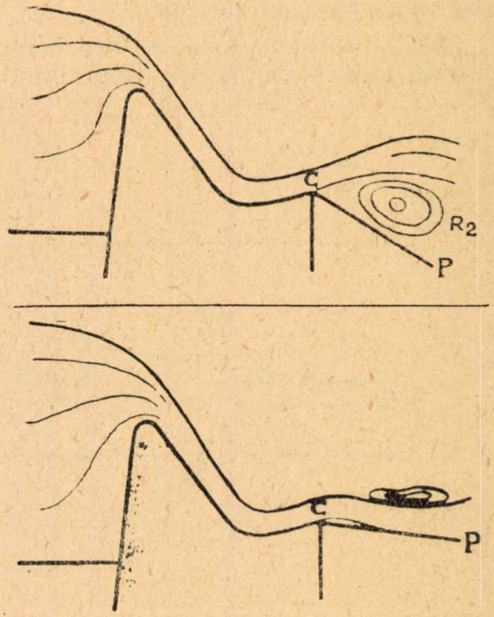


Fig. 9

O experienţă curioasă a fost făcută într-un canal vitrat, plasîndu-se la extremitatea radierului *C* o placă metalică *CP*, articulată în *C*. Cînd extremitatea *P* se află pe fundul canalului, turbionul inferior avînd destul loc pentru a se forma, nu se produce nimic deosebit. Dimpotrivă, dacă extremitatea *P* este ridicată în mod progresiv, la un moment dat, vîna se lipeşte de placa *CP* şi exercită asupra ei o aspiraţie suficientă pentru ca această placă să se menţină de la sine într-o poziţie sensibil orizontală, cînd extremitatea *P* este lăsată liberă (fig. 9).

PILE DE BARAJE DEVERSOARE

În general, barajele deversoare au deasupra lor pile, între care se deplasează stavile mobile, acestea din urmă deschizîndu-se progresiv, pe măsură ce debitul de ape mari sporeşte.

Evident, avem interesul să reducem la minimum contracțiile datorite pilelor, pentru a spori pe cît posibil lungimea utilă a pragului deversant.

În cursul unui studiu relativ la barajul deversor de la Zardezas, în Algeria, ne-am gîndit că o soluție fericită ar putea fi dată prin utilizarea profilelor aerodinamice.

Cu ajutorul metodei grafice a lui Trefftz, se construiește un profil de aripă biconvex simetric Jukovski (fig. 10) la care suprimăm extremitatea aval de o grosime teoretic nulă, limitîndu-se la zona ușor realizabilă, ținînd seama de posibilitățile de construcție. Acest profil este înfășurat pe suprafața cilindrică ce constituie pragul deversant, așa fel încît axul său de simetrie coincide cu linia de secțiune dreaptă a acestei suprafețe. Suprafața care limitează pila este generată de ansamblul liniilor echipotențiale relative la curgerea plană (fig. 11) și care pornesc din diverse puncte ale curbei desenate pe prag de profilul Jukovski (fig. 12 și 13).

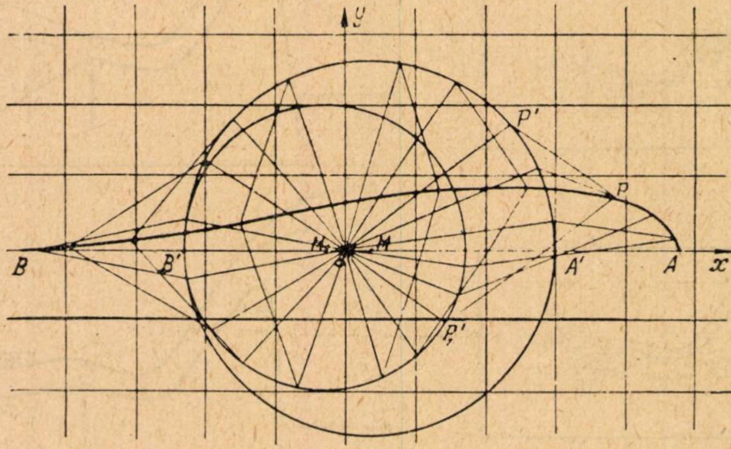


Fig. 10

De atunci, am mai avut prilejul să constatăm că aceste pile aerodinamice furnizează o soluție optimă, suprimînd practic orice contracție (fig. 14 și 15).

Să reținem, în sfîrșit, o observație interesantă din punct de vedere constructiv : fără a se modifica valoarea coeficientului de debit și nici regularitatea curgerii, se poate suprima întreaga porțiune a pilelor aerodinamice situate în aval de secțiunea maestră. Se formează atunci, în zona corespunzătoare, o dîră aerată, deoarece cele două lame deversante vecine, separate de partea amonte a pilei, reconstituie întrucîtva, prin ele înșile, limita părții suprimate (fig. 16).

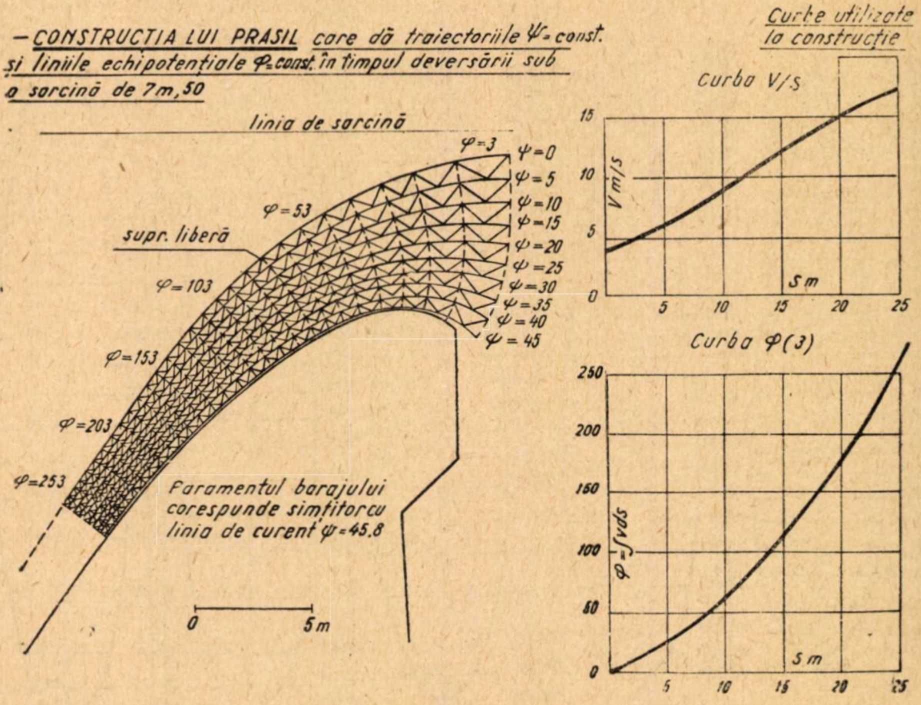

— CONSTRUCTIA LUI PRASIL care dă traiectoriile ψ = const. și liniile echipotențiale φ = const. în timpul deversării sub a sarcină de 7m,50
linia de sarcină
supr. liberă
φ=3
φ=53
φ=103
φ=153
φ=203
φ=253
ψ=0
ψ=5
ψ=10
ψ=15
ψ=20
ψ=25
ψ=30
ψ=35
ψ=40
ψ=45
Paramentul barajului corespunde simțitor cu linia de curent ψ=45.8
0
5m
Curbe utilizate la construcție
Curba V/S
V m/s
S m
0
5
10
15
20
25
Curba φ(3)
φ = ∫vds
0
50
100
150
200
250

Fig. 11

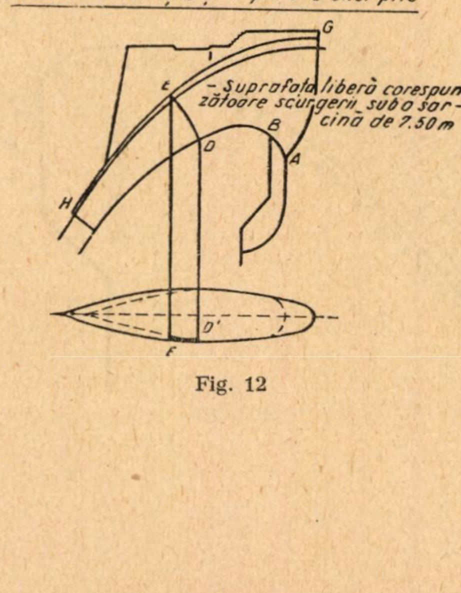

Vedere în elevație și în plan a unei pile
G
E
— Suprafața liberă corespunzătoare scurgerii sub o sarcină de 7.50 m
B
D
A
H
D'
F

Fig. 12

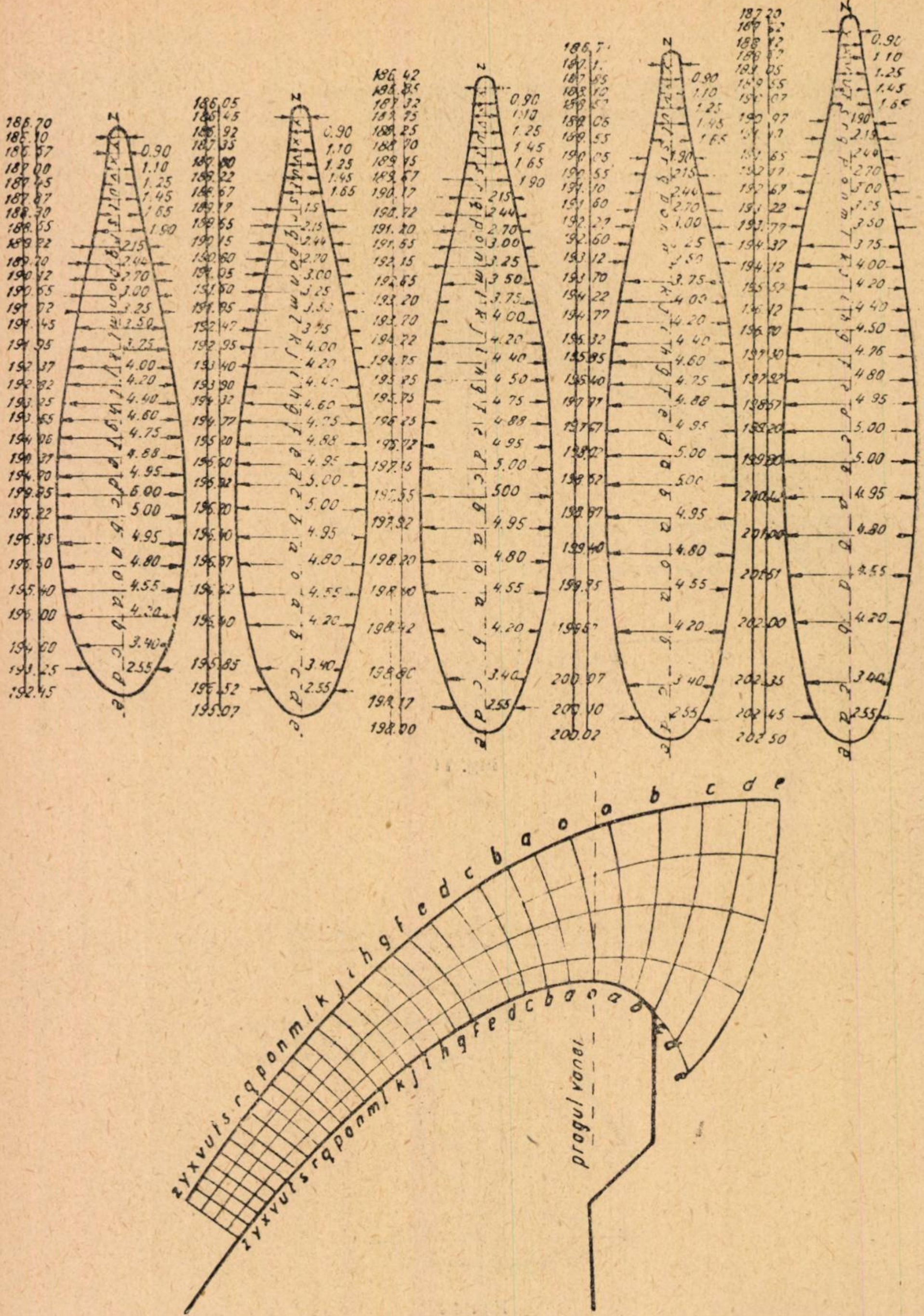

pragul vanei
a b c d e
z y x v u t s r q p o n m l k j i h g f e d c b a o
z y x v u t s r q p o n m l k j i h g f e d c b a o a b c d

Fig. 13

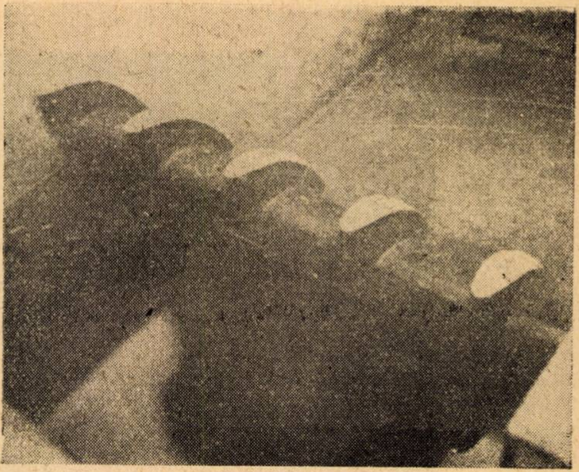


Fig. 14

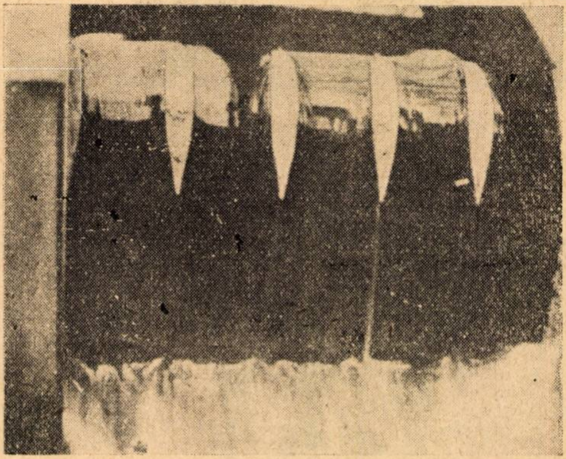


Fig. 15

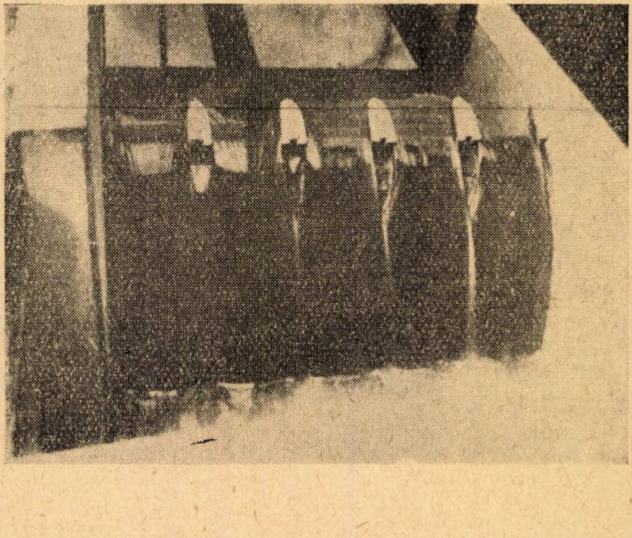


Fig. 16

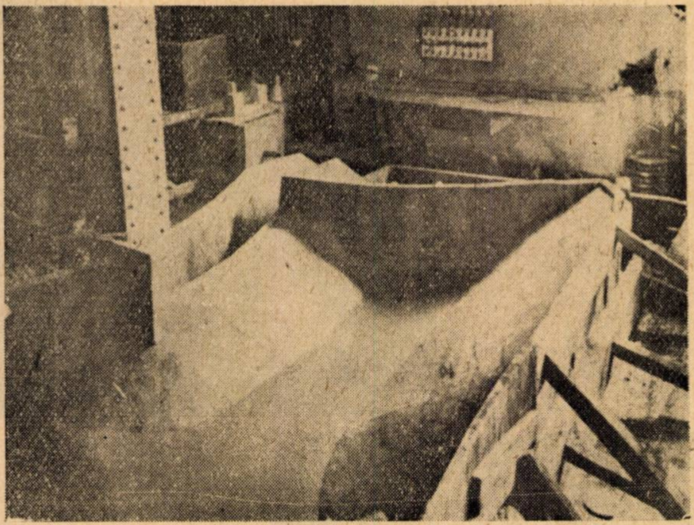


Fig. 17

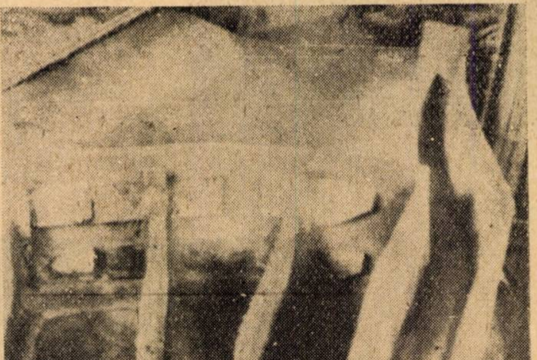


Fig. 18

EVACUATORI DE VIITURI CU CANAL DESCOPERIT

Adeseori, apele viiturilor, după deversare peste un deversor lateral instalat într-o parte a retenției, sînt culese de un canal descoperit, cu panta mare, care le duce spre rîu, în avalul barajului. Uneori, acest canal poate avea o serie de trepte, formînd tot atîtea cascade artificiale ale căror căderi disipă o parte din energia apei și îi limitează forța erozivă, în punctul în care revine la albia naturală (fig. 17 și 18).

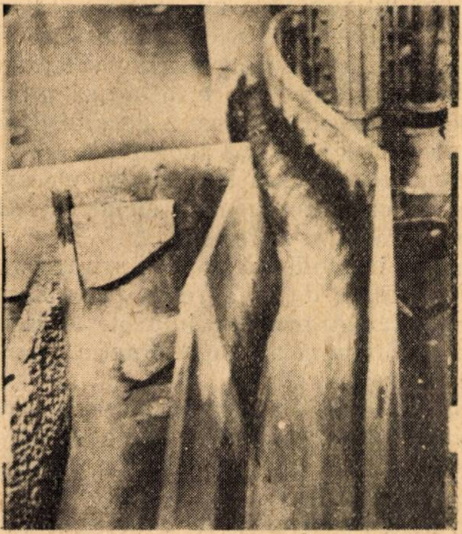


Fig. 19

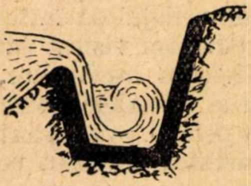


Fig. 20

Studiind evacuatorul viiturilor la barajul de la Voutezac, realizat după o astfel de concepție, am constatat formarea unui turbion elicoidal în canalul ce continuă deversorul (fig. 19 și 20). Acest fenomen arată că este imposibil să se aplice unei astfel de mișcări formulele clasice ale canalelor descoperite și că studiul lor pe model este indispensabil.

EVACUATORI DE VIITURI CU GALERIE SUBTERANĂ

Un evacuator de viituri de acest tip (fig. 21) cuprinde în esență un prag deversant, o cameră de racordare, care dirijează apele spre intrarea în tunel și, în sfîrșit, galeria subterană propriu-zisă.

Semnalăm că, uneori, restituirea apelor ce ies cu mare viteză din galeria subterană, pune problema protecției împotriva afuierilor. La barajul de la Sarrans, cele două galerii, prevăzute pentru un debit total de 2000 m^3/s, se deschid într-o vale afluentă, amenajată ca bazin amortizor, în urma unui studiu pe model redus.

În legătură cu aceste lucrări, am pus în evidență, în colaborare cu Camichel și cu Crescent, un fenomen alternativ destul de primejdios. Apariția acestuia corespunde unor condiții speciale, care sînt uneori realizate, în cazul galeriilor subterane cu pantă relativ mare, dar de secțiune prea mică pentru a asigura evacuarea debitului maxim al apelor mari, prin funcționare cu scurgere liberă. Oscilațiile apar în momentul trecerii de la scurgerea cu suprafață liberă la scurgerea sub sarcină.

În acest caz, succesiunea fenomenelor este următoarea (fig. 22): cînd debitul de ape mari crește progresiv, începînd de la o valoare foarte mică, se constată mai întîi că în canalul subteran nu există presiune în nici un punct; apoi, nivelul în cameră ajunge să înece galeria și se ridică din ce în ce, pe măsură ce debitul crește. Deodată, pentru o valoare suficientă a debitului, nivelul scade brusc în cameră; se formează un vîrtej vertical cu axa aerată prin care se produce o aspirare a aerului deosebit de violentă și de zgomotoasă; în mod brusc, această sucțiune a aerului se oprește; nivelul urcă înapoi cu repeziciune pînă la cota de plecare, se menține aici cîteva secunde, apoi, coboară din nou, și ciclul oscilațiilor se întreține conform procesului pe care l-am descris.

Acest fenomen, pe care l-am pus în evidență pentru prima oară pe un model redus al evacuatorului de viituri de la Verdon, pare să poată explica unele fenomene observate la evacuatorul barajului de la Eguzon. Am avut prilejul să întîlnim acest fenomen și la o construcție auxiliară, atunci cînd am vizitat uzina de la Sauzal, în Chile.

Violența oscilațiilor, succesiunea bruscă a scurgerilor sub sarcină, precum și brutalele pătrunderi de aer constituie, evident, elemente periculoase pentru evacuatorii de viituri. Ni s-a părut interesant să căutăm cauza acestui fenomen pentru a-l putea înlătura mai ușor.

În acest scop am realizat un model schematic de evacuator în care galeria subterană este reprezentată, după caz, printr-un tub de alamă sau de sticlă, care lasă să se vadă toate fazele scurgerii (fig. 23, 24 și 25).

Pe acest model am pus în evidență originea fenomenului. Aceasta constă în discontinuitatea din punct de vedere al debitului care însoțește trecerea de la scurgerea liberă la scurgerea sub sarcină în interiorul galeriei subterane.

Fenomenul poate fi suprimat, studiindu-se în special ajutajul de la intrarea în galeria subterană, așa fel încît să se elimine orice contracție. De asemenea, cu ajutorul unei supape montate în mod corespunzător, se poate provoca o aerare care elimină fenomenul alternativ (fig. 26). Această aerare este suprimată automat în momentul în care nivelul de retenție al apei atinge o cotă suficientă pentru ca fenomenul alternativ să nu mai constituie o primejdie (fig. 27).

DEVERSOARE CU TRAMBULINĂ DE SKI

În aceste construcții, apa, după deversarea ei peste pragul barajului, parcurge un anumit drum, coborînd pe parament cu o viteză din ce în ce mai mare, apoi, după redresarea rapidă a traiectoriei, pornește în cădere

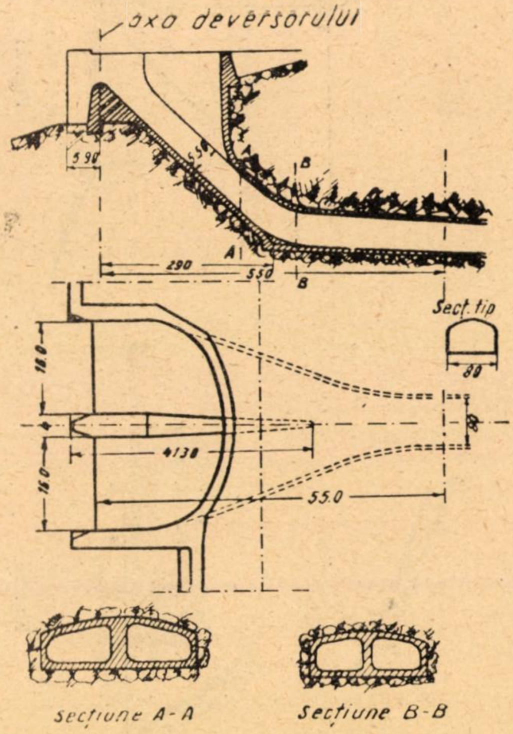

axa deversorului
5.90
B
A
B
290
550
B
Sect. tip
80
18.0
18.0
4138
55.0
secțiune A-A
secțiune B-B

Fig. 21

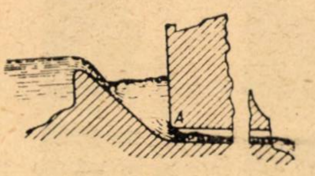


Fig. 22

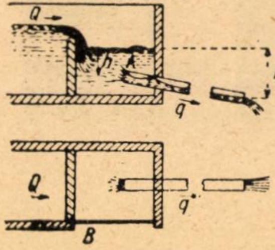


Fig. 23

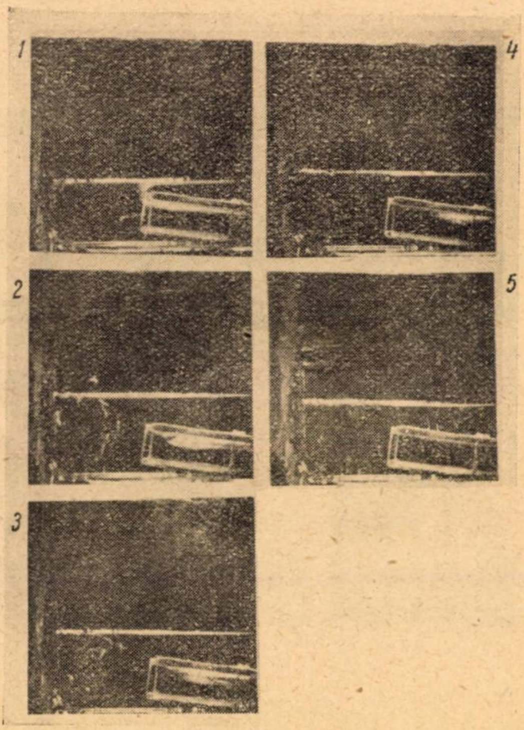


Fig. 24

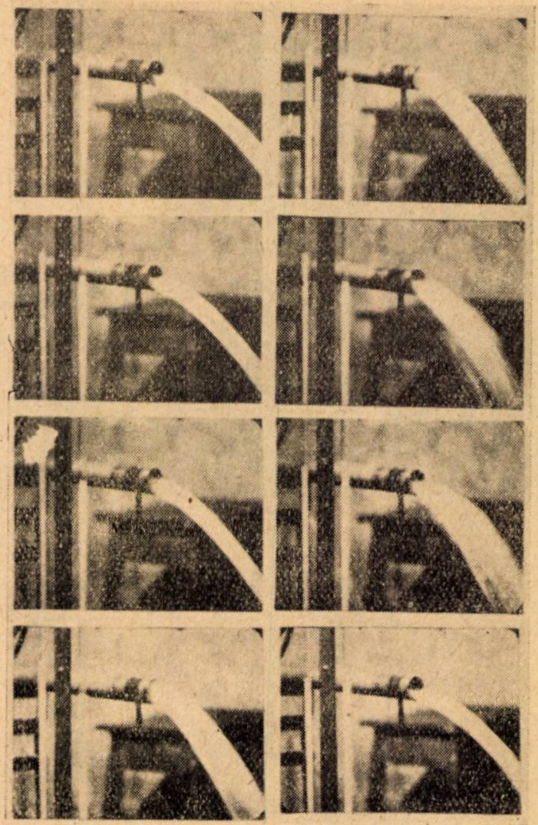


Fig. 25

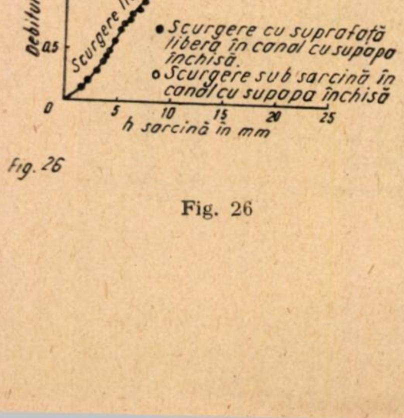


Fig. 26

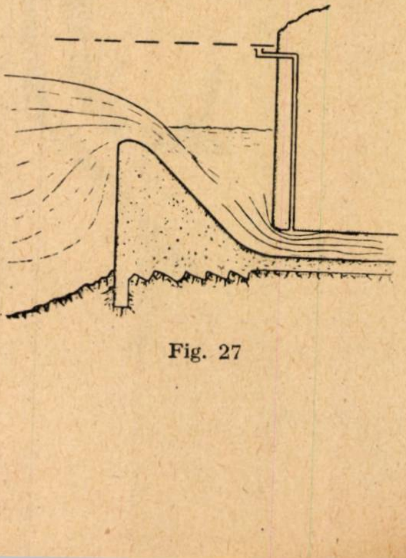


Fig. 27

liberă în direcție orizontală sau chiar ascendentă, ceea ce îi asigură un punct de cădere îndepărtat de fundațiile aval ale barajului.

Eroziunile se localizează în acest punct al căderii, dînd repede naștere unui bazin amortizor foarte eficace. Piciorul barajului este scăldat în apa imobilă sau animată de mișcări lente care nu pot provoca afuieri.

Aceste deversoare în trambulină de ski, a căror ideie aparține lui Coyne, au fost adoptate de către acesta în numeroase și foarte reușite realizări, în care au dat toată satisfacția.

În figura 28 se arată modelul redus al evacuatorului în trambulină de ski, proiectat de Caquot, și reprezentînd una dintre soluțiile propuse pentru barajul de la Pipri în India.

În figura 29 se reprezintă modelul redus al evacuatorului în trambulină de ski, al barajului de la El Mali în Turcia, pe care l-am studiat în colaborare cu Coyne.

EVACUATOR DE VIITURI CU VINE DIRIJATE

În figura 30 se arată principiul acestui evacuator pe care l-am imaginat și care este constituit dintr-una sau mai multe conducte, străbătînd barajul și închise în mod normal prin vane ce se deschid pentru evacuarea viiturilor. Partea din aval a conductei este înclinată la 45° deasupra orizontalei, astfel încît vîna a cărei linie medie se depărtează puțin de parabola teoretică, nu atinge albia în aval decît foarte departe de piciorul barajului.

În figura 31 se reprezintă un evacuator cu o singură vînă. În figura 32 se arată un evacuator cu șase vine paralele. Eroziunile sînt importante, dar îndepărtate de piciorul barajului, care este, dimpotrivă, rambleiat cu materiale de eroziune.

Unele experiențe sistematice privitoare la comportarea vînelor de diverse secțiuni și viteze (fig. 33, 34, 35 și 36) ne-au permis să constatăm că într-o oarecare măsură ele verificau legile de similitudine teoretică și să observăm importanța fenomenelor de antrenare a aerului, favorabile de altfel reducerii puterii erozive a vînei.

În figura 37 se arată un model redus al unei soluții studiate pentru barajul de la Saryar, pentru evacuarea viiturilor cu ajutorul unei baterii de 12 vine apropiate unele de altele.

BARAJE CU PILE

Cînd stabilim o priză de apă pe un fluviu care străbate regiuni unde orice revărsare dincolo de albia majoră normală ar putea aduce după sine consecințe supărătoare, construcția hidrotehnică de retenție constă în general dintr-un baraj cu pile.

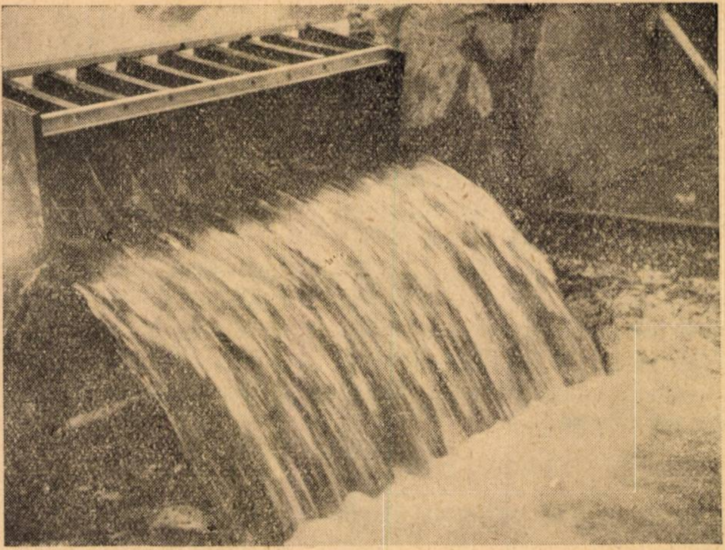


Fig. 28

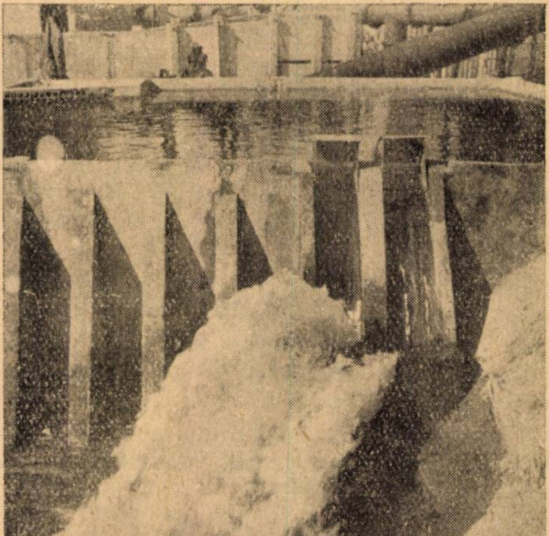


Fig. 29

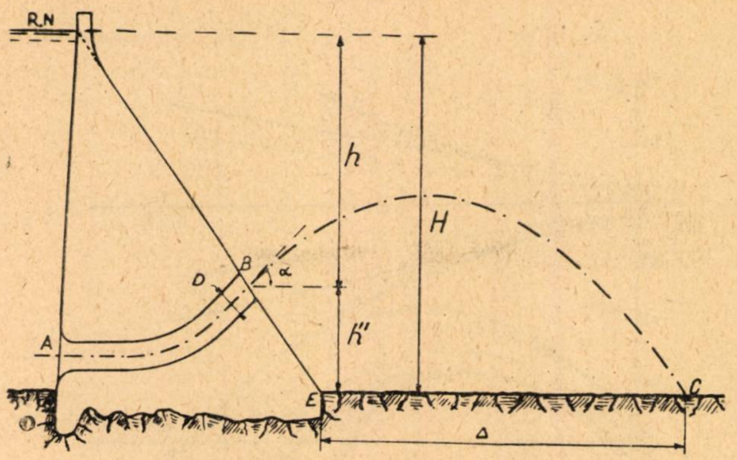

R.N
h
H
B
α
D
A
h''
E
C
Δ

Fig. 30

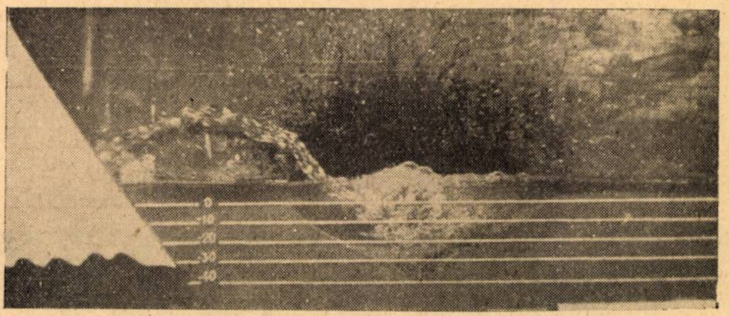


Fig. 31

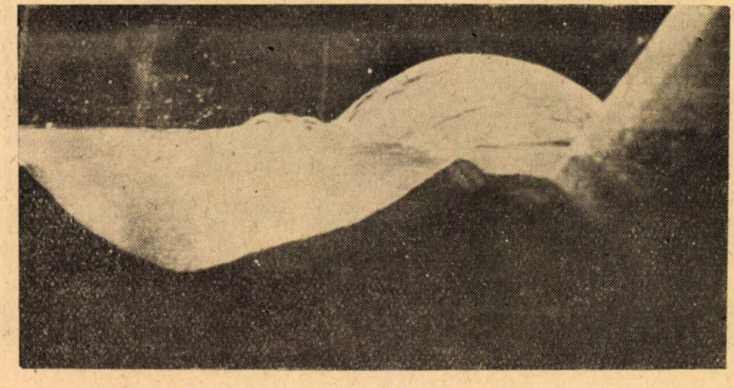


Fig. 32

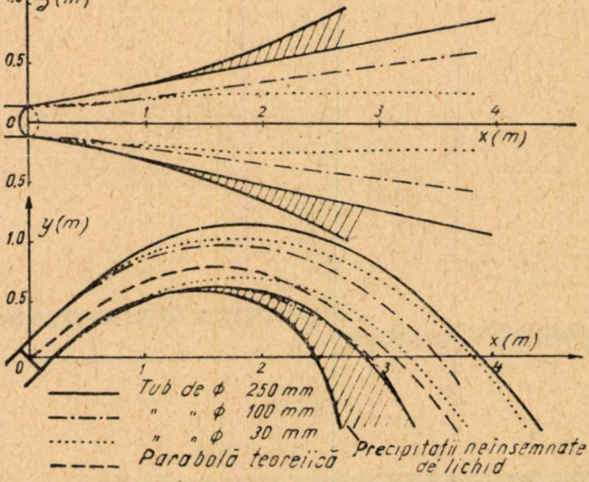

1.0
z (m)
0.5
0
1
2
3
4
x (m)
0.5
y (m)
1.0
0.5
x (m)
0
1
2
3
4
Tub de Φ 250 mm
" " Φ 100 mm
" " Φ 30 mm
Parabolă teoretică
Precipitații neînsemnate de lichid

Fig. 33

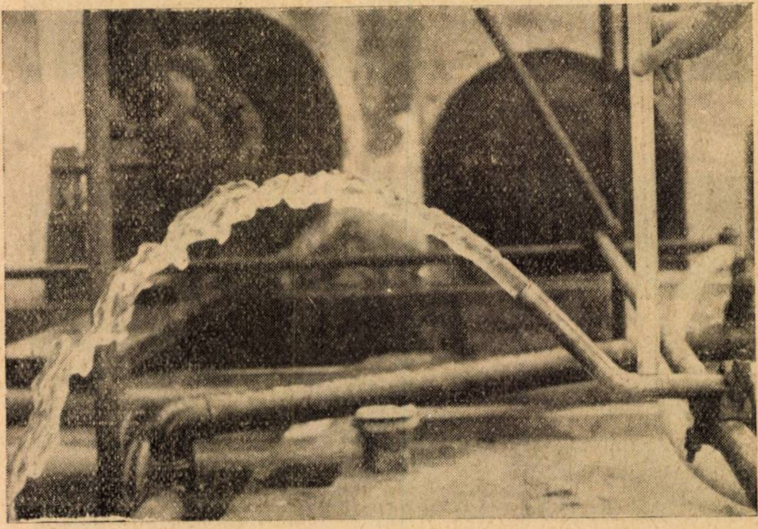


Fig. 34

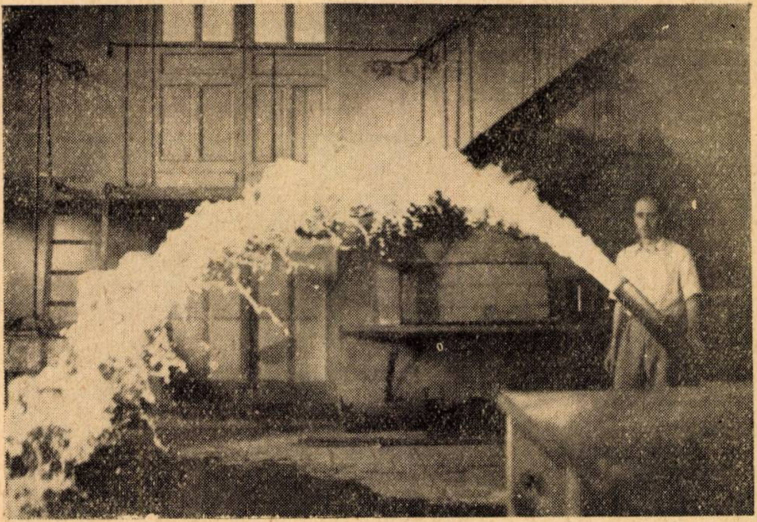


Fig. 35

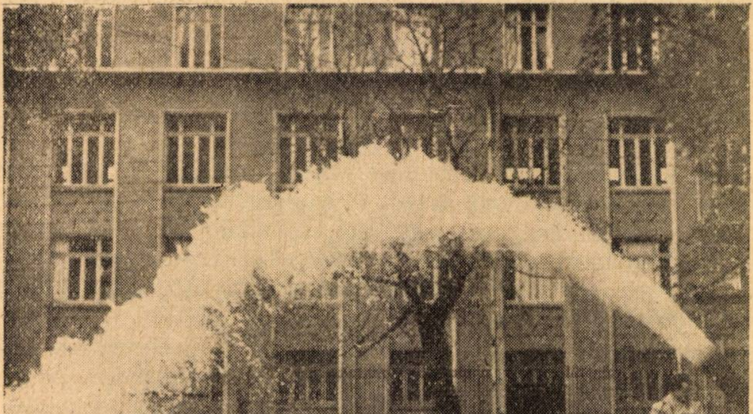


Fig. 36

Acesta se compune în esență dintr-un prag a cărui cotă corespunde sensibil aceleia a fundului mediu al albiei în secțiunea corespunzătoare, și dintr-un oarecare număr de pile, analoage pilelor de pod, între care se deplasează stăvilarele mobile.

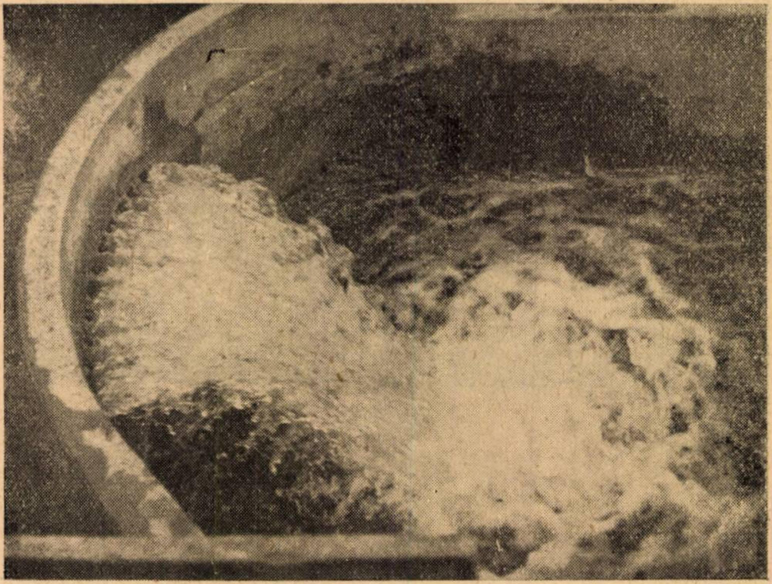


Fig. 37

Cînd întreg debitul fluviului este captat, stăvilarele închid cu desăvîrșire toate deschiderile ; dimpotrivă, în momentul viiturilor, cînd debitul fluviului depășește pe acela al centralei, stavilele sînt înlăturate într-o oarecare măsură pentru a lăsa să treacă apele excedentare ; mai ales în momentul „viiturii seculare'', ridicarea stavilelor este completă și pilele sînt singurul obstacol al scurgerii apei.

Organele de închidere a barajelor cu pile pot fi de tipuri foarte felurite, avînd ca urmare suprastructuri variate ale construcției.

Adeseori (fig. 38), organele de închidere sînt stavile Stoney, stavile plane cu deplasare verticală, rectilinie, înzestrate cu un dispozitiv special de etanșare (galeți). Stavila cuprinde, în general, două elemente mobile unul față de celălalt. În timpul scurgerii viiturilor mici, partea superioară a stavilei coboară și se plasează în locașul rezervat în acest scop în partea inferioară, astfel încît apele se scurg prin deversare ; cînd viitura atinge o valoare suficientă pentru ca o evacuare mai importantă să devină necesară, scripeții ridică ansamblul părții mobile așa fel încît scurgerea se produce simultan deasupra şi sub aceasta. Stavila funcţionează în acelaşi timp ca deversor în partea sa superioară şi ca vană de fund în partea sa inferioară.

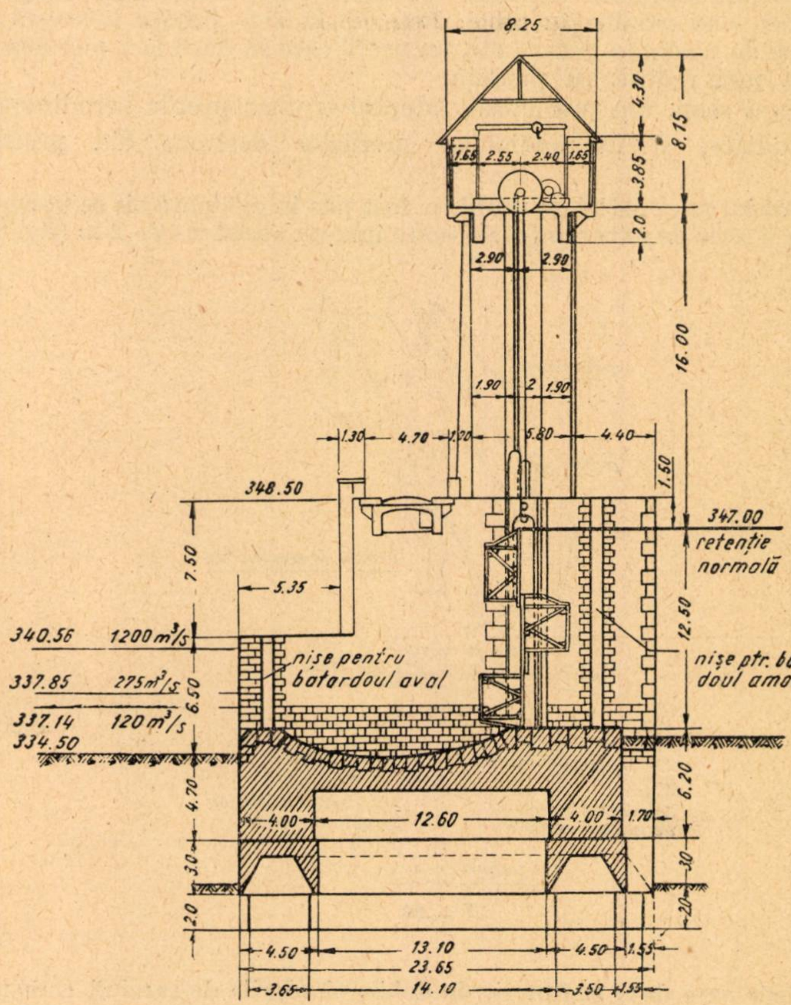

8.25
4.30
8.15
3.85
2.0
1.65
2.55
2.40
1.65
2.90
2.90
16.00
1.90
2
1.90
1.30
4.70
1.20
5.80
4.40
1.50
348.50
347.00
retenție
normală
7.50
5.35
340.56
1200 m³/s
337.85
275 m³/s
6.50
337.14
120 m³/s
334.50
nișe pentru
batardoul aval
nișe ptr. batar-
doul amont
12.50
6.20
4.70
4.00
12.60
4.00
1.70
3.0
3.0
1.20
2.0
4.50
13.10
4.50
1.55
23.65
3.65
14.10
3.50
1.55

Fig. 38

În această lucrare nu am intenţionat să trecem în revistă diferitele tipuri, extrem de variate, de baraje cu pile, ci numai să semnalăm, cu privire la funcţionarea acestor construcţii, unele observaţii inspirate de cercetările efectuate pe această temă, în laboratoarele de hidraulică ale Institutului electrotehnic al Universităţii din Toulouse.

CERCETĂRI ASUPRA PILELOR AERODINAMICE

În timpul scurgerii viiturilor seculare, pilele constituie singurul obstacol care mai rămîne în albie. Este de la sine înțeles interesul pe care îl avem de a adopta pentru ele, un profil care să ducă la o pierdere de sarcină cît mai redusă cu putință.

În acest scop, am preconizat adoptarea unor profile aerodiramice special studiate, și în special a profilelor derivate din profilele Jukovski.

Avantajul unor astfel de profile a fost pus în evidență cît se poate de limpede de o serie de experiențe efectuate într-un canal lat de 2 m (fig. 39).

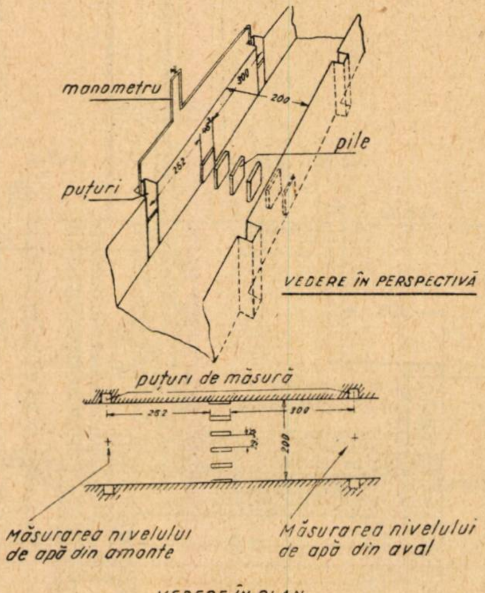

manometru
300
200
pile
252
puțuri
VEDERE ÎN PERSPECTIVĂ
puțuri de măsură
252
300
200
Măsurarea nivelului de apă din amonte
Măsurarea nivelului de apă din aval
VEDERE ÎN PLAN

Fig. 39

Curbele care dau, în funcție de debit, pierderile de sarcină corespunzătoare diferitelor pile studiate (fig. 40), arată reducerea considerabilă a pierderilor de sarcină ce rezultă în cazul folosirii pilelor aerodinamice (fig. 41).

La pilele rotunde la capăt se observă o particularitate, și anume o sporire însemnată a pierderilor de sarcină la un anumit debit ; acest fenomen se datorește vîrtejurilor alternante ce iau naștere îndărătul pilelor. La un moment dat, vîrtejurile ce se nasc îndărătul a două pile, ce încadrează o deschidere, sînt decalate cu o jumătate de perioadă unele față de altele, astfel încît, înfășurîndu-se alternativ spre interiorul acestei treceri, apoi spre exterior, ele produc un fenomen alternativ de obturare parțială și apoi de degajare a acestei treceri. Rezultatul este o sporire a pierderii de

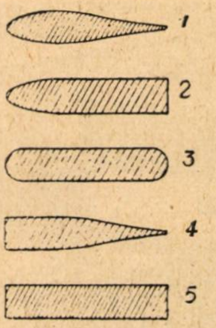


Fig. 40

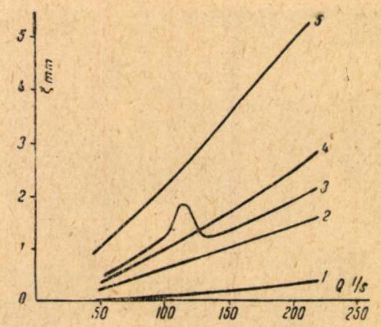


Fig. 41

sarcină medie și, totodată, apariția unui fenomen de balansare a suprafeței libere, care poate căpăta o importanță deosebită. Semnalăm că acest fenomen a fost studiat în totalitatea lui de Etienne Crausse, de la Școala de Ingineri din Beyrouth.

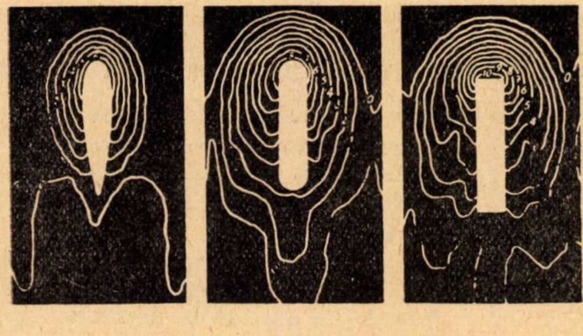


Fig. 42

Am efectuat totodată diverse încercări comparative de afuiere. Avantajul pilelor aerodinamice continuă mereu să subziste, deși mai puțin accentuat decît pentru piederile de sarcină (fig. 42).

În sfîrșit, semnalăm, că pentru barajul de la Cajarc, pe Lot, a fost găsită, în colaborare cu Coyne, o soluție excelentă prin adoptarea pilelor navă cu ciocul aplecat în afară, secțiunea orizontală a părții superioare a acestor pile fiind aceea a unui profil aerodinamic (fig. 43). Aceste pile aerodinamice de tip navă, produc o coborîre a planului apei la intrarea în fiecare deschidere, cu mult inferioară celei ce se observă în general. Aceasta se datorește desigur, în mare parte, faptului că scurgerea începe să se producă în diverse planuri orizontale succesive, la distanțe variabile de extremitatea amonte a pilelor.

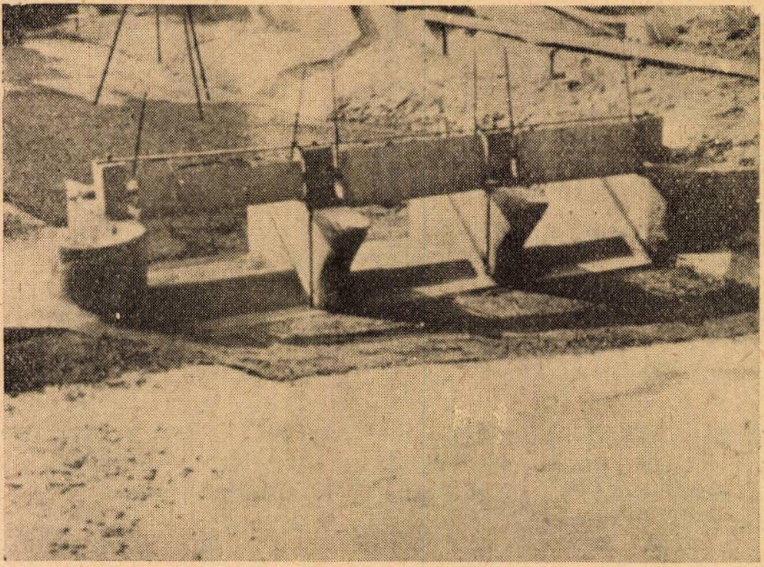


Fig. 43

OBSERVAȚII ASUPRA INTERACȚIUNILOR DINTRE DESCHIDERI

Studiul pe modele reduse al barajului de la Sansanding de pe Niger, ne-a condus la unele observații cu privire la fenomenele de interacțiune dintre deschideri și la anomaliile aparente ale coeficienților de debit.

Mai întîi, este sigur că debitul unei deschideri în condiții identice în amonte și în aval este funcție de gradul de deschidere al celor vecine. Pentru a ne da seama de acest lucru este de ajuns să observăm, în timpul curgerii simultane prin două deschideri consecutive, diferența de contracții în ceea ce privește pila centrală, pe de-o parte, și pilele extreme pe de alta.

Pe de altă parte, am avut de comparat debitele unitare, pe metru liniar de lățime, obținute cu două lățimi de deschideri de 20 m și 67 m, pentru o aceeași diferență de nivel între amonte și aval (fig. 44).

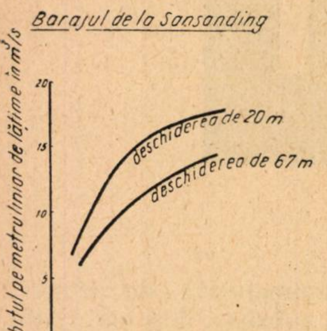


Fig. 44

Rezultatele pun în evidență un debit unitar mult superior în cazul deschiderii de 20 m lățime. Fenomenul se explică foarte bine observîndu-se curgerea. În cazul deschiderii de 67 m lățime, se produce o contracție netă a vinei, în timp ce la deschiderea de 20 m lățime, lungimea de 30 m a pilelor este suficientă pentru ca după o contracție inițială, lama de apă să se lărgească și să se lipească de pereți, astfel încît curgerea să se facă în plin debit, la ieșirea din deschiderea respectivă (fig. 45 și 46).

Într-o oarecare măsură, aceste fenomene se pot compara, cu acelea care intervin la scurgerea prin orificiu în perete subțire, pe de o parte, și prin ajutaj cilindric, pe de altă parte.

CERCETĂRI ASUPRA VANELOR DE FUND

Am efectuat un studiu complet al curgerii printr-o vană de fund, în cazul unui ecran plan vertical cu perete subțire obturînd partea superioară a unui canal cu secțiune dreptunghiulară și fund orizontal.

Cînd reținerea în aval este suficientă, vîna cu mare viteză, trecînd prin secțiunea contractată S, ajunge într-o zonă pe care am numit-o punct de izbucnire și dincolo de care într-o secțiune S_2, scurgerea se face în mod regulat în toată masa lichidului. Dimpotrivă, pe toată zona situată în amonte de izbucnire, vîna de mare viteză are deasupra ei turbioane și mișcarea de suprafață se îndreaptă din aval spre amonte, de la punctul de izbucnire, spre vană (fig. 47).

În ceea ce privește scurgerea cu vînă neînecată, obținem o remarcabilă coincidență între teorie și experiență, atît în ceea ce privește forma vinei (fig. 48), cît și privitor la valoarea debitului (fig. 49), după cum am putut verifica pe diverse modele (fig. 50).

Am studiat pe de-a întregul teoria curgerii înecate, ceea ce ne-a făcut să generalizăm formula lui Borda și să dăm expresia pierderii de sarcină datorită lărgirii bruște ce se produce între secțiunile S și S_2. Experiențele efectuate pe o mare vană a canalului de aducere al uzinei de la Gentille (fig. 51) au verificat foarte bine rezultatele teoretice.

Nu vom intra în detaliul cercetărilor pe care le-am mai efectuat asupra vanelor de fund, dar ni se pare interesant de semnalat unele fenomene cu soluții multiple obținute de noi, atunci cînd există o denivelare între radierele din amonte și din aval.

Mai semnalăm, cu privire la aceste cercetări, un fenomen de deplasare alternativă a saltului, ce se observă pentru unele valori particulare ale retenției din aval (fig. 52).

FUNCȚIONAREA SIMULTANĂ A BARAJELOR CU PILE CA DEVERSOR ȘI CA VANĂ DE FUND, ÎN CAZUL CÎND EXISTĂ O AERARE BUNĂ A SPATELUI STAVILEI

La începutul studiului nostru am semnalat că barajele cu pile erau menite adeseori să funcționeze simultan atît ca deversor, cît și ca vană de fund (fig. 53).

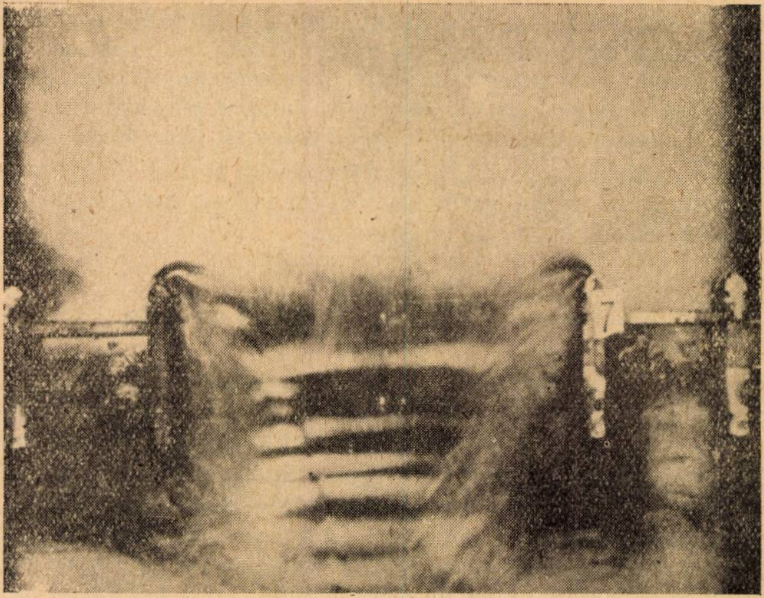


Fig. 45

Fig. 46

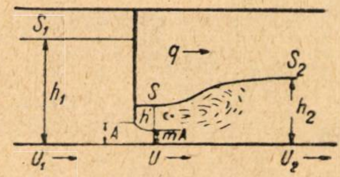

S_1
h_1
q
S
S_2
h'
h_2
A
mA
U_1
U
U_2

Fig. 47

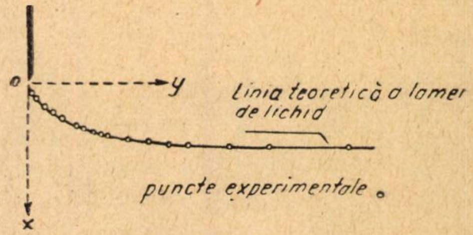


Fig. 48

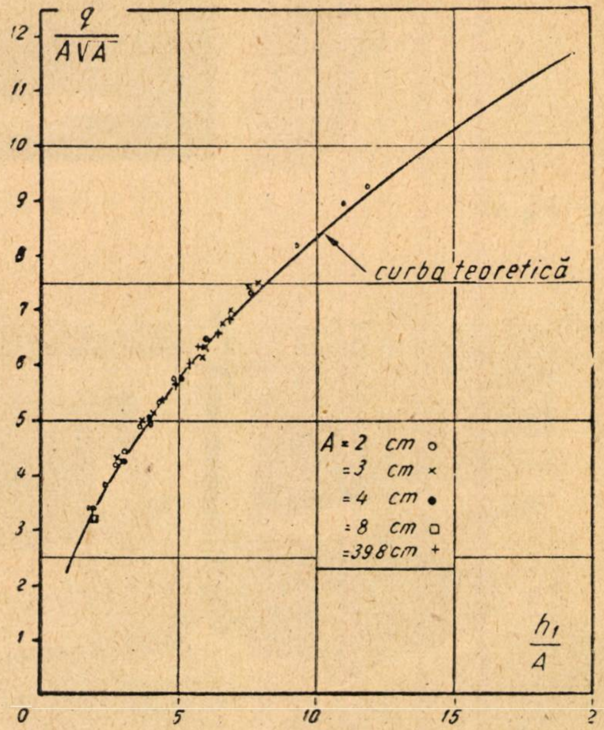


Fig. 49

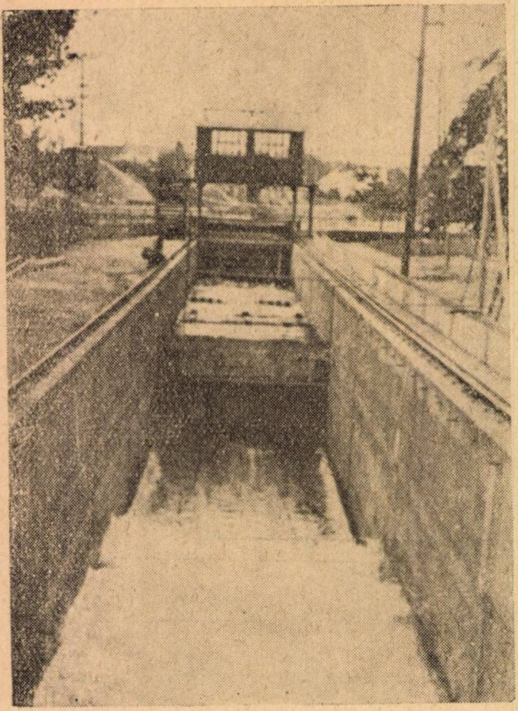


Fig. 50

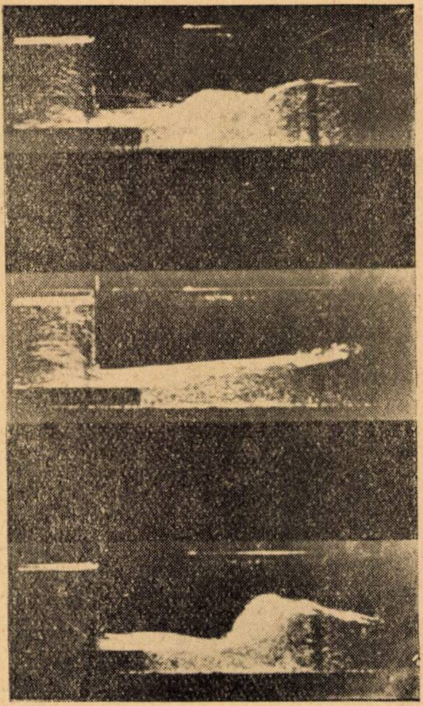


Fig. 52

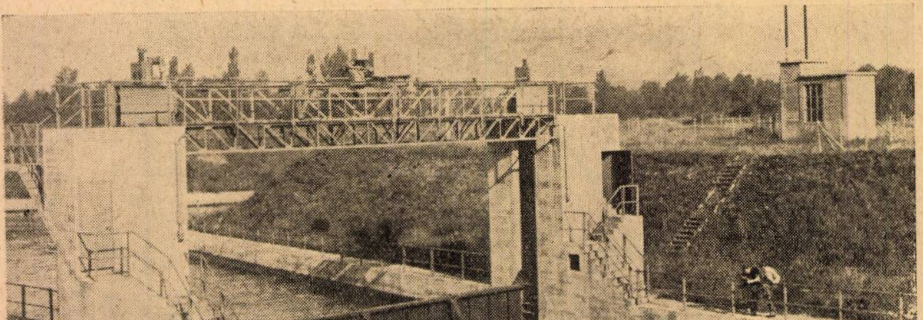


Fig. 51

Am studiat mai întîi condițiile de funcționare presupunînd că ar exista o bună aerare a spatelui stavilei, saltul producîndu-se destul de departe de construcție și neavînd nici o consecință asupra funcționării acesteia (fig. 54).

Experiențele noastre au fost făcute utilizînd diverse instalații : un canal vitrat, un canal de beton de 70 cm lărgime și canalul cel mare al laboratorului de la Banlève, lung de 117 m, lat de 4 m și adînc de 4,20 m. Acest ultim canal este situat între cele două brațe ale rîului Garonne, între care există o diferență de nivel de 3,80 m, la ape medii și este înzestrat cu cîte o vană de reglaj la fiecare extremitate. Aceste experiențe ne-au permis să punem în evidență expresia debitului.

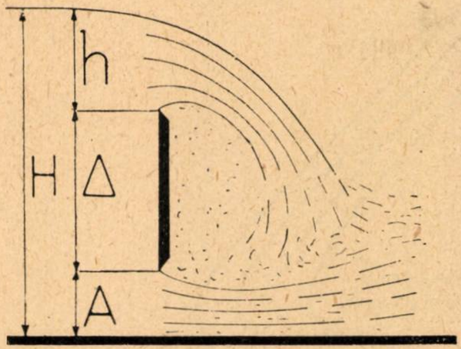


Fig. 53

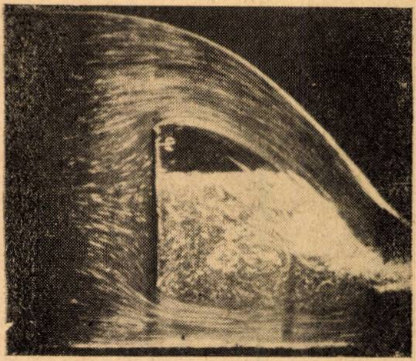


Fig. 54

Pe suprafața amonte a stavilei, repartiția presiunilor poate fi considerată, în primă aproximație, ca hidrostatică, cu excepția extremităților unde se produc viteze apreciabile (fig. 55).

Repartițiile de presiuni pe radier pun în evidență scăderea presiunilor datorită vitezelor de sub vană și apoi sporirea presiunilor corespunzătoare zonei de impact a lamei deversante (fig. 56).

FENOMEN ALTERNATIV ÎN FUNCȚIONAREA SIMULTANĂ A UNUI BARAJ CU PILE CA DEVERSOR ȘI CA VANĂ DE FUND

Am pus în evidență existența unui fenomen alternativ deosebit de primejdios, în cazul cînd aerarea spatelui stavilei este suprimată sau pur și simplu insuficientă.

Fenomenul acesta pe care l-am filmat, poate fi analizat după cum urmează :

La un moment dat, lama deversantă apropiindu-se de verticală, se lipește de fundul canalului și suprimă parțial debitul vinei de apa ce

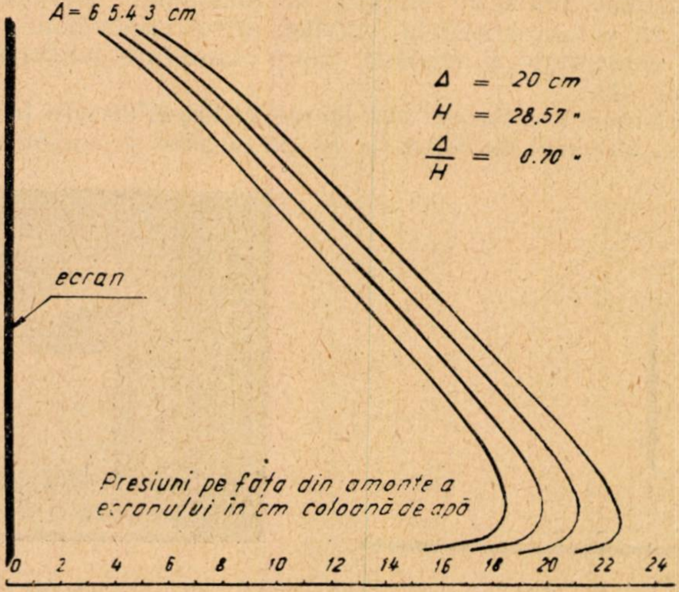

A= 6 5.4 3 cm
Δ = 20 cm
H = 28.57 "
Δ/H = 0.70 "
ecran
Presiuni pe fața din amonte a ecranului în cm coloană de apă
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24

Fig. 55

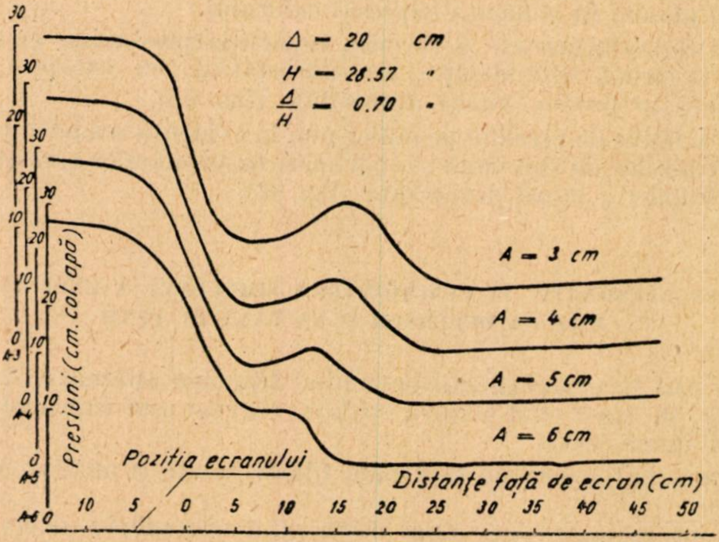

Δ — 20 cm
H — 28.57 "
Δ/H — 0.70 "
A = 3 cm
A = 4 cm
A — 5 cm
A = 6 cm
Presiuni (cm. col. apă)
Poziția ecranului
Distanțe față de ecran (cm)
30
20
10
0
A-3
A-4
A-5
A-6
10
5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

Fig. 56

curge prin vana de fund. Vîna se cabrează și ridică lama deversantă, aruncînd-o spre aval, fapt care dă posibilitate apei să se scurgă și lame deversante să recadă (fig. 57). Fenomenul se repetă după o perioadă care, după experiențele noastre și prin aplicarea legilor de similitudine, ar corespunde sensibil la numai două secunde, pentru o stavilă ce creează o reținere de 12 m înălțime (fig. 58).

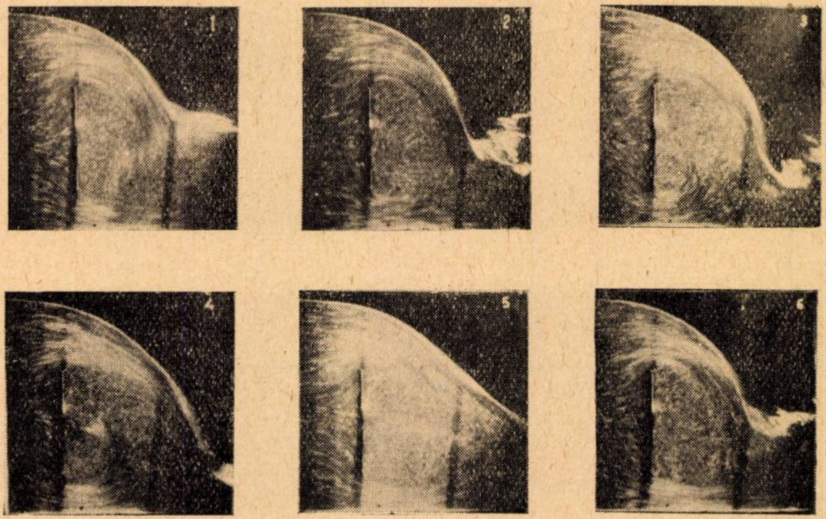


Fig. 57

Dată fiind amploarea fenomenului și valoarea foarte scurtă a perioadei, pare mai mult ca sigur că o construcție supusă acestui fenomen va fi dizlocată aproape imediat.

Am arătat că fenomenul alternativ se poate produce pentru o anumită poziție a stavilei, de îndată ce datele satisfac condiției

$$\frac{\Delta}{H} \leqslant 0{,}60,$$

Δ fiind înălțimea stavilei și *H* nivelul apei în amonte (fig. 59).

Se observă că această condiție poate fi realizată în cazul stavilei cu două panouri, și mai sigur încă, în cazul unei stavile centrale fixate în beton, avînd un deversor în partea de sus și o vană de fund în partea de jos.

Menționăm că o aerare insuficientă a avalului stavilei poate intensifica fenomenul în loc să-l suprime (fig. 60).

Semnalăm două fenomene :

1) cînd nivelul aval este foarte puțin inferior nivelului amonte, se observă un fenomen alternativ, și anume lama deversantă trece din poziția

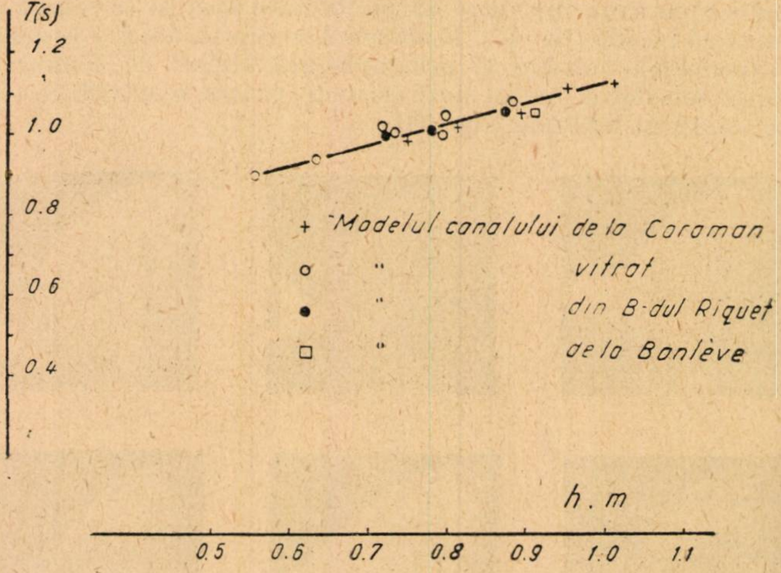

T(s)
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
+ Modelul canalului de la Caraman
○ " vitrat
● " din B-dul Riquet
□ " de la Banlève
h . m
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1

Fig. 58

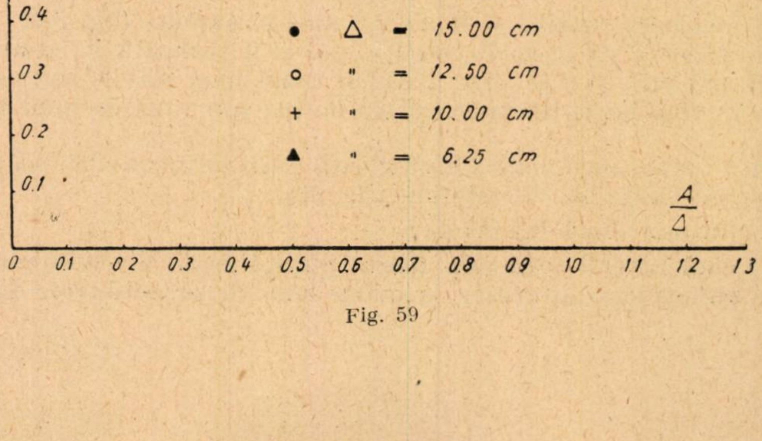

Condiţia de existenţă $\frac{\Delta}{H} < 0,60$
$\frac{h}{\Delta}$
0.6
0.5
0.4
03
0.2
0.1
● Δ = 15.00 cm
○ " = 12.50 cm
+ " = 10.00 cm
▲ " = 6.25 cm
$\frac{A}{\Delta}$
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
10
11
12
13

Fig. 59

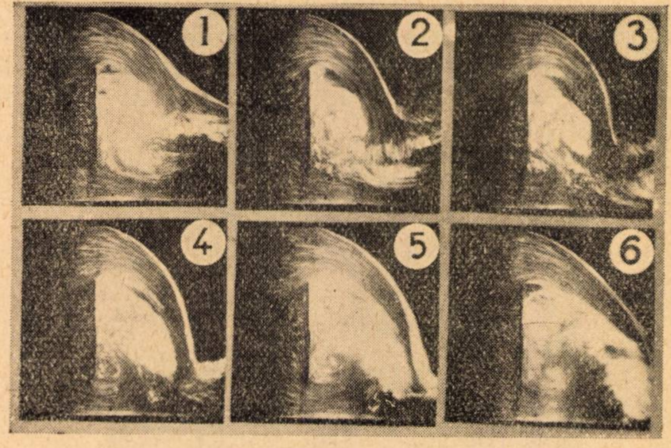


Fig. 60

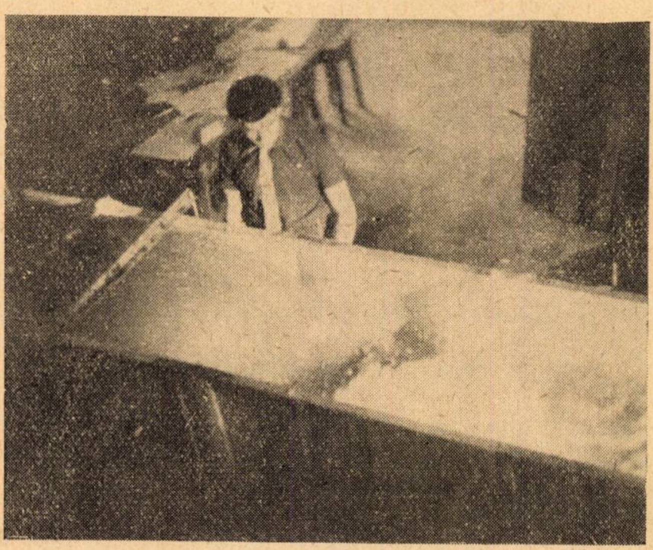


Fig. 61

ondulată la poziția înecată, formînd un val de suprafață, în timp ce vîrtejuri alternate iau naștere în spatele stavilei;

2) dacă prin acționare asupra condițiilor de scurgere în aval, saltul este localizat la picioarele construcției, interferențele între fluctuațiile saltului și oscilațiile lamei deversante produc proiecții foarte importante ale apei (fig. 61 și 62).

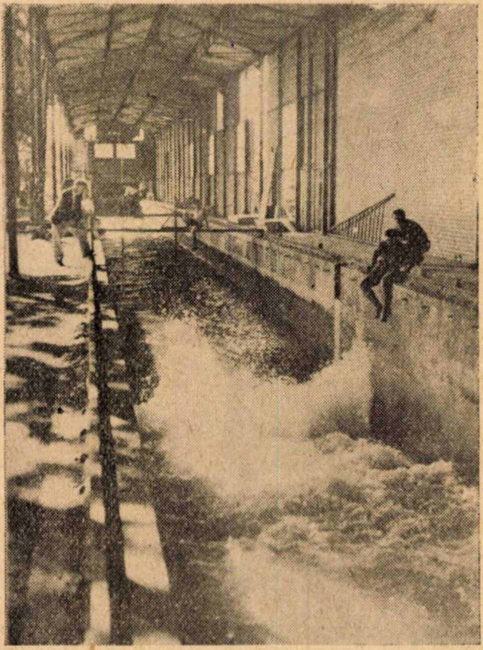


Fig. 62

Fenomenul alternativ a fost filmat în canale vitrate, și de asemenea la un debit de 18 m^3/s în marele canal de la Banlève.

Prezentată în ședința publică de comunicări a Institutului de mecanică aplicată din 21 aprilie 1958.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАВОДКОВЫХ ВОДОСБРОСОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе вкратце представлены результаты экспериментальных исследований, предпринятых в целях изучения целого ряда установок, используемых для слива исключительно крупного дебита воды у высотных плотин.

Прежде всего рассматриваются водосливные плотины и изучаются виды порогов и возможности устранения размыва. Затем приводятся

результаты исследования форсных водосливных плотин с бычками обтекаемого профиля. Далее рассматриваются исследования других типов паводковых водосливов, а именно с открытым каналом, с подземной галереей, с лыжным трамплином и с направленными струями. Проведенными экспериментальными исследованиями форсных водосливов выявлено преимущество плотинных бычков обтекаемого профиля и выясняется вопрос взаимодействия смежных пролетов.

Работа заканчивается представлением исследований донных щитов и одновременной работы форсной плотины в качестве водослива и донного щита, давших возможность выявить существование угрожающего безопасности строения переменного явления.

STUDIES ON HYDRAULIC STRUCTURES FOR THE REMOVAL OF FLOODS

ABSTRACT

This paper briefly presents the results of experimental research carried out for studying a series of devices for removing the floods at high dams.

The author first discusses the form of tresholds and the possibility of avoiding erosion at spillways. Further, the results obtained for spillways equipped with pillars having aerodynamic profiles are presented. Studies on other hydraulic structures for the removal of floods, such as those in the form of open channels, underground galleries, etc. are also presented. For spillways equipped with pillars, experiments showed the advantages of pillars of aerodynamic profile and the interaction between neighbouring spans.

Finally, experiments on bottom sluices and on sluices simultaneously working as spillways and bottom sluices are described.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

METODE NUMERICE PENTRU STUDIUL MIŞCĂRILOR AXIAL-SIMETRICE ALE FLUIDELOR PERFECTE

DE

D. DUMITRESCU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.
şi DAN GH. IONESCU

1. În lucrarea de faţă se studiază mişcarea axial-simetrică a unui fluid perfect incompresibil, limitat de o conductă circulară prevăzută cu o diafragmă, sau de o conductă circulară în interiorul căreia se găseşte un corp simetric faţă de un centru de simetrie situat pe axa conductei. Pentru asemenea mişcări, de un anumit interes pentru tehnică, nu se pot da soluţii exacte decît în cazuri foarte particulare ; apar astfel ca necesare metodele numerice, capabile să rezolve problema cu aproximaţia cerută în practică. Aceste metode numerice nu pot avea, prin însăşi natura lor, toate avantajele unei soluţionări exacte ; de aceea, în articol se prezintă două procedee de calcul, diferite ca principiu, şi care urmează a fi aplicate în conformitate cu caracteristicile problemei. Pentru a permite totuşi o comparare a eficacităţii lor, unul dintre exemple a fost tratat prin ambele metode.

I. PRINCIPIUL METODELOR

a. METODA POLINOAMELOR BESSEL

2. Se ştie că într-o mişcare axial-simetrică, irotaţională, a unui fluid perfect, raportată la sistemul de axe de coordonate rOz, unde Oz este axa de simetrie, potenţialul de viteze φ şi funcţia de curent ψ satisfac ecuaţiile cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r}=0. \tag{1}$$

Dacă fluidul este limitat de o conductă cilindrică circulară de rază R și a cărei axă coincide cu Oz, trebuie ca pereții conductei să fie linii de curent, adică

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \text{pentru } r = R. \tag{2}$$

Dacă, în plus, cerem ca la mari distanțe să avem repaus, adică

$$u = 0,\ v = 0,\ \text{pentru } |z| \to \infty, \tag{3}$$

putem scrie o soluție particulară pentru (1), sub forma

$$\varphi_0 = J_0\left(\beta_i \frac{r}{R}\right) e^{-\beta_i \frac{|z|}{R}}, \quad \psi_0 = r J_1\left(\beta_i \frac{r}{R}\right) e^{-\beta_i \frac{|z|}{R}}, \tag{4}$$

unde J_0 și J_1 sînt funcțiile lui Bessel de speța întîia și de ordinele zero, respectiv unu, iar β_i sînt zerourile lui J_1, adică soluțiile ecuației $J_0'(\beta_i) = -J_1(\beta_i) = 0$. O combinație liniară a unui număr finit de soluții de tipul (4),

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i J_0\left(\beta_i \frac{r}{R}\right) e^{-\beta_i \frac{|z|}{R}}, \quad \psi_1 = r \sum_{i=1}^{n} c_i J_1\left(\beta_i \frac{r}{R}\right) e^{-\beta_i \frac{|z|}{R}}, \tag{5}$$

va fi de asemenea o soluție a sistemului (1). Deoarece însă, în realitate, la mari distanțe putem presupune o mișcare de translație paralelă cu axa Oz, avînd deci condiția la limită

$$u = -V_\infty,\ v = 0,\ \text{pentru } |z| \to \infty, \tag{6}$$

în locul condiției (3), vom suprapune peste soluția (5) mișcarea definită de

$$\varphi_2 = -V_\infty |z|,\ \psi_2 = V_\infty \frac{r^2}{2}, \tag{7}$$

obținînd în definitiv soluția

$$\varphi = \varphi_2 + \varphi_1 = -V_\infty |z| + \sum_{i=1}^{n} c_i J_0\left(\beta_i \frac{r}{R}\right) e^{-\beta_i \frac{|z|}{R}}, \tag{8}$$

$$\psi = \psi_2 + \psi_1 = \frac{V_\infty}{2} r^2 + r \sum_{i=1}^{n} c_i J_1\left(\beta_i \frac{r}{R}\right) e^{-\beta_i \frac{|z|}{R}}, \tag{9}$$

care satisface condițiile la limită (2) și (6). Se poate trece la expresii adimensionale, punînd

$$\left.\begin{aligned} \varphi^* &= \frac{\varphi}{V_\infty R}, \quad \psi^* = \frac{\psi}{V_\infty R^2}, \quad k_i = \frac{c_i}{V_\infty R}, \\ u^* &= \frac{u}{V_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{V_\infty}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad \eta = \frac{z}{R}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

deci

$$\varphi^\star = -|\eta| + \sum_{i=1}^{n} k_i J_0(\beta_i \xi)\, e^{-\beta_i |\eta|}, \quad \psi^\star = \frac{\xi^2}{2} + \xi \sum_{i=1}^{n} k_i J_1(\beta_i \xi)\, e^{-\beta_i |\eta|}, \tag{11}$$

componentele vitezei fiind date de relaţiile

$$u^\star = \frac{\partial \varphi^\star}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial \psi^\star}{\partial \eta} = -\sum_{i=1}^{n} k_i \beta_i J_1(\beta_i \xi)\, e^{-\beta_i |\eta|}, \tag{12}$$

$$v^\star = \frac{\partial \varphi^\star}{\partial \eta} = -\frac{1}{\xi}\frac{\partial \psi^\star}{\partial \xi} = -1 - \sum_{i=1}^{n} k_i \beta_i J_0(\beta_i \xi)\, e^{-\beta_i |\eta|}. \tag{13}$$

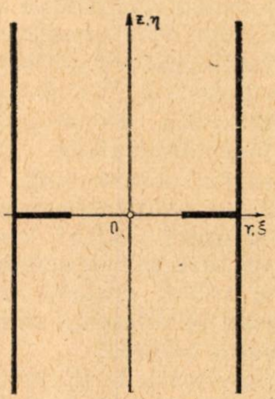


Fig. 1

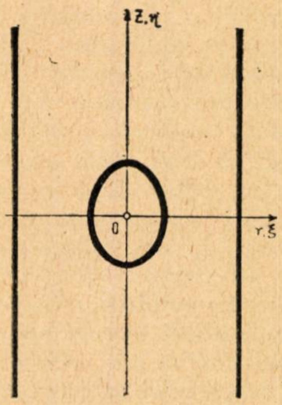


Fig. 2

3. Să presupunem că în conductă se află diafragma circulară $\eta = 0$, $a \leqslant \xi \leqslant 1$, debitul fiind $Q = \pi$ (fig. 1). Pentru $\xi = 1$ şi $\eta = 0$, $a < \xi < 1$ vom avea $\psi = 0{,}5$ şi scriind această condiţie în n puncte $(\xi_j, 0)$ de pe segmentul $a < \xi < 1$, cea de-a doua dintre relaţiile (11) ne va da

$$\sum_{i=1}^{n} k_i J_1(\beta_i \xi) = \frac{1-\xi_j^2}{2\,\xi_j}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{14}$$

deci problema se reduce la rezolvarea unui sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute k_i.

4. Dacă în conductă este situat un corp simetric faţă de centrul 0 al axelor de coordonate (fig. 2), pe suprafaţa acestuia vom avea $\psi = 0$, condiţie care scrisă în n puncte (ξ_j, η_j) ale corpului şi înlocuită în cea de-a doua dintre ecuaţiile (11), conduce la sistemul de n ecuaţii liniare cu n necunoscute k_i,

$$\sum_{i=1}^{n} k_i J_1(\beta_i \xi_j)\, e^{-\beta_i |\eta_j|} = -\frac{\xi_j}{2}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

Rezolvarea sistemelor (14) sau (15) permite scrierea soluţiei sistemului (1) sub forma unui polinom ai cărui termeni sînt funcţii Bessel de speţa întîia şi de ordinele zero şi unu. O asemenea soluţie satisface exact condiţiile la limită (2), (6) şi în mod aproximativ condiţiile la limită pe diafragmă sau pe conturul interior. În partea a doua a lucrării, metoda este aplicată la cazul diafragmei $\eta = 0,\ 1/2 \leqslant \xi < 1$.

5. Se poate presupune că, punînd condiţiile (14) şi (15) într-un număr din ce în ce mai mare de puncte, adică luînd un număr mereu mai mare de termeni pentru aproximarea soluţiei, ne apropiem continuu de valoarea ei exactă. Demonstrarea convergenţei procedeului şi stabilirea rapidităţii convergenţei prezintă unele dificultăţi. Se poate însă observa că prezenţa factorului $e^{-\beta_i |\eta|}$, în expresiile $\sum k_i J_0(\beta_i \xi) e^{-\beta_i |\eta|}$ şi $\sum k_i J_1(\beta_i \xi) e^{-\beta_i |\eta|}$,contribuie la diminuarea valorii termenilor acestor sume, deoarece rădăcinile β_i formează un şir monoton crescător. Este evident că influenţa acestui factor devine importantă pentru valorile mari ale lui $|\eta|$ şi este nulă pentru $\eta = 0$. Pe de altă parte, factorii $J_0(\beta_i \xi)$ şi $J_1(\beta_i \xi)$ au de asemenea tendinţa să scadă o dată cu creşterea lui β_i, deoarece funcţiile $J_0(x)$ şi $J_1(x)$ tind către zero pentru valorile foarte mari ale lui x. Aceasta ne arată că, chiar dacă procedeul este convergent, convergenţa sa este foarte lentă în apropierea originii. În sfîrşit, nu putem afirma nimic relativ la coeficienţii k_i. Exemplele concrete studiate ne arată că aceşti coeficienţi au semne alternate şi că valorile lor absolute nu urmează în general nici o lege. În aceste condiţii, eficacitatea procedeului trebuie studiată în fiecare caz concret, luînd mereu mai mulţi termeni, pînă ce diferenţa între două valori consecutive ale soluţiei scade sub o limită admisă.

6. Un procedeu analog celui expus aici a fost folosit de R. H. Smith [5], pentru studiul mişcării potenţiale a unui fluid în jurul unui corp de revoluţie situat în spaţiul infinit. În acest caz soluţia poate fi pusă sub forma unui polinom de funcţii armonice sferice zonale (funcţiile lui Legendre P_n şi Q_n, de ordinul n şi de speţa întîia, respectiv a doua),

$$\varphi_0^{\star} = P_n(\mu) \times Q_n(\zeta), \qquad \psi_0^{\star} = \frac{k}{n(n+1)}(1-\mu^2)\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}(\zeta^2-1)\frac{dQ_n(\zeta)}{d\zeta},$$

date în coordonatele adimensionale

$$\mu = \left[1 - \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{k}\right)^2}\,\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\eta}{k} = \mu \times \zeta,$$

$$\zeta = \left[1 - \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{k}\right)^2}\,\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\xi}{k} = \sqrt{(1-\mu^2)(\zeta^2-1)},$$

unde $b = 1 - [(\xi^2 + \eta^2)/k^2]$, iar $\eta = \pm k$ sînt focarele comune suprafeţelor omofocale $\zeta = \mathrm{const}$ şi $\mu = \mathrm{const}$. O sumă de asemenea soluţii,

$$\varphi_1^{\star} = \sum_1^n A_n P_n(\mu) Q_n(\zeta), \quad \psi_1^{\star} = (1-\mu^2)(\zeta^2-1)\sum_1^n \frac{A_n k}{n(n+1)}\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\cdot\frac{dQ_n(\zeta)}{d\zeta},$$

este de asemenea o soluție a ecuațiilor (1). Peste această soluție se suprapune o mişcare paralelă de tipul (7). Coeficienții A_n se determină din condiția de a avea $\psi = 0$ într-un număr finit de puncte ale corpului.

7. Tot astfel, procedeul expus la punctele precedente poate fi apropiat de o idee dezvoltată în lucrarea [2], unde pentru sursa situată în axa unei conducte circulare se dă soluția

$$\varphi^\star = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} + \sum_1^n A_{2n}\,(\xi^2+\eta^2)^n\,P_{2_n}(\mu),$$

$$\psi^\star = \frac{1}{4\pi}(1-\mu) + \mu^2 \sum_1^n \frac{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{2n+1}{2}}}{2n+1}\,\frac{dP_{2n}(\mu)}{d\mu},$$

coefcienții A_n determinîndu-se din condiția ca într-un număr finit de puncte de pe conductă să avem $\psi^\star = 1/4\pi$, iar $\eta = \cos\theta$.

b. METODA REȚELELOR

8. A doua metodă folosită a fost metoda rețelelor, a cărei eficacitate fusese constatată şi cu prilejul altor lucrări [3], [4]. Însă, spre deosebire de cele expuse în lucrarea [4], de data aceasta s-a aplicat o schemă de calcul diferită, mai expeditivă, adaptată după lucrările lui R. V. Southwell [6], şi în special ale lui D. N. de G. Allen [1].

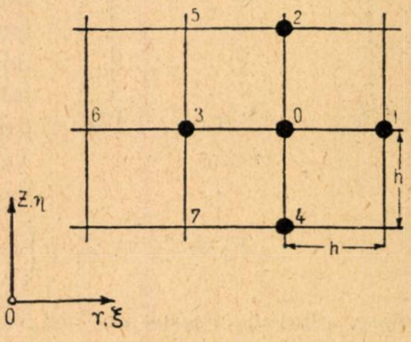


Fig. 3

Să presupunem că domeniul D, în care trebuie să integrăm ecuația

$$\frac{\partial^2\psi^\star}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\psi^\star}{\partial\xi^2} - \frac{1}{\xi}\,\frac{\partial\psi^\star}{\partial\xi} = 0, \tag{16}$$

este acoperit în întregime de o rețea pătratică, de pas h şi avînd laturile orientate paralel cu axele de coordonate (fig. 3). Derivatele parțiale care intervin în (16) pot fi exprimate, în mod aproximativ, prin diferențe finite, folosind relațiile cunoscute

$$\left(\frac{\partial\psi^\star}{\partial\xi}\right)_0 \simeq \frac{\psi_1^\star - \psi_3^\star}{2h}, \quad \left(\frac{\partial^2\psi^\star}{\partial\xi^2}\right)_0 \simeq \frac{\psi_1^\star + \psi_3^\star - 2\psi_0^\star}{h^2}, \quad \left(\frac{\partial^2\psi^\star}{\partial\eta^2}\right) \simeq \frac{\psi_2^\star + \psi_4^\star - 2\psi_0}{h_2},$$

scrise într-un punct curent O. Ecuația cu derivate parțiale (16) poate fi astfel înlocuită aproximativ în nodul O, prin relația

$$\psi_2^\star + \psi_4^\star + \left(1 - \frac{h}{2\xi_0}\right)\psi_1^\star + \left(1 + \frac{h}{2\xi_0}\right)\psi_3^\star - 4\psi_0^\star = 0. \tag{17}$$

Scriind cîte o asemenea relație în fiecare dintre cele n noduri de rețea din domeniul D, se obține un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute și ale cărui soluții reprezintă valorile funcției în aceste noduri. Calculul laborios (uneori practic imposibil), cerut de rezolvarea unui asemenea sistem, poate fi înlocuit prin următorul procedeu de aproximații succesive. Dăm inițial valori arbitrare funcției $\psi^\star$, în fiecare nod al rețelei. Atașăm apoi fiecărui nod valoarea

$$F_0 \equiv \psi_2^\star + \psi_4^\star + \left(1 - \frac{h}{2\xi_0}\right)\psi_1^\star + \left(1 + \frac{h}{2\xi_0}\right)\psi_3^\star - 4\psi_0^\star, \tag{18}$$

pe care, păstrînd terminologia lui Southwell și Allen, o numim *rezidual*. Deoarece valorile $\psi^\star$ din noduri sînt inițial arbitrare, este evident că rezidualul unui nod este în general diferit de zero și reprezintă o măsură a erorii afectată acelui nod. Dacă rezidualele tuturor nodurilor ar rezulta nule, sistemul de ecuații liniare de tipul (17) ar fi implicit satisfăcut, adică valorile $\psi^\star$ din noduri ar fi cele exacte. Problema constă deci în a găsi o schemă de calcul care să permită diminuarea rezidualelor, făcîndu-le să tindă către zero. Pentru aceasta, să considerăm un nod curent O (fig. 3) și să presupunem că dăm lui $\psi_0^\star$ o creștere unitară $+1$; formula (18) ne arată că valoarea rezidualului F_0 se va schimba cu -4. Pentru a calcula efectul creșterii lui $\psi_0^\star$, într-un nod vecin, de exemplu în nodul 3, vom observa că rezidualul acestui punct este

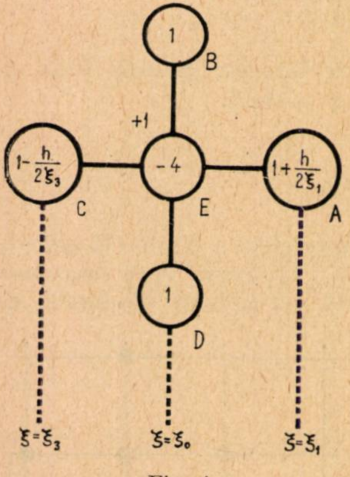


Fig. 4

$$F_3 \equiv \psi_5^\star + \psi_7^\star + \left(1 - \frac{h}{2\xi_3}\right)\psi_0^\star + \left(1 + \frac{h}{2\xi_3}\right)\psi_0^\star - 4\psi_3^\star,$$

deci, cînd ψ_0 crește cu $+1$, valoarea lui F_3 se schimbă cu $(1 - h/2\xi_3)$. Analog pentru aceeași creștere a lui $\psi_0^\star$, rezidualul F_1 se va schimba cu $(1 + h/2\xi_1)$, iar rezidualele F_2 și F_4 vor crește fiecare cu 1. Aceste rezultate sînt rezumate schematic în figura 4. Calculul constă deci în a aplica succesiv schema din figura 4, mereu celui mai mare rezidual din domeniu, pînă cînd valoarea tuturor rezidualelor scade sub o valoare considerată ca suficient de mică. Valoarea funcției într-un punct este egală cu valoarea inițială, dată arbitrar, la care se adună algebric toate creșterile adăugate atunci cînd s-a operat direct în acel punct (creșteri efective date funcției, nu și valori transmise de la punctele invecinate, deoarece acestea afectează numai valoarea rezidualului, nu și a funcției). Mai menționăm că, în cazul nodurilor din apropierea frontierei, nu mai este necesară transmiterea creșterilor la nodurile de pe contur, deoarece în acestea funcția $\psi^\star$ are valori fixe, date prin problemă. La punctul 13 s-a dat un exemplu practic de aplicare a metodei.

9. În cazul conturelor curbilinii, care intersectează reţeaua în puncte situate între noduri, se poate proceda în felul următor. Fie αh şi βh, $(0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1)$ distanţele punctelor de intersecţie A şi B la nodul cel mai apropiat 0 (fig. 5). Vom putea scrie

$$\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}\right)_{1'} \simeq \frac{\psi_1^* - \psi_0^*}{h}, \quad \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}\right)_{A'} \simeq \frac{\psi_0^* - \psi_A^*}{\alpha h},$$

deci

$$\left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\xi^2}\right)_0 \simeq \frac{(\partial\psi^*/\partial\xi)_{1'} - (\partial\psi^*/\partial\xi)_{A'}}{(h + \alpha\, h)/2} =$$

$$= \frac{2\psi_A^*}{h^2\,\alpha\,(1+\alpha)} + \frac{2\psi_1^*}{h^2\,(1+\alpha)} - \frac{2\psi_0^*}{h^2\alpha}. \qquad (19)$$

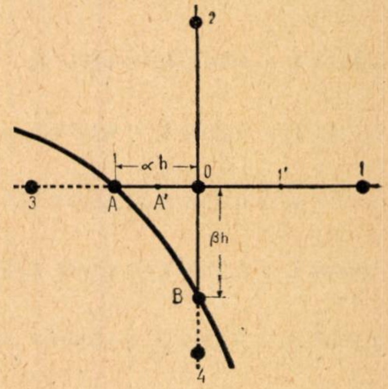


Fig. 5

Dacă, pe de altă parte, considerăm nodul fictiv 3, avem

$$\left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\xi^2}\right)_0 \simeq \frac{\psi_1^* + \psi_3^* - 2\,\psi_0^*}{h^2}, \qquad (20)$$

iar din egalarea membrului drept al fiecăreia din relaţiile (19) şi (20), rezultă

$$\psi_3^* = \frac{2}{\alpha\,(1+\alpha)}\,\psi_A^* + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,\psi_1^* - \frac{2\,(1-\alpha)}{\alpha}\,\psi_0^*. \qquad (21)$$

Analog, valoarea ψ_4^*, din nodul fictiv *4*, poate fi calculată cu formula

$$\psi_4^* = \frac{2}{\beta\,(1+\beta)}\,\psi_B^* + \frac{1-\beta}{1+\beta}\,\psi_2^* - \frac{2\,(1-\beta)}{\beta}\,\psi_0^*. \qquad (22)$$

Introducînd astfel nodurile fictive *3* şi *4*, schema de calcul din figura 4 poate fi aplicată direct. Se mai poate întîmpla ca acelaşi nod fictiv P să corespundă la două puncte diferite Q, R (fig. 6), funcţia ψ_P avînd două valori în general diferite, după cum e calculată din direcţia QP sau din direcţia RP. Ambele valori ψ_P vor fi întrebuinţate, anume fiecare în calculul schemei respective.

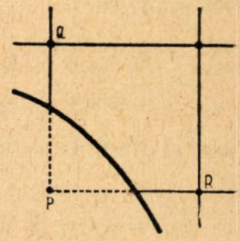


Fig. 6

II. EXEMPLE

a. MIŞCAREA ÎNTR-O CONDUCTĂ CIRCULARĂ PREVĂZUTĂ CU O DIAFRAGMĂ

10. Să considerăm cazul unei diafragme circulare, avînd raza egală cu jumătate din raza conductei (fig. 1). Dacă prin conductă se scurge debitul $Q = 128\pi$, atunci, deoarece $2\pi(\psi_l - \psi_0) = Q$, avem $\psi_l = 128\,\pi/2\pi = 64$,

care constituie valoarea liniei de curent extreme (peretele $r = R$ al conductei). Trecînd la mărimi adimensionale cu $V_\infty R^2 = Q^\star/\pi = 128$, rezultă $\psi = 128\ \psi^\star$, deci pe peretele $\xi = 1$ al conductei trebuie să avem $\psi^\star = 0{,}5$. Vom pune aceeași condiție și în opt puncte de pe diafragmă, ale căror abscise au valorile : $\xi_1 = 0{,}5000$; $\xi_2 = 0{,}5625$; $\xi_3 = 0{,}6250$; $\xi_4 = 0{,}6875$; $\xi_5 = 0{,}7500$; $\xi_6 = 0{,}8125$; $\xi_7 = 0{,}8750$; $\xi_8 = 0{,}9375$. Sistemul (14) ia atunci forma

$$\left.\begin{aligned}
&0{,}5807\ k_1 + 0{,}1341\ k_2 - 0{,}3360\ k_3 - 0{,}1067\ k_4 + 0{,}2610\ k_5 + 0{,}0909\ k_6 -\\
&\qquad - 0{,}2210\ k_7 - 0{,}0805\ k_8 = 0{,}7500,\\
&0{,}5619\ k_1 - 0{,}0454\ k_2 - 0{,}3214\ k_3 + 0{,}1339\ k_4 + 0{,}2066\ k_5 - 0{,}1819\ k_6 -\\
&\qquad - 0{,}1109\ k_7 + 0{,}1982\ k_8 = 0{,}6076,\\
&0{,}5213\ k_1 - 0{,}1982\ k_2 - 0{,}1928\ k_3 + 0{,}2674\ k_4 - 0{,}0299\ k_5 - 0{,}1992\ k_6 +\\
&\qquad + 0{,}1658\ k_7 + 0{,}0549\ k_8 = 0{,}4875,\\
&0{,}4611\ k_1 - 0{,}3025\ k_2 - 0{,}0064\ k_3 + 0{,}2237\ k_4 - 0{,}2164\ k_5 + 0{,}0351\ k_6 +\\
&\qquad + 0{,}1478\ k_7 - 0{,}1840\ k_8 = 0{,}3835,\\
&0{,}3846\ k_1 - 0{,}3453\ k_2 + 0{,}1661\ k_3 + 0{,}0453\ k_4 - 0{,}1873\ k_5 + 0{,}2046\ k_6 -\\
&\qquad - 0{,}1089\ k_7 - 0{,}0338\ k_8 = 0{,}2917,\\
&0{,}2957\ k_1 - 0{,}3241\ k_2 + 0{,}2634\ k_3 - 0{,}1470\ k_4 + 0{,}0128\ k_5 + 0{,}1015\ k_6 -\\
&\qquad - 0{,}1673\ k_7 + 0{,}1723\ k_8 = 0{,}2091,\\
&0{,}1989\ k_1 - 0{,}2473\ k_2 + 0{,}2557\ k_3 - 0{,}2332\ k_4 + 0{,}1861\ k_5 - 0{,}1230\ k_6 +\\
&\qquad + 0{,}0527\ k_7 + 0{,}0158\ k_8 = 0{,}1339,\\
&0{,}0987\ k_1 - 0{,}1317\ k_2 + 0{,}1532\ k_3 - 0{,}1669\ k_4 + 0{,}1740\ k_5 - 0{,}1751\ k_6 +\\
&\qquad + 0{,}1709\ k_7 - 0{,}1618\ k_8 = 0{,}0646
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

cu soluțiile

$$\left.\begin{aligned}
&k_1 = 1{,}13314\ ;\ k_2 = 0{,}32817\ ;\ k_3 = -0{,}29364\ ;\ k_4 = -0{,}50194,\\
&k_5 = -0{,}38877\ ;\ k_6 = -0{,}19195\ ;\ k_7 = -0{,}06350\ ;\ k_8 - = 0{,}01285.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

astfel încît funcția de curent are forma

$$\begin{aligned}
\psi^\star = \frac{\xi^2}{2} + \xi\,[&1{,}13314\ J_1(\beta_1\xi)\,e^{-\beta_1|\eta|} + 0{,}32817\ J_1(\beta_2\xi)\,e^{-\beta_2|\eta|} -\\
&- 0{,}29364\ J_1(\beta_3\xi)\,e^{-\beta_3|\eta|} - 0{,}50194\ J_1(\beta_4\xi)\,e^{-\beta_4|\eta|} -\\
&- 0{,}38877\ J_1(\beta_5\xi)\,e^{-\beta_5|\eta|} - 0{,}19195\ J_1(\beta_6\xi)\,e^{-\beta_6|\eta|} -\\
&- 0{,}06350\ J_1(\beta_7\xi)\,e^{-\beta_7|\eta|} - 0{,}01285\ J_1(\beta_8\xi)\,e^{-\beta_8|\eta|}].
\end{aligned} \tag{25}$$

Pentru a verifica în ce măsură expresia (25) satisface condițiile la limită pe diafragmă, s-a calculat valoarea lui $\psi^\star$ în alte patru puncte ale acesteia.

Rezultatele calculului, cuprinse în tabela 1, arată că funcţia de curent obţinută este suficient de exactă pentru un calcul practic. De aceea, ea a fost folosită pentru calculul lui ψ^* într-un număr de 91 de puncte ale domeniului; rezultatele sînt date în tabela 2. Liniile de curent corespunzătoare acestor valori sînt arătate în figura 7 (liniile pline). După cum se observă, soluţia (25) nu dă valori acceptabile în apropierea originii. De aceea, în această regiune mişcarea din conductă poate fi aproximată prin cea a unei diafragme infinite. Se ştie că în acest caz suprafeţele de curent sînt hiperboloizi de revoluţie, a căror urme în planul median sînt hiperbolele omofocale definite prin

Tabela 1

ξ	0,53125	0,59375	0,65625	0,71875
ψ^*	64,064	63,974	63,962	64,000

$$\frac{\xi^2}{c^2 \sin^2 \zeta} - \frac{\eta^2}{c^2 \cos^2 \zeta} = 1, \tag{26}$$

c fiind abscisa focarului. Funcţia de curent are atunci expresia $\psi^* = 1 - \cos \zeta$.

Tabela 2

ξ \ η	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000	1,250	1,500	1,750	2,000
0,125	−5,3120	2,3168	2,5600	2,0608	1,6640	1,4080	1,2416	1,1520	1,0880	1,0368	1,0112	0,9984	0,9984
0,250	21,6704	14,5792	10,5472	8,0000	6,4256	5,4912	4,9152	4,5568	4,3520	4,1344	4,0576	4,0320	4,0192
0,375	56,5248	32,3968	22,0416	16,6656	13,6192	11,8144	10,7261	10,0608	9,6512	9,2544	9,1008	9,0368	9,0112
0,500	64,0000	44,8128	33,1648	26,3680	22,3360	19,9040	18,4064	17,4848	16,9216	16,3456	16,1408	16,0512	16,0256
0,625	64,0000	51,6736	42,2400	35,8784	31,8208	29,2480	27,6480	26,6368	26,0096	25,3952	25,1520	25,0496	25,0240
0,750	64,0000	56,2688	49,8304	45,0560	41,7920	39,6800	38,3104	37,4528	36,9024	36,3520	36,1472	36,0704	36,0320
0,875	64,0000	60,1216	56,8192	54,2464	52,4160	51,1744	50,3808	49,8560	49,5360	49,2160	49,0752	49,0240	49,0112

În figura 7 se reprezintă acest caz, prin linii intrerupte. În figura 11 se reprezintă rezultatele date de formula (25) — cu linie plină; curbele pentru cazul diafragmei infinite — cu linie intreruptă; rezultatele obținute cu metoda rețelelor — cu linie punctată. Se observă că, în apropierea originei, ipoteza făcută poate fi admisă.

11. Același caz a fost studiat cu metoda rețelelor (fig. 8) care a fost aplicată apoi și la cazurile analoage reprezentate în figurile 9 și 10. Domeniile considerate au fost luate de fiecare dată limitate de dreapta $\eta = 2{,}5$, dar, din motive grafice, au fost reproduse numai pînă la dreapta $\eta = 1{,}5$. Pentru diafragma cu $a/R = 1/4$ a fost calculată și diagrama presiunilor folosind formula

$$\Delta p = p - p_\infty = \frac{\rho}{2}(V_\infty^2 - V^2) = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\rho}{2} V_\infty^2 (1 - V^{*2}) = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 C_p, \tag{27}$$

unde $V^2 = u^2 + v^2$, iar C_p este coeficientul de presiune (fig. 12).

b. MIȘCAREA ÎNTR-O CONDUCTĂ CIRCULARĂ ÎN PREZENȚA UNEI SFERE SAU A UNUI ELIPSOID

12. Exemplele studiate sînt arătate în figurile 13, 14, 15, 16, pentru o sferă de rază a, și în figurile 17, 18, 19, 20, pentru un elipsoid de semiaxe a și b, situate într-o conductă de rază R. În afara liniilor de curent, s-a calculat și coeficientul de presiune C_p; la sferă a fost trasată variația lui C_p și pentru cazul spațiului infinit, folosind formula cunoscută

$$C_p = 1 - \frac{9}{4}\sin^2 \theta. \tag{28}$$

Valorile pentru care s-a calculat efectiv presiunea pot folosi pentru interpolări în cazurile intermediare. Se observă că pentru raportul $a/R = 1/4$, influența pereților devine practic neglijabilă. Mai menționăm că, la fel ca în cazul diafragmelor, domeniile în care s-a aplicat metoda rețelelor au fost limitate, de fiecare dată, de dreapta $\eta = 2{,}5$, dar că, din motive grafice, nu au fost reproduse decît valorile pînă la $\eta = 1{,}5$.

13. Vom exemplifica mersul calculului cu metoda rețelelor printr-un singur caz concret, anume domeniul dreptunghiular din figura 21. Rețeaua folosită are pasul $h = 1/8$; în nodurile de pe contur sînt date valorile 59, 136, 232,... Valorile din nodurile interioare domeniului, deși principial pot fi luate complet arbitrar, se aleg în conformitate cu valorile de pe

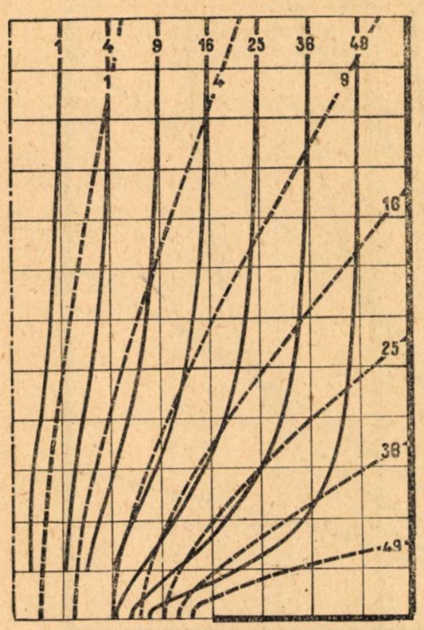


Fig. 7

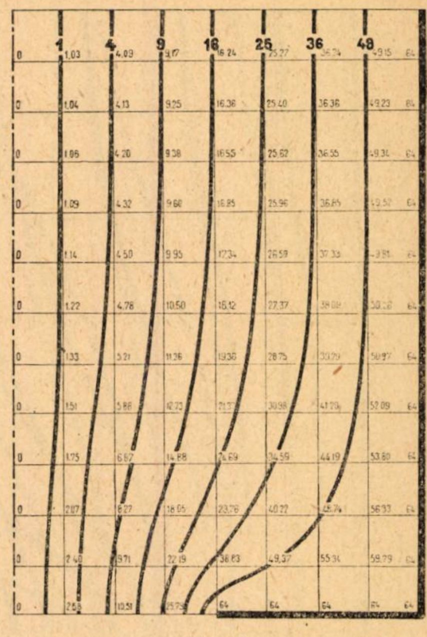


Fig. 8

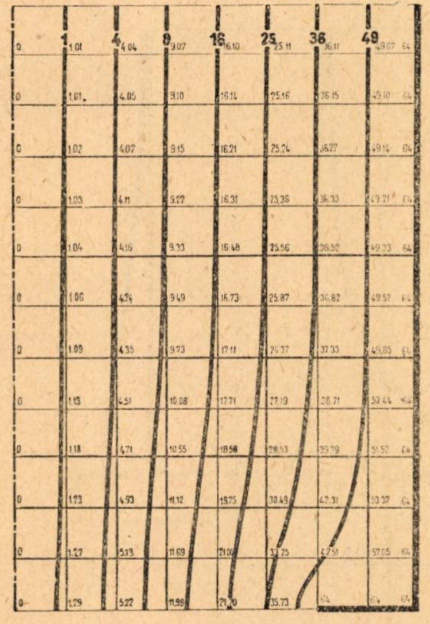


Fig. 9

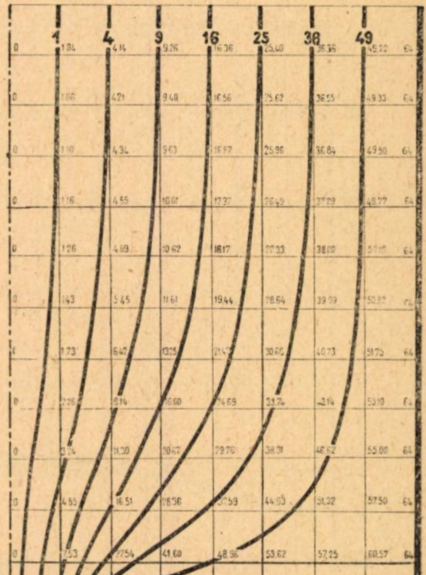


Fig. 10

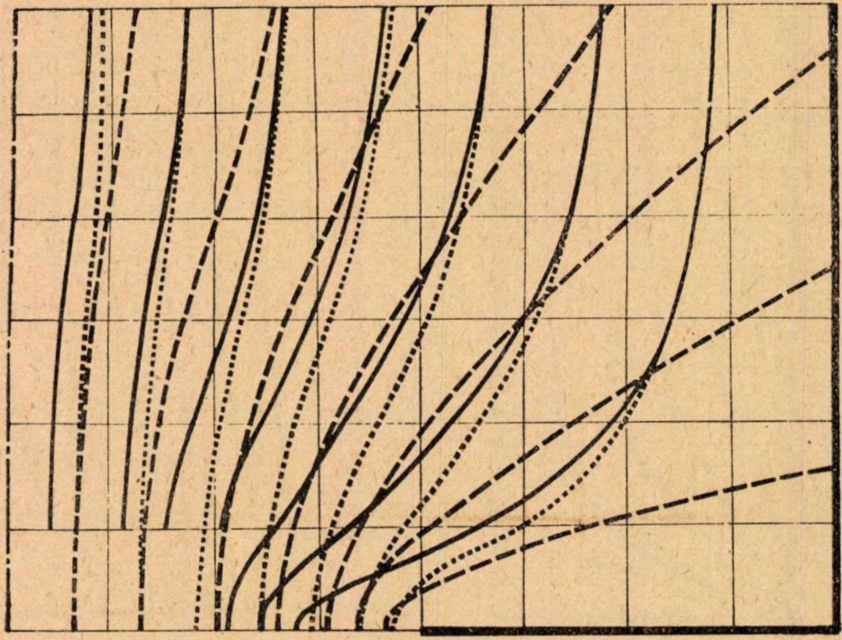


Fig. 11

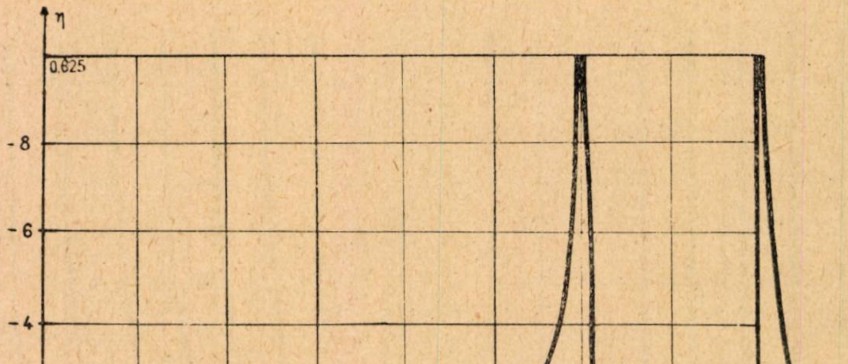


Fig. 12

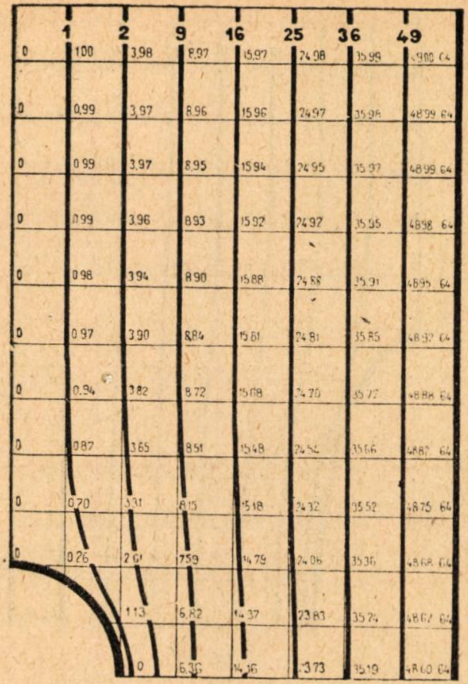


Fig. 13

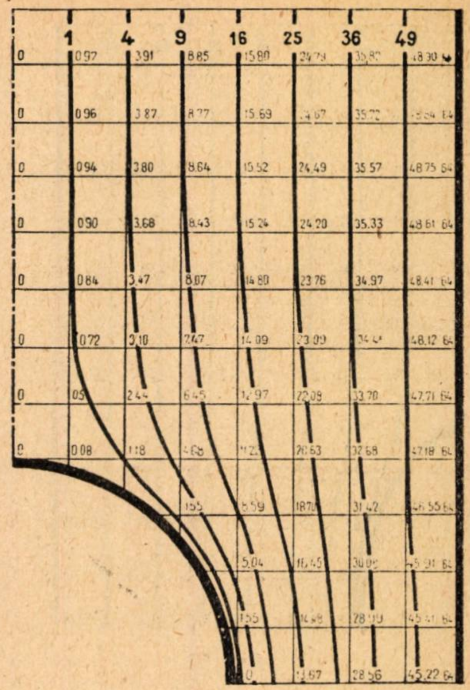


Fig. 14

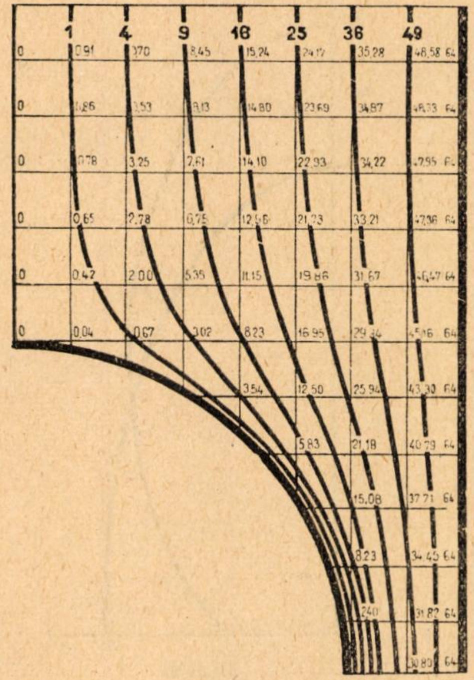


Fig. 15

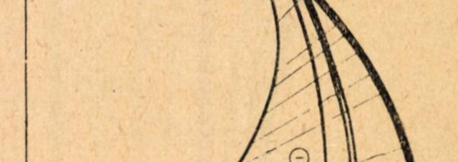


Fig. 16

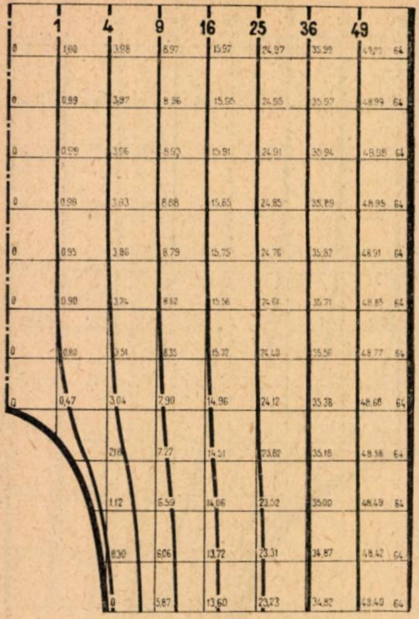

1 4 9 16 25 36 49
0 1,00 3.98 8.97 15.97 24.97 35.99 48.99 64
0 0.99 3.97 8.96 15.95 24.95 35.97 48.99 64
0 0.99 3.96 8.92 15.91 24.91 35.94 48.98 64
0 0.98 3.93 8.88 15.65 24.85 35.89 48.95 64
0 0.95 3.86 8.79 15.75 24.76 35.87 48.91 64
0 0.90 3.74 8.62 15.56 24.61 35.71 48.85 64
0 0.80 3.51 8.35 15.32 24.40 35.56 48.77 64
0 0,47 3.04 7.90 14.96 24.12 35.38 48.68 64
2.16 7.27 14.51 23.82 35.18 48.58 64
1.12 6.59 14.06 23.52 35.00 48.49 64
0.30 6.06 13.72 23.31 34.87 48.42 64
0 5.87 13.60 23.23 34.82 48.40 64

Fig. 17

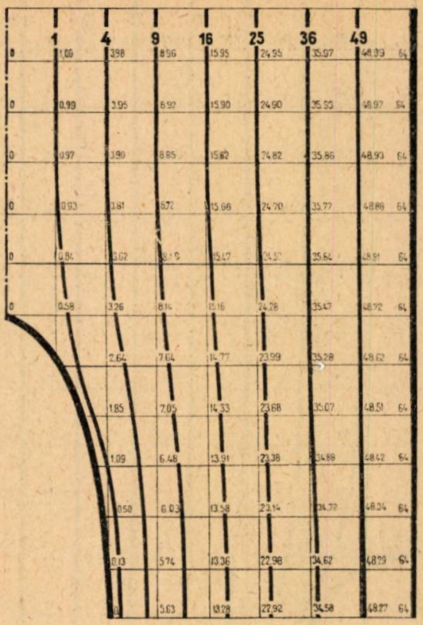

1 4 9 16 25 36 49
0 1,00 3.98 8.96 15.95 24.95 35.97 48.99 64
0 0.99 3.95 8.92 15.90 24.90 35.93 48.97 64
0 0.97 3.90 8.85 15.82 24.82 35.86 48.93 64
0 0.93 3.81 8.72 15.66 24.70 35.77 48.88 64
0 0.84 3.62 [illegible] 15.47 [illegible] 35.64 48.81 64
0 0.58 3.26 8.14 15.16 24.28 35.47 48.72 64
2.64 7.64 14.77 23.99 35.28 48.62 64
1.85 7.05 14.33 23.68 35.07 48.51 64
1.09 6.48 13.91 23.38 34.88 48.42 64
0.50 6.03 13.58 23.14 34.72 48.34 64
0.13 5.74 13.36 22.98 34.62 48.29 64
0 5.63 13.28 22.92 34.58 48.27 64

Fig. 18′

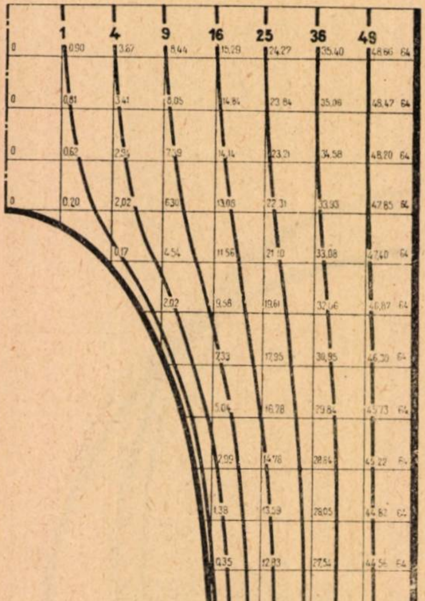

1 4 9 16 25 36 49
0 0.90 3.67 8.44 15.29 24.27 35.40 48.66 64
0 0.81 3.41 8.05 14.84 23.84 35.06 48.47 64
0 0.62 2.94 7.39 14.14 23.21 34.58 48.20 64
0 0.20 2.02 6.30 13.08 22.31 33.93 47.85 64
0.17 4.54 11.56 21.10 33.08 47.40 64
2.02 9.58 19.61 32.66 46.87 64
7.33 17.95 30.95 46.30 64
5.04 16.78 29.84 45.73 64
2.99 14.78 28.84 45.22 64
1.38 13.59 28.05 44.82 64
0.35 12.83 27.54 44.56 64
0 12.57 27.37 44.47 64

Fig. 19

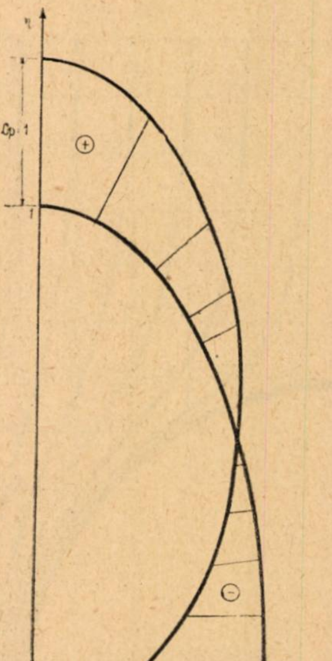


Fig. 20

contur, ceea ce scurtează calculele ; aceste valori iniţiale sînt trecute în dreptul fiecărui nod, în stînga sus : 60, 65, 137,... Ele folosesc la calculul rezidualelor, aplicînd formula (18) :

$$F_{\mathrm{I}} = 65 + 59 + \left(1 - \frac{1/8}{2 \times 0{,}375}\right)137 + \left(1 + \frac{1/8}{2 \times 0{,}375}\right)3 - 4 \times 60 = 2.$$

În mod analog, rezultă $F_{\mathrm{II}} = 5$, $F_{\mathrm{III}} = 3$, $F_{\mathrm{IV}} = -10$, $F_{\mathrm{V}} = -3$, $F_{\mathrm{VI}} = 0$, valori care sînt scrise la fiecare nod în dreapta sus. Calculul se începe în nodul al cărui rezidual este maxim (în valoare absolută), deci în IV. O creştere -2, dată în acest mod şi scrisă deasupra lui 143, schimbă rezidualul F_{IV}, conform schemei din figura 4, cu $(-4)(-2) = 8$, transformîndu-l în -2, valoare scrisă deasupra lui -10. Tot în conformitate cu schema din figura 4, creşterea din IV se transmite neschimbată în III, al cărui rezidual devine 1. În nodul VI, aceeaşi creştere se transmite cu valoarea $(-2)(1 + h/2\,\xi_{\mathrm{VI}}) = (-2)(9/8) \simeq -2$, iar în nodul II — cu valoarea $(-2)(1 - h/2\,\xi_{\mathrm{II}}) = (-2)(7/8) \simeq -2$; în aceste puncte, rezidualele devin respectiv -2 şi 3. (În această primă fază, nu e necesar să lucrăm cu zecimale). Valorile corespunzătoare acestui calcul sînt scrise cu caractere groase. În continuare, se trece în nodul II, unde dăm o creştere 1, care îi schimbă rezidualul în -1. Aceeaşi creştere se transmite în I cu valoarea 1 şi în IV tot cu valoarea 1, rezidualele din aceste puncte devenind respectiv 3 şi -1. Rezultatele acestui calcul sînt scrise cu caractere înclinate. Procedeul este reluat în nodurile I (rezultate încercuite), V (rezultate în pătrate) şi VI (rezultate în triunghiuri) ; pentru micşorarea ulterioară a rezidualelor se poate continua dînd creşteri subunitare, ceea ce nu este necesar pentru exemplificarea metodei. Adunînd algebric valorile scrise în cadranul al doilea al fiecărui nod, se obţine valoarea funcţiei ψ în acel nod. Este evident că, în practică, nu este necesară o diferenţiere a cifrelor (cum s-a făcut în figura 21 pentru urmărirea expunerii), deoarece într-un

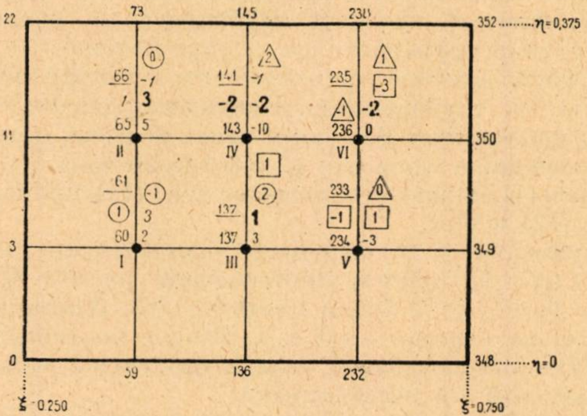


Fig. 21

nod interesează toate creşterile efective date valorii funcţiei, dar numai ultima valoare a rezidualului; coloana din cadranul al doilea trebuie păstrată integral, în timp ce cifrele coloanei din cadranul întîi pot fi şterse, păstrînd numai pe ultima.

Primită la redacţie la 5 mai 1958.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

1. Исследуется осесимметричное движение несжимаемой идеальной жидкости, ограниченной круглым трубопроводом, оснащенным диафрагмой или круглым трубопроводом, внутри которого находится тело, симметрически расположенное по отношению к центру симметрии, расположенному по оси трубопровода. Приводятся два численных метода расчета: метод многочленов Бесселя и метод решеток (релаксации).

2. При потенциале скорости $\varphi^{\star}$ и функции тока $\psi^{\star}$, удовлетворяющих уравнениям (1), можно дать решение типа (11), причем компоненты скорости даны (12) и (13).

Предположим, что в трубопроводе находится круглая диафрагма $\eta = 0$, $a \leqslant \xi \leqslant 1$ $(a < 1)$, причем протекающий расход $Q = \pi$ (рис. 1). При $\xi = 1$ и $\eta = 0$, $a < \xi < 1$ будем иметь $\psi = 0{,}5$. Запишем это условие в n точках $(\xi_j, 0)$ на отрезке $a < \xi < 1$. Второе соотношение (11) даст соотношение (14) и, следовательно, задача сводится к решению системы n линейных уравнений с n неизвестными.

3. Если в трубопроводе находится симметрическое по отношение к центру O осей координат тело (рис. 2), на его поверхности будем иметь $\psi = 0$. Это условие, будучи записано в n точках (ξ_j, η_j) тела и заменено во втором уравнении (11), приводит к системе (15) n линейных уравнений с n неизвестными.

4 Вторым использованным методом является метод решеток (релаксации) в виде, аналогичном разработанному Р. В. Саусвеллем и Д.Н. Алленом.

5. Оба метода были применены при исследовании движения в трубопроводе, оснащенном диафрагмой. Метод решеток был затем применен при изучении движения вокруг шара или эллипсоида, расположенного внутри трубопровода.

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR L'ÉTUDE DES MOUVEMETS À SYMÉTRIE AXIALE DES FLUIDES PARFAITS

RÉSUMÉ

1. Les auteurs étudient le mouvement à symétrie axiale d'un fluide parfait incompressible, limité par une conduite circulaire, munie d'un diaphragme, ou par une conduite circulaire à l'intérieur de laquelle se

trouve un corps symétrique par rapport à un centre de symétrie situé sur l'axe de la conduite. On présente deux méthodes numériques de calcul : la méthode des polynômes de Bessel et la méthode des réseaux (méthode de relaxation).

2. Le potentiel de vitesse φ^* et la fonction de courant ψ^* satisfaisant aux équations (1), on peut donner une solution du type (11), les composantes de la vitesse étant données par (12), (13). On admet que, dans la conduite, se trouve le diaphragme circulaire $\eta = 0$, $a \leqslant \xi \leqslant 1$, $(a < 1)$, le débit écoulé étant $Q = \pi$ (fig. 1). Pour $\xi = 1$ et $\eta = 0$, $a < \xi < 1$, on aura $\psi = 0{,}5$ et, en écrivant cette condition en n points $(\xi_j, 0)$ sur le segment $a < \xi < 1$, la seconde des relations (11) donnera la relation (14), le problème se réduit donc à résoudre un système de n équations linéaires à n inconnues.

3. Si dans la conduite se trouve un corps, symétrique par rapport au centre O des axes de coordonnées (fig. 2), on aura sur cette surface $\psi = 0$ et, en écrivant cette condition en des points (ξ_j, η_j) du corps et en la substituant dans la deuxième équation (11), on est conduit au système (15) de n équations linéaires à n inconnues.

4. La seconde méthode utilisée a été la méthode des réseaux (méthode de relaxation), sous une forme analogue à celle élaborée par R. V. Southwell et D. N. de G. Allen.

5. Les deux méthodes ont été appliquées à l'étude du mouvement dans une conduite munie d'un diaphragme. La méthode des réseaux a été ensuite appliquée à l'étude du mouvement autour d'une sphère ou d'un ellipsoïde, situés à l'intérieur d'une conduite.

BIBLIOGRAFIE

1. D. N. DE G. ALLEN, *Relaxation Methods*. Londra, Mc Graw – Hill, 1955.
2. D. DUMITRESCU, *Quelle bezw. Senke im Kreisrohr*. Mitteilungen der Technischen Hochschule Bukarest, **XV**, 70 (1944).
3. D. DUMITRESCU şi V. IONESCU,, *Metode numerice in studiul scurgerii peste deversoare*. Comunicările Acad. R. P. R., **VIII**, 4, 387 (1958).
4. D. DUMITRESCU, V. IONESCU şi R. TOTH, *Aplicarea metodei reţelelor la studiul mişcării fluidelor grele cu suprafaţă liberă*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VI**, 3–4, 339 (1955).
5. R. H. SMITH, *Longitudinal Potential Flow About an Arbitrary Body of Revolution with Application to the Airship „Akron"*. J. of the Aeronaut. Sci., **3**, 26 (1935).
6. R. V. SOUTHWELL. *Relaxation Methods in Theoretical Physics*. Clarendon Press, Oxford, 1946—1949.

HIDROMECANICĂ

ASUPRA UNEI CLASE DE SCURGERI PRIN MEDII POROASE NEOMOGENE

DE

T. OROVEANU

1. Într-o lucrare anterioară*), am arătat că, dacă se consideră scurgerea unui fluid incompresibil printr-un mediu poros a cărui permeabilitate este funcţie de punct, pot fi obţinute unele soluţii particulare, cu ajutorul unor consideraţii elementare. Revenind acum asupra acestei probleme, vom reaminti că ea constă în rezolvarea ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0, \tag{1}$$

unde $k\ (x,\ y,\ z)$ este permeabilitatea, iar

$$\varphi=-\frac{1}{\mu}(p+U), \tag{2}$$

μ fiind viscozitatea fluidului, presupusă constantă, p presiunea şi U potenţialul forţelor exterioare. Bineînţeles, am presupus că scurgerea se produce în condiţiile de valabilitate a legii lui Darcy.

În lucrarea citată*), am considerat scurgerea plană şi am pus condiţia ca rotorul vitezei de filtrare să fie nul. Vom relua această condiţie, într-un caz mai general, admiţînd în primul rînd că scurgerea este tridimensională. Deoarece componentele vitezei de filtrare au expresiile

$$v_x=k\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v_y=k\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad v_z=k\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{3}$$

---

*) T. Oroveanu, *Soluţii particulare ale ecuaţiei scurgerii prin medii poroase neomogene.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1*, 83 (1958).

condiția ca rotorul să fie nul conduce la relațiile

$$\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0\,, \qquad \frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

care sînt satisfăcute dacă între funcțiile φ și k există o relație de forma

$$\varphi = \sigma k^{\beta} + C_1, \tag{5}$$

așa cum se verifică imediat. Constantele σ, β și C_1 pot avea orice valoare finită, pozitivă sau negativă, C_1 putînd fi eventual nulă. Ținînd seama de (5), ecuația (1) devine

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k^{\beta}\frac{\partial k}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k^{\beta}\frac{\partial k}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k^{\beta}\frac{\partial k}{\partial z}\right) = 0, \tag{6}$$

sau

$$\frac{\partial^2 (k^{1+\beta})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (k^{1+\beta})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (k^{1+\beta})}{\partial z^2} = 0, \tag{7}$$

funcția $k^{1+\beta}$ fiind așa dar armonică. Suprafețele de permeabilitate constantă (izoperme) coincid cu suprafețele echipotențiale, ca și în cazul particular tratat în lucrarea citată *), în care $\beta = 1$. Atunci cînd permeabilitatea este o funcție armonică ($\beta = 0$), relația (5) nu ne indică forma funcției φ; mai departe vom reveni însă asupra acestei situații. De asemenea, alegînd constanta C_1 egală cu zero, funcția φ^q este armonică dacă există relația

$$q = \frac{1+\beta}{\beta}, \tag{8}$$

care își pierde sensul petru cazul $\beta = 0$ semnalat mai înainte ca și pentru $\beta = -1$. În acest ultim caz, se constată însă ușor că funcția $\log k$ este armonică.

Relația între funcțiile φ și k se mai poate pune și sub forma

$$k = m\varphi^{\alpha} + C_2, \tag{9}$$

iar atunci cînd $C_2 = 0$, m și α fiind oarecare, din (1) rezultă

$$\frac{\partial^2 (\varphi^{1+\alpha})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\varphi^{1+\alpha})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\varphi^{1+\alpha})}{\partial z^2} = 0, \tag{10}$$

funcția $\varphi^{1+\alpha}$ fiind deci armonică. În particular, pentru $\alpha = 0$ permeabilitatea este constantă și funcția φ este armonică, rezultat bine cunoscut din teoria scurgerilor prin medii poroase omogene și care se deduce direct din (1) dacă funcția k se reduce la o constantă.

---

*) *Op. cit.*

Mai precizăm că situația semnalată în ultimul punct al lucrării citate *) nu diferă esențial de cele arătate mai sus. Într-adevăr, punînd

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\lambda(x,y,z)\frac{\partial k}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\lambda(x,y,z)\frac{\partial k}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\lambda(x,y,z)\frac{\partial k}{\partial z},\tag{11}$$

funcția λ nu poate fi absolut oarecare, ci trebuie să satisfacă relațiile

$$\begin{gathered}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial k}{\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial k}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial k}{\partial z}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial k}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial k}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial k}{\partial y}=0,\end{gathered}\tag{12}$$

fapt care se realizează atunci cînd avem

$$\lambda=nk^{\gamma}+C_3\tag{13}$$

și, luînd $C_3=0$, din (11) rezultă

$$\varphi=\frac{n}{1+\gamma}k^{1+\gamma}+C_4,\tag{14}$$

adică o relație între φ și k de aceeași formă cu (5).

În ceea ce privește cazul scurgerii plane, rotorul vitezei de filtrare fiind nul, funcția de curent ψ este armonică și se constată, printr-un calcul simplu că, dacă ne referim la relația (5) cu $C_1=0$, funcția ψ este conjugată armonic cu funcția $\frac{\beta}{\lambda(1+\beta)}\varphi^{\frac{1+\beta}{\beta}}$. De asemenea, dacă ne raportăm la relația (9) în care punem $C_2=0$, rezultă imediat că ψ este conjugată armonic cu $\frac{m}{1+\alpha}\varphi^{1+\alpha}$. Cînd $\varphi=\beta=1$, regăsim cazul particular semnalat în lucrarea *).

2. Condiția ca rotorul vitezei de filtrare să fie nul comportă însă și o formulare mai generală. Se știe astfel că relațiile de forma (4) între funcțiile φ și k sînt satisfăcute, în cazul cel mai general, atunci cînd φ este o funcție oarecare de k,

$$\varphi=\varphi\,(k).\tag{15}$$

Legile corespunzătoare de variație a permeabilității sînt soluțiile ecuației

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\varphi}{dk}k\frac{\partial k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\varphi}{dk}k\frac{\partial k}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\varphi}{dk}k\frac{\partial k}{\partial z}\right)=0.\tag{16}$$

Dificultățile pe care le prezintă rezolvarea ecuației (16) depind de forma funcției $\varphi\,(k)$. În particular, aceasta poate fi (5) și atunci regăsim rezultatele precedente. Un caz simplu, care trebuie semnalat, se referă la o relație de forma

---

*) *Op. cit.*

$$\varphi = a \log k + b, \tag{17}$$

a și b fiind constante arbitrare. Se observă imediat că funcția k este armonică, fapt care corespunde lui $\beta = 0$ în ecuația (7) ; am determinat astfel și pentru acest caz forma funcției care nu poate fi găsită din (5).

3. Pentru a da un exemplu, vom considera o scurgere plană în domeniul cuprins între două cercuri concentrice, cu centrul în origină și avînd razele r_c și r_s ($r_c > r_s$). Vom presupune că permeabilitatea are o astfel de variație în acest domeniu încît funcția $k^{1+\beta}$ să fie armonică. În acest caz, este suficient să se cunoască valorile permeabilității, respectiv ale funcției $k^{1+\beta}$, pe cercurile de rază r_c și r_s, deoarece se știe că o funcție armonică uniformă admite în coroana circulară considerată o dezvoltare de forma

$$\begin{aligned} k^{1+\beta} = a \log r + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(\alpha_n r^n + \alpha_{-n} r^{-n}) \cos n\theta - (\beta_n r^n - \\ - \beta_{-n} r^{-n}) \sin n\theta], \end{aligned} \tag{18}$$

coeficienții a, α_0, α_n, α_{-n}, β_n și β_{-n} putînd fi determinați prin procedeul cunoscut, cu ajutorul dezvoltărilor în serie Fourier ale funcției $k^{1+\beta}$ pe cercurile de rază r_c și r_s. În conformitate cu rezultatele anterioare, poate exista în coroana circulară considerată o scurgere cu rotor nul al vitezei de filtrare, așa fel încît funcția $\varphi^{\frac{1+\beta}{\beta}}$ să fie armonică. Vom avea deci

$$\varphi = [\sigma^{\frac{1+\beta}{\beta}} k^{1+\beta} + \sigma_0]^{\frac{\beta}{1+\beta}}, \tag{19}$$

unde am mai introdus o constantă arbitrară σ_0. Funcția armonică $\varphi^{\frac{1+\beta}{\beta}}$ admite deci o dezvoltare analoagă cu (18), ai cărei coeficienți rezultă în urma determinării constantelor σ și σ_0. În general, dacă Φ este o funcție armonică ce reprezintă soluția unei probleme de scurgere printr-un mediu poros omogen, putem înlocui acest mediu cu altul a cărui permeabilitate variază după legea

$$k^{1+\beta} = a\,\Phi + b, \tag{20}$$

unde a și b sînt constante arbitrare. Funcția

$$\varphi = [\sigma^{\frac{1+\beta}{\beta}} (a\,\Phi + b) + \sigma_0]^{\frac{\beta}{1+\beta}}, \tag{21}$$

în a cărei expresie λ_0 este o nouă constantă arbitrară, reprezintă o scurgere posibilă prin mediul poros definit mai sus. Într-o serie de cazuri, condițiile la limită pentru funcția φ pot fi stabilite ușor, cu ajutorul celor satisfăcute de funcția Φ. Această metodă indirectă de stabilire a unor soluții particulare a ecuației scurgerii prin medii poroase neomogene de un anumit tip are desigur aplicații restrînse, dar poate conduce la unele rezultate interesante.

Mai menționăm că, dacă se consideră o scurgere plan-radială printr-un mediu poros a cărui permeabilitate variază de asemenea numai radial, condiția ca rotorul vitezei de filtrare să fie nul este satisfăcută automat. Avem într-adevăr în acest caz

$$v_r = k(r)\frac{d\varphi}{dr}, \quad v_\theta = 0 \tag{22}$$

și

$$\Omega_z = -\frac{1}{r}\left[\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r}\right] = 0. \tag{23}$$

4. Cazul general în care φ este o funcție oarecare de k poate fi prezentat sub forma care elimină dificultățile ivite la rezolvarea ecuației (16), atunci cînd se cunoaște relația inversă

$$k = k(\varphi) \tag{24}$$

și se introduce funcția

$$\chi = \int k(\varphi)\, d\varphi + C. \tag{25}$$

Se verifică numaidecît că avem

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0, \tag{26}$$

funcția χ fiind deci armonică. Dacă se consideră un anumit domeniu în care se produce scurgerea, condițiile la limită pentru funcția φ fiind date, alegerea unei relații $k(\varphi)$ definește, cel puțin în anumite cazuri mai simple, condițiile la limită pentru funcția χ și face deci posibilă rezolvarea ecuației (26). Din (25) se determină apoi funcția φ și legea corespunzătoare de variație a permeabilității. Pentru a preciza, procedeul indicat poate fi ușor aplicat dacă pe frontierea domeniului considerat sînt date valorile funcției φ. De asemenea, ținînd seama de faptul că în cazul scurgerii plane funcția de curent ψ este armonică și conjugată cu χ, se poate considera și problema mixtă, pe anumite porțiuni ale frontierei fiind dată funcția φ, respectiv χ prin intermediul relației (25), iar pe celelalte funcția ψ. Toate cazurile semnalate mai înainte pot fi incluse în acest mod de tratare, dar trebuie să remarcăm faptul că sînt necesare unele precauții și se ivesc anumite dificultăți. Astfel, relația între φ și χ definită prin (25) nu este în general biunivocă, iar explicitarea lui φ nu este totdeauna posibilă. De exemplu, dacă funcția $k(\varphi)$ este un polinom, la o valoare a lui χ corespund mai multe valori ale lui φ, iar dacă polinomul este de grad superior, explicitarea lui φ în funcție de χ devine imposibilă.

Primită la redacție la 27 mai 1958.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе распространяются и обобщаются результаты, полученные автором в предыдущем исследовании*). Рассматривается установившееся движение несжимаемой жидкости в пористой среде, проницаемость которой является функцией точки и ищутся решения соответствующего дифференциального уравнения (1), удовлетворяющие условию, чтобы ротор скорости фильтрации равнялся нулю. Таким образом приходят к соотношениям (4) между производными первого порядка проницаемости $k(x, y, z)$ и производными функции $\varphi(x, y, z)$, определенными посредством (2). Эти соотношения удовлетворяются, если функции k и φ являются, в свою очередь, связанными соотношениями вида (5), (9) или общими (15), соответственно (24). Отсюда вытекает, что движение жидкости с нулевым ротором скорости фильтрации является возможным при определенных законах изменения проницаемости, которым соответствуют определенные типы движения жидкости так, чтобы площади или кривые $\varphi = \text{const.}$ совпадали с площадями или кривыми $k = \text{const.}$ Указывается также, что задачу можно свести к определению гармонической функции, и уточняются меры предосторожности, которые следует принять, и возникающие затруднения. Найденный таким образом класс решений представляет ограниченный интерес, но может привести к некоторым полезным применениям.

SUR UNE CLASSE D'ÉCOULEMENTS À TRAVERS LES MILIEUX POREUX NON HOMOGÈNES

RÉSUMÉ

Ce travail a pour but l'extension et la généralisation des résultats obtenus par l'auteur dans un travail précédent *). On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux dont la perméabilité est fonction du point et on cherche les solutions de l'équation différentielle correspondante (1), qui satisfont à la condition que le rotor de la vitesse de filtration soit nul. De cette manière, on aboutit aux relations (4) entre les dérivées du premier ordre de la perméabilité $k(x, y, z)$ et celles de la fonction $\varphi(x, y, z)$ définie par (2). On peut satisfaire à ces relations, si les fonctions k et φ sont, à leur tour, liées par des relations de la forme (5), (9) ou, plus généralement, (15), respectivement (24.) Il en résulte que les écoulements à rotor nul de la

---

*) T. Oroveanu, *Studii şi cercetări de mecanică aplicată*, IX, 1. 83 (1958).

vitesse de filtration ne sont possibles que pour certaines lois de variation de la perméabilité auxquelles correspondent certains types d'écoulements, de manière que les surfaces ou les courbes $\varphi = \text{const.}$ coïncident avec les surfaces ou les courbes $k = \text{const.}$ On montre encore que le problème se réduit à la détermination d'une fonction harmonique et l'on précise les précautions qu'on doit prendre et les difficultés qui surgissent. La classe de solutions ainsi trouvée présente, sans doute, un intérêt limité, mais peut conduire à certaines applications utiles.

O METODĂ APROXIMATIVĂ PENTRU STUDIUL DISLOCUIRII ȚIȚEIULUI DE CĂTRE APĂ ÎN REGIM NESTAȚIONAR

DE

H. PASCAL

În lucrarea de față vom considera problema dislocuirii țițeiului dintr-un zăcămînt cu un bazin acvifer de dimensiuni finite.

Vom examina situația după ce contactul inițial apă-țiței a pătruns în sondă. În acest caz, în zăcămînt apar două zone, și anume : zona inițială de apă avînd o permeabilitate constantă și zona inundată de către avansarea apei în urma destinderii sale elastice. Admițînd că valoarea saturației este superioară celei remanente, iar presiunea se află deasupra presiunii de saturație, în zona a doua avem o curgere bifazică apă-țiței.

Din punct de vedere hidrodinamic, problema constă în stabilirea debitului de țiței și apă a unei sonde care exploatează zăcămîntul la o anumită diferență de presiune. Cunoscînd variația debitelor în timp se calculează volumele cumulative de fluide extrase și, în consecință, putem efectua prevederea comportării în timp a zăcămîntului.

Vom presupune că atît în zona inițială, cît și în cea inundată, curgerea este nestaționară, iar presiunile pe contur sînt cunoscute în afară de conturul intermediar. Pentru a nu reduce generalitatea problemei, considerăm situația cînd presiunile pe contur sînt funcții de timp. Ne vom referi la cazul cînd sonda este plasată în centrul unui zăcămînt de formă circulară (vezi figura).

Dacă utilizăm metoda aproximativă din lucrările [1], [2] (întrucît la valorile uzuale ce se întîlnesc în practică diferențele obținute dintre soluția exactă și cea aproximativă sînt relativ mici), atunci în zona de apă putem scrie ecuația

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\overline{\partial p}}{\partial t}; \qquad (1)$$

notăm prin η_a viscozitatea apei, m porozitatea mediului poros, β_a coeficientul de compresibilitate pentru apă, K_0 permeabilitatea absolută a mediului poros, $\bar{t} = \frac{K_0 t}{\eta_a m \beta_a}$ și $\frac{\overline{\partial p}}{\partial \bar{t}}$ valoarea medie ponderată după rază a termenului $\frac{\partial p}{\partial \bar{t}}$, care se definește prin relația

$$\varphi(\bar{t}) = \frac{\overline{\partial p}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{R_0 - R_k} \int_{R_0}^{R_k} \frac{\partial p}{\partial \bar{t}}\, dr. \tag{2}$$

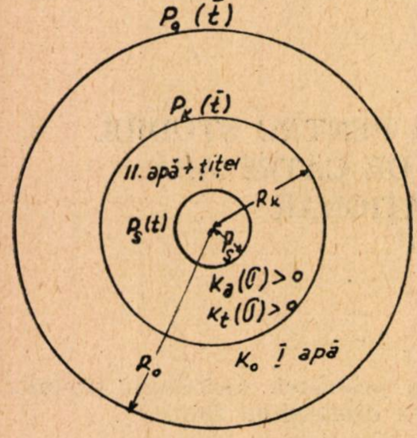


Fig. 1

Folosind condițiile la limită

$$\begin{aligned} r &= R_0, \quad p(R_0, \bar{t}) = p_0(\bar{t}), \\ r &= R_k, \quad p(R_k, \bar{t}) = p_k(\bar{t}), \end{aligned} \tag{3}$$

vom obține din ecuația (1) distribuția presiunii în zona de apă,

$$p(r, \bar{t}) = \frac{\varphi(\bar{t})}{4}(r^2 - R_0^2) + \left(\frac{P_0(\bar{t}) - P_k(\bar{t})}{\log \frac{R_0}{R_k}} - \frac{\varphi(\bar{t})}{4} \frac{R_0^2 - R_k^2}{\log \frac{R_0}{R_k}} \right) \log \frac{r}{R_0} + p_0(\bar{t}). \tag{4}$$

Din ecuațiile (2) și (4) rezultă, după un calcul simplu, pentru determinarea lui $\varphi(\bar{t})$, ecuația diferențială

$$\frac{d\varphi}{d\bar{t}} - \frac{1}{\alpha_0} \varphi = - \frac{1}{\alpha_0} [\alpha_1 \Delta p'(\bar{t}) + p_0'(\bar{t})], \tag{5}$$

a cărei soluție este

$$\varphi(\bar{t}) = \exp \frac{\bar{t}}{\alpha_0} \left[C - \frac{1}{\alpha_0} \int [\alpha_1 \Delta p'(\bar{t}) + p_0'(\bar{t})] \exp \frac{\bar{t}}{\alpha_0}\, d\bar{t} \right], \tag{6}$$

unde $\Delta p'(\bar{t})$ reprezintă diferența $\Delta p'(\bar{t}) = p_0'(\bar{t}) - p_k'(\bar{t})$, iar α_0 și α_1 au respectiv expresiile

$$\alpha_0(R_0, R_k) = \frac{1}{4(R_0 - R_k)} \left[\frac{1}{3}(R_0^3 - R_k^3) + R_0(R_k - R_0) - \frac{R_0^2 - R_k^2}{\log \frac{R_0}{R_k}} \left(R_k - R_0 + R_k \log \frac{R_0}{R_k} \right) \right], \tag{7}$$

$$\alpha_1(R_0, R_k) = \frac{R_k - R_0 + R_k \log \frac{R_0}{R_k}}{(R_0 - R_k) \log \frac{R_0}{R_k}}.$$

Dacă presupunem că presiunile pe contur sînt polinoame de un grad oarecare în raport cu timpul, atunci expresia (6) se mai poate scrie

$$\varphi(\bar{t}) = \exp \frac{t}{\alpha_0} \left(C - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{p^k(\bar{t})}{\left(\frac{1}{\alpha_0}\right)^k} \exp \frac{\bar{t}}{\alpha_0} \right) \tag{8}$$

$p_m(\bar{t}) = \alpha_1 \, \Delta p'(\bar{t}) + p'_0(\bar{t})$ fiind un polinom de gradul m în $\bar{t}$, iar $p^k(\bar{t})$ derivata de ordinul k a lui $p_m(\bar{t})$ în raport cu $\bar{t}$.

Determinînd valoarea constantei C din condiţia iniţială $\bar{t} = 0$, $p(r, 0) = p_{iniţ}$, putem calcula debitul apei care pătrunde în zona inundată :

$$Q_{apă} = \frac{2\pi R_k K_0 h}{\eta_a} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R_k} = \frac{2\pi R_k h K_0}{\eta_a} \left[\frac{1}{R_k} \frac{\Delta p(0)}{\log \frac{R_0}{R_k}} \exp \frac{\bar{t}}{\alpha_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \left(2 R_k - \frac{R_0^2 - R_k^2}{\log \frac{R_0}{R_k}} \right) \exp \frac{\bar{t}}{\alpha_0} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{p^k(0)}{\left(\frac{1}{\alpha_0}\right)^k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{p^k(\bar{t})}{\left(\frac{1}{\alpha_0}\right)^k} \exp \frac{\bar{t}}{\alpha_0} \right) - \frac{\Delta p(\bar{t})}{\log \frac{R_0}{R_k}} \frac{1}{R_k} \right]. \tag{9}$$

★

Trecem acum la stabilirea distribuţiei presiunii în zona de curgere bifazică.

În acest scop, vom considera ecuaţiile de continuitate pentru un fluid heterogen [3], care în cazul afluxului apă-ţiţei şi în ipoteza valabilităţii legii lui Darcy devin *)

$$\nabla \left[\rho_t \frac{K_t(\sigma)}{\eta_t} \nabla p \right] = m \frac{\partial}{\partial t} (\rho_t \sigma_t), \tag{10}$$

$$\nabla \left[\rho_a \frac{K_a(\sigma)}{\eta_a} \nabla p \right] = m \frac{\partial}{\partial t} (\rho_a \sigma_a). \tag{11}$$

Prin însumarea relaţiilor de mai sus, rezultă ecuaţia

$$\nabla \left[\left(\rho_t \frac{K_t(\sigma)}{\eta_t} + \rho_a \frac{K_a(\sigma)}{\eta_a} \right) \nabla p \right] = m \frac{\partial}{\partial t} (\rho_t \sigma_t + \rho_a \sigma_a), \tag{12}$$

iar dacă ţinem seama că expresia din membrul doi $\rho_t \sigma_t + \rho_l \sigma_a = \rho$ reprezintă valoarea masei specifice a amestecului, pe care am notat-o cu ρ, atunci ecuaţia (12) capătă forma finală

$$\nabla \left[\left(\rho_t \frac{K_t(\sigma)}{\eta_t} + \rho_a \frac{K_a(\sigma)}{\eta_a} \right) \nabla p \right] = m \frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{13}$$

---

*) Indicii *a* şi *t* se referă la apă, respectiv la ţiţei.

pe care o mai putem scrie

$$\Delta\left[\frac{K_t(\sigma)}{\eta_t}\rho_t\left(1+\frac{K_a(\sigma)}{K_t(\sigma)}\frac{\eta_t}{\eta_a}\frac{\rho_a}{\rho_t}\right)\nabla p\right]=m\,\beta\,\frac{\partial p}{\partial t},\tag{14}$$

$\beta=\dfrac{d\rho}{dp}$ fiind coeficientul de compresibilitate a amestecului, avînd o valoare independentă de presiune dar dependentă de timp.

În felul acesta, ca punct de plecare pentru descrierea matematică a curgerii unui fluid bifazic apă-țiței printr-un mediu poros, omogen şi izotrop, noi putem utiliza o ecuație echivalentă, considerînd amestecul ca un tot [4].

Într-adevăr, dacă introducem, la fel ca şi în lucrarea [4], o viteză de filtrare v pentru amestec și admitem valabilitatea legii lui Darcy, avem

$$v=-\frac{K}{\eta}\nabla p,\tag{15}$$

unde raportul $\dfrac{K}{\eta}$ se exprimă în funcție de mărimile fizice cunoscute, scriind că debitul masic de amestec printr-o suprafață oarecare este egal cu suma debitelor masice de țiței și apă.

Astfel, obținem relația

$$\rho\frac{K}{\eta}=\frac{K_t(\sigma)}{\eta_t}\rho_t+\frac{K_a(\sigma)}{\eta_a}\rho_a.\tag{16}$$

Este uşor de observat, pe baza relațiilor (14) și (15), că eliminînd din ecuația de continuitate, scrisă pentru amestec,

$$\nabla(\rho\bar{v})=-m\frac{\partial\rho}{\partial t},\tag{17}$$

valoarea produsului $(\rho\bar{v})$, vom obține tocmai ecuația (13).

Rezultatele stabilite mai sus ne permit să putem trece la soluționarea problemei propuse.

Pentru liniarizarea ecuației (14), vom introduce funcția

$$H(p)=\int\rho_t\frac{K_t(\sigma)}{\eta_t}\left(1+\frac{K_a(\sigma)}{K_t(\sigma)}\frac{\eta_t}{\eta_a}\frac{\rho_a}{\rho_t}\right)dp+C\tag{18}$$

şi vom presupune că viscozitățile dinamice ale apei și țițeiului nu variază mult cu presiunea, şi că variația saturației este de aşa natură, încît permeabilitățile efective pot fi luate prin valori medii ponderate din relațiile

$$\overline{K}_a(\sigma)=\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}K_a(\sigma)\,d\sigma$$

și (19)

$$\overline{K}_t(\sigma)=\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}K_t(\sigma)\,d\sigma,$$

funcțiile $K_a\ (\sigma)$ și $K_t\ (\sigma)$ fiind cunoscute din lucrarea [5] ca dependențe empirice de saturație, iar σ_1 și σ_2 sînt saturațiile corespunzătoare secțiunilor $r = R_k$ și $r = R_s$.

Deoarece masele specifice ρ_t și ρ_a au expresiile date de ecuațiile de stare [3],

$$\rho_a\ (p) = \rho_{a0} \exp\ \beta_a\ (p - p_0), \quad \rho_t\ (p) = \rho_{t0} \exp\ \beta_t\ (p - p_0) \tag{20}$$

vom obține prin integrarea expresiei (14)

$$H(p) = \frac{\overline{K}_t\,(\sigma)}{\overline{\eta}_t\,\beta_t}\,\rho_t\,(p)\left[1 + \frac{\overline{K}_a\,(\sigma)}{\overline{K}_t\,(\sigma)}\,\frac{\overline{\eta}_t}{\overline{\eta}_a}\,\frac{\rho_a\,(p)}{\rho_t\,(p)}\,\frac{\beta_t}{\beta_a}\right] + C. \tag{21}$$

Putem remarca, cu destulă ușurință, că, în intervalul presiunilor care efectiv ne interesează, expresiile (20) sînt bine aproximate numai de primii doi termeni din dezvoltarea în serie de puteri [6]. Așadar, rezultă pentru funcția $H\ (p)$,

$$H\ (p) = A' + B\ (p - p_0)^{*}), \tag{22}$$

unde prin A și B am notat

$$A = \frac{\overline{K}_t\,(\sigma)}{\overline{\eta}_t\,\beta_t}\,\rho_{t0} + \frac{\overline{K}_a\,(\sigma)}{\overline{\eta}_a\,\beta_a}\,\rho_{a0},\ B = \frac{\overline{K}_t\,(\sigma)}{\overline{\eta}_t}\,\rho_{t0} + \frac{\overline{K}_a\,(\sigma)}{\overline{\eta}_a}\,\rho_{a0}, \tag{23}$$

ρ_{t0} și ρ_{a0} reprezetînd valorile maselor specifice ale apei și țițeiului la presiunea de referință p_0.

În cele ce urmează, problema noastră se reduce la soluționarea ecuației liniare

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} = m\ \beta\ \frac{dp}{dH}\cdot\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{24}$$

care, cu schimbarea de variabilă $\overline{t} = \int \frac{dt}{m\beta\,(t)\,\frac{dp}{dH}}$, devine

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial \overline{t}}, \tag{25}$$

$\frac{dp}{dH} = \frac{1}{B}$ rezultînd din (22).

Condițiile la limită și inițiale pentru funcția $H\ (p)$ vor fi

$$H\ (R_k,\ \overline{t}) = A + B\ [p_k\,(t) - p_0],\ H\ (R_s,\ \overline{t}) = A + B\ [p_s\,(t) - p_0],$$
$$H\ (r,\ \mathrm{O}) = A + B\ (p_{init} - p_0). \tag{26}$$

Ecuația (25) fiind identică cu ecuația transmisiei căldurii, va trebui să introducem trei soluții particulare care satisfac condițiile (26).

---

*) $A' = A + C$.

În conformitate cu teorema lui Duhamel, soluțiile particulare H_1, H_2 și H_3 se definesc

$$\begin{aligned}(H_1\ H_2\ H_3) &= (1,\ 0,\ 0) \qquad & r &= R_k,\\ &= (0{,}1,\ 0) & r &= R_s,\\ &= (0,0,H(r,0)) & t &= 0,\end{aligned} \tag{27}$$

iar soluția generală, care satisface simultan toate condițiile la limită din (26), se deduce din relația

$$H\ (r,\bar{t}) = H_3(r,\bar{t}) + \int_0^{\bar{t}} \left\{ \frac{\partial H_1(r_1 \bar{t} - \lambda)}{\partial \bar{t}} [A + B(p_k(\bar{t}) - p_0)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial H_2(r_1 \bar{t} - \lambda)}{\partial \bar{t}} [A + B(p_s(\bar{t}) - p_0)] \right\} d\lambda. \tag{28}$$

Cu ajutorul rezultatelor stabilite în [7], soluția ecuației (25) capătă forma finală

$$H\ (r,\bar{t}) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n, R_k)\, U_0(\alpha_n, r)}{J_0^2(\alpha_n, R_k) - J_0^2(\alpha_n, R_s)} e^{-\alpha_n^2 \bar{t}} \left\{ \frac{\pi}{2} J_0(\alpha_n, R_k) + \right.$$

$$+ \int_{R_s}^{R_k} r\, [A + B(p_{init} - p_0)\ U_0(\alpha_n, r)\, dr - J_0(\alpha_n, R_s) \int_0^{\bar{t}} [A + B(p_k(\lambda) - p_0)] +$$

$$\left. + e^{-\alpha_n^2 \lambda} d\lambda + J_0(\alpha_n, R_k) \int_0^{\bar{t}} [A + B(p_s(\lambda) - p_0)]\, e^{-\alpha_n^2 \lambda} d\lambda \right\}^{*)}. \tag{29}$$

Prin urmare, avînd funcția $H\ (r, \bar{t})$, expresiile care ne dau debitul de țiței și apă pe unitatea de grosime vor fi în cele din urmă

$$\begin{aligned} Q_{apă} &= \frac{2\pi R_s K_a(\sigma)}{\eta_a} \left(\frac{dp}{dH}\right) \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)_{r=R_s},\\ Q_{țiței} &= \frac{2\pi R_s K_t(\sigma)}{\eta_t} \left(\frac{dp}{dH}\right) \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)_{r=R_s},\end{aligned} \tag{30}$$

unde valoarea funcției $H_k(\bar{t})$, sau a presiunii $p_k(\bar{t})$, care apare în relațiile (30) prin condițiile la limită (26), se determină din condiția de continuitate a vitezei apei la frontiera ce delimitează cele două zone.

Această condiție se scrie

$$\frac{K_0}{\eta_a} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R_k} = \frac{K_a(\sigma)}{\eta_a} \left(\frac{dp}{dH}\right) \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)_{r=R_k}, \tag{31}$$

$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)$ fiind gradientul de presiune în zona inițială de apă.

---

*) α_n reprezintă rădăcina ecuației

$$Y_1(\alpha_n, R_k)\, J_0(\alpha_n, R_k) - J_1(\alpha_n, R_k)\, Y_0(\alpha_n, R_k) = 0\,.$$

Pentru a putea calcula după relaţiile (30), trebuie ca în prealabil să efectuăm integralele din (29), ceea ce implică cunoaşterea presiunii pe contur ca funcţie de timp. În general, aceste mărimi depind de condiţiile exploatării şi de aceea este necesar să se precizeze mai întîi natura lor funcţională pentru un zăcămînt anumit.

APENDICE

DETERMINAREA UNOR CARACTERISTICI ALE STRATULUI DUPĂ CURBELE DE RESTABILIRE A PRESIUNII DE FUND ÎN CAZUL AFLUXULUI BIFAZIC APĂ-ŢIŢEI

În cele ce urmează, se indică modul de calcul al factorului $\frac{B}{m\beta}$.

În acest scop, vom considera problema restabilirii presiunii de fund la o sondă care exploatează un zăcămînt petrolifer în condiţiile studiate mai sus.

După cum se ştie, din observaţiile asupra procesului de restabilire a presiunii de fund, după oprirea extracţiei din sondă, se pot deduce caracteristicile cele mai importante ale stratului [8].

Vom presupune situaţia cînd sonda este amplasată în centrul unui zăcămînt circular avînd un bazin acvifer. De asemenea, mai presupunem, ca şi în cazul fluidului monofazic, că sonda se închide instantaneu, iar pînă în momentul închiderii ea produce în condiţii staţionare.

Deoarece afluxul bifazic apă-ţiţei spre sondă este plan radial, problema constă în soluţionarea ecuaţiei

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)=\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{1'}$$

cu condiţiile la limită şi iniţiale

$$\begin{aligned} & r = R_k, \quad H = H_k, \\ & r = R_s, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)_{r=R_s} = 0, \qquad (2') \\ & t = 0, \quad H(r) = \frac{H_k - H_{s0}}{\log\frac{R_k}{R_s}} \log\frac{r}{R_s} + H_{s0}, \end{aligned}$$

H_{s0} fiind valoarea funcţiei H (p) pe conturul sondei de rază R_s *) înainte de închidere, iar H_k valoarea aceleiaşi funcţii pe conturul de rază R_k.

Rezolvarea ecuaţiei (1′) cu condiţiile la limită şi iniţiale (2′) se realizează cu ajutorul metodelor aplicate în teoria conductibilităţii.

---

*) Sonda se consideră perfectă hidrodinamic atît după grad, cît şi după caracterul deschiderii.

Astfel, după cîteva transformări simple, obținem soluția problemei sub forma

$$\frac{H_k - H_s}{H_k - H_{s0}} = \frac{2}{\log \frac{R_k}{R_s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x_n^2 \bar{t}}{R_k^2}}}{x_n^2 J_1^2(x_n)}, \tag{3'}$$

unde x_n este rădăcina ecuației $J_0(x_n) = 0$, J_0 fiind funcția Bessel de prima speță de ordinul zero și J_1, aceeași funcție de ordinul unu.

În cazul valorilor mari ale lui $\bar{t}$, toți termenii seriei (3′) pot fi neglijați, considerîndu-se cu o bună aproximație relația

$$\frac{H - H_s}{H_k - H_{s0}} = \frac{2}{\log \frac{R_k}{R_s}} \cdot \frac{e^{-\frac{x_1^2 \bar{t}}{R_k^2}}}{x_1^2 J_1^2(x_1)}, \tag{4'}$$

iar dacă ținem seama că funcția $H(p)$ și $\bar{t}$ au forma

$$H(p) = A + B(p - p_0), \quad \bar{t} = \frac{tB}{m\beta},$$

expresia (4′) devine

$$\log \frac{p_k - p_{s0}}{p - p_s} \, \frac{1}{\frac{x_1^2}{2} J_1^2(x_1) \log \frac{R_k}{R_s}} = \frac{x_1^2 tB}{m \beta R_k^2}. \tag{5'}$$

În sfîrșit, dacă scriem că masa de amestec este egală cu suma maselor de apă și țiței, avem ecuația de stare a amestecului,

$$\rho_{amest} = \frac{\rho_t + \rho_a R_a}{1 + R_a}, \tag{6'}$$

iar valoarea coeficientului de compresibilitate, considerînd pentru masele specifice ρ_a și ρ_t o variație liniară în raport cu presiunea, se obține prin diferențierea ecuației (6′)*)

$$\beta = \frac{d\rho_{amest}}{dp} = \frac{\rho_{t0}\beta_t + R_a \rho_{a0} \beta_a}{1 + R_a}. \tag{7'}$$

---

*) Din punct de vedere practic, presiunea fiind superioară celei de saturație, atît η_a și η_t cît și b_a și b_t pot fi considerați, cu o aproximație satisfăcătoare, ca fiind independenți de presiune. De asemenea, raportul permeabilităților este și el independent de presiune.

unde R_a reprezintă rația apă-țiței exprimată în condiții standard și a cărei valoare se obține din relația,

$$R_a = \frac{K_a}{K_t} \frac{\eta_t}{\eta_a} \frac{b_t}{b_a}, \tag{8'}$$

b_t şi b_a fiind factorii micşorării de volum ai apei şi ţiţeiului.

Deoarece rația apă-țiței este o funcție de saturație prin intermediul permeabilităților efective și B, după cum s-a arătat, are valoarea

$$B\ \rho_{t0} = \frac{\overline{K}_t(\sigma)}{\overline{\eta}_t} + \rho_{a0} \frac{\overline{K}_a(\sigma)}{\overline{\eta}_a} \tag{9'}$$

rezultă că factorul $\frac{B}{m\beta}$ este, de asemenea, o funcție de saturație.

În acest mod, cunoscînd la un moment dat presiunea în sondă după închidere, vom determina din (5′) factorul $\frac{B}{m\beta}$, sau valoarea saturației în țiței a mediului poros. Practic acest lucru se realizează cu manometru de fund prin măsurătorile periodice efectuate la sondă.

Primită la redacție la 29 martie 1958.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В данной работе автор устанавливает соотношение для расчета дебита воды и нефти одной скважины, которая эксплоатирует нефтяную залежь, имеющую водоносный бассейн определенных размеров. Рассматривается положение, когда начальный водо-нефтяной контакт уже проник в скважину.

Рассматривается общий случай, когда контурные давления и давления в скважине являются функциями времени, определяют распределение давления в водоносном бассейне и рассчитывают дебит воды, который проникает в обводненную зону вследствие упругого расширения.

Дальше, считая, что значение нефтенасыщенности выше остаточной нефтенасыщенности и значение давления в обводненной зоне находится выше давления насыщения, изучают движение двухфазной смеси вода-нефть в скважине, расположенной в центре круговой залежи, с помощью метода, изложенного в работе [4].

Таким образом, допуская правильность закона Дарси и внося функцию H(p), получают для определения течения в скважине прямолинейные уравнения, подобные уравнению теплопроводимости.

Для определения давления на промежуточном контуре применяется дополнительное уравнение, выделенное из условий неразрывности

скорости воды на грани, которая лимитирует обе зоны. Таким образом получаются выражения дебита воды и нефти в зависимости от разности давления и физических и геометрических характеристик пласта, а значение фактора $\frac{B}{m\beta}$ определяется косвенным методом, указанным в приложении.

UNE MÉTHODE APPROXIMATIVE POUR L'ÉTUDE DU DÉLOGEMENT DU PÉTROLE BRUT PAR L'EAU EN RÉGIME NON STATIONNAIRE

RÉSUMÉ

L'auteur établit, dans cet article, les relations pour le calcul du débit d'eau et de pétrole brut d'une sonde, qui exploite un gisement pétrolifère ayant un bassin aquifère de dimensions finies. Il examine la situation, lorsque le contact initial eau-pétrole brut a déjà pénétré dans la sonde.

Considérant le cas général où les pressions sur le contour et dans la sonde sont fonction du temps, on détermine la distribution de la pression dans le bassin aquifère et l'on calcule le débit d'eau qui pénètre dans la zone noyée par suite de la détente élastique.

Par la suite, admettant que la valeur de la saturation en pétrole brut est supérieure à celle rémanente et que la valeur de la pression dans la zone inondée est supérieure à la pression de saturation, on étudie, à l'aide d'une méthode exposée dans le travail [4], le mouvement du mélange diphasé eau-pétrole brut, vers une sonde placée au centre d'un gisement circulaire.

De cette façon, en admettant la validité de la loi de Darcy et en introduisant la fonction $H(p)$, on obtient — pour déterminer l'afflux vers la sonde — une équation linéaire analogue à celle de la théorie de la conductibilité thermique.

Pour déterminer la valeur de la pression sur le contour intermédiaire, on utilise une équation supplémentaire, déduite de la condition de la continuité de la vitesse de l'eau à la frontière, qui délimite les deux zones. On obtient, de la sorte, les expressions du débit de pétrole brut et d'eau , en fonction de la différence de pression et des caractéristiques physiques et géométriques de la couche; la valeur du facteur $\frac{B}{m\beta}$ est déterminée par une méthode indiquée dans l'appendice.

BIBLIOGRAFIE

1. С. М. ТОРГ, Основные задачи теории ламинарных течений. Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва-Ленинград, 1951.
2. Н. А. СЛЕЗКИН, С. М. ТОРГ, Обобщенные уравнения Рейнольдса. ДАН, СССР, LIV, *3* (1946).

3. M. MUSKAT. *Physical Principles of Oil Production*. Mc. Graw. Hill, New York, 1949.
4. T. OROVEANU, H. PASCAL, *Scurgerea unui amestec compresibil de lichid şi gaz printr-un mediu poros*. Comunicările Acad. R.P.R. **V**, *9*, 1311 (1955).
5. V. N. SCELCACEV, B. B. LAPUK, *Hidraulica subterană*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.
6. T. OROVEANU, *Asupra scurgerii nestationare a unui amestec compresibil de lichid şi gaz metan printr-un mediu poros*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3*, (1957).
7. H. CORLAV, J. C. JALGER, *Conduction of Heath in Solids*. Clarendon Press, Oxford 1948, p. 10 şi 79.
8. И. А. ЧАРНОЙ, *Определение некоторых параметров кривых восстановления забойного давления*. Нефтяное хозяйство, *3*, 40 (1955).

HIDROMECANICĂ

CALCULUL DEBITELOR DE VIITURĂ A BAZINELOR MICI PRIN HIDROGRAFUL INDICIAL ÎN A DOUA APROXIMAȚIE

DE

ION VLADIMIRESCU

În cadrul unei comunicări făcute în sesiunea a III-a științifică a Institutului de construcții, Facultatea de hidrotehnică, am scos în evidență dependența actualelor metode de studii ale viiturilor, și anume metoda izocronelor și metoda hidrografului unitar, de principiile teoriei regimului tranzitoriu.

În sensul acelorași considerații am reținut contribuția remarcabilă a lui M. Cuénod [1], care formulează „hidrograma indicială" sau „hidrograful indicial" — factor important în relația dinamică dintre precipitații și debitul cursurilor de apă — prin următoarea expresie analitică :

$$A(t) = p\mathrm{K}(1 - e^{-t/\mathcal{T}}), \tag{1}$$

în care :

$A(t)$ — variația hidrografului indicial pentru o precipitație constantă p și de durată infinită;

K — raportul dintre ordonata maximă a hidrografului indicial și precipitația p; acest raport definește însuși coeficientul de șiroire, respectiv coeficientul de scurgere pe pantă;

$\mathcal{T}$ — timpul specific bazinului hidrografic; el caracterizează bazinul din punct de vedere al capacității de acumulare a precipitațiilor pe suprafața sa;

t — timpul.

În cele ce urmează, noi vom folosi formula (1) cu $p = 1$, adică

$$A(t) = K(1 - e^{-t/\mathcal{T}}) \tag{1'}$$

pentru a avea o mai bună analogie cu percutanța indicială, proprie regimului tranzitoriu.

Confruntarea curbelor corespunzătoare relației (1), respectiv (1′), cu curbele experimentale pentru aceleași valori K și $\mathcal{T}$, au arătat însă abateri importante. De exemplu, M. Cuénod menționează că pentru viituri cu mari amplitudini, forma curbelor experimentale se îndepărtează mult de forma teoretică, întrucît în originea timpului au pante mai mici și tind spre asimptote cu constante de timp cu mult mai mari.

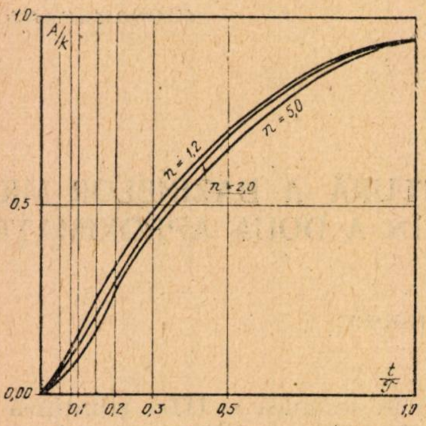


Fig. 1

În scopul obținerii unui grad de aproximație mai bun, ceea ce ar face posibil un calcul al debitelor de viitură cu ajutorul precipitațiilor, redăm aici o formulare nouă a hidrografului indicial, denumit în a doua aproximație.

Construcția formulei pleacă de la constatările următoare :

1) Hidrografele indiciale experimentale au în originea timpului tangenta pozitivă și cresc pe un prim interval de timp, cu concavitatea în sus.

2) În intervalul următor, trecînd printr-un punct de inflexiune cresc cu concavitatea în jos pînă la asimptota $A_{\max} = K$.

Condițiile de mai sus, interpretate în sens matematic, formează un sistem de excuații diferențiale, a căror rezolvare dată de R. Bădescu, conduce la relația generală.

$$A(t) = K\left[1 + (n-1)e^{-rt} - ne^{-st}\right], \tag{2}$$

în care

$$\sqrt{\frac{n}{n-1}} < \frac{r}{s} < \frac{n}{n-1} \cdot$$

Pentru a face posibilă determinarea parametrilor n, r, și s, trebuie să admitem ipoteza fenomenului mediu, adică

$$\frac{r}{s} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}} + \frac{n}{n-1}\right) \cdot \tag{3}$$

Totodată, prin egalarea tangentei în originea curbei *2* cu raportul $K/\mathcal{T}$ obținem

$$r - nr + ns = \frac{1}{\mathcal{T}} \cdot \tag{4}$$

Relația (4) scoate în evidență în același timp, natura parametrilor, în sensul că r și s sînt inversul timpului, iar n un număr fără dimensiune.

Dacă n este cunoscut, ecuaţiile (3) şi (4) formează un sistem din care se pot determina necunoscutele r şi s. Pentru început constatăm că pentru a avea rădăcini reale, este necesar ca $n>1$.

Cît de mare este influenţa lui n în ecuaţia (2), aceasta se poate vedea din figura 1, care reprezintă trei curbe A/K pentru $n=1{,}2$; $n=2{,}0$; şi $n=5{,}0$, trasate după relaţiile următoare, deduse la rîndul lor din considerentele de mai sus :

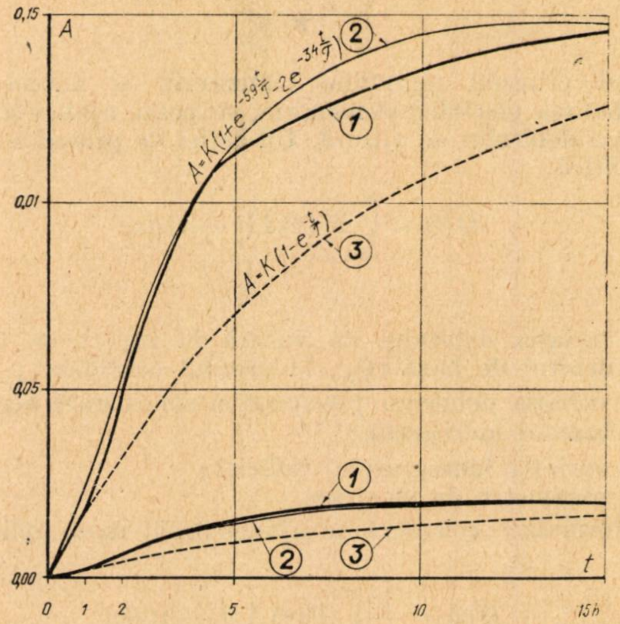


Fig. 2

$$n=1{,}2\ ,\quad \frac{A(t)}{K}=1+0{,}2\,e^{-11{,}7\,t/\mathcal{T}}-1{,}2\,e^{-2{,}8\,t/\mathcal{T}}\ ,$$

$$n=2{,}0\ ,\quad \frac{A(t)}{K}=1+e^{-5{,}9\,t/\mathcal{T}}-2\,e^{-3{,}45\,t/\mathcal{T}}\ ,$$

$$n=5{,}0\ ,\quad \frac{A(t)}{K}=1+4\,e^{-4{,}2\,t/\mathcal{T}}-5\,e^{-3{,}6\,t/\mathcal{T}}\ .$$

Din figura 2 se observă că cele trei curbe, reprezentate grafic în funcţie de $t/\mathcal{T}=0\div 1{,}0$ sînt suficient de apropiate între ele pentru a trage concluzia că numărul n nu influenţează sensibil rezultatele, decît în cîmpul $t/\mathcal{T}<0{,}1$, aceasta fără un deosebit interes practic.

Cu aceste ipoteze, ecuaţia hidrografului indicial în a doua aproximaţie se propune deci sub forma

$$A(t)=K[1+e^{-5{,}9\,t/\mathcal{T}}-2\,e^{-3{,}45\,t/\mathcal{T}}]. \tag{5}$$

În figura 2 se arată în comparație cu două hidrografe indiciale experimentale din studiul lui Cuénod, hidrografele rezultate din ecuația (5) (curbele *2*) și cele în prima aproximație (curbele *3*) cu ecuația

$$A(t) = K(1 - e^{-t/\mathcal{T}}).$$

★

Folosind criteriul regimului tranzitoriu și anume aditivitatea, deci neinterferarea efectelor elementare, se poate ajunge și în mod direct la o formulă a debitului de viitură. Un astfel de procedeu ar conduce la expresia analitică

$$Q(t) = \int_0^t P'(\tau) A(t - \tau)\, d\tau, \tag{6}$$

în care

$Q(t)$ = variația debitului de viitură în raport cu timpul, minus debitul de bază (Q_0), în profilul considerat;

$P(t)$ = variația debitului precipitației considerată aceeași pe întreg bazinul hidrografic;

$A(t)$ = variația hidrografului indicial;

τ = parametru de integrare.

La o formulare completă se ajunge însă, dacă aplicăm integrala Duhamel

$$Q(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t P(\tau) A(t - \tau)\, d\tau,$$

care prin efectuarea derivării, a integrării prin părți și a schimbărilor de variabile dă loc la următoarele ecuații echivalente în ipoteza $A(0) = 0$:

$$Q(t) = \int_0^t P(\tau) A'(t - \tau)\, d\tau, \tag{7}$$

$$Q(t) = \int_0^t P'(t - \tau) A(\tau)\, d\tau, \tag{7'}$$

$$Q(t) = \int_0^t P(t - \tau) A'(\tau)\, d\tau, \tag{7''}$$

$$Q(t) = \int_0^t P'(\tau) A(t - \tau)\, d\tau. \tag{7'''}$$

În cele ce urmează ne vom folosi numai de relația (7), în care variația debitului de precipitații $P(t)$ va fi schematizată în câteva curbe simple, componente ale schemelor naturale.

Hidrograful indicial $A(t)$ rămîne acela stabilit de noi prin formula (5). Distingem cazurile următoare.

a. *Repartiție constantă a debitului de precipitații.*

Ipoteza aceasta înseamnă $P(t) = p(\tau) = \mathfrak{Q}$ și durata $t = t_0$. Totodată avem

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} K\left[1 + e^{-5,9\, t/\mathfrak{T}} - 2\, e^{-3,45\, t/\mathfrak{T}}\right] = \frac{K}{\mathfrak{T}}\left(6,9\; e^{-3,45\, t/\mathfrak{T}} - 5,96\, e^{-3,9\, t/\mathfrak{T}}\right),$$

de unde

$$\frac{dA}{d(t-\tau)} = \frac{K}{\mathfrak{T}}\left[6,9\; e^{\frac{-3,45}{\mathfrak{T}}(t-\tau)} - 5,9\, e^{\frac{-5,9}{\mathfrak{T}}(t-\tau)}\right].$$

— *În domeniul* $0 < t < t_0$

$$Q(t) = \frac{\mathfrak{Q}K}{\mathfrak{T}}\int_0^t \left[6,9\; e^{\frac{-3,45}{\mathfrak{T}}(t-\tau)} - 5,9\, e^{\frac{-5,9}{\mathfrak{T}}(t-\tau)}\right] d\tau = \mathfrak{Q}K\left[1 + e^{-5,9\frac{t}{\mathfrak{T}}} - 2\, e^{-3,45\frac{t}{\mathfrak{T}}}\right]. \tag{8}$$

— *În domeniul* $t_0 < t$ limita superioară a integralei (7) este $t = t_0$ și deci

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{\mathfrak{Q}K}{\mathfrak{T}}\int_0^{t_0} \left[6,9\; e^{\frac{-3,45}{\mathfrak{T}}(t-\tau)} - 5,9\, e^{\frac{-5,9}{\mathfrak{T}}(t-\tau)}\right] d\tau = \\ &= \mathfrak{Q}K\left\{2\, e^{\frac{-3,45}{\mathfrak{T}}(t-\tau)}\Big|_0^{t_0} - e^{\frac{-5,9}{\mathfrak{T}}(t-\tau)}\Big|_0^{t_0}\right\} = \\ &= \mathfrak{Q}K\left\{2\, e^{-3,45\,\frac{t}{\mathfrak{T}}}\left(e^{-3,45\,\frac{t_0}{\mathfrak{T}}} - 1\right) - e^{-5,9\,\frac{t}{\mathfrak{T}}}\left(e^{5,9\,\frac{t_0}{\mathfrak{T}}} - 1\right)\right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Formulele (8) și (9), transformate în

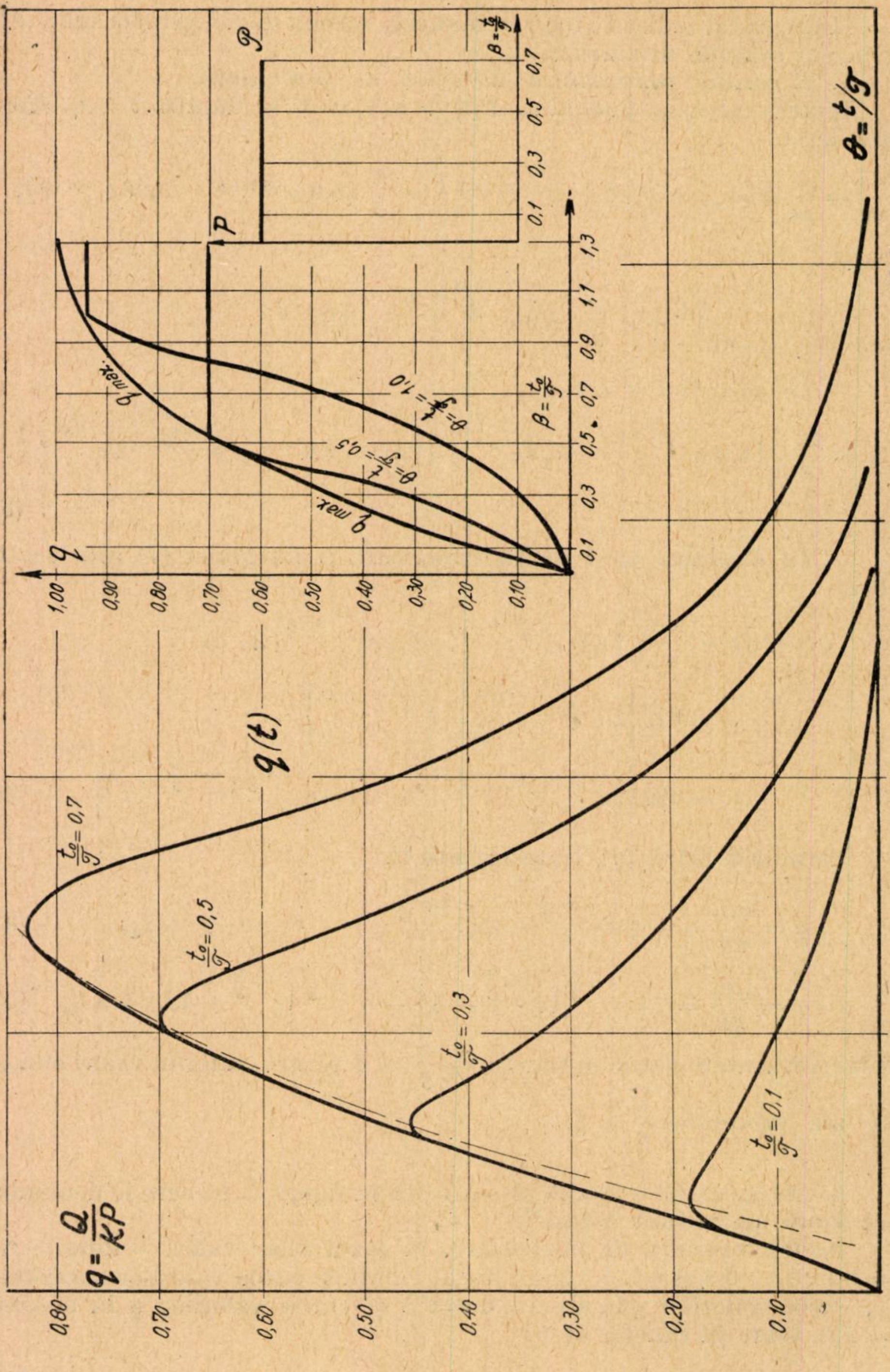
$$q = \frac{Q(t)}{\mathfrak{Q}K} = 1 + e^{-5,9\,\frac{t}{\mathfrak{T}}} - 2e^{-3,45\,\frac{t}{\mathfrak{T}}}, \qquad 0 < t < t_0, \tag{8'}$$

$$q = \frac{Q(t)}{\mathfrak{Q}K} = 2\, e^{-3,45\,\frac{t}{\mathfrak{T}}}\left(e^{3,45\,\frac{t_0}{\mathfrak{T}}} - 1\right) - e^{-5,9\,\frac{t}{\mathfrak{T}}}\left(e^{5,9\,\frac{t_0}{\mathfrak{T}}} - 1\right), \quad t > t_0, \tag{9'}$$

pot fi reprezentate grafic în funcție de $\frac{t}{\mathfrak{T}} = \theta$ pentru diferite valori cunoscute ale raportului $\frac{t_0}{\mathfrak{T}} = \beta$.

Se obține astfel o familie de curbe ca în figura 3, pe care le denumim ,,hidrografe de viitură reduse''.

Pentru ușurința de interpolare, în cazul altor valori — diferite de $\beta = 0,1$; $0,3$; $0,5$ și $0,7$ — figura 3 mai cuprinde curba valorilor maximale $q_{\max}$, curba valorilor q în abscisa $\theta = 0,5$ și curba valorilor q în abscisa $\theta = 1,0$, toate în funcție de β.



$q = \frac{Q}{KP}$
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
$\frac{t_o}{T} = 0,7$
$\frac{t_o}{T} = 0,5$
$\frac{t_o}{T} = 0,3$
$\frac{t_o}{T} = 0,1$
q(t)
0.5
1.0
1,5
2,0
$\vartheta = t/T$
q
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,1
0,3
0,5
0,7
0,9
1,1
1,3
$\beta = \frac{t_o}{T}$
q max.
q max.
$\vartheta = \frac{t}{T} = 0,5$
$\vartheta = \frac{t}{T} = 1,0$
P
𝒫
0,1
0,3
0,5
0,7
$\beta = \frac{t_o}{T}$

Fig. 3

Dispozitivul de curbe astfel construit dă posibilitatea de a se trasa pentru orice raport β, hidrograful de viitură, după ce mai întîi s-a trecut prin hidrograful redus q și transformarea $Q = K\mathcal{Q}q$ și $t = \theta\mathcal{T}$.

În ceea ce privește parametrul $\mathcal{T}$, acesta poate fi scris, în cazul repartiției dreptunghiulare comună cu a hidrografului indicial,

$$\mathcal{T} = \alpha T,$$

în care T este timpul de concentrare (propagare), calculat după recomandările din tratatele de specialitate, sau prin măsurători directe.

Pentru determinarea coeficientului α, în cazul viiturei maxime, admitem ipoteza justificată de practică, prin care debitul devine $q_{\max}$, cînd durata precipitației t_0 egalează timpul de concentrare T, adică

$$\frac{t_0}{T} = 1 \quad \text{sau} \quad \alpha\frac{t_0}{\mathcal{T}} = 1 \quad \text{și} \quad \mathcal{T} = \alpha t_0 = \alpha T.$$

Din curba valorilor maximale $q_{\max}$ (fig. 3) se vede că valoarea maximă, care este unitatea, corespunde abscisei $\beta \cong 1{,}3$; de aici deducem

$$\alpha \simeq \frac{1{,}0}{1{,}3} = 0{,}77, \qquad \mathcal{T} = 0{,}77\,T.$$

Formula (10) este valabilă pentru viitura maximă a bazinului hidrografic considerat. Pentru viituri mai mici, hidrografele indiciale experimentale arată o micșorare a timpului specific $\mathcal{T}$.

Valoarea coeficientului de scurgere pe pantă K pentru viituri de mai mică amplitudine trebuie stabilită pe bază de măsurători directe.

Acest coeficient devine maximal, adică $K \approx 1$ numai pentru cele mai mari viituri de primăvară ale bazinului hidrografic, întrucît solul este atunci înghețat sau saturat din ploi continue sau prin topirea zăpezii. Frecvența (probabilitatea) acestor stări ale solului constituie însăși frecvența coeficientului K.

b. *Repartiția I liniară a debitului de precipitație*

În această ipoteză, debitul precipitației pornește cu valoarea zero în originea timpului și atinge liniar maximul $P_{\max}$, la timpul $t = t_0$, cînd revine brusc la zero (fig. 4).

Ecuația de repartiție este așadar

$$P(t) = P_{\max}\frac{t}{t_0}\,.$$

Prin aplicarea relației (7) distingem și aici două cazuri :

— *În domeniul* $0 < t < t_0$

$$Q(t) = \frac{KP_{\max}}{\mathcal{T}}\cdot\frac{1}{t_0}\int_0^t \tau\left[6{,}9\,e^{\frac{-3{,}45}{\mathcal{T}}(t-\tau)} - 5{,}9\,e^{\frac{-5{,}9}{\mathcal{T}}(t-\tau)}\right]d\tau.$$

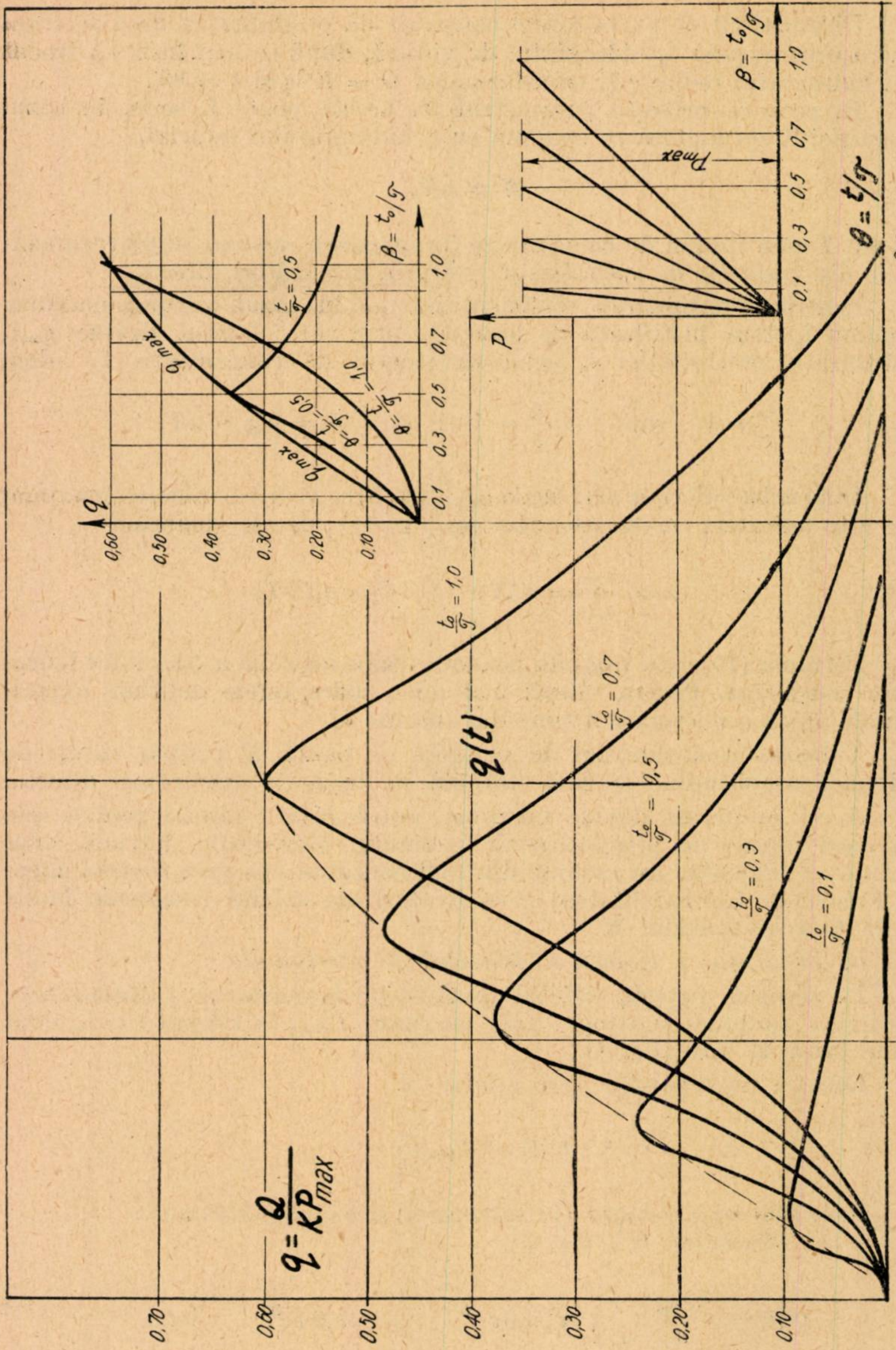

q = Q / KP_max
q(t)
t₀/T = 1,0
t₀/T = 0,7
t₀/T = 0,5
t₀/T = 0,3
t₀/T = 0,1
0,10
0,20
0,30
0,40
0,50
0,60
0,70
0,5
1,0
1,5
2,0
θ = t/T
P
P_max
β = t₀/T
0,1
0,3
0,5
0,7
1,0
q
q_max
θ = t/T = 0,5
θ = t/T = 1,0
t/T = 0,5
β = t₀/T

Fig. 4

Fiindcă avem

$$\int_0^t \tau e^{\frac{n\tau}{\mathcal{T}}} = \left(\frac{\mathcal{T}}{n}\right)^2 e^{\frac{n\tau}{\mathcal{T}}}\left(\frac{nt}{\mathcal{T}} - 1\right)\Bigg|_0^t = e^{\frac{nt}{\mathcal{T}}}\left(\frac{nt}{\mathcal{T}} - 1\right) + 1,$$

rezultă

$$Q(t) = KP_{\max}\,\frac{\mathcal{T}}{t_0}\left[0{,}58\,e^{-3{,}45\frac{t}{\mathcal{T}}} - 0{,}17\,e^{-5{,}9\frac{t}{\mathcal{T}}} + \frac{t}{\mathcal{T}} - 0{,}41\right]\cdot \qquad (10)$$

— *În domeniul* $t_0 < t$ limita superioară a integralei este $t = t_0$ și fără a mai trece aici calculele intermediare, obținem

$$Q(t) = KP_{\max}\,\frac{\mathcal{T}}{t_0}\left\{0{,}58\,e^{-3{,}45\frac{t}{\mathcal{T}}}\left[1 + e^{3{,}45\frac{t_0}{\mathcal{T}}}\left(\frac{3{,}45}{\mathcal{T}} - 1\right)\right] - \right.$$
$$\left. - 0{,}17\,e^{-5{,}9\frac{t}{\mathcal{T}}}\left[1 + e^{5{,}9\frac{t_0}{\mathcal{T}}}\left(\frac{5{,}9\,t_0}{\mathcal{T}} - 1\right)\right]\right\}\cdot$$

Reprezentarea grafică a hidrografelor reduse $q(t) = \frac{Q}{KP_{\max}}$ în funcție de $\frac{t}{\mathcal{T}} = \theta$ pentru diferite valori cunoscute ale raportului $\frac{t_0}{\mathcal{T}} = \beta$ este redată în figura 4, inclusiv celelalte curbe ajutătoare.

c. ***Repartiția a II-a liniară a debitului de precipitații***

În această ultimă ipoteză debitul precipitațiilor pornește în originea timpului cu valoarea sa maximă $P_{\max}$ și descrește liniar pînă la anulare, la timpul $t = t_0$ (fig. 5).

Ecuația de repartiție este

$$P(t) = P_{\max} - P_{\max}\,\frac{t}{t_0},$$

care introdusă în relația (7) conduce la soluțiile următoare:

— *În domeniul* $0 < t < t_0$

$$Q(t) = P_{\max}\left[\int_0^t A'(t-\tau)\,d\tau - \frac{1}{t_0}\int_0^t \tau A'(t-\tau)\,d\tau\right].$$

Integrala întîia din paranteză reprezintă chiar $A(t)$, a cărei expresie analitică este redată în (5). Pentru cea de-a două integrală avem

$$\frac{1}{t_0}\int_0^t \tau A'(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{t_0}\int_0^t \tau\left(6{,}9\,e^{-\frac{3{,}45}{\mathcal{T}}(t-\tau)} - 5{,}9\,e^{-\frac{5{,}9}{\mathcal{T}}(t-\tau)}\right)d\tau =$$

$$= \frac{\mathcal{T}}{t_0}\,\mathrm{K}\left[0{,}58\,e^{-3{,}45\frac{t}{\mathcal{T}}} - 0{,}17\,e^{-5{,}9\frac{t}{\mathcal{T}}} + \frac{t}{\mathcal{T}} - 0{,}41\right],$$

$$Q(t) = KP_{\max}\left[1 + e^{-5{,}9\frac{t}{\mathcal{T}}} - 2e^{-3{,}45\frac{t}{\mathcal{T}}} - \frac{\mathcal{T}}{t_0}\left(0{,}58\,e^{-3{,}45\frac{t}{\mathcal{T}}} - 0{,}17\,e^{-5{,}9\frac{t}{\mathcal{T}}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{t}{\mathcal{T}} - 0{,}41\right)\right]. \qquad (13)$$

— *În domeniul* $t_0<t$ expresia analitică respectivă are o formă ceva mai complicată și anume

$$Q(t)=KP_{\max}\left\{2\,e^{-3{,}45\frac{t}{\mathfrak{T}}}\left(e^{3{,}45\frac{t_0}{\mathfrak{T}}}-1\right)-e^{-5{,}9\frac{t}{\mathfrak{T}}}\left(e^{5{,}9\frac{t_0}{\mathfrak{T}}}-1\right)-\right.$$

$$-0{,}58\frac{\mathfrak{T}}{t_0}e^{-3{,}45\frac{t}{\mathfrak{T}}}\left[e^{3{,}45\frac{t_0}{\mathfrak{T}}}\left(3{,}45\frac{t_0}{\mathfrak{T}}-1\right)\right]+$$

$$\left.+0{,}17\frac{\mathfrak{T}}{t_0}e^{-5{,}9\frac{t}{\mathfrak{T}}}\left[e^{5{,}9\frac{t_0}{\mathfrak{T}}}\left(5{,}9\frac{t_0}{\mathfrak{T}}-1\right)+1\right]\right\}. \qquad (14)$$

În acelaşi dispozitiv ca la cazurile anterioare, figura 5 cuprinde hidrografele reduse $q(\theta)=\frac{Q}{KP_{\max}}$ în funcție de $\frac{t}{\mathfrak{T}}=\theta$ pentru unele valori ale raportului $\frac{t_0}{\mathfrak{T}}=\beta$, inclusiv curbele ajutătoare de interpolare şi extrapolare.

★

Se știe că forma curbelor experimentale de distribuție a debitului precipitațiilor este extrem de diversă. Cu toate acestea, este oricînd posibil să fie schematizată și descompusă în repartiții triunghiulare și dreptunghiulare și să se traseze pentru fiecare repartiție, hidrogaful respectiv.

Însumarea ordonatelor hidrografelor componente dau hidrograful de viitură rezultant.

O exemplificare a acestui principiu este redată în figurile 6 care se referă la viiturile din 22. IX. 1953 și 25. IX. 1953 din bazinul Krummbach de la Klusmatten (Elveția), după datele lucrării [1].

Modul de diviziune a variației $P(t)$, de exemplu pentru viitura din 22. IX. 1953, este redat în figura 6*a* (două triunghiuri marginale și un dreptunghi central). Pentru aceeași viitură, mersul calculului este concretizat în tabloul alăturat.

Coloanele 5 și 6 ale tabloului dau coordonatele, cu ajutorul cărora se pot trasa hidrografele componente $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ și $Q_3(t)$. Însumarea ordonatelor corespunzătoare acelorași abscise permite construirea hidrografului $Q(t)$, care, după cum se observă, concordă satisfăcător cu cel experimental.

Aceleași bune rezultate s-au obținut și cu hidrograful viiturii din 25. IX. 1953, figura 6*b*, pentru care nu mai redăm aici calculul respectiv.

★

În încheiere reținem următoarele :

Hidrograful indicial mediu în a doua aproximație, menținîndu-se la același număr de parametri ca și hidrograful indicial în primă aproximație, păstrează și el o formă destul de simplă.

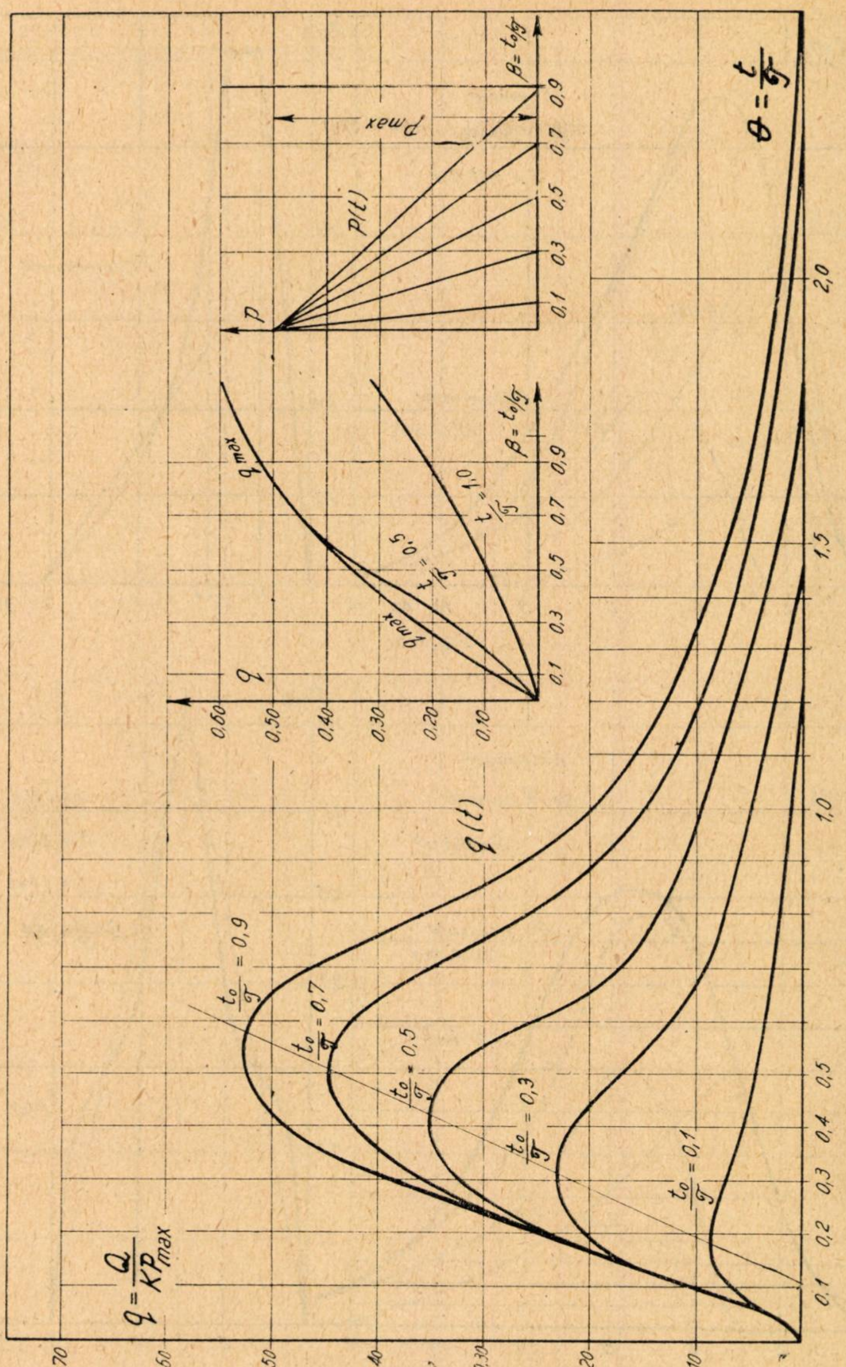

$q = \frac{Q}{KP_{max}}$
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
1,0
1,5
2,0
$\vartheta = \frac{t}{\sigma}$
$\frac{t_o}{\sigma} = 0,9$
$\frac{t_o}{\sigma} = 0,7$
$\frac{t_o}{\sigma} = 0,5$
$\frac{t_o}{\sigma} = 0,3$
$\frac{t_o}{\sigma} = 0,1$
q (t)
q
q_{max}
$\frac{t}{\sigma} = 0,5$
$\frac{t}{\sigma} = 1,0$
$\beta = t_o/\sigma$
0,1
0,3
0,5
0,7
0,9
p
P(t)
P_{max}
$\beta = t_o/\sigma$

Fig. 5

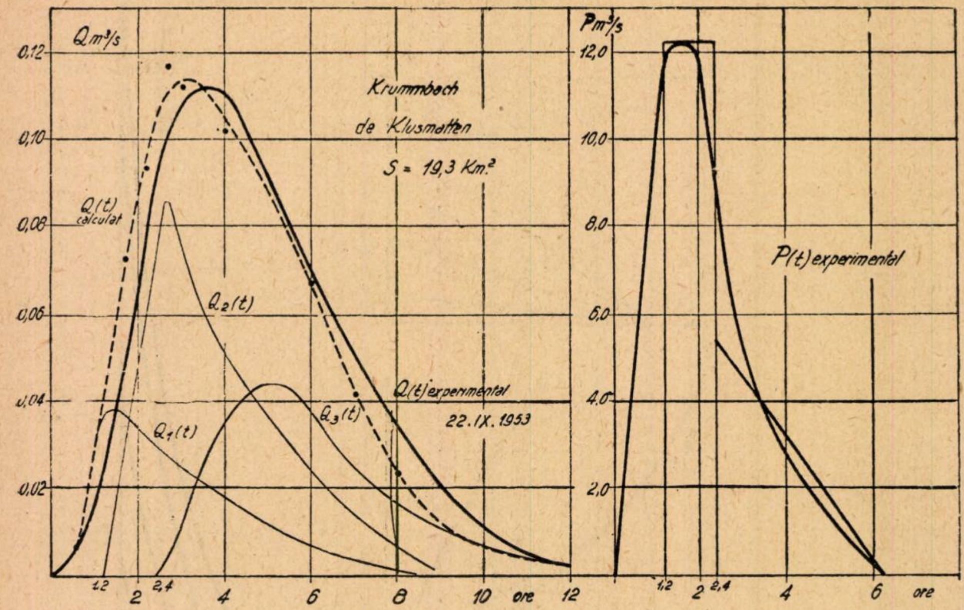

Q m³/s
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
Krummbach
de Klusmatten
S = 19,3 Km²
Q(t) calculat
Q₂(t)
Q₁(t)
Q₃(t)
Q(t) experimental
22.IX.1953
1,2
2
2,4
4
6
8
10
ore
12
P m³/s
12,0
10,0
8,0
6,0
4,0
2,0
P(t) experimental
1,2
2
2,4
4
6
ore

Fig. 6 *a*

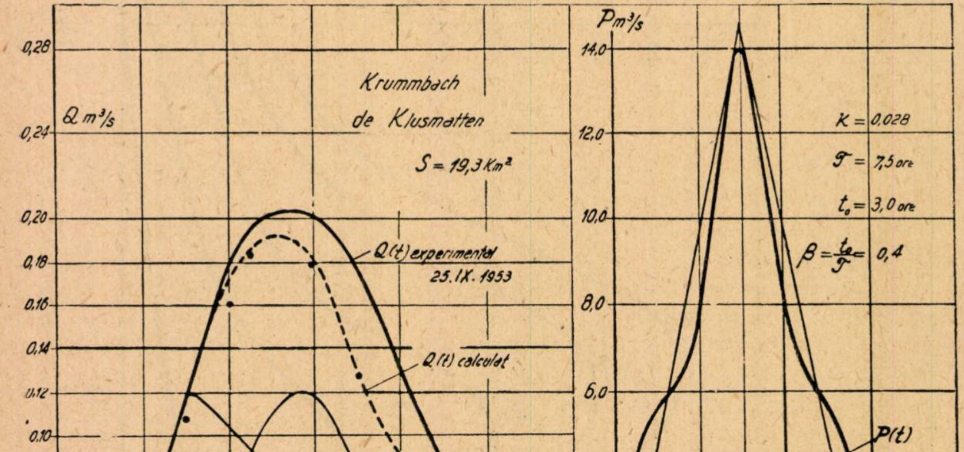

0,28
Q m³/s
0,24
0,20
0,18
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,03
0,02
0,01
Krummbach
de Klusmatten
S = 19,3 Km²
Q(t) experimental
25.IX.1953
Q(t) calculat
Q₁(t)
Q₂(t)
2
4
6
8
10
12
P m³/s
14,0
12,0
10,0
8,0
6,0
4,0
2,0
K = 0,028
T = 7,5 ore
t₀ = 3,0 ore
β = t₀/T = 0,4
P(t)
2
3
4
6
h ore

Fig. 6 *b*

Tablou

$P(t)$	θ	q_i	θT ore	$t=t_1+\theta T$ ore	$Q_i=KP_{\max}q_i$ m³/s	Alte date
1	2	3	4	5	6	7
	0,1	0,03	0,6	0,6	0,007	$\mathcal{T}$ = 6 ore
fig. 4	0,2	0,15	1,2	1,2	0,036	$K = 0,02$
triunghi	0,25	0,16	1,5	1,5	0,038	$P_{\max}$ = 12,0 m³/s
	0,50	0,105	3,0	3,0	0,025	t_0 = 1,2 ore ; $\beta = 0,2$
	1,0	0,03	6,0	6,0	0,007	$t_1 = 0$
	0,1	0,14	0,6	1,8	0,034	$\mathcal{T}$ = 6 ore
						$K = 0,02$
fig. 3	0,2	0,30	1,2	2,4	0,071	$P_{\max}$ = 12,0 m³/s
dreptunghi	0,25	0,35	1,5	2,7	0,085	t_0 = 1,2 ore
	0,50	0,20	3,0	4,2	0,048	$\beta = 0,2$
	1,0	0,05	6,0	7,2	0,012	t_1 = 1,2 ore
	0,1	0,11	0,6	3,0	0,012	$\mathcal{T}$ = 6 ore
fig. 5	0,2	0,25	1,2	3,6	0,022	$K = 0,02$
						$P_{\max}$ = 5,4 m³/s
triunghi	0,4	0,40	2,4	4,8	0,043	t_0 = 3,8 ore
	0,5	0,41	3,0	5,4	0,044	$\beta = 0,63$
	0,7	0,27	4,2	6,6	0,028	t_1 = 2,4 ore
	1,0	0,125	6,0	8,4	0,014	
	1,5	0,045	9,0	11,4	0,006	

Prin ameliorările aduse formulei inițiale, hidrografele indiciale respective concordă destul de bine cu hidrografele indiciale experimentale, cel puțin pentru datele cunoscute astăzi.

Particularitățile de mai sus, permit ca să se aplice în hidrologie, teoria regimului tranzitoriu în același sens ca și în problemele puse în electrotehnică pentru calculul curenților, adică să se tindă către soluția directă a determinării debitelor.

Astfel, determinarea debitelor poate fi efectuată prin integrarea ecuației (7), rezultînd formulele (8) — (14).

Cu ajutorul „hidrografelor reduse" (fig. 3,4 și 5) putem avea un mijloc destul de comod de calcul, de îndată ce $P(t)$, K și β sînt dați.

Punerea la punct, în mod definitiv, a metodei necesită încă cercetări hidrologice adecuate și în special măsurători simultane pentru $P(t)$ și $Q(t)$ în bazine hidrografice reprezentative.

Pentru marile viituri de primăvară provenite din ploi și topirea zăpezilor, metoda își poate găsi o simplificare, dat fiind următoarele considerente :

a) Variația coeficientului de șiroire K este precizată oarecum dinainte, ținînd seama că la viiturile excepționale solul bazinului hidrografic este înghețat ori saturat cu apă ; în asemenea cazuri practice $K = 0{,}80-0{,}90$, adică aproape de unitate.

b) Timpul specific al bazinului $\mathcal{T}$ poate fi admis acoperitor,

$$\mathcal{T} = 0{,}77\ T$$

în care T este timpul de concentrare, adesea formulat în diverse publicații în raport cu caracteristicile topometrice ale bazinului hidrografic.

c) Repartiția debitului de precipitații $P(t)$ corespunde unei ploi torențiale avînd durata cît mai aproape de timpul de concentrare T și cu intensitatea medie conform corelației : intensitatea medie—durată—mărimea suprafeței bazinului udat.

d) Dacă, după cum relevă M. Duffaut [2], notăm cu p_1 probabilitatea solului înghețat sau saturat și cu p_2 probabilitatea precipitației alese $P(t)$, atunci după o regulă cunoscută în calculul de probabilitate avem

$$p = p_1\, p_2,$$

în care p este probabilitatea hidrografului de viitură calculat.

În sfîrșit, vom releva posibilitatea, ce se întrevede de pe acum, ca încercările pe modele de bazine hidrografice să poată aduce în aceste cazuri, noi și interesante contribuții.

Primită la redacție la 8 aprilie 1958.

РАСЧЕТ ДЕБИТОВ ПАВОДКОВЫХ ВОД МАЛЫХ ВОДОЕМОВ ПРИ ПОМОЩИ ГИДРОГРАФА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Теория переходного режима, по аналогии с исследованиями в области электрических токов, механизмов и пр. применяется и в гидрологии в области паводковых дебитов в малых гидрографических бассейнах.

Отправной точкой является показательный гидрограф во 2-м приближении, установленный автором соответственно уравнению (5).

В зависимости от нескольких схем $P(t)$ производят интегрирование уравнения (7), что приводит при прямоугольном, соответственно треугольном распределении, к соотношениям (8), (9), (10), (11), (13) и (14).

Вводится понятие ,,приведенный паводковый гидрограф'' путем отношения

$$q(t) = \frac{Q(t)}{K P_{\max}},$$

где K — коэффициент поверхностного размывания

$P_{\max}$ — максимум изменения $P(t)$.

Даются графики, изображенные на рис. 3, 4 и 5, соответственно (8)—(14), для разбивки приведенных паводковых гидрографов в зависимости от приведенного времени $\theta = \frac{t}{\mathcal{T}}$; физическое значение $\mathcal{T}$ есть удельное время каждого гидрографического бассейна и может быть выражено в зависимости от времени концентрации T.

При помощи приведенных гидрографов, путем наложения эффектов можно быстро расчитать изменение паводка $Q(t)$ при всяком изменении $P(t)$ осадков после предварительного разложения $P(t)$ в прямоугольники и треугольники.

Способ расчета приведен в таблицах, находящихся в тексте и на рис. 6-*а* и 6-*б*, где можно увидеть удовлетворительное поведение этой теории.

В конце сообщения приводится упрощенный метод для расчета частного случая максимального паводка в тех же гидрографических бассейнах небольшой величины.

CALCUL DES DÉBITS DE CRUE DES PETITS BASSINS À L'AIDE DE L'HYDROGRAPHE INDICIEL, EN SECONDE APPROXIMATION

RÉSUMÉ

Par analogie avec l'étude des courants électriques, mécanismes, etc., on applique en hydrologie, dans le domaine des débits de crue pour les petits bassins hydrographiques, la théorie du régime transitoire.

Le point de départ est l'hydrographe indiciel, que l'auteur a établi en seconde approximation, en conformité avec l'équation (5).

En fonction de quelques schémas $P(t)$, on procède à l'intégration de l'équation (7), ce qui conduit, pour la répartition rectangulaire, respectivement triangulaire, aux relations (8), (9), (10), (11), (13) et (14).

On introduit la notion *d'hydrographe de crue réduit*, par le rapport

$$q(t) = \frac{Q(t)}{K \cdot P_{\max}}$$

où K = coefficient d'érosion ; $P_{\max}$ = maximum de la variation $P(t)$.

On donne les graphiques 3, 4 et 5, correspondant aux formules (8) à (14), pour le traçage des hydrographes de crue réduits, par rapport au temps réduit $\theta = t/\mathcal{T}$; la signification physique de $\mathcal{T}$ est un temps spécifique de chaque bassin hydrographique et peut être exprimé en fonction du temps de concentration T.

A l'aide des hydrographes réduits, il est possible d'obtenir rapidement, par des superpositions d'effets, la variation de la crue $Q(t)$

pour toute variation P (t) de la précipitation, après avoir décomposé au préalable P (t) en rectangles et en triangles.

Le mode de calcul est donné dans les applications indiquées dans le tableau du texte et les figures 6*a* et 6*b*, où l'on peut constater le comportement satisfaisant de la théorie.

En conclusion, on montre les simplifications de la méthode dans le cas particulier de la crue maximum dans les mêmes bassins hydrographiques de faibles dimensions.

BIBLIOGRAFIE

1. M. CUÉNOD, *Contributions à l'étude des crues. Détermination de la relation dynamique entre les précipitations et le débit de cours d'eau au moyen du calcul à l'aide de suites.* La Houille Blanche, 3, (1956).
2. M. DUFFAUT, *Méthodes pour déterminer le débit de crue maximum qu'il est possible de prévoir pour un barrage et pour lequel le projet de barrage doit être établi.* Comisia internațională de baraje mari, Congresul al IV-lea, New-Delhi, 1954.
3. TR. LALESCU, *Introducere la teoria ecuațiilor integrale.* București, 1911 ; Paris, 1912.
4. M. I. KONTOROVICI, *Calculul operațional și fenomenele tranzitorii în circuitele electrice.* Ed. tehnică, București, 1955.
5. М. А. ВЕЛИКАНОВ, *Гидрология суши.* Ленинград, 1948.

DETERMINAREA LUNGIMII DE STABILIZARE A MIȘCĂRII TURBULENTE A FLUIDELOR ÎN CANALE LARGI ȘI CONDUCTE CIRCULARE SUB PRESIUNE

DE

S. HÎNCU

Studiul scurgerii fluidelor în porțiunea de început a canalelor și conductelor în regim turbulent prezintă importanță practică și teoretică.

Importanța practică constă în faptul că mișcarea fluidelor în canale și conducte, atît în sisteme scurte cît și în sisteme lungi, se întîlnește foarte des și cunoașterea lungimii de început pe care are loc stabilizarea mișcării este de multe ori deosebit de necesară. O atenție mare se dă acestei probleme în instalațiile de laborator destinate cercetărilor experimentale.

Teoretic, această problemă se găsește studiată în lucrarea [1] și în lucrările [2], [3] și [4], cunoscute nouă din lucrarea [1]. În toate aceste lucrări calculele analitice au la bază următoarele ipoteze :

a) În secțiunea de intrare a fluidului în canal sau conductă viteza este uniform distribuită și egală cu viteza medie de curgere U_0.

b) Imediat în aval de secțiunea de intrare, datorită frecărilor, lîngă pereții canalului sau conductei, apar straturi limită, în centru rămînînd o zonă numită sîmbure central, în interiorul căruia mișcarea are loc fără frecare.

c) Stratul limită se dezvoltă în regim turbulent chiar de la secțiunea de intrare a fluidului în canal sau conductă (fig. 1).

Rezultatele calculelor diferă mult de la un cercetător la altul și dau valori pentru lungimea de început în conducte cu mult inferioare celor determinate pe cale experimentală de Kirsten [1], [5] sau Nikuradze [5]. În plus, calculele expuse în lucrarea [1] sînt extrem de laborioase.

În cele ce urmează vom da o rezolvare mai simplă a acestei probleme pornind de la ecuațiile integrale ale stratului limită — ecuația cantității de mișcare și ecuația continuității — și vom considera și cazul în care ipoteza *c*) nu se realizează.

După părerea noastră, diferența mare între calculele teoretice și rezultatele experimentale existente se explică tocmai prin faptul că

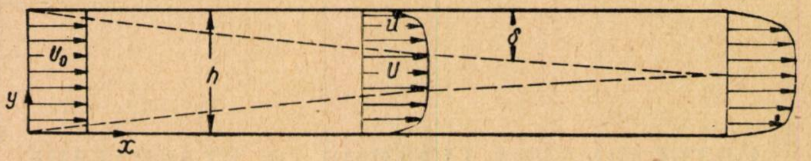


Fig. 1

ipoteza *c*) se realizează în practică numai prin adaptarea unor măsuri speciale de turbulizare a curentului la intrare în canal sau conductă.

1. CALCULUL LUNGIMII DE ÎNCEPUT ÎN CANALE LARGI

Folosim următoarele notații:

U_0 — viteza medie în canal,

U — viteza în sîmburele central într-o secțiune curentă,

u — viteza în stratul limită,

$2a$ — înălțimea canalului,

δ — grosimea stratului limită,

$\delta^\star = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$ — grosimea de eliminare,

$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$ — grosimea pierderii de impuls,

τ_0 — efortul unitar de frecare la perete,

ρ — masa specifică a fluidului,

ν — coeficientul de viscozitate cinematică.

Luăm ca axe de coordonate axa Ox de-a lungul unuia din pereții canalului și Oy perpendiculară pe peretele respectiv. Punctul de origine îl situăm în secțiunea de intrare.

În porțiunea de început va trebui să fie satisfăcute concomitent următoarele două ecuații [**5**]:

— ecuația impulsului

$$U^2 \frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^\star)\, U \frac{dU}{dx} = \tau_0/\rho, \tag{1}$$

— ecuația de continuitate

$$aU_0 = U\,(a - \delta^\star). \tag{2}$$

Admitem că distribuţia vitezelor în stratul limită satisface legea

$$\frac{u}{U}=\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}, \tag{3}$$

ar efortul unitar de frecare la perete poate fi exprimat sub forma [5], [6].'

$$\tau_0 = 0{,}0225\,\rho\,U^{7/4}\left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{1/4}. \tag{4}$$

În acest caz, obţinem pentru grosimea de eliminare şi pentru grosimea pierderii de impuls

$$\delta^{\star}=\frac{1}{8}\,\delta, \tag{5}$$

$$\theta=\frac{7}{72}\,\delta. \tag{6}$$

Înlocuind expresiile (3), (4), (5) şi (6) în ecuaţia (1) şi folosind ecuaţia (2), obţinem, după unele transformări,

$$dx=\frac{Re^{1/4}}{0{,}0225}\,\frac{\left(\frac{\delta}{a}\right)^{1/4}\left(\frac{7}{72}+\frac{\delta}{36\,a}\right)}{\left(1-\frac{\delta}{8a}\right)^{5/4}}\,d\delta, \tag{7}$$

unde

$$Re=\frac{U_0 a}{\nu}.$$

Ecuaţia diferenţială (7) poate fi integrată prin cvadratură. Mai comod este să facem substituţia $\frac{\delta}{8a}=t$ şi să dezvoltăm factorul $\left(1-\frac{\delta}{8a}\right)^{5/4}=$ $=(1-t)^{-5/4}$ în serie :

$$(1-t)^{-5/4}=1+\frac{5}{4}\,t+\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{8}\,t^2+\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{13}{12}\,t^3+\dots \tag{8}$$

Seria (8) în intervalul $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{8}$ este rapid convergentă şi este suficient să ne mărginim la primii trei termeni fără ca rezultatele calculelor să sufere o aproximaţie sensibilă.

Făcînd înlocuirile respectiv în ecuaţia (7) şi integrînd, obţinem, după trecerea la vechea variabilă,

$$\frac{x}{aRe^{1/4}}=3{,}46\left(\frac{\delta}{a}\right)^{5/4}\left[1+0{,}1720\,\frac{\delta}{a}+0{,}0257\left(\frac{\delta}{a}\right)^2+0{,}0080\left(\frac{\delta}{a}\right)^3+\dots\right]. \tag{9}$$

Ecuaţia (9) a fost obţinută respectînd condiţia pentru $\frac{x}{a} = 0, \frac{\delta}{a} = 0$ şi exprimă dependenţa funcţională între abscisa x şi grosimea stratului limită δ. În apropierea punctului $\frac{x}{a} = 0$ stratul limită se dezvoltă ca în cazul unei lame plane subţiri situată într-un curent paralel de viteză U_0.

Lungimea de început se obţine din ecuaţia (9), pentru $\frac{\delta}{a} = 1$. Rezultă

$$l = 4{,}20\ a\ Re^{1/4}\ ^{*)}. \tag{10}$$

2. CALCULUL LUNGIMII DE ÎNCEPUT ÎN CONDUCTE CIRCULARE

Aplicăm teorema cantităţii de mişcare pentru masa de fluid care se scurge într-o secundă între secţiunea de intrare şi o secţiune curentă x, ce aparţine lungimii de început. Dacă notăm cu P forţa de presiune, cu T forţa de frecare şi cu ΔW variaţia cantităţii de mişcare în timp de o secundă avem

$$\Delta W = P - T. \tag{11}$$

Mişcarea o raportăm la un sistem de axe rectangulare, situate în acelaşi mod, ca şi în cazul problemei canalelor largi.

Admitem că distribuţia vitezelor în stratul limită are loc după formula (3) şi că efortul unitar de frecare la perete poate fi, de asemenea, exprimat de formula (4).

Pentru variaţia cantităţii de mişcare avem

$$\Delta W = \pi\rho\left\{U^2\left[(R-\delta)^2 + \frac{14}{9}\,\delta - \frac{7}{8}\,\delta^2\right] - R^2 U_0^2\right\}, \tag{12}$$

unde R este raza conductei.

Considerînd presiunea constantă pe secţiune şi folosind ecuaţia lui Bernoulli, pentru forţa de presiune găsim

$$P = \pi R^2 (p_0 - p) = \pi R^2 \rho\,\frac{U^2 - U_0^2}{2}. \tag{13}$$

Forţa de frecare, pe baza relaţiei (4), poate fi scrisă

$$T = 2\,\pi R\int_0^x \tau_0\,dx = 0{,}045\,\pi R\,\nu^{1/4}\int_0^x \frac{U^{7/4}}{\delta^{1/4}}\,dx. \tag{14}$$

---

*) Într-o lucrare prezentată la Congresul VII AIRH, Lisabona 1957, lungimea de început în canale largi s-a determinat pornind de la ecuaţiile Loiţianski-Buri, fără a se face vreo ipoteză privitoare la distribuţia vitezelor în stratul limită. Rezultatele numerice ale calculelor nu diferă de cele prezentate în lucrarea de faţă.

Pentru determinarea dependenței funcționale $U = f(\delta)$ folosim ecuația de continuitate

$$\pi R^2 U_0 = 2\pi \int_0^{\delta} U\,(R-y)\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} dy + \pi (R-\delta)^2\, U, \tag{15}$$

sau

$$U = U_0 \left(\frac{1}{15}\,\frac{\delta^2}{R^2} - \frac{1}{4}\,\frac{\delta}{R} + 1\right)^{-1}. \tag{16}$$

Folosind relațiile (12), (13), (14) și (16), ecuația (11), după unele transformări, devine

$$\frac{R}{2}\left[\frac{2\left(1-\frac{4}{9}\,\frac{\delta}{R}+\frac{1}{8}\,\frac{\delta^2}{R^2}\right)-1}{\left(\frac{1}{15}\,\frac{\delta^2}{R^2}-\frac{1}{4}\,\frac{\delta}{R}+1\right)}-1\right]+0{,}045\,\frac{\nu^{1/4}}{U_0^{1/4}}\int_0^{x}\frac{dx}{\delta^{1/4}\left[\frac{1}{15}\frac{\delta^2}{R^2}-\frac{1}{4}\frac{\delta}{R}+1\right]^2}=0. \tag{17}$$

Derivînd relația (17) în raport cu variabila x obținem următoarea ecuație diferențială:

$$\frac{Re^{1/4}}{0{,}09}\left(\frac{\delta}{R}\right)^{1/4}\left[\frac{-\frac{1}{15}\cdot\left(\frac{\delta}{R}\right)^3+\frac{24}{135}\cdot\left(\frac{\delta}{R}\right)^2+\frac{1}{90}\cdot\frac{\delta}{R}-\frac{7}{18}}{\left(\frac{1}{15}\,\frac{\delta^2}{R^2}-\frac{1}{4}\,\frac{\delta}{R}+1\right)^{5/4}}\right]d\delta = dx \tag{18}$$

unde

$$Re = \frac{U_0\, R}{\nu}.$$

Ecuația diferențială (18) se poate integra prin cvadratură. Se observă însă că în intervalul $0 \leqslant \frac{\delta}{R} \leqslant 1$ avem

$$0 \leqslant \frac{1}{4}\,\frac{\delta}{R} - \frac{1}{15}\,\frac{\delta^2}{R^2} \leqslant \frac{11}{60} \quad \text{și factorul} \quad \left[1-\left(\frac{1}{4}\,\frac{\delta}{R}-\frac{1}{15}\,\frac{\delta^2}{R^2}\right)\right]^{-4/5}$$

poate fi dezvoltat în serie,

$$\left[1-\left(\frac{1}{4}\,\frac{\delta}{R}-\frac{1}{15}\,\frac{\delta^2}{R^2}\right)\right]^{-4/5} = 1 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}\,\frac{\delta}{R}-\frac{1}{15}\,\frac{\delta^2}{R^2}\right)+$$

$$+\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{8}\left(\frac{1}{4}\,\frac{\delta}{R}-\frac{1}{15}\,\frac{\delta^2}{R^2}\right)^2+\ldots \tag{19}$$

Seria (19) converge rapid în intervalul $0 \leqslant \frac{\delta}{R} \leqslant 1$ și, cu suficientă aproximație, ne putem mărgini la primii trei termeni.

Introducînd pe (19) în (18) și integrînd de la 0 la $\frac{\delta}{R}$ obținem, după unele transformări,

$$\frac{x}{R\,Re^{1/4}} = 3{,}46\left(\frac{\delta}{R}\right)^{5/4}\left[1 + 0{,}1580\,\frac{\delta}{R} - 0{,}0990\,\frac{\delta^2}{R^2} - 0{,}00547\,\frac{\delta^2}{R^3} + \right.$$

$$\left. + 0{,}0231\,\frac{\delta^4}{R^4} + 0{,}00497\,\frac{\delta^5}{R^5} - 0{,}00187\,\frac{\delta^6}{R^6} - 0{,}000160\,\frac{\delta^7}{R^7} + \ldots\right]. \quad (20)$$

Lungimea de stabilizare a mișcării turbulente în conducte circulare se obține din ecuația (20) pentru $\frac{\delta}{R} = 1$:

$$l = 3{,}74\ R\,.\,Re^{1/4}. \quad (21)$$

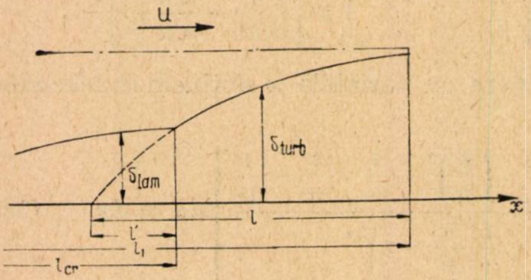


Fig. 2

Formula (21) exprimată cu ajutorul razei hidraulice $\mathcal{R} = \frac{R}{2}$ devine

$$l = 8{,}88\,\mathcal{R}\,Re_r^{1/4}\,. \quad (22)$$

Din comparația relațiilor (10) și (22) rezultă că pentru aceeași rază hidraulică și la aceeași viteză medie lungimea de început în conducte circulare este mai mare decît în canale largi. După cum se știe, aceeași concluzie rezultă și în cazul mișcării fluidelor în regim laminar.

★

În cazul în care pe o anumită porțiune de conductă sau canal stratul limită păstrează caracteristicile mișcării laminare, putem efectua calculul lungimii de stabilizare cunoscînd valoarea critică a numărului Reynolds, $Re_{cr} = \frac{l_{cr}\,U_0}{\nu}$, pentru care stratul limită din regim laminar trece în regim turbulent. În acest caz este suficient să admitem următoarele ipoteze :

A. Trecerea stratului limită din regim laminar în regim turbulent are loc pe o lungime de conductă sau canal practic egală cu zero ;

B. În secțiunea de trecere a stratului limită de la un regim la altul avem : $\delta_{lam} = \delta_{turb}$ și $\frac{d\delta_{lam}}{dx} \neq \frac{d\delta_{turb}}{dx}$ (fig. 2).

Lungimea de stabilizare a mișcării turbulente va fi

$$l_1 = l_{cr} + l - l'. \quad (23)$$

Fie dependenţa funcţională între grosimea stratului limită şi abscisa x cea dată de Leibensohn [7] pentru canale largi,

$$\frac{x}{aRe}=\frac{3}{10}\left[\frac{9}{1-\frac{\delta}{3a}}-7\left(1-\frac{\delta}{3a}\right)-16\ln\frac{1}{1-\frac{\delta}{3a}}-2\right], \tag{24}$$

şi cea dată de Schiller [7] pentru conducte circulare

$$\frac{x}{R\,Re}=\frac{1}{4}\left[\frac{58}{15}p-\frac{22}{5}\ln(1+p)-\frac{17}{15}(4+2p-2p^2)^{1/2}-\right.$$
$$\left.-\frac{16}{5}\left(\frac{4-2p}{1+p}\right)^{1/2}-\frac{37\sqrt{2}}{10}\left(\operatorname{arc\,sin}\frac{2p-1}{3}+\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{3}+\frac{26}{3}\right)\right], \tag{25}$$

unde

$$p=\frac{6}{2+\left(2-\frac{\delta}{R}\right)^2}-1.$$

Pentru canale largi mărimile l_{cr} şi l' le determinăm cu ajutorul ecuaţiilor (24, (9) şi a relaţiei $\frac{l_{cr}}{a}=\frac{Re_{cr}}{Re}$. Introducînd în ecuaţia (24) valoarea $\frac{x}{a}=\frac{l_{cr}}{a}$ găsim grosimea stratului limită în secţiunea de trecere de la un regim la altul.

Din ecuaţia (9) determinăm pe $\frac{l'}{a}$ corespunzător valorii $\frac{\delta_{cr}}{a}$.

Pentru conducte circulare mărimile l_{cr} şi l' le determinăm în mod analog, folosind ecuaţiile (25), (20) şi relaţia $\frac{l_{cr}}{R}=\frac{Re_{cr}}{Re}$.

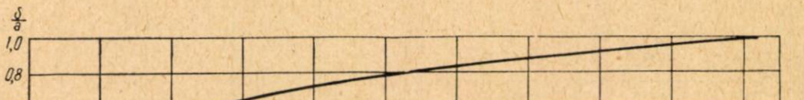


Fig. 3

În locul formulelor (24) şi (25) se pot folosi graficele din figurile 3 şi 4.

Valoarea numărului Reynolds critic Re_{cr} pentru conducte circulare sau pentru canale largi nu a fost determinată pînă în prezent. L. Prandtl [6] consideră posibil să i se atribuie numărului Re_{cr} aceleaşi valori ca şi în cazul lamelor plane situate în lungul unui curent uniform paralel.

În graficul din figura 5, este reprezentată legea de variaţie a lungimii de început relativă în conducte circulare funcţie de distanţa relativă pentru diverse valori ale numărului Re_{cr}.

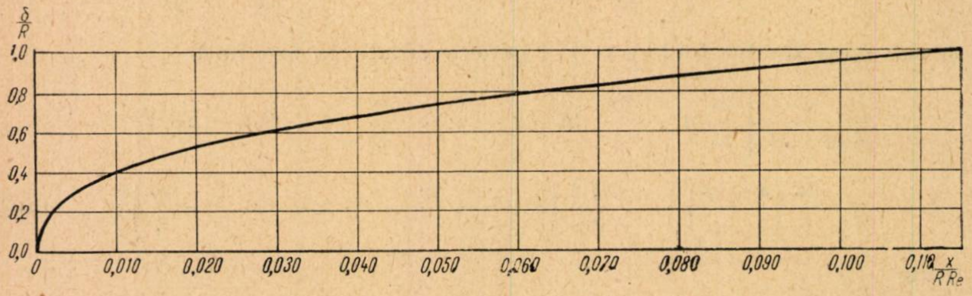


Fig. 4

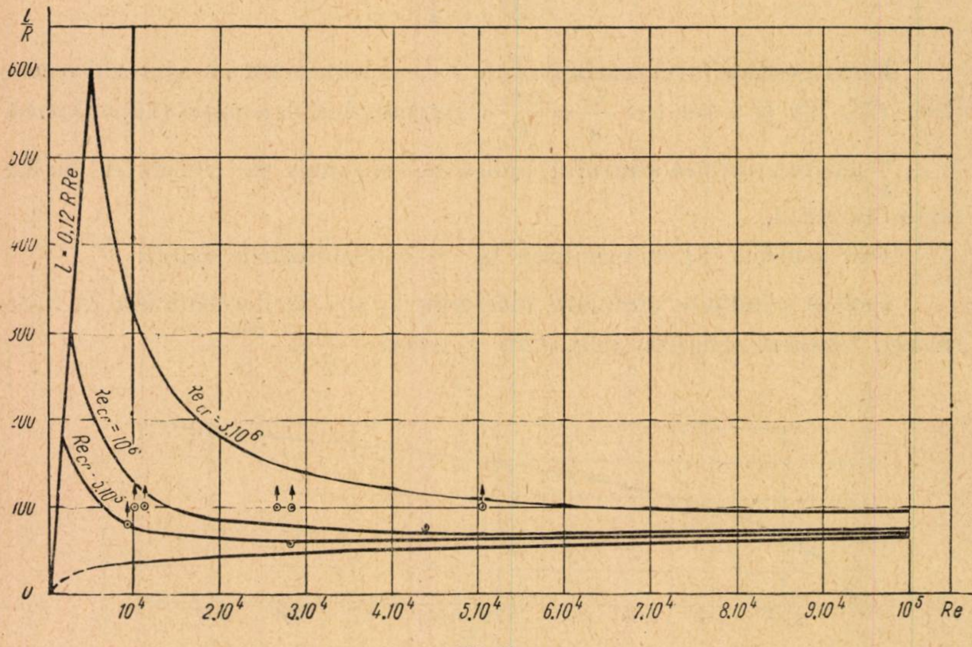


Fig. 5

Tot pe acest grafic sînt reprezentate şi punctele corespunzătoare valorilor experimentale obţinute de Kirsten şi publicate în lucrarea [1]. Faptul că Kirsten pentru unul şi acelaşi număr *Re* a obţinut lungimi de început relative diferite, se explică prin instabilitatea poziţiei secţiunii de trecere a stratului limită din regim laminar în regim turbulent.

Pentru comparație în tabela alăturată se dau valorile lungimii de început relative obținute de diferiți cercetători și cele obținute de noi, corespunzătoare numerelor *Re* la care au fost efectuate experiențele lui Kirsten [1].

Tabelă

Lungimea de început relativă $\frac{l}{R}$

Cercetător / Re	Latzko $Re_{cr} = 0$	Szablewski $Re_{cr} = 0$	Solodkin și Ghinevski $Re_{cr} = 0$	Autor				Experiențe Kirsten
				$Re_{cr} = 0$	$Re_{cr} = 5 \cdot 10^5$	$Re_{cr} = 10^6$	$Re_{cr} = 3 \cdot 10^6$	
9 529	15,80	27,60	58,40	36,90	80,12	130,40	332,18	> 80
10 167	16,06	28,00	59,00	37,80	79,23	124,90	313,40	>100
11 473	16,54	28,40	59,80	39,30	75,34	115,80	282,45	>102
27 132	20,50	31,50	65,60	48,10	62,62	79,60	149,60	>100
28 802	20,82	31,90	66,00	48,80	62,93	78,54	144,19	60
28 804	20,82	31,90	66,00	48,80	62,93	78,54	144,19	>100
43 722	23,10	33,50	68,80	54,10	64,05	73,48	116,44	78
50 494	23,96	38,60	70,00	56,00	64,70	72,88	110,52	>100

Experiențele lui Kirsten nu pot clarifica care din rezultatele teoretice pentru $Re_{cr} = 0$ sînt mai corecte. Nu există niciun motiv să considerăm că lungimea de început corespunde valorii $Re_{cr} = 0$.

În literatură se găsesc recomandate expresii empirice care evaluează mărimea lungimii de început în conducte de secțiune circulară.

După experiențele lui Nikuradze [5] $l = (50 \div 80)R$ și după experiențele lui Kirsten [1], [5] $l = (100 \div 200)R$. S. V. Izbaș [8] propune pentru determinarea lungimii de început relația $l = (80 \div 100)\ R$, iar L. F. Ševelëv [9] în efectuarea experiențelor sale a presupus de asemenea că $l = 80\ R$.

Diferența mare care există între formulele recomandate se explică prin condițiile de experimentare diferite de la un cercetător la altul, condiții care au realizat diferite valori Re_{cr}, precum și prin numerele *Re* diferite la care s-au efectuat experiențele.

Primită la redacție la 13 mai 1958.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ В ШИРОКИХ КАНАЛАХ И КРУГЛЫХ НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе приводится исследование длины стабилизации турбулентного движения жидкостей в широких каналах и круглых напорных трубопроводах, причем исходят из интегральных уравнений пограничного слоя.

Положение сечения перехода от ламинарного к турбулентному режиму пограничного слоя считается переменным вдоль канала или трубопровода; сопоставляются теоретические результаты, полученные автором с существующими экспериментальными данными или с теоретическими данными других исследователей.

DÉTERMINATION DE LA LONGUEUR DE L'ÉTABLISSEMENT DU MOUVEMENT TURBULENT DES FLUIDES DANS LES CANAUX LARGES ET DANS LES CONDUITES [CIRCULAIRES SOUS PRESSION

RÉSUMÉ

Partant des équations intégrales de la couche limite, l'auteur présente une étude de la longueur de l'établissement du mouvement turbulent des fluides dans les canaux larges et dans les conduites circulaires sous pression.

On considère variable, le long du canal ou de la conduite, la position de la section de transition du régime laminaire au régime turbulent de la couche limite et l'on compare les résultats théoriques, obtenus par l'auteur, aux données expérimentales existantes, ainsi qu'aux données théoriques d'autres auteurs.

BIBLIOGRAFIE

1. Е. Е. СОЛОДКИН и А. С. ГИНЕВСКИЙ, *Турбулентное течение вязкой жидкости в начальных участках осесимметричных и плоских каналов.* Труды ТАГИ выпуск № 701, Оборонгиз, 1957.
2. H. Latzko, *Der Värmübergang an einen turbulenten Flüssigkeitsoder Gasstrom*, ZAMM, **1**, (1921).
3. W. Szabewski, *Der Einlauf einer turbulenten Rohrströmung.* Ing. Arch., **21**, H. 5–6 (1953).
4. H. Hahneman u. L. Ehret, *Der Strömungswiderstand in geraden, ebenen Spalt unter Berücksichtigung der Einlaufverluste.* Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung, Berlin, 1942.
5. Х. ШЛИХТИНГ, Теория пограничного слоя. Издательство иностранной литературы, Москва, 1956.
6. Л. ПРАНДТЛ, Гидроаэромеханика. Москва, 1951.
7. С. М. ТАРГ, Основные задачи теории ламинарных течений. Москва, 1951.
8. С.В. ИЗБАШ, Основы гидравлики. Москва, 1952.
9. Ф. А. ШЕВЕЛЁВ, Исследование основных гидравлических закономерностей турбулентного движения в трубах. Москва, 1953.

UNELE PROPRIETĂŢI FUNCŢIONALE ALE UNUI MATERIAL PLASTIC PE BAZĂ DE FURFUROL-FENOL, CA MATERIAL PENTRU LAGĂRE *)

DE

D. ISĂCESCU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R. P. R.
GH. VASILCA, V. CALCAN şi AL. NICA

Unele încercări preliminare anterioare au arătat că materialele plastice pe bază de răşină furfurol-fenolică prezintă interes ca materiale antifricţiune pentru lagărele cu alunecare.

În cele ce urmează, se arată rezultatele unor cercetări experimentale mai ample, efectuate cu cuzineţi în formă de bucşă cilindrică cu pereţi groşi, obţinuţi dintr-o masă de presare pe bază de răşină furfurol-fenolică şi umplutură din tocătură textilă.

Răşina folosită a fost sintetizată în şarjă industrială, avînd punctul de picurare, după Ubbelhode, cuprins între 108—110°C.

Umplutura a constat din deşeuri textile (capete de la 0—30) tocate cu o ghilotină; forma umpluturii a fost neregulată, suprafaţa tocăturii variind între 1—1,5 cm^2.

Masa de presare a fost realizată prin impregnarea tocăturii textile cu o soluţie alcoolică de răşină furfurol-fenolică cu o concentraţie de 44,5%.

Impregnarea şi omogeneizarea s-au făcut în malaxor; materialul astfel obţinut a fost uscat în cuptor la temperatura de 60°C, presiune de 750 mm, timp de 90 minute.

---

*) Conţinutul lucrării în ceea ce priveşte materialul a fost realizat pe baza datelor obţinute în cadrul Secţiei de mase plastice a Centrului de cercetări chimice al Academiei R.P.R. de către D. Isăcescu, membru corespondent al Academiei R.P.R. şi V. Calcan, iar în ceea ce priveşte proprietăţile funcţionale, în cadrul Institutului de mecanică aplicată al Academiei R.P.R. de către Gh. Vasilca, V. Calcan şi Al. Nica.

Curgerea materialului, după Rashig, are următoarele valori :

Presiune kg/cm²	Curgere	
	mm	min
300	17	3′05″
400	52	2′48″
500	68,5	2′22″

Ca rezistenţe, materialul se încadrează în rezistenţele materialelor străine de acest tip, realizate însă cu răşină fenol-formaldehidică.

Contracţia materialului necondiţionat este de 0,630%, iar condiţionat timp de o oră la 60–65°C, 0,263%.

După pastilare, s-au presat bucşe cilindrice cu Ø 50 × Ø 35 × 50 mm, în următoarele condiţii :

presiune 400 kg/cm²,
temperatura 160 ± 5°C,
timp 2 min/mm.

Pentru a avea informaţii asupra stabilităţii dimensionale a bucşelor în condiţiile ungerii cu ulei, s-au făcut încercări de absorbţie la temperaturile de 23 ± 2°C, 60 ± 1°C şi 100 ± 1°C, timp de 24 şi 240 ore.

Rezultatele sînt prezentate în tabela 1.

Tabe

Temperatura de absorbţie °C	Mediu de absorbţie	Modificări					
		După 24 ore					
		Ø		L		s	
		NP	TP	NP	TP	NP	TP
20	Ulei tip 305	–	—0,0102	—0,0117	—0,0160	–	—0,0742
60	Ulei tip 305	—0,0120	—0,0368	—0,0194	—0,0625	—0,1348	—0,1349
100	Ulei tip 305	—0,0241	—0,0758	—0,0392	—0,1403	—0,3165	—0,1956

Observaţii

Ø = 50 mm
L = 50 mm
s = 7,5 mm (grosimea peretelui cuzinetului)
NP = bucşă neprelucrată mecanic
TP = bucşă total prelucrată mecanic

Deoarece modificări dimensionale importante se produc în primele 24 de ore [1], bucşele experimentate au fost în prealabil impregnate cu ulei timp de 24 ore la 100°C.

Cercetările experimentale au fost extinse atît asupra unor proprietăţi funcţionale cu aplicare nemijlocită la proiectarea lagărelor construite din asemenea materiale, cît şi asupra unor aspecte care privesc aplicarea, în cazul acestui material, a unor soluţii teoretice rezultate din calculul hidrodinamic al lagărelor cu alunecare.

Pentru materialul menţionat au fost studiate (în cazul lagărelor circulare cu alunecare) din prima categorie variaţia cu viteza a sarcinii, a coeficientului de frecare şi a debitului de ulei, iar din a doua categorie, coeficientul adimensional de portanţă ζ în funcţie de excentricitatea relativă α [2]. Încercările s-au făcut la sarcini şi viteze diferite, în regim de funcţionare termic constant, ungerea făcîndu-se cu ulei sub presiune. Regimul de funcţionare termic constant ales este $t_c = 45°C$.

1. COMPORTAREA LA ALUNECARE

Cercetările experimentale au fost efectuate după metodologia generală de încercare a materialelor antifricţiune [3], [4], utilizînd o instalaţie de încercare specială.

Condiţiile de experimentare au fost următoarele :

1) Fusul
— materialul : OLC 16, cementat, călit, rectificat,
— diametrul nominal $d = 36$ mm,
— microgeometria suprafeţei active (înălţimea medie a asperităţilor) $\approx 0{,}0015$ mm,
— duritatea suprafeţei active $H_{B\,2,5/187,5/15} \cong 500$.
2) Cuzinetul
— forma : bucşă cilindrică cu pereţi groşi (6 mm), diametrul interior nominal $d = 36$ mm,

la 1

dimensionale, %

După 240 ore					
∅		L		s	
NP	TP	NP	TP	NP	TP
—0,0100	—0,0152	—0,0353	—0,0760	—0,0940	—0,2670
—0,0904	—0,1430	—0,1066	—0,1870	—0,3230	—0,3300
—0,2350	—0,3178	—0,3380	—0,4120	—0,6065	—0,5270

— alungirea $\lambda = b/d = 0{,}7$ (respectiv 0,5).
3) Jocul relativ
— $\Psi = 2{,}5^0/_{00}$ (respectiv $4^0/_{00}$).
4) Lubrifiantul
— ulei, tip 305 (STAS).
5) Presiunea uleiului la alimentare
$p_i = 1{,}5$ atm (constantă).
6) Temperatura uleiului la intrare
$t_i = 25°C$ (constantă).
7) Intrarea uleiului
— printr-un orificiu Ø 4 mm, situat la mijlocul cuzinetului, pe direcţia sarcinii, în zona descărcată.
8) Ieşirea uleiului din lagăr
— axial, pe la capete.

9) Măsurarea temperaturii t_c convențională a cuzinetului
— pe direcția sarcinii, la mijlocul cuzinetului, în zona încărcată, la 1,5 mm distanță de suprafața activă (fig. 1).
10) Temperatura lagărelor paliere
$t_p = 25°C$ (constantă).
11) Temperatura mediului ambiant
$t_1 = 22 - 23°C$.
12) Rodajul
— 10 ore, cu ridicarea treptată a vitezei și a sarcinii.
13) Caracteristicile corpului cuzinetului
— suprafața de răcire : $\sim 0{,}09$ m^2 (răcire naturală).

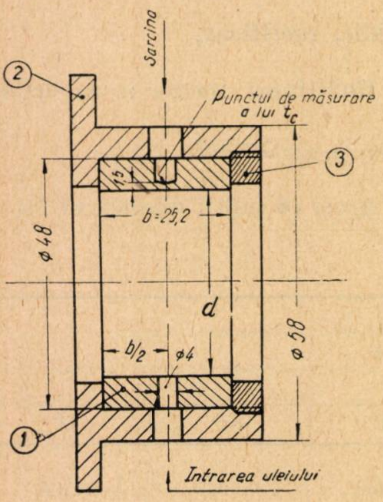


Fig. 1

Cuzinetul experimental *1* (fig. 1) se introduce glisant în montura *2* și se strînge cu piulița *3*.

El a fost confecționat (∅ 36/∅ 48) dintr-un semiprodus, presat în formă de bucșă (∅ 50/∅ 35 × 50) gata impregnat. Suprafața activă a fost prelucrată la cota finală prin strungire cu metal dur, după fixarea cuzinetului în montura metalică, cu o viteză de așchiere de ~ 200 m/min și un avans de 0,05 mm/rot. Aspectul suprafeței după strungirea în aceste condiții se prezintă relativ rugos.

Caracteristica de sarcină $p = f\ (V)$, a coeficientului de frecare $f = g\ (V)$, a debitului de ulei $q = f\ (V)$ și a produsului $pV = f\ (V)$ sînt arătate în figurile 2, 3, 4 și 5.

Pentru o comparație orientativă au fost trasate în diagrame și caracteristicile corespunzătoare ale compoziției cu 83% Sn (Y — Sn 83, STAS 202—49), care este un material antifricțiune consacrat și dintre cele mai bune. Încercările compoziției Y — Sn 83 s-au făcut în aceleași condiții, cu excepția jocului relativ, luat $\Psi = 1{,}25^0/_{00}$ pentru Y — Sn 83.

Momentul de frecare a fost măsurat într-un singur punct, restul valorilor caracteristicii $f = g\ (V)$ fiind calculate cu relația [4]

$$f = \frac{1}{pV}\,(Kq + K_0\,Q_0). \tag{1}$$

Se constată că masa plastică încercată suportă sarcini destul de mari. Caracteristică este însă forma curbei $p = f\ (V)$, deoarece prezintă între $V = 0{,}5-2{,}5$ m/s aproape un palier. În acest interval, la regimul de funcționare termic constant, materialul suportă o variație de sarcină redusă, nefiind deci sensibil termic la variația vitezei.

Coeficientul de frecare al materialului plastic este scăzut și variază relativ puțin în domeniul cu palier al caracteristicii $p = f\ (V)$. Minimul

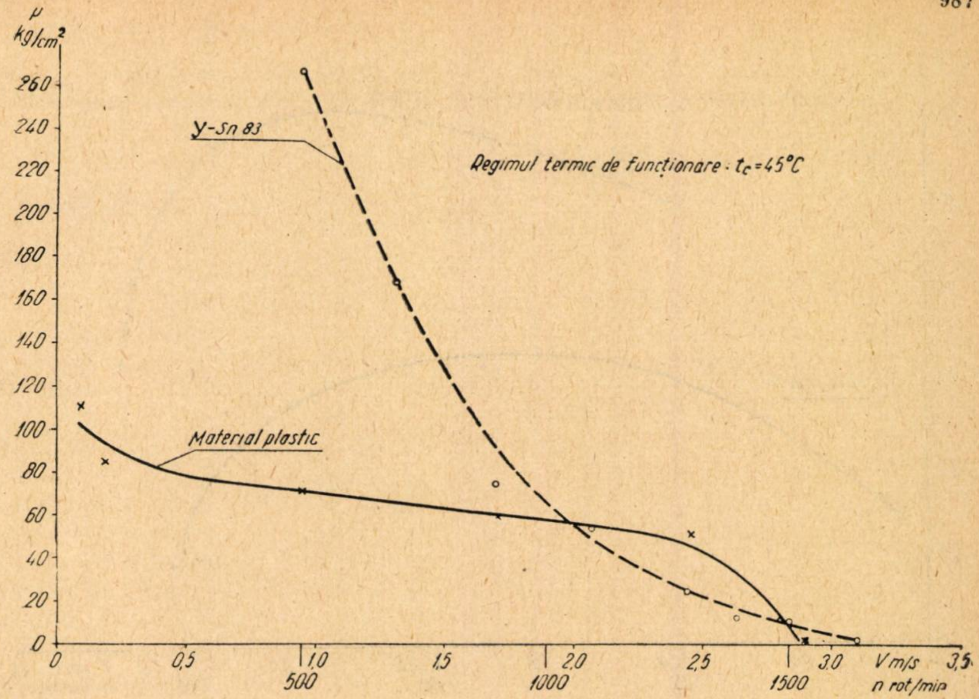

μ
kg/cm²
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
Y-Sn 83
Regimul termic de funcționare : t_c=45°C
Material plastic
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
V m/s
3,5
500
1000
1500
n rot/min

Fig. 2

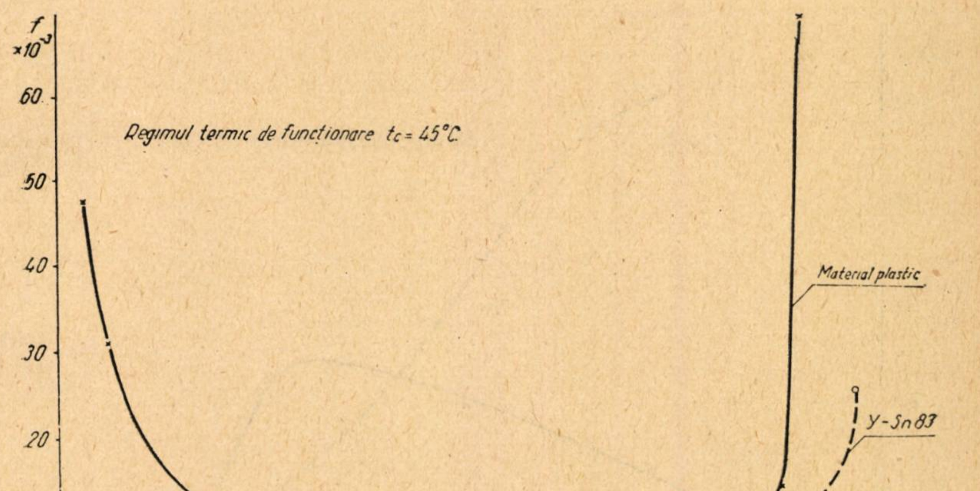

f
×10⁻³
60
50
40
30
20
10
0
Regimul termic de funcționare t_c= 45°C
Material plastic
Y-Sn 83
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
V m/s
3,5
500
1000
1500
n rot/min

Fig. 3

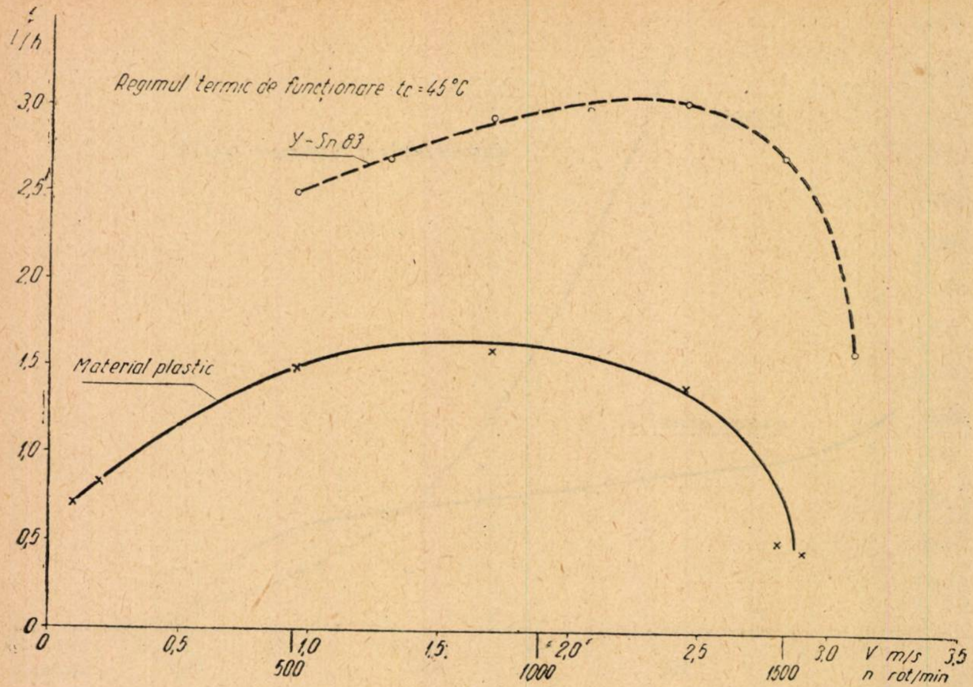

l/h
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
Regimul termic de funcționare $t_c = 45\,°C$
Y-Sn 83
Material plastic
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
V m/s
3,5
500
1000
1500
n rot/min

Fig. 4

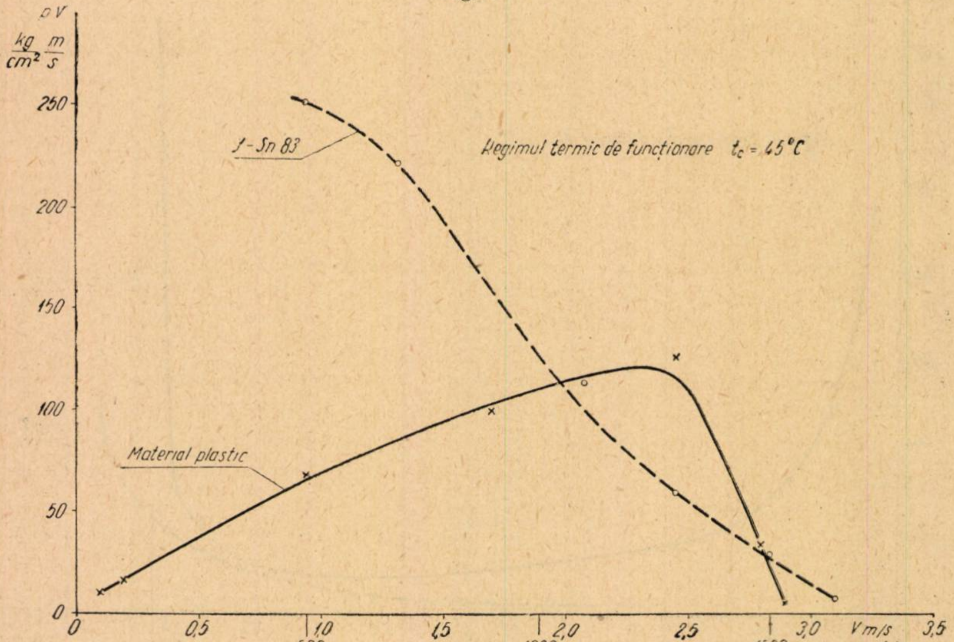

pV
$\frac{kg}{cm^2}\frac{m}{s}$
250
200
150
100
50
0
Y-Sn 83
Regimul termic de funcționare $t_c = 45\,°C$
Material plastic
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
V m/s
3,5
500
1000
1500
n rot/min.

Fig. 5

este însă deplasat în zona de viteze mai mari ($\sim$ 2,5 m/s) şi sarcini reduse, spre deosebire de valoarea minimă la compoziţia Y — Sn 83 care este situată în zona de viteze mai mici ($V < 1$ m/s). În general, coeficientul de frecare la materialul plastic este ceva mai mare ca la Y — Sn 83. Dacă se ţine însă seama că Y — Sn 83 a lucrat cu un debit de ulei aproape dublu, diferenţa între coeficientul de frecare este în realitate mai mare. Materialul plastic prezintă însă avantaje faţă de Y — Sn 83 deoarece lucrează cu un consum de ulei numai pe jumătate, ceea ce se poate datora şi faptului că este în prealabil impregnat cu ulei.

Pentru a studia comportarea la alunecare a materialului plastic şi în alte condiţii constructive, se prezintă în figurile 6, 7, 8 şi 9 proprietăţile funcţionale pentru $\lambda = 0{,}7$ şi $\Psi = 4^0/_{00}$, precum şi pentru $\lambda = 0{,}5$ şi $\Psi = 4^0/_{00}$, în comparaţie cu cazul $\lambda = 0{,}7$ şi $\Psi = 2{,}5^0/_{00}$.

Palierul caracteristicii $p = f(V)$ se menţine şi la alte alungiri şi jocuri ale lagărului. Domeniul de funcţionare este însă mult sporit în cazul $\lambda = 0{,}5$ şi $\Psi = 4^0/_{00}$, atingîndu-se presiuni specifice foarte mari ($p = 261$ kg/cm^2) şi viteze pînă la 4,7 m/s, datorită creşterii debitului de ulei şi deci răcirii mai intense.

Faţă de cazul $\lambda = 0{,}7$ şi $\Psi = 2{,}5^0/_{00}$, debitul de lubrifiant creşte pentru $\lambda = 0{,}5$ şi $\Psi = 4^0/_{00}$ de peste 10 ori, influenţînd favorabil caracteristica $p = f\ (V)$.

Creşterea coeficientului de frecare pentru $\lambda = 0{,}7$ şi $\Psi = 4^0/_{00}$, faţă de cazul $\lambda = 0{,}7$ şi $\Psi = 2{,}5^0/_{00}$ era de aşteptat, datorită mai ales creşterii debitului de lubrifiant.

Forma generală a caracteristicilor $f = g\ (V)$ se păstrează însă.

Caracteristicile instalaţiei experimentale nu au permis punerea complet în evidenţă a formei de clopot a curbei $pV = f\ (V)$ şi determinarea funcţiei $f = g\ (V)$ în cazul $\lambda = 0{,}5$ şi $\Psi = 4^0/_{00}$.

2. MICROGEOMETRIA ŞI ASPECTUL SUPRAFEŢEI ACTIVE

În figura 10 se prezintă în macrografie aspectul unei porţiuni ,,uzate'' din suprafaţa activă încărcată a cuzinetului, după încercarea la uzură efectuată în condiţiile arătate la punctul 4 al acestei lucrări.

În figura 11 se vede o porţiune similară din suprafaţa activă situată în zona descărcată, deci ,,neuzată'' a cuzinetului. Ambele reprezintă starea suprafeţei active în cazul funcţionării normale a lagărului.

Pentru fus, aceste aspecte sînt arătate în figura 12 (*a* — suprafaţa activă, *b* — zona situată în afara suprafeţei active).

La prelucrarea prin aşchiere, suprafaţa materialului plastic se prezintă neregulat, cu capete aparente de scame textile şi goluri lăsate de scamele smulse. Prin funcţionare, aceste asperităţi se netezesc. Caracteristic pentru material este faptul că în zona încărcată suprafaţa activă formează luciu, ca fonta. Majoritatea asperităţilor de la prelucrare se nivelează, suprafaţa devenind netedă. În suprafaţa lucioasă rămîn însă şi pete, care din cauza microgeometriei lor mai puţin fină, apar mate. O

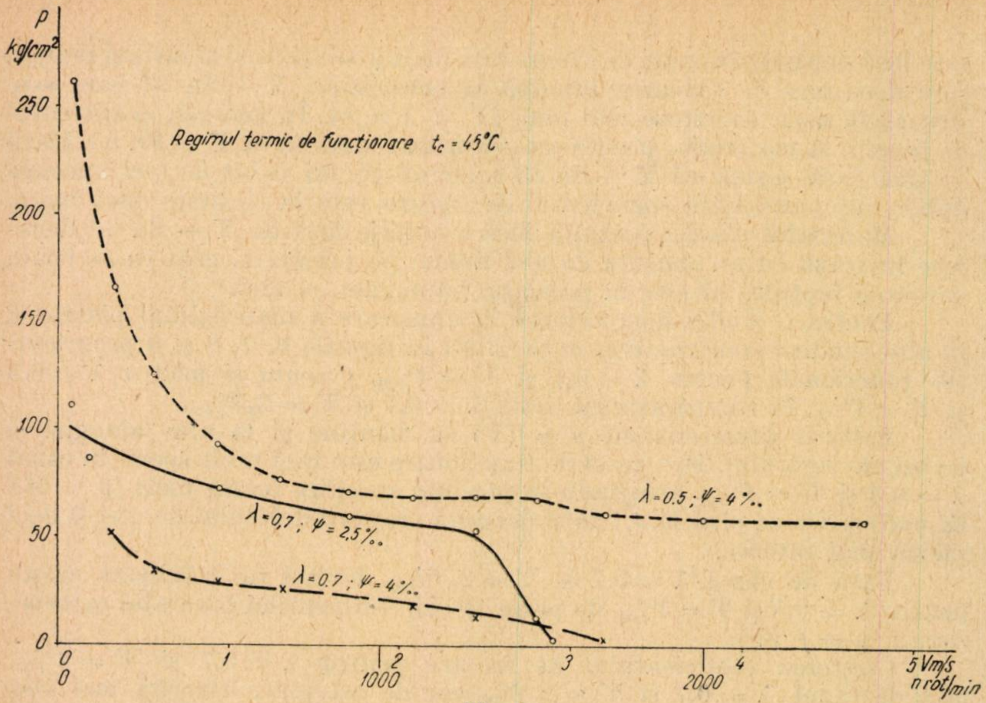

p
kg/cm²
250
200
150
100
50
0
Regimul termic de funcționare t_c = 45°C
λ=0.5 ; ψ = 4 ‰
λ=0,7 ; ψ = 2,5 ‰
λ=0.7 ; ψ = 4 ‰
0
1
2
3
4
5 V m/s
0
1000
2000
n rot/min

Fig. 6

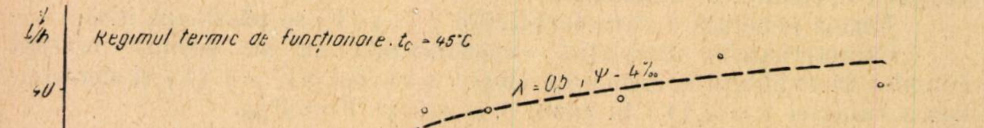

L/h
40
30
20
10
0
Regimul termic de funcționare. t_c = 45°C
λ = 0,5 , ψ - 4‰
λ = 0,7 , ψ = 4‰
λ = 0,7, ψ = 2,5 ‰
0
1
2
3
4
5
V m/s
0
1000
2000
n rot/min

Fig. 7

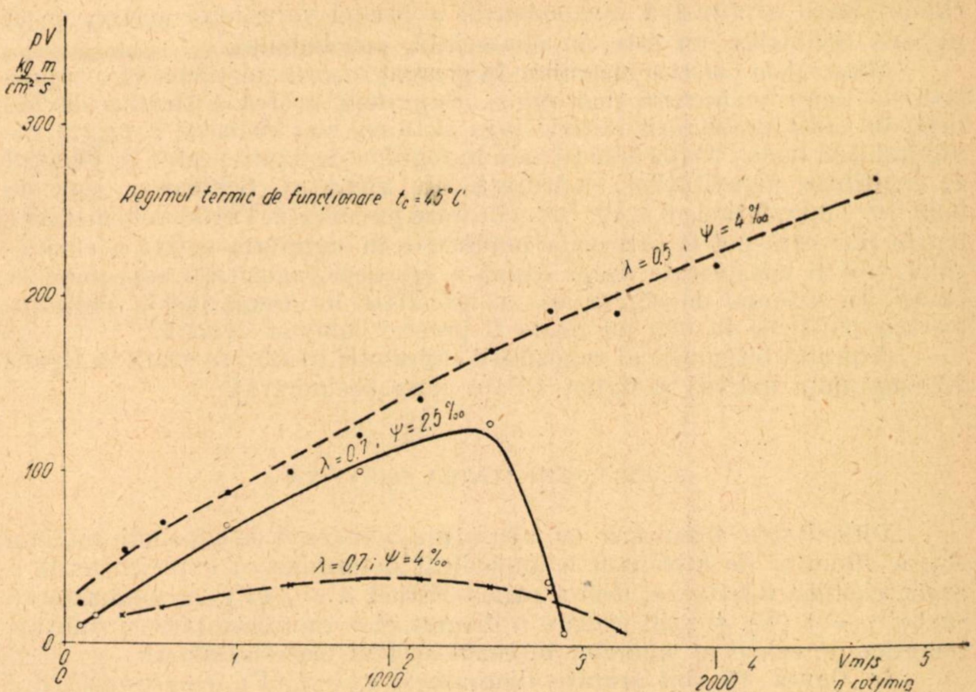

pV
kg m / cm² s
300
200
100
0
Regimul termic de funcţionare t_c = 45°C
λ = 0,5 , ψ = 4 ‰
λ = 0,7 , ψ = 2,5 ‰
λ = 0,7 ; ψ = 4 ‰
0
1
2
3
4
V m/s
5
0
1000
2000
n rot/min

Fig. 8

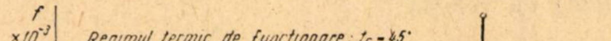

f
×10⁻³
60
50
40
30
20
10
0
Regimul termic de funcţionare: t_c = 45°
λ = 0,7 ; ψ = 4 ‰
λ = 0,7 ; ψ = 2,5 ‰
0
1
2
3
V m/s
0
500
1000
1500
n rot/min

Fig. 9

caracterizare cantitativă dimensională a fineței suprafeței active, după metoda Schmaltz, nu este, în consecință, concludentă.

Materialele plastice lustruiesc în general fusurile metalice cu o suprafață de lucru prelucrată mai rugos. Suprafața activă a fusului devine însă, în cazul prelucrării inițiale prin șlefuire, mai rugoasă, aspectul rămînînd însă lucios. După funcționare în regimul de uzură arătat la punctul 4, înălțimea asperităților, măsurată cu aparatul Schmaltz, este de $0,89 . 10^{-3}$ mm, față de $0,3 . 10^{-3}$ mm în stare prelucrată. Particulele metalice foarte fine care pot fi observate implîntate în suprafața activă a cuzinetului, pot fi considerate drept cauză a creșterii rugozității suprafeței la fusuri. În sistemul de alimentare cu lubrifiant în circuit închis, prezența acestor particule în ulei nu poate fi practic complet evitată.

Aspectul fotografic al rugozității suprafeței fusului se arată în figura 13 (suprafața activă) și figura 14 (în stare prelucrată).

3. EXCENTRICITATEA RELATIVĂ

Dificultatea măsurării cu aparatura existentă a grosimii minime $\delta_{\min}$ a filmului de lubrifiant a împiedicat determinarea experimentală a excentricității relative α, deci a caracteristicii $\alpha = f\ (V)$ corespunzătoare curbei $p = f\ (V)$, și prin urmare a diagramelor riguroase pentru soluțiile teoretice de calcul al lagărelor în cazul acestui material plastic.

În figura 15 sînt arătate diagramele $\alpha_\zeta = f\ (V)$, corespunzătoare caracteristicilor $p = f\ (V)$, cu excentricitatea relativă α determinată pe cale aproximativă din coeficientul de portanță ζ (corespunzător numărului Sommerfeld) cu relația

$$\zeta = \frac{d\Psi^2}{2\mu_1} \cdot \frac{p}{V} . \tag{2}$$

La o valoare a lui ζ, calculată cu parametrii experimentali p și V, se ia α după curba teoretică $\zeta = f\ (\alpha, \lambda)$.

Se constată că în cazul $\lambda = 0,5$ și $\Psi = 4^0/_{00}$ excentricitatea relativă ia, în domeniul experimentat, valori apropiate de 1 și variază puțin de-a lungul caracteristicii $p = f\ (V)$. Extinzînd caracteristica $p = f\ (V)$ la viteze $V > 4,71$ m/s și sarcini mai mici, curba $\alpha_\zeta = f\ (V)$ corespunzătoare va prezenta evident și o ramură coborîtoare. Încercări cu unele aliaje metalice [5], cu debite de asemenea foarte mari, prezintă o variație $\alpha_\zeta = f\ (V)$ asemănătoare.

Cercetări mai ample în această direcție vor putea arăta deci, dacă, în cazul evacuării căldurii din lagăr în mod preponderent prin lubrifiant, influența particularităților fizice ale materialelor asupra proprietăților funcționale ale ansamblului de frecare nu devine mai puțin importantă, adică, dacă nu s-ar putea ca prin debite de ulei foarte mari să se obțină lagăre cu proprietăți funcționale mai puțin dependente de materialele ansamblului de frecare, cel puțin pentru regimuri hidrodinamice asigurate și la agregatele cu durate de funcționare lungi și neîntrerupte.

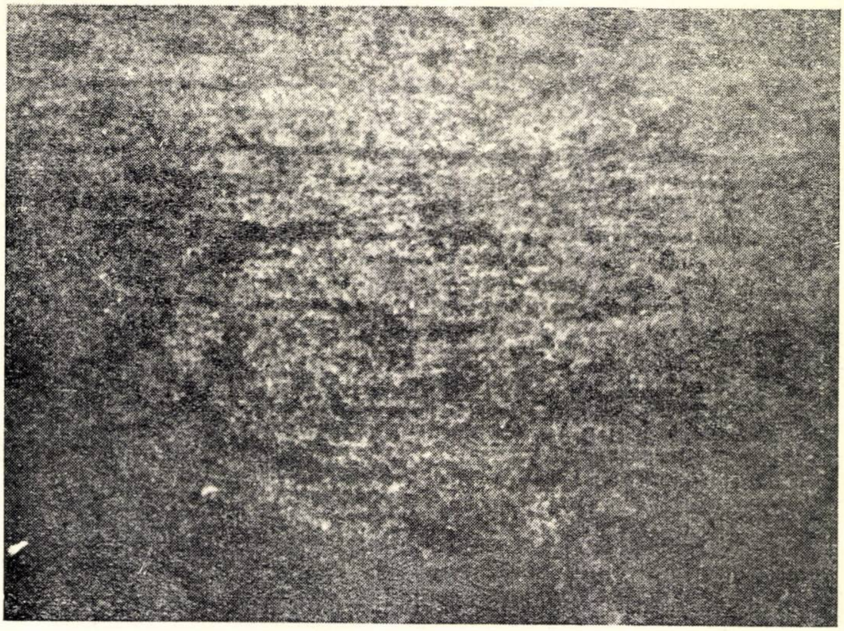


Fig. 10

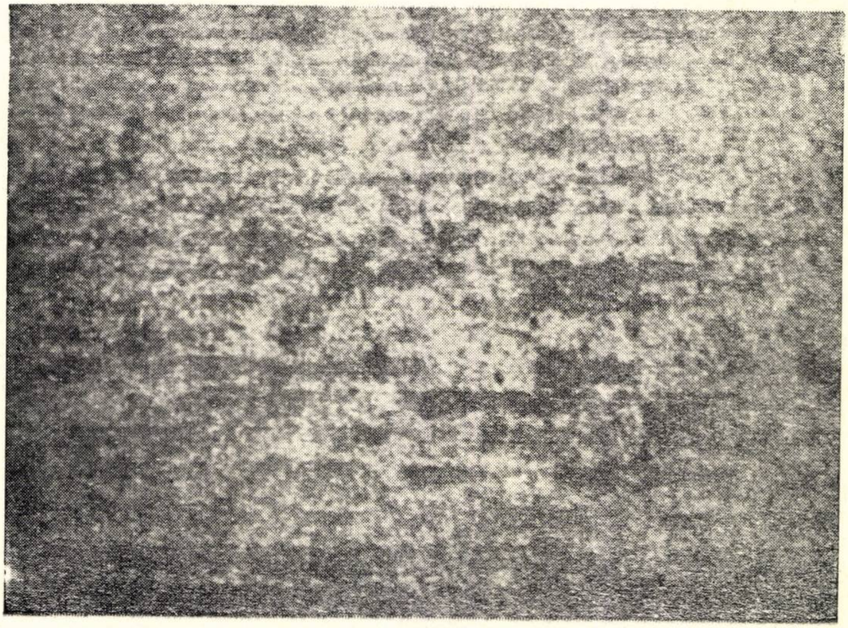


Fig. 11

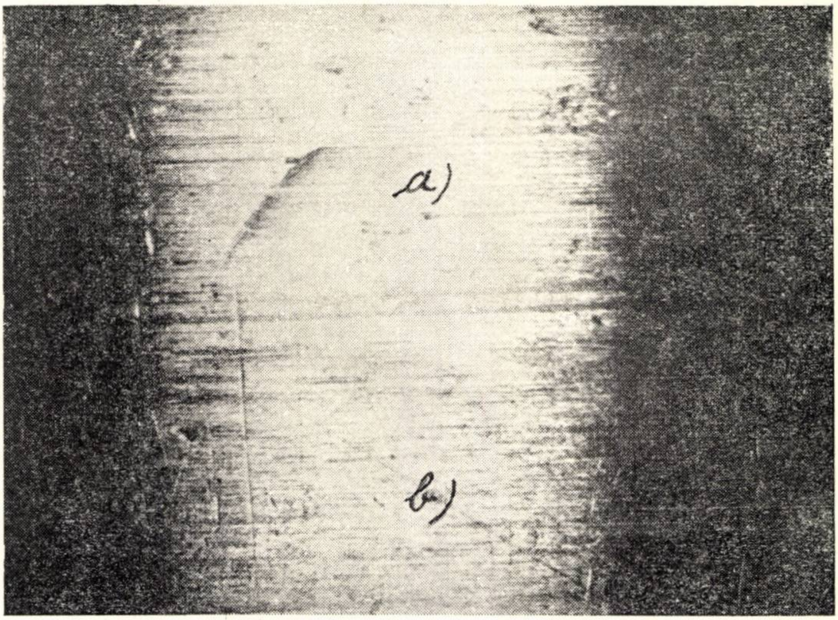


Fig. 12

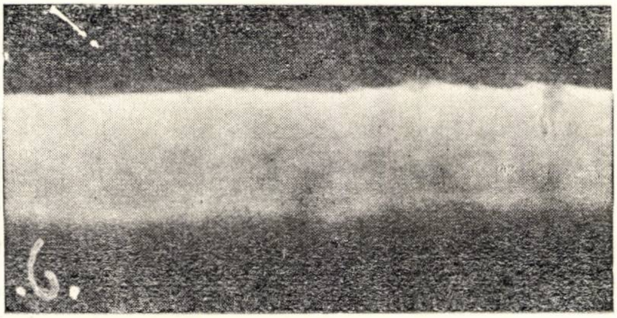


Fig. 13

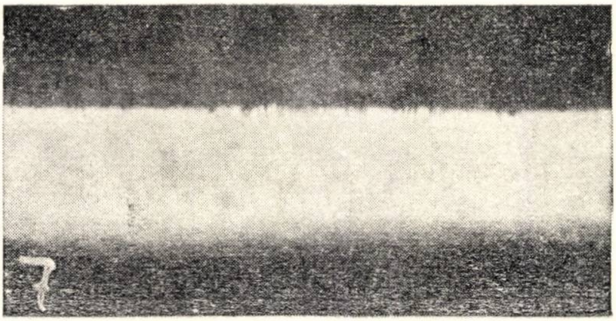


Fig. 14

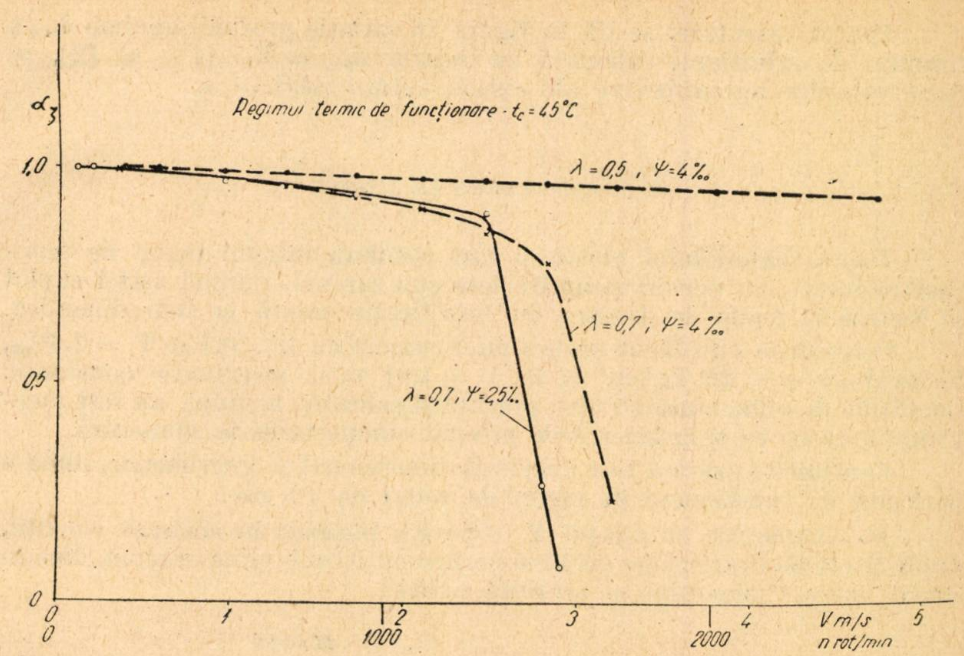

α_3
Regimul termic de funcționare · $t_c = 45°C$
1,0
0,5
0
$\lambda = 0,5$, $\psi = 4‰$
$\lambda = 0,7$; $\psi = 4‰$
$\lambda = 0,7$, $\psi = 2,5‰$
0
1
2
3
4
5
V m/s
0
1000
2000
n rot/min

Fig. 15

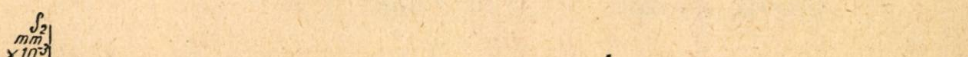

S_2
mm
$\times 10^{-3}$
50
40
30
20
10
0
Regimul termic de funcționare $t_c = 45°C$
$\lambda = 0,7$; $\psi = 2,5‰$
$\lambda = 0,7$; $\psi = 4‰$
$\lambda = 0,5$, $\psi = 4‰$
0
1
2
3
4
5
V m/s
0
1000
2000
n rot/min

Fig. 16

Pentru orientare, se dă în figura 16 variaţia grosimii minime δ_{min} a filmului de lubrifiant, calculată cu relaţia $\delta_{min} = \Psi\, r\, (1 - \alpha)$ [2], pe baza valorilor aproximative ale excentricităţii relative α_{ζ}.

4. COMPORTAREA LA UZURĂ

Uzura materialului plastic a fost studiată într-un regim de funcţionare forţat, cu porniri şi opriri dese sub sarcină, punînd astfel cuplul să lucreze în regim de frecare cu lubrificaţie mixtă şi hidrodinamică.

Cercetările s-au făcut asupra unui cuzinet cu $\lambda = 0{,}7$ şi $\Psi = 2{,}5^0/_{00}$, încărcat cu $p = 22$ kg/cm^2 şi la $V = 1{,}81$ m/s, menţinute constante. Condiţiile de alimentare cu ulei, precum şi calitatea uleiului, au fost menţinute aceleaşi ca şi la încercările privind comportarea la alunecare.

Cantitativ, uzura a fost urmărită dimensional şi gravimetric, după o perioadă de funcţionare în regim de rodaj de 12 ore.

În comparaţie cu aliajul Y — Sn 83, încercat în aceleaşi condiţii, după 71 ore de funcţionare cu 1400 porniri-opriri sub plină sarcină, dimensional uzura cuzinetului se prezintă astfel :

		Material plastic	*Y — Sn 83*
— pe direcţia sarcinii	$\times 10^{-3}$ mm	15	15
— perpendicular pe direcţia sarcinii	$\times 10^{-3}$ mm	5	5

Pe cale de cîntărire, uzura nu a putut fi stabilită, deoarece materialul plastic a absorbit ulei în cursul încercărilor, cuzinetul prezentînd un spor de greutate de 4,6 mg la o greutate iniţială de 28,2515 g. Dimensiunile au fost măsurate cu un micrometru 1/100 mm, cîntărirea făcîndu-se cu o balanţă analitică cu precizia de 0,2 mg.

Cu toată precizia insuficientă obţinută prin măsurare, se poate totuşi aprecia că materialul plastic are o rezistenţă la uzură comparabilă cu a unuia din cele mai bune materiale pentru lagăre (Y — Sn 83).

În concluzie, se poate spune că materialul plastic încercat posedă proprietăţi antifricţiune favorabile şi prezintă siguranţă în funcţionare.

Se menţionează ca o proprietate de mare importanţă practică, aceea că, dacă printr-o suprasolicitare termică lagărul se blochează oprindu-se, nu se degradează nici fusul şi nici cuzinetul.

După un asemenea accident, lagărul este lăsat să se răcească şi apoi poate funcţiona în continuare în mod normal.

Pentru prevenirea accidentelor de acest fel, jocul de $\Psi = 2{,}5^0/_{00}$ trebuie considerat însă ca minim.

Primită la redacţie la 29 martie 1958.

НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА НА ОСНОВАНИИ ФУРФУРОЛ-ФЕНОЛОВОЙ СМОЛКИ В КАЧЕСТВЕ МАТЕРИАЛА ДЛЯ ПОДШИПНИКОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Проводятся экспериментальные исследования для определения основных функциональных антифрикционных свойств одного пластического (отечественного) материала на основании фурфурол-феноловой смолки с заполнителем из текстильной сечки. Испытания, в случае кругового подшипника трения — скольжения с принудительной жидкой смазкой — проводятся на рабочем режиме при постоянных нагрузке, скорости и температуре вкладыша t_c.

Определяется характеристика нагрузки $p = f(V)$, коэффициента трения $f=g(V)$ и расхода масла $q=f(V)$ при рабочем режиме $t_c = 45°C$ для $\lambda = 0{,}7$ и $\psi = 2{,}5^0/_{00}$, и сопоставляются с функциональными свойствами композиции с 83% Sn (Y — Sn 83), полученными в одинаковых условиях (рис. 2—5).

Для других удлинений λ и зазоров ψ сопоставления приводятся на рис. 6—9.

Макроструктура рабочей поверхности вкладыша показана на рис. 10 для нагруженной зоны и на рис. 11 для ненагруженной зоны при режиме на износ, указанном в пункте 4. Для цапфы см. рис. 12 (а — рабочая поверхность).

На рис. 15, 16 приведено изменение относительной эксцентричности $\alpha = f(V)$, соответственно минимальной толщины $\delta_{\min}$ пленки смазки, соответствующей при $p=f(V)$ и приближенно определенной из коэффициента нагрузки ζ.

Испытание на износ с точки зрения весового анализа оказалось несостоятельным вследствие того что пластический материал во время испытаний впитал масло.

QUELQUES PROPRIÉTÉS FUNCTIONNELLES D'UN MATÉRIEL PLASTIQUE, FABRIQUÉ À BASE DE RÉSINE FURFUROL-PHÉNOLIQUE, EMPLOYÉ À LA FABRICATION DES COUSSINETS

RÉSUMÉ

Les auteurs rendent compte des travaux expérimentaux entrepris pour déterminer les propriétés fonctionnelles antifriction de base d'un matériel plastique (indigène), fabriqué à partir d'une résine furfurol-phénolique, à filler de matériel textile haché. Les essais ont lieu à des charges

et vitesses continues, en régime de fonctionnement, à une température du coussinet, t_c, constante, dans le cas d'un palier circulaire lisse, lubrifié sous pression à l'huile minérale.

On détermine la caractéristique de la charge $p = f\,(V)$, celle du coefficient de frottement $f = g\,(V)$ ainsi que celle du débit d'huile $q = f\,(V)$, dans le régime de fonctionnement $t_c = 45°\mathrm{C}$, pour $\lambda = 0{,}7$ et $\Psi = 2{,}5^0/_{00}$; on présente, comparativement, les propriétés fonctionnelles de la composition à 83 % Sn (Y — Sn 83), obtenues dans des conditions identiques (fig. 2 à 5).

Pour d'autres allongements λ et jeux Ψ, la situation comparative pour le matériel plastique est indiquée sur les figures 6 à 9.

L'aspect macrophotographique de la surface active du coussinet est indiqué à la figure 10, pour la zone chargée et à la figure 11, pour la zone déchargée, après un fonctionnement dans un régime d'usure, indiqué au point 4. La même chose, pour l'axe, à la figure 12 (a = surface active.)

Les figures 15 et 16 montrent la variation de l'excentricité relative $\alpha = f\,(V)$, respectivement, celle de l'épaisseur minimum $\delta_{\min}$ de la pellicule de lubrifiant, correspondant à $p = f\,(V)$ et déterminée, par voie approximative, à partir du coefficient de portance ζ.

Gravimétriquement, les essais à l'usure n'ont pas été concluants, car le matériel plastique a absorbé de l'huile pendant l'essai.

BIBLIOGRAFIE

1. V. CALCAN, I. IONESCU, N. GOLDENBERG, *Mase plastice pe bază de furfurol și derivați. V. Influența tratamentului termic asupra comportării față de apă și ulei a textolitului cu rășină furfurol-fenolică.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3*, 847 (1957).
2. N. TIPEI, *Hidro-aerodinamica lubrificației.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1957.
3. GH. VASILCA, *Asupra utilității caracteristicii $p = f\,(V)$ la lagărele circulare cu alunecare.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *2*, 449 (1956).
4. — *Studiul coeficientului de frecare într-un lagăr circular cu ajutorul curbelor $p = g\,(V)$.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1*, 75 (1957).
5. E. HEIDEBROEK, *Forschungen auf dem Gebiete der Lagertechnik.* A T Z, *14*, 349 (1941)

STABILITATEA MIŞCĂRII LAGĂRELOR CIRCULARE LUBRIFICATE ÎN REGIM TURBULENT

DE

V. N. CONSTANTINESCU

1. INTRODUCERE

Unul dintre cei mai importanţi factori pentru asigurarea unui regim de lubrificaţie în condiţii optime, este, după cum se ştie, asigurarea unei stabilităţi în funcţionare a corpurilor lubrificate. Într-adevăr, dacă regimul de funcţionare nu are un caracter stabil, perturbaţiile inerente în timpul funcţionării lagărelor provoacă o mişcare neregulată, ceea ce conduce la vibraţii ale întregului ansamblu de frecare şi la o eventuală rupere a peliculei de lubrifiant, producînd şocuri în mecanisme.

Împreună cu aceasta apar uzuri rapide ale suprafeţelor lubrificate sau chiar griparea lor, fenomene extrem de dăunătoare şi care în mod imperios trebuie evitate. Problema este importantă din punct de vedere al aplicaţiilor, deoarece în cazul regimului laminar, s-a constatat experimental apariţia unor asemenea fenomene, în special la lagărele cu viteze relative mari. De aceea, este interesant studiul aceleiaşi probleme în cazul lagărelor funcţionînd în regim turbulent, deoarece acest regim se produce în special la viteze relative mari, iar din unele experienţe efectuate [1], se pare că apar asemenea regimuri în cazul cînd excentricitatea are valori reduse.

Pentru lubrificaţia în regim laminar, problema a fost studiată de N. Tipei [2], deducîndu-se anumite criterii de stabilitate, în care rolul primordial îl joacă excentricitatea relativă a lagărului. Pentru studiul stabilităţii lagărelor în regim turbulent vom utiliza metoda indicată de N. Tipei, folosind în acelaşi timp rezultatele obţinute în studiul lagărelor în regim turbulent, funcţionînd sub forţe şi viteze constante [3], [4] şi variabile [5].

Astfel vom ocoli dificultatea unei rezolvări directe a ecuaţiilor de mişcare şi vom analiza funcţionarea ansamblului, pornind de la un regim de bază neperturbat, permanent sau nepermanent, sub acțiunea unor perturbații accidentale care modifică regimul de bază.

Deoarece interesează în special să se poată stabili condițiile în care funcționarea ansamblului este stabilă, adică în condițiile în care perturbațiile sînt repede amortizate, revenindu-se la regimul de bază, se pot presupune perturbațiile ca fiind mici și, totodată că, odată modificat regimul de bază, cauzele perturbatoare dispar, lăsînd posibilitatea revenirii la regimul de funcționare inițial. Aceste ipoteze permit simplificarea considerabilă a studiului, deoarece, după cum se va arăta, ele fac posibilă liniarizarea sistemului de ecuații ale problemei.

2. CAZUL GENERAL

În cele ce urmează vom analiza problema stabilității lagărelor circulare cu cuzinet complet, pentru celelalte tipuri de lagăre putîndu-se reface raționamentele într-un mod asemănător.

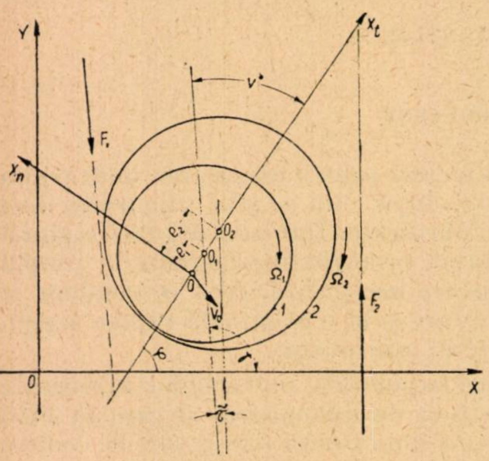


Fig. 1

Vom considera, de asemenea, atît mișcarea în stratul de lubrifiant, cît și mișcarea celor două corpuri lubrificate, ca fiind plane.

Pentru definirea mișcării fusului (*1*) și a cuzinetului (*2*) (fig. 1), vom alege un sistem de axe OXY fix și un sistem mobil $Ox_t\, x_n$, cu originea pe linia centrelor într-un punct O. Axa Ox_t este chiar linia centrelor, iar axa Ox_n, normală pe aceasta. Notînd în plus cu e_1 și e_2 distanțele $\overline{OO_1}$ și $\overline{OO_2}$, excentricitatea relativă este

$$\bar{e} = \bar{e}_2 - \bar{e}_1. \tag{1}$$

Mai departe, dacă $\overline{V}_0$ este viteza punctului O și φ unghiul făcut de linia centrelor cu direcția fixă OX, vitezele corpurilor *1* și *2* sînt $(i = 1,2)$

$$\overline{V}_i = \overline{V}_0 + \dot{\bar{e}}_i + \dot{\bar{\varphi}} \times \bar{e}_i . \tag{2}$$

Notînd apoi cu $\overline{P}_i$ rezultanta dintre forțele exterioare $\overline{F}_i$ și rezultanta presiunilor pe suprafața i, și ținînd seama că sistemul mobil Ox_tx_n are față de sistemul fix OXY o translație $\overline{V}_0$ și o rotație $\dot{\bar{\varphi}}$, dacă m_i este masa corpului i, ecuațiile de mișcare ale celor două corpuri lubrificate se scriu sub forma [2]

$$\dot{\overline{V}}_0 + \ddot{\bar{e}}_i + \dot{\bar{\varphi}} \times (2\dot{\bar{e}}_i + \overline{V}_0) + \ddot{\bar{\varphi}} \times \bar{e}_i - \bar{e}_i\, \dot{\varphi}^2 = \frac{\overline{P}_i}{m_i}, \tag{3}$$

deoarece derivata $\frac{d\overline{V}_0}{dt}$ este

$$\frac{d\overline{V}_0}{dt} = \dot{\overline{V}}_0 + \dot{\bar{\varphi}} \times \overline{V}_0 . \tag{4}$$

Centrele de greutate sînt presupuse că coincid cu centrele O_i, iar accelerația lui Coriolis este $2\,\dot{\bar{\varphi}} \times \dot{\bar{e}}_i$.

În plus, pe o direcție perpendiculară pe planul figurii 1, dat fiind caracterul plan al mișcării, se pot scrie ecuațiile scalare

$$I_{i_3}\,\dot{\Omega}_i = -\,M_i , \tag{5}$$

în care I_{i_3} sînt momentele de inerție ale celor două corpuri, după axele de rotație, iar

$$M_i = M_{mi} - M_{fi} , \tag{6}$$

unde M_{mi} sînt momentele motoare aplicate, iar M_{fi} momentele de frecare pe cele două suprafețe.

Dacă se ia originea axelor mobile în centrul O_2 al cuzinetului, atunci excentricitățile (1) sînt

$$\bar{e}_1 = -\,\bar{e}\,;\quad \bar{e}_2 = 0 \tag{7}$$

și ecuațiile (3) se pot scrie sub o formă mai simplă [2],

$$\left.\begin{aligned} &\overline{V}_0 - \ddot{\bar{e}} + \dot{\bar{\varphi}} \times (\overline{V}_0 - 2\dot{\bar{e}}) - \ddot{\varphi} \times e + \bar{e}\,\dot{\varphi}^2 = \frac{\overline{P}_1}{m_1} , \\ &\dot{\overline{V}}_0 + \dot{\varphi} \times \overline{V}_0 = \frac{\overline{P}_2}{m_2} . \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Notînd cu V_{0t} și V_{0n} proiecțiile vitezei $\overline{V}_0$ pe axele Ox_t și Ox_n, proiecțiile ecuațiilor (8) pe aceste două axe se scriu

$$\left.\begin{aligned} &\dot{V}_{0t} - \ddot{e} - \dot{\varphi}\,V_{0n} + e\dot{\varphi}^2 = \frac{P_{1t}}{m_1} , \\ &V_{0n} + \dot{\varphi}\,V_0 - 2\,\dot{\varphi}\,\dot{e} - \ddot{\varphi}e = \frac{P_{1n}}{m_1} , \\ &\dot{V}_{0t} - \dot{\varphi}\,V_{0n} = \frac{P_{2t}}{m_2} , \\ &\dot{V}_{0n} + \dot{\varphi}\,V_{0t} = \frac{P_{2n}}{m_2} . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

În plus, notînd cu ϑ^* unghiul făcut de forța F_1 cu linia centrelor și cu γ unghiul făcut de aceeași forță cu direcția fixă OX, mai există relațiile

$$\vartheta^* = \gamma - \varphi; \quad \dot{\vartheta}^* = \dot{\gamma} - \dot{\varphi}. \tag{10}$$

Din ecuațiile de mai sus se constată că variabilele care definesc mişcarea sînt, în afară de timp, vitezele V_{0t} și V_{0n}, excentricitatea e (sau excentricitatea relativă $\alpha = \frac{e}{\Delta}$, Δ fiind jocul radial), unghiul φ (sau ϑ^* (10)) și vitezele de rotație Ω_1 și Ω_2. Într-adevăr, forțele exterioare F_i sînt cunoscute, iar rezultanta presiunilor este funcție de variabilele de mai sus; de asemenea, unghiul γ este cunoscut, sau este funcție de Ω_1, Ω_2 și de timp.

Urmînd mai departe procedeul clasic de studiu al stabilității [2], ar trebui să considerăm că fiecare variabilă de mai sus suferă o perturbație δV_{0t}, δV_{0n}, $\delta\alpha$, $\delta\vartheta^*$, $\delta\,\Omega_1$, $\delta\Omega_2$ și să dezvoltăm în serie Taylor în raport cu aceste perturbații membrul secund al ecuațiilor (5) și (9). Apoi, punînd

$$\left.\begin{aligned} &\delta V_{0t} = V_{0t}^* e^{\nu t},\ \delta V_{0n} = V_{0n}^* e^{\nu t},\ \delta\alpha = \alpha^* e^{\nu t}, \\ &\delta\vartheta^* = \vartheta^{**} e^{\nu t},\ \delta\Omega_1 = \Omega_1^* e^{\nu t},\ \delta\Omega_2 = \Omega_2^* e^{\nu t} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

și considerînd toate derivatele care intervin ca fiind constante și egale cu valorile din momentul inițial (liniarizîndu-se astfel ecuațiile, fapt posibil datorită presupunerii că perturbațiile sînt mici), se obține un sistem omogen de 6 ecuații cu 6 necunoscute

$$\left\{ V_{0t}^*,\ V_{0n}^*,\ \alpha^*,\ \vartheta^{**},\ \Omega_1^*,\ \Omega_2^* \right\}. \tag{12}$$

Pentru ca acest sistem să admită soluții diferite de zero, condiția de compatibilitate conduce la o ecuație de gradul 8 în ν [2] pe baza căreia se poate duce discuția asupra condițiilor de stabilitate.

Se poate însă observa de la început că ecuațiile (5) influențează într-o măsură neglijabilă ecuațiile (9), sau invers. Aceasta doarece perturbațiile δV_{0t}, δV_{0n}, $\delta\alpha$, $\delta\vartheta^*$ au o influență secundară asupra variației momentelor M_i, în special la viteze mari. Se poate presupune atunci în mod aproximativ că

$$\delta\dot{\Omega}_1 = \delta\dot{\Omega}_2 = 0, \tag{13}$$

adică $\delta\Omega_i =$ const. și egali cu valorile din momentul inițial, care sînt nule. În consecință,

$$\delta\Omega_1 = \delta\,\Omega_2 = 0. \tag{14}$$

Este posibil deci ca, într-o primă aproximație, să se suprime necunoscutele Ω_1^* și Ω_2^* și odată cu acestea și ecuațiile (5).

În aceste condiții, dezvoltînd în serie Taylor ecuațiile (9), se obține sistemul [2]

$$\left.\begin{aligned}
&\delta \dot{V}_{0t} - \Delta\, \delta\, \ddot{\alpha} + V_{0n}\, \delta \dot{\vartheta}^{\star} - (\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^{\star})\, \delta V_{0n} + (\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^{\star})^2\, \Delta \delta\, \alpha - \\
&\quad - 2\, \Delta\, \alpha\, (\bar{\gamma} - \dot{\vartheta}^{\star})\, \delta \dot{\vartheta}^{\star} = \frac{1}{m_1} \left[\frac{\partial P_{1t}}{\partial V_{0t}}\, \delta V_{0t} + \frac{\partial P_{1t}}{\partial V_{0n}}\, \delta\, V_{0n} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha}\, \delta \alpha + \frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^{\star}}\, \delta\, \vartheta^{\star} + \frac{\partial P_{1t}}{\partial\, \dot{\vartheta}^{\star}}\, \delta\, \dot{\vartheta}^{\star} \right], \\
&\delta \dot{V}_{0n} - V_{0t}\, \delta \dot{\vartheta}^{\star} + (\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^{\star})\, \delta V_{0t} + 2\, \Delta \dot{\alpha}\, \delta \dot{\vartheta}^{\star} - 2\, (\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^{\star})\, \Delta\, \delta \dot{\alpha} + \\
&\quad + \Delta \alpha\, \delta \ddot{\vartheta}^{\star} - (\ddot{\gamma} - \ddot{\vartheta}^{\star})\, \Delta\, \varphi \alpha = \frac{1}{m_1} \left[\frac{\partial P_{1n}}{\partial V_{0t}}\, \delta V_{0t} + \frac{\partial P_{1n}}{\partial V_{0n}}\, \delta\, V_{0n} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha}\, \delta \alpha + \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^{\star}}\, \delta \vartheta^{\star} + \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^{\star}}\, \delta \dot{\vartheta}^{\star} \right], \\
&\delta \dot{V}_{0t} + V_{0n}\, \delta \dot{\vartheta}^{\star} - (\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^{\star})\, \delta V_{0n} = \frac{1}{m_2} \left[\frac{\partial P_{2t}}{\partial V_{0t}}\, \delta\, V_{0t} + \frac{\partial P_{2t}}{\partial V_{0n}}\, \delta\, V_{0n} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\partial P_{2t}}{\partial \alpha}\, \delta \alpha + \frac{\partial P_{2t}}{\vartheta \partial^{\star}}\, \delta \vartheta^{\star} + \frac{\partial P_{2t}}{\partial \dot{\vartheta}^{\star}}\, \delta \dot{\vartheta}^{\star} \right], \\
&\delta \dot{V}_{0n} - V_{0t}\, \dot{\delta \vartheta}^{\star} + (\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^{\star})\, \delta\, V_{0t} = \frac{1}{m_2} \left[\frac{\partial P_{2n}}{\partial V_{0t}}\, \delta V_{0t} + \frac{\partial P_{2n}}{\partial V_{0n}}\, \delta \mathrm{V}_{0n} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\partial P_{2n}}{\partial \alpha}\, \delta \alpha + \frac{\partial P_{2n}}{\partial \vartheta^{\star}}\, \delta \vartheta^{\star} + \frac{\partial P_{2n}}{\partial \dot{\vartheta}^{\star}}\, \delta \dot{\vartheta}^{\star} \right].
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Derivatele care intervin în acest sistem se pot calcula cunoscînd expresiile rezultantei presiunilor pentru cazul forțelor și vitezelor variabile, sau, în mod aproximativ, cu ajutorul expresiilor obținute pentru forțe și viteze constante [3], [4], în care se consideră pentru viteza relativă $V = r\, \Omega$ [5],

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + 2\dot{\varphi}, \qquad (16)$$

deoarece, perturbațiile fiind mici, se poate neglija în expresia presiunilor contribuția soluției $\bar{p}$ [5].

În consecință, vom nota, ca și pînă acum,

$$\left.\begin{aligned}
C_t\, (\alpha,\ t) &= \frac{P_{pt}\, \Delta^2}{6\mu\ V r_1^2} \\
C_n\, (\alpha,\ t) &= \frac{P_{pn}\, \Delta^2}{6\mu\ V r_1^2}\ .
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

în care $\overline{P}_p$ este rezultanta presiunilor, μ viscozitatea lubrifiantului (medie μ_m sau la intrare μ_1, după cum se consideră viscozitatea constantă sau variabilă, în funcție de lubrifiantul utilizat [5]), iar r_1 raza fusului.

Pe de altă parte se poate observa că, întocmai ca și pentru regimul laminar [2], viteza de translație V_0 nu influențează distribuția presiunilor [5] (derivatele vitezei V_0 în raport cu axele x, y legate de suprafețe, axe în raport cu care se determină distribuția presiunilor, sînt nule). În plus, datorită faptului că perturbațiile sînt mici și că $\delta\Omega_1 = \delta\Omega_2 \cong 0$ vom neglija variația numărului Reynolds.

În aceste condiții, derivatele forțelor rezultante $\overline{P}_i = \overline{P}_{pi} - \overline{F}_i$, care intervin în sistemul (5), se scriu

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial P_{it,n}}{\partial V_{0t}} = -\frac{\partial F_{it,n}}{\partial V_{0t}}\ ;\ \frac{\partial P_{it,n}}{\partial V_{0n}} = -\frac{\partial F_{it,n}}{\partial V_{0n}} \qquad (i=1,2),\\
&\frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} = \frac{6\mu r_1^3}{\Delta^2}\left[\Omega_1+\Omega_2+2\left(\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star\right)\right]\frac{\partial C_t}{\partial \alpha}\ ;\ \frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star} = F_1 \sin\vartheta^\star,\\
&\frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} = -\frac{12\mu r_1^3}{\Delta^2}C_t\ ;\ \frac{\partial P_{2t}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha}\ ;\ \frac{\partial P_{2t}}{\partial \vartheta^\star} = -\frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star}.\\
&\frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} = \frac{6\mu r_1^3}{\Delta^2}\left[\Omega_1+\Omega_2+2\left(\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star\right)\right]\frac{\partial C_n}{\partial \alpha}\ ;\ \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} = -F_1 \cos\vartheta^\star,\\
&\frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} = -\frac{12\mu r_1^3}{\Delta^2}C_n\ ;\ \frac{\partial P_{2n}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha}\ ;\ \frac{\partial P_{2n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} = -\frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star}.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

În același timp, notînd cu $\tilde{\tau}$ unghiul dintre forțele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, atunci

$$\vartheta_2^\star = \vartheta^\star = \tilde{\tau} \tag{19}$$

și deci

$$\frac{\partial P_{2t}}{\partial \vartheta^\star} = -F_2 \sin\left(\vartheta^\star + \tilde{\tau}\right)\ ;\ \frac{\partial P_{2n}}{\partial \vartheta^\star} = F_2 \cos\left(\vartheta^\star + \tilde{\tau}\right). \tag{20}$$

În primele relații (18) apar și derivatele forțelor F_1 și F_2 în raport cu viteza $\overline{V}_0$, deoarece în aceste forțe sînt incluse și forțele de inerție ale celor două corpuri lubrificate, care pot depinde de $\overline{V}_0$.

Cu ajutorul expresiilor (18) și (20) se pot calcula derivatele forțelor $\overline{P}_i$ și astfel se pot determina termenii care intervin în sistemul (5). Aceste expresii vor putea fi considerate, conform celor spuse anterior, ca fiind egale cu valorile lor din momentul inițial, liniarizîndu-se în acest mod sistemul. Introducînd atunci în sistemul (15) valorile (11) pentru perturbații se obține un sistem omogen de 4 ecuații cu 4 necunoscute [2]

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\Delta\nu^2-(\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star)^2\Delta+\frac{1}{m_1}\frac{\partial P_{1t}}{\partial\alpha}\right]\alpha^\star-\left\{\left[V_{0n}-2\alpha\Delta(\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star)-\frac{1}{m_1}\frac{\partial P_{1t}}{\partial\dot{\vartheta}^\star}\right]\nu-\right.\\
&\left.-\frac{1}{m_1}\frac{\partial P_{1t}}{\partial\vartheta^\star}\right\}\vartheta^{\star\star}-\left(\nu-\frac{1}{m_1}\frac{\partial P_{1t}}{\partial V_{0'}}\right)V^\star_{0t}+\left(\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star+\frac{1}{m_1}\frac{\partial P_{1t}}{\partial V_{0n}}\right)V^\star_{0n}=0,\\
&-\left\{[2(\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star)\nu+\ddot{\gamma}-\ddot{\vartheta}^\star]\Delta+\frac{1}{m_1}\frac{\partial P_{1n}}{\partial\alpha}\right\}\alpha^\star+\left[\alpha\Delta\nu^2+\left(2\dot{\alpha}\Delta-\right.\right.\\
&\left.\left.-V_{0t}-\frac{1}{m_1}\frac{\partial P_{1n}}{\partial\dot{\vartheta}^\star}\right)\nu-\frac{1}{m_1}\frac{\partial P_{1n}}{\partial\vartheta^\star}\right]\vartheta^{\star\star}+\left(\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star-\frac{1}{m_1}\frac{\partial P_{1n}}{\partial V_{0t}}\right)V^\star_{0t}+\\
&\qquad\qquad+\left(\nu-\frac{1}{m_1}\frac{\partial P_{1n}}{\partial V_{0n}}\right)V^\star_{0n}=0,\\
&-\frac{1}{m_2}\frac{\partial P_{2t}}{\partial\alpha}\alpha^\star+\left[\left(V_{0n}-\frac{1}{m_2}\frac{\partial P_{2t}}{\partial\dot{\vartheta}^\star}\right)\nu-\frac{1}{m_2}\frac{\partial P_{2t}}{\partial\vartheta^\star}\right]\vartheta^{\star\star}+\left(\nu-\frac{1}{m_2}\frac{\partial P_{2t}}{\partial V_{0t}}\right)V^\star_{0t}-\\
&\qquad\qquad-\left(\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star+\frac{1}{m_2}\frac{\partial P_{2t}}{\partial V_{0n}}\right)V^\star_{0n}=0,\\
&-\frac{1}{m_2}\frac{\partial P_{2n}}{\partial\alpha}\alpha^\star-\left[\left(V_{0t}+\frac{1}{m_2}\frac{\partial P_{2n}}{\partial\dot{\vartheta}^\star}\right)\nu+\frac{1}{m_2}\frac{\partial P_{2n}}{\partial\vartheta^\star}\right]\vartheta^{\star\star}+\\
&\qquad+\left(\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star-\frac{1}{m_2}\frac{\partial P_{2n}}{\partial V_{0'}}\right)V^\star_{0t}+\left(\nu-\frac{1}{m_2}\frac{\partial P_{2n}}{\partial V_{0n}}\right)V^\star_{0n}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

Condiția de compatibilitate a acesteia se scrie, dacă D_c este determinantul coeficienților,

$$D_c=0 \tag{22}$$

și conduce la o ecuație de gradul 6 în ν,

$$C_0\nu^6+C_1\nu^5+C_2\nu^4+C_3\nu^3+C_4\nu^2+C_5\nu+C_6=0. \tag{23}$$

Pentru ca mișcarea să fie stabilă, este necesar ca toate rădăcinile ν obținute cu ajutorul ecuației (23) să fie negative, dacă sînt reale, sau să aibă partea reală negativă, dacă sînt imaginare, deoarece numai în acest mod perturbațiile (11) se amortizează în timp. În acest scop, dacă se formează tabloul coeficienților

$$\left\|\begin{array}{cccccc}
C_1 & C_0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
C_3 & C_2 & C_1 & C_0 & 0 & 0\\
C_5 & C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0\\
0 & C_6 & C_5 & C_4 & C_3 & C_2\\
0 & 0 & 0 & C_6 & C_5 & C_4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6
\end{array}\right\|, \tag{24}$$

condițiile Rooth-Hurwitz impun ca toți determinanții D_i indicați în tabelul (24) să aibă semnul lui C_0, adică

$$C_0\, D_i > 0, \tag{25}$$

sau

$$\left.\begin{aligned}
&C_0 C_1 > 0,\ C_0 C_6 > 0,\ C_0 D_2 = C_0 (C_1 C_2 - C_0 C_3) > 0,\\
&C_0 D_3 = C_0 (C_3 D_2 - C_1^2 C_4 + C_0 C_1 C_5) > 0,\\
&C_0 D_4 = C_0 \{ C_4 D_3 - C_5 [C_2 D_2 - C_0 (C_1 C_4 - C_0 C_5)] + C_1 C_6 D_2\} > 0,\\
&C_0 D_5 = C_0 \{ C_5 D_4 - C_6 [C_3 D_3 - C_1 (C_5 D_2 - C_1^2 C_6)] \} > 0.
\end{aligned}\right| \tag{26}$$

Problema se simplifică și mai mult, dacă se consideră, ca și pentru regimul laminar [2], situația frecventă în aplicații, cînd cuzinetul este imobil și deci $V_0 = 0$. Atunci rămîn ca necunoscute numai $\alpha^\star$ și $\vartheta^{\star\star}$ și determinantul care reprezintă condiția de compatibilitate este [2]

$$\begin{vmatrix}
\Delta \nu^2 - (\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^\star)\, \Delta + \dfrac{1}{m_1} \dfrac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha}, & \left[2\alpha\, \Delta (\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^\star) + \dfrac{1}{m_1} \dfrac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} \right] \nu + \dfrac{1}{m_1} \dfrac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star} \\
-[2 (\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^\star)\, \nu + \ddot{\gamma} - \dot{\vartheta}^\star]\, \Delta - \dfrac{1}{m_1} \dfrac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha}, & \alpha \Delta \nu^2 + \left(2 \dot{\alpha}\, \Delta - \dfrac{1}{m_1} \dfrac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} \right) \nu - \dfrac{1}{m_1} \dfrac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star}
\end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Celelalte două ecuații ale sistemului (21) se pot scrie prescurtat $\delta P_{2t} = \delta P_{2n} = 0$, adică presiunile echilibrează tot timpul forțele exterioare.

3. CAZUL ÎNCĂRCĂRII CENTRIFUGALE

Sistemul de mai sus conduce la o ecuație de gradul 4 în ν a cărei formă poate fi încă simplificată în unele cazuri.

Astfel, fie cazul unei încărcări centrifugale. Atunci [2], [5] $\dot{\gamma} = -\,\Omega_1 = \text{const.}$, $\ddot{\gamma} = 0$, $\dot{\vartheta}^\star = \dot{\theta}^\star = 0$, și ecuația în ν are forma [2]

$$\begin{aligned}
&\nu^4 - \frac{1}{\alpha m_1 \Delta} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star}\, \nu^3 + \left\{ 3\,\Omega_1^2 + \frac{1}{m_1 \Delta} \left[\frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} - \frac{2}{\alpha}\, \Omega_1 \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} \right] \right\} \nu^2 - \\
&- \frac{1}{\alpha} \left\{ \left[\frac{1}{m_1 \Delta} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} - \Omega_1^2 \right] \frac{1}{m_1 \Delta} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} + \left(\frac{1}{m_1 \Delta} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - 2\,\alpha\,\Omega_1 \right) \frac{1}{m_1 \Delta} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} - \right. \\
&\left. - \frac{2\Omega_1}{m_1 \Delta} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star} \right\} \nu + \frac{1}{\alpha\, m_1 \Delta} \left[\Omega_1^2 \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} + \frac{1}{m_1 \Delta} \left(\frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star} \cdot \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} - \frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} \right) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Încărcarea fiind centrifugală $\Omega(t) < 0$ și deci [5] $C_t < 0$, $C_n > 0$. În consecință,

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial C_t}{\partial \alpha} < 0, \quad \frac{\partial C_n}{\partial \alpha} > 0 \\ \frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} > 0,\ \frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star} < 0,\ \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} > 0,\ \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} < 0,\ \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} < 0,\ \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} < 0.\end{gathered}\right\} \tag{29}$$

Ecuația (28) este de forma

$$C_0\, \nu^4 + C_1\, \nu^3 + C_2\, \nu^2 + C_3\, \nu + C_4 = 0, \tag{30}$$

iar condițiile (26) se scriu

$$\left.\begin{gathered}C_0\, C_1 > 0,\ C_0\, C_2 > 0,\ C_0\, C_3 > 0,\ C_0\, C_4 > 0, \\ C_0\, [(C_1\, C_2 - C_0\, C_3)\, C_3 - C_1^2\, C_4] > 0.\end{gathered}\right\} \tag{31}$$

Ținînd seama de relațiile (28) se vede că

$$C_0 = 1 > 0,\ C_1 > 0. \tag{32}$$

Apoi semnul coeficientului C_4 este dat de semnul expresiei

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m_1 \Delta} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} - \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} \left(\frac{1}{m_1 \Delta} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} - \Omega_1^2 \right) = \\ &= F_1 \left\{ \frac{1}{m_1 \Delta} \sin \vartheta^\star\, P_{pn} \frac{\partial (\ln C_n)}{\partial \alpha} + \cos\, \vartheta^\star \left[\frac{P_{pt}}{m_1\, \Delta} \frac{\partial\, (\ln C_t)}{\partial \alpha} - \Omega_1^2 \right] \right\}.\end{aligned} \tag{33}$$

Primul termen al acestei expresii este evident pozitiv. Al doilea termen poate introduce un dubiu prin existența parantezei în care intervine $-\,\Omega_1^2$. Pentru regimul laminar, se știe [2] că totuși acest termen este întotdeauna pozitiv; această concluzie este cu atît mai mult valabilă pentru regimul turbulent deoarece în P_{pt} și C_t (care dau partea pozitivă a parantezei) intervine și numărul Reynolds [4], [5] care amplifică valoarea absolută a acestui termen. În consecință,

$$C_4 > 0 \tag{34}$$

întotdeauna.

Semnul coeficientului C_3 depinde de semnul și de mărimea sumei

$$\begin{aligned}s &= -\left(\frac{1}{m_1 \Delta} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} - \Omega_1^2 \right) \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} + \left(\frac{1}{m_1 \Delta} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - 2\, \alpha\, \Omega_1 \right) \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} = \\ &= \frac{6\, \mu r_1^3\, \Omega_1}{\Delta^2} \left\{ \frac{6\, \mu r_1^3\, C_n |C_t|}{m_1\, \Delta^3} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\ln |C_t| - \ln |C_n|) + 2\ \Omega_1 \left[\alpha \frac{\partial\, C_n}{\partial \alpha} - C_n \right] \right\} = \\ &= \frac{6\, \mu r_1^3\, \Omega_1\, C_n}{\Delta^2} \left\{ \frac{6\, \mu r_1^3 |C_t|}{m_1\, \Delta^3} \frac{\partial\, |\operatorname{ctg} \vartheta^\star|}{\partial \alpha} + 2\ \Omega_1 \left[\alpha \frac{\partial\, (\ln C_n)}{\partial \alpha} - 1 \right] \right\}.\end{aligned} \tag{35}$$

Primul termen al acestei sume este întotdeauna pozitiv, deoarece $-\frac{\pi}{2} < \vartheta^\star = \theta^\star < 0$ sau $|\operatorname{ctg} \vartheta^\star|$ variază de la 0 la $+\infty$ cînd α variază între zero și 1, iar derivata ei este întotdeuna pozitivă [5]. Al doilea termen însă poate deveni negativ dacă $\alpha \frac{\partial \ln C_n}{\partial \alpha} < 1$. Pe diagramele din figura 2 s-au trasat curbele $\ln C_n$ în funcție de α, în cazul cînd se consideră viscozitatea constantă, respectiv variabilă.

Pentru viscozitatea variabilă, concluziile sînt asemănătoare cu cele obținute pentru regimul laminar [2]. Într-adevăr, pentru $Re_1^\star = 0$ (regim laminar) există un domeniu de excentricități $0{,}06 < \alpha < 0{,}6$ pentru care $\alpha \frac{\partial \ln C_n}{\partial \alpha} < 1$. În cazul regimului turbulent există de asemenea un domeniu în care $\alpha \frac{\partial \ln C_n}{\partial \alpha} < 1$, însă extinderea lui scade pe măsură ce numărul Reynolds crește. Astfel, pentru $Re_1^\star = 1\,000$ acest domeniu este $0{,}07 < \alpha < 0{,}42$, pentru $Re_1^\star = 5\,000$, $0{,}082 < \alpha < 0{,}36$, iar pentru $Re_1^\star = 10\,000$, $0{,}095 < \alpha < 0{,}32$.

În consecință, instabilitatea nu ar putea apare decît pentru $\alpha < 0{,}5$ și anume la valori ale excentricității relative care depind de caracteristicile geometrice ale lagărului, de viscozitate, de masa m_1, de viteza unghiulară Ω_1 și de încărcarea centrifugală F_1, deoarece

$$C_3 = \frac{s}{\alpha} - \frac{2F_1\Omega_1}{m_1\Delta} \sin \vartheta^\star > 0, \tag{36}$$

ultimul termen fiind întotdeauna pozitiv, deoarece $\sin \vartheta^\star < 0$.

În plus, tendința de instabilitate scade pe măsură ce numărul Reynolds crește, numărul Reynolds avînd deci o influență favorabilă.

În cazul cînd viscozitatea este constantă, situația este diferită. Astfel pentru $Re^\star = 0$ (regim laminar) se constată din figura 2b că $\frac{\partial \ln C_n}{\partial \alpha}$ are valori mai mari, astfel că instabilitatea nu ar putea apare decît pentru excentricități foarte reduse. În schimb, pe măsură ce numărul Reynolds crește, alura curbelor $\ln C_n$ tinde să se apropie de cea obținută pentru cazul viscozității variabile ($Re^\star > 5\,000$), astfel încît pentru numere Reynolds mai mari, concluziile privind aprecierea zonei de instabilitate devin analoage cu cele din cazul viscozității variabile. Se remarcă deci că în acest caz influența numărului Reynolds este defavorabilă din punctul de vedere al stabilității mișcării.

În sfîrșit, pentru ca C_2 să fie pozitiv este necesară condiția

$$\frac{2\Omega_1}{\alpha\, m_1\, \Delta} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star} < 3\ \Omega_1^2 + \frac{1}{m_1\Delta}\left(\frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star}\right), \tag{37}$$

sau

$$\frac{2\Omega_1}{\alpha\, m_1\, \Delta} \frac{12\mu r_1^3}{\Delta^2} |C_t| < 3\ \Omega_1^2 + \frac{1}{m_1\Delta}\left(\frac{6\mu r_1^3}{\Delta^2}\,\Omega_1 \left|\frac{\partial C_t}{\partial \alpha}\right| + \frac{1}{\alpha} F_1 \cos \vartheta^\star\right), \tag{38}$$

ambii membri ai acestei inegalităţi fiind pozitivi. La excentricităţi mai mari, unde $\frac{\partial C_t}{\partial \alpha}$ ia valori mari, această inegalitate este satisfăcută.

Pentru a aprecia sensul real al inegalităţii (38) la excentricităţi reduse, se observă că $F_1 \cos \vartheta^\star = \frac{6\mu r_1^3 \Omega_1}{\Delta^2} C_t$ şi deci condiţia(38) se scrie

$$3\ \Omega_1^2 + \frac{6\mu r_1^3\ \Omega_1}{m_1\, \alpha\, \Delta^2}\left[\left|\frac{\partial C_t}{\partial \alpha}\right| - \frac{3}{\alpha}\left| C_t \right|\right] > 0\,. \tag{39}$$

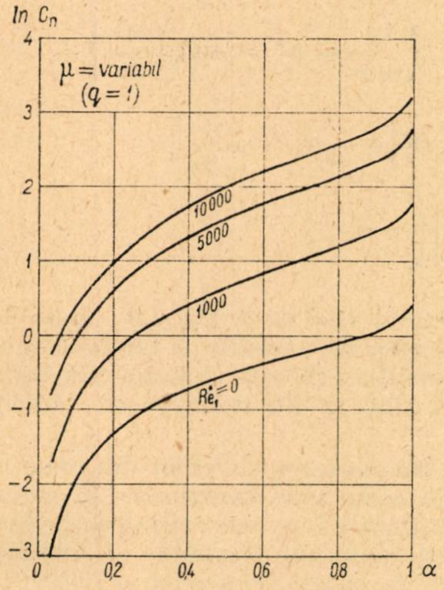


Fig. 2a

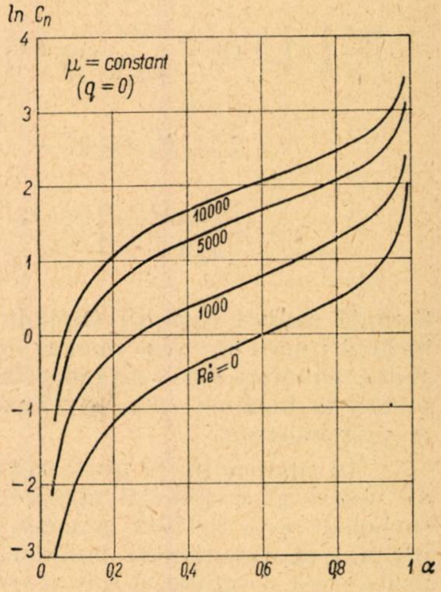


Fig. 2b

La excentricităţi reduse paranteza este negativă, deoarece $\lim\limits_{\alpha \to} \left(\frac{|C_t|}{\alpha}\right) \to \lim\limits_{\alpha \to 0} \left|\frac{\partial C_t}{\partial \alpha}\right|$, însă la aceste excentricităţi $\theta^\star \to \frac{\pi}{2}$ şi $\left|\frac{\partial C_t}{\partial \alpha}\right|$ are valori foarte reduse, astfel încît termenul $3\ \Omega_1^2$ este preponderent şi condiţia (39) este satisfăcută. Ar putea exista deci un dubiu numai asupra domeniului de excentricităţi medii, adică pentru aceleaşi excentricităţi în care este posibil să nu fie satisfăcută nici condiţia ca $C_3 > 0$ (v. relaţia (36)).

Ultima condiţie (31) se scrie

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{\alpha m_1\ \Delta}\frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} + \frac{2}{\alpha m_1 \Delta}\ \Omega_1 \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - 4\ \Omega_1^2\right)\frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - \\ -\left(\frac{1}{m_1 \Delta}\frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - 2\ \alpha\ \Omega_1\right)\frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} + 2\ \Omega_1 \frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star} > 0,\end{gathered} \tag{40}$$

sau

$$\frac{6\mu r_1^3}{\Delta^2}\left\{\left[4\ \Omega_1^2+\frac{1}{\alpha m_1\Delta}\left(F_1\cos\vartheta^\star+\frac{24\mu r_1^3\,\Omega_1}{\Delta^2}C_t\right)\right]2\ C_n-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{12\mu r_1^3}{m_1\,\Delta^3}C_t+2\ \alpha\ \Omega_1\right)\Omega_1\frac{\partial C_n}{\partial\alpha}\right\}+2\ \Omega_1 F_1\sin\vartheta^\star>0, \tag{41}$$

sau încă,

$$\frac{6\mu r_1^3}{\Delta^2}\left\{2\left(4\ \Omega_1^2-\frac{3F_1}{\alpha m_1\Delta}\cos\vartheta^\star\right)C_n+2\left(\frac{F_1}{m_1\,\Delta}\cos\vartheta^\star-\alpha\ \Omega_1^2\right)\frac{\partial C_n}{\partial\alpha}\right\}+$$
$$+2\ \Omega_1\ \mathrm{F}_1\sin\vartheta^\star=\frac{12\,\mu r_1^3}{\Delta^2}\left\{\Omega_1^2\left(4-C_n-\alpha\frac{\partial C_n}{\partial\alpha}\right)+\right. \tag{42}$$
$$\left.+\frac{F_1\cos\vartheta^\star}{m_1\,\Delta}C_n\left[\frac{\partial(\ln C_n)}{\partial\alpha}-\frac{3}{\alpha}\right]\right\}>0.$$

Semnul acestei expresii depinde în primul rînd de α, Ω_1, și F_1. Astfel la încărcări mari și viteze mici al doilea termen este pozitiv și preponderent și deci condiția (41) este îndeplinită. Condiția (41) este de asemenea îndeplinită la încărcări mici și viteze mari cînd primul termen este pozitiv și preponderent.

În consecință, se poate afirma că comportarea lagărelor din punctul de vedere al stabilității mișcării lor, în cazul unei funcționări în regim turbulent este în linii generale asemănătoare cu cea existentă pentru regimul de funcționare laminar. Totuși, numărul Reynolds al mișcării poate avea o influență din acest punct de vedere, și anume o influență favorabilă în cazul cînd se consideră viscozitatea variabilă (uleiuri) și defavorabilă în cazul cînd viscozitatea este constantă (apa).

4. CAZUL ÎNCĂRCĂRII CONSTANTE

Problema este și mai simplă în cazul lagărelor cu forțe și viteze constante. Atunci $\vartheta^\star=\theta^\star=$ const., $\dot\gamma=\dot\varphi=0$, și ecuația în ν este [2]

$$\nu^4-\frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial P_{1n}}{\partial\dot\vartheta^\star}\nu^3+\frac{1}{m_1\Delta}\left(\frac{\partial P_{1t}}{\partial\alpha}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial P_{1n}}{\partial\vartheta^\star}\right)\nu^2+$$
$$+\frac{1}{m_1^2\,\Delta^2\alpha}\left(\frac{\partial P_{1t}}{\partial\dot\vartheta^\star}\frac{\partial P_{1n}}{\partial\alpha}-\frac{\partial P_{1n}}{\partial\dot\vartheta^\star}\frac{\partial P_{1i}}{\partial\alpha}\right)\nu+\frac{1}{\alpha m_1^2\,\Delta^2}\left(\frac{\partial P_{1t}}{\partial\vartheta^\star}\frac{\partial P_{1n}}{\partial\alpha}-\frac{\partial P_{1t}}{\partial\alpha}\frac{\partial P_{1n}}{\partial\vartheta^\star}\right)=0, \tag{43}$$

adică tot de forma (30).

Deoarece, în acest caz [3], [4] $C_n > 0$, $C_t > 0$, $\theta^\star > 0$, din relațiile (18) se deduce că, întocmai ca pentru regimul laminar,

$$\frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star} > 0, \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} < 0, \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} < 0, \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} < 0. \tag{44}$$

În consecință,

$$C_0 = 1 > 0,\ C_1 > 0,\ C_2 > 0,\ C_4 > 0. \tag{45}$$

Pentru coeficientul C_3 rezultă condiția

$$C_3 = \frac{1}{\alpha m_1^2 \Delta^2} \left(\frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - \frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} \right) > 0, \tag{46}$$

sau, ținînd seama de relațiile (18),

$$C_3 = \frac{72 \mu^2 r_1^6 \Omega_1}{\alpha m_1^2 \Delta^6} C_n C_t \frac{\partial}{\partial \alpha} (\ln \operatorname{ctg} \theta^\star) > 0, \tag{47}$$

condiție care este întotdeauna satisfăcută.

În consecință, primele condiții (31) sînt întotdeauna satisfăcute. Din ultima condiție (31) paranteza este de asemenea pozitivă, deoarece din relațiile (43) și (44) se deduce

$$C_1 C_2 - C_0 C_3 = \frac{1}{\alpha m_1^2 \Delta^2} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} - \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} \right) > 0. \tag{48}$$

Apoi, ultima condiție (31) se scrie, după cîteva transformări,

$$(C_1 C_2 - C_0 C_3)\cdot C_3 - C_1^2 C_4 =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 m_1^4 \Delta^4} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} \left[\frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} + \frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} \right], \tag{49}$$

sau, ținînd seama de relațiile (18),

$$(C_1 C_2 - C_0 C_3)\ C_3 - C_1^2 C_4 = - \frac{12 \mu r_1^3}{\alpha^2 m_1^4 \Delta^6} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} \left\{ C_n \left(\frac{6 \mu r_1^3 \Omega_1}{\Delta^2} \frac{\partial C_t}{\partial \alpha} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\alpha} F_1 \cos \vartheta^\star \right) - \frac{6 \mu r_1^3 \Omega_1}{\Delta^2} C_t \frac{\partial C_n}{\partial \alpha} \right\} = \tag{50}$$

$$= - \frac{72 \mu^2 r_1^8 \Omega_1}{\alpha^2 m_1^4 \Delta^8} C_n C_t \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} \left(\frac{\partial \ln \operatorname{ctg} \theta^\star}{\partial \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right).$$

Semnul acestei expresii depinde de cel al parantezei, deoarece restul factorilor sînt pozitivi (44). Pentru a aprecia semnul parantezei, în figura 3 s-au reprezentat, cu ajutorul relațiilor obținute în lucrarea [4], curbele $\theta^\star$ și $\ln \operatorname{ctg} \theta^\star = f(\alpha)$ în cele două ipoteze : viscozitate variabilă și viscozitate constantă.

Astfel deși curbele $\theta^\star$ în funcție de α sînt puțin influențate de faptul că viscozitatea variază sau nu, sau de numărul Reynolds, există diferențe în ceea ce privește curba $\ln \operatorname{ctg} \theta^\star$ și cu atît mai mult în ceea ce privește derivata ei în raport cu α.

Astfel, în cazul viscozității variabile, există un interval de incidențe pentru care

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\ln \operatorname{ctg} \theta^\star) - \frac{1}{\alpha} < 0, \quad (51)$$

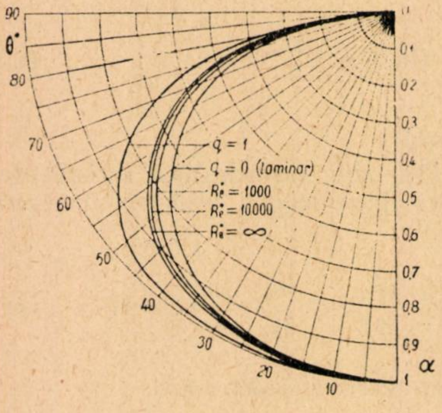


Fig. 3a

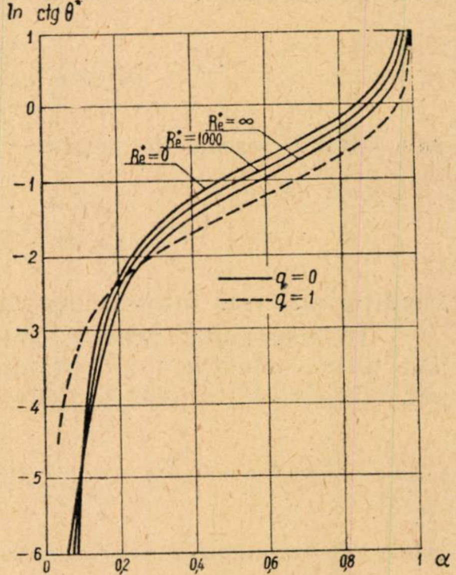


Fig. 3b

și anume $0{,}17 < \alpha < 0{,}4$, interval care nu este influențat de variația numărului Reynolds $Re_1^\star$.

În cazul cînd se consideră viscozitatea constantă, pentru $Re^\star = 0$,

$$\operatorname{ctg} \theta^\star = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \quad (52)$$

și

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\ln \operatorname{ctg} \theta^\star) - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha(1-\alpha^2)} - \frac{1}{\alpha}, \quad (53)$$

expresie tot timpul pozitivă și care se anulează pentru $\alpha = 0$.

Din figura 3*b* se constată că pe măsură ce numărul Reynolds crește, alura curbelor $\ln \operatorname{ctg} \theta^\star$ se modifică în sensul scăderii derivatei $\frac{\partial \ln \operatorname{ctg} \theta^\star}{\partial\alpha}$ mai ales pentru excentricități reduse.

În consecinţă, dacă pentru $Re^* = 0$, pericolul de instabilitate există pentru cel mult $\alpha \to 0$. Pe măsură ce numărul Reynolds Re^* creşte, domeniul de instabilitate va creşte de asemenea, numărul Reynolds avînd deci o influenţă defavorabilă. Aceste concluzii sînt confirmate de altfel şi de unele experienţe efectuate de M. Smith şi D. D. Fuller [1] şi din care rezultă că la $Re^* \sim 2\,000$ excentricitatea minimă pentru asigurarea unei stabilităţi în funcţionare este de $\alpha \cong 0{,}07$, iar la $Re^* \sim 3\,500$ această excentricitate creşte la $\alpha \cong 0{,}13$.

Primită la redacţie la 6 iunie 1958.

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ КРУГОВЫХ ПОДШИПНИКОВ, СМАЗЫВАЕМЫХ В ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Для исследования устойчивости движения круговых подшипников, смазываемых в турбулентном режиме, записываются уравнения движения обоих смазываемых тел и затем принимается, что параметры, определяющие движение, претерпевают малые возмущения. Гипотеза малых возмущений позволяет линеаризировать уравнения и получить уравнения 8-й степени, дающей корни ν искомых решений. Критерии устойчивости получаются путем задания условия, чтобы действительная часть корней была отрицательной. Если пренебречь влиянием возмущений скоростей цапфы и вкладыша, получается более простое уравнение 6-й степени в ν, а если принять одно из тел неподвижным, получается уравнение 4-й степени в ν.

Затем исследуется применение подшипников с центробежной нагрузкой, для которых выводятся критерии устойчивости в простом виде, причем используются ранее полученные результаты при исследовании подшипников, работающих в неустановившемся режиме.

LA STABILITÉ DU MOUVEMENT DES PALIERS CIRCULAIRES LUBRIFIÉS EN RÉGIME TURBULENT

RÉSUMÉ

Afin d'étudier la stabilité des paliers circulaires en régime turbulent, on écrit les équations du mouvement des deux corps lubrifiés et l'on considère ensuite que les paramètres qui déterminent le mouvement subissent des perturbations minces. L'hypothèse des perturbations minces permet la linéarisation du système, en obtenant ainsi une équation du 8e degré, pour les solutions ν cherchées, équation qui se réduit à

une autre du 6e ou du 4e degré, si l'on néglige l'influence des perturbations des vitesses angulaires du tourillon et du coussinet et si l'on considère l'une des surfaces fixe. Les critères de stabilité peuvent être déduits en imposant la condition que la partie réelle des racines ν soit négative.

On étudie ensuite les cas des paliers soumis à des charges centrifuges et constantes, pour lesquels on déduit les critères de stabilité sous une forme simple, en utilisant les résultats obtenus antérieurement pour l'étude des paliers soumis à des charges et vitesses variables.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Smith and D. D. Fuller, *JournalBearing Operations at Superlaminar Speeds.* Trans. ASME, **78**, 469–497 (1956).
2. N. Tipei, *Hidro-Aerodinamica Lubrificației.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1958.
3. V. N. Constantinescu, *On the Turbulent Lubrification.* Proceedings of the Institution of Mechanical Engeneers, London, 1958 (sub tipar).
4. — *Studiul lubrificației bidimensionale în regim turbulent.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XI**, 1, 139 (1958).
5. — *Lubrificația lagărelor în regim turbulent, supuse la forțe și viteze variabile.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, 3 (1958).

BARE CURBE CU PEREȚI SUBȚIRI

DE

AUGUSTIN PETRE

Termenul, acum consacrat, de „bare cu pereți subțiri" cuprinde o categorie de piese de rezistență intermediare, în ceea ce privește metodele de calcul, între „bare" și „plăci" sau mai exact „învelitori" cilindrice sau prismatice.

În principal, în cazul barelor cu pereți subțiri, spre deosebire de „bare", se consideră repartiția eforturilor unitare în grosimea secțiunii transversale constantă, cu excepția barelor cu profil deschis în care caz eforturile unitare tangențiale provenite din răsucire pură se repartizează liniar. De asemenea, spre deosebire de „bare" se ia în considerare efectul restrîngerilor în deformațiile produse de eforturile unitare tangențiale asupra celor normale.

Spre deosebire de „plăci", repartiția eforturilor în lungul liniei mediane a secțiunii transversale se stabilește independent de repartiția solicitării în lungul acestei linii, înlocuindu-se printr-o repartiție, static echivalentă, comparabilă cu teoria ce urmează a se prezenta.

În consecință, se admite că deformația locală, care ar conduce la o schimbare a formei secțiunii transversale, este neglijabilă în comparație cu deformația de ansamblu a formei secțiunii transversale, considerată ca un contur rigid.

Cu titluri analoage lucrării prezente, au fost publicate cîteva studii privind unele cazuri particulare soluționate în ipoteze în general simplificatoare și diferite de cele de mai sus.

Întrucît, după cunoștințele noastre, pînă în prezent nu a fost rezolvată problema barelor curbe în ipotezele, mai generale, de bare cu pereți subțiri și în cazul general, în lucrarea de față se va soluționa această problemă stabilindu-se și legile de repartiție ale eforturilor unitare în asemenea bare.

RELAŢII GEOMETRICE

Se consideră o porțiune din bară secționată prin plane infinit vecine ce trec prin centrul de curbură (fig. 1).

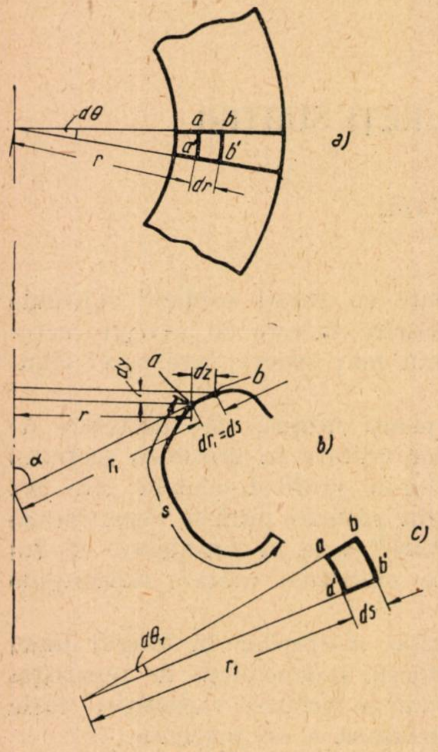


Fig. 1

Se consideră din această porțiune elementul *a a' b b'*, mărginit de două arce de cerc de rază r și $r + dr$. Se consideră deformația datorită eforturilor unitare tangențiale ale acestui element

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{\partial r_1} - \frac{u}{r_1} + \frac{\partial v}{r_1 \partial \theta_1}, \qquad (1)$$

unde u reprezintă deplasarea în lungul barei, v deplasarea în lungul conturului secțiunii transversale, $d\theta_1$ unghiul definit de laturile $\overline{ab}$ și $\overline{a'b'}$, iar r_1, este arătat pe figura 1.

Admițînd că deformațiile $\gamma_{r\theta}$ sînt mici se poate scrie

$$\frac{\partial u}{\partial r_1} - \frac{u}{r_1} + \frac{\partial v}{r_1 \partial \theta_1} = 0. \qquad (2)$$

Considerînd expresia $\frac{\partial v}{r_1 \partial \theta_1}$ ca o funcție necunoscută de r_1 și integrînd această ecuație diferențială liniară se obține

$$u = r_1 \left[\xi(\theta_1) - \int_0^s \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial v}{\partial \theta_1} dr_1 \right]. \qquad (3)$$

Aici ξ are rolul de constantă de integrare față de variabila r_1.

Se notează cu η și ζ deplasările secțiunii transversale, respectiv paralele cu direcțiile axelor *oy* și *oz*. Se notează cu φ rotirea secțiunii transversale în jurul unui punct ales inițial arbitrar și cu h distanța de la acest punct pînă la tangenta la linia mediană a secțiunii transversale în punctul considerat. Deplasarea v se poate scrie

$$v = \eta \cos \alpha + \zeta \sin \alpha + \varphi h,$$

de unde

$$\frac{\partial v}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \eta}{\partial \theta_1} \cos \alpha + \frac{\partial \zeta}{\partial \theta_1} \sin \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} h \cdot$$

Introducînd această expresie în (3) se obţine

$$u = r_1\left[\xi(\theta_1) - \int_0^s \frac{\partial\eta}{\partial\theta_1}\cdot\frac{1}{r_1}\cos\alpha\, dr_1 - \int_0^s \frac{\partial\zeta}{\partial\theta_1}\frac{1}{r_1}\sin\alpha\, dr_1 - \int_0^s \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1}\frac{h}{r_1^2}\, dr_1\right]. \tag{4}$$

Deoarece

$$\begin{gathered}\cos\alpha = \frac{dy}{dr_1},\ \sin\alpha = \frac{dz}{dr_1},\ h\,ds = d\omega,\ d\theta = \frac{dr_1}{dz}\,d\theta_1,\\ r_1 = (R+z)\frac{dr_1}{dz},\ dr_1 = ds,\ \ \theta_1 = \int\frac{dz}{ds}\,d\theta = \frac{dz}{ds}\,\theta,\end{gathered} \tag{5}$$

se obţine

$$\begin{aligned}u = (R+z)\frac{ds}{dz}\Bigg[\xi\left(\frac{dz}{ds}\theta\right) - \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\int_0^s \frac{dy}{ds}\frac{dz}{(R+z)^2} - \\ - \frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\int_0^s \frac{dz}{ds}\frac{dz}{(R+z)^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\int_0^s \frac{dz}{ds}\frac{d\omega}{(R+z)^2}\Bigg].\end{aligned} \tag{6}$$

Integralele de mai sus depind numai de forma secţiunii transversale şi se vor nota, pentru simplificare,

$$\int_0^s \frac{dy}{ds}\frac{dz}{(R+z)^2} = \mathfrak{R}_y,\quad \int_0^s \frac{dz}{ds}\frac{dz}{(R+z)^2} = \mathfrak{R}_z,\quad \int_0^s \frac{dz}{ds}\frac{d\omega}{(R+z)^2} = \mathfrak{R}_\omega, \tag{7}$$

respectiv

$$u = (R+z)\frac{ds}{dz}\left[\xi\left(\frac{dz}{ds}\theta\right) - \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\mathfrak{R}_y - \frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\mathfrak{R}_z - \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\mathfrak{R}_\omega\right]. \tag{8}$$

RELAŢII FIZICE

Pentru a se obţine expresia eforturilor unitare normale pe secţiunea transversală se utilizează relaţia

$$\sigma = E\frac{\partial u}{r_1\,\partial\theta_1} = E\frac{1}{(R+z)\dfrac{ds}{dz}}\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{ds}{dz} = E\frac{\partial u}{(R+z)\,\partial\theta}, \tag{9}$$

respectiv

$$\sigma = E\frac{\partial\xi}{\partial\theta} - E\mathfrak{R}_y\frac{\partial^2\eta}{\partial\theta^2}\frac{ds}{dz} - E\mathfrak{R}_z\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2}\frac{ds}{dz} - E\mathfrak{R}_\omega\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\frac{ds}{dz}. \tag{10}$$

Considerînd elementul *a b a′ b′*, acesta va fi încărcat ca în figura 2.

Scriind ecuațiile de echilibru ale acestui element, ecuația de proiecție după direcția aa' va fi

$$\left(\sigma + \frac{\partial\sigma}{\partial\theta_1} d\theta_1\right) dr_1 - \sigma dr_1 + \left(\tau + \frac{\partial\tau}{\partial r_1} dr_1\right)(r_1 + dr_1)\, d\theta_1 - \tau r_1\, d\theta_1 +$$

$$+ \left(\tau + \tau + \frac{\partial\tau}{\partial\theta_1} d\theta_1\right) dr_1 \frac{d\theta_1}{2} = 0,$$

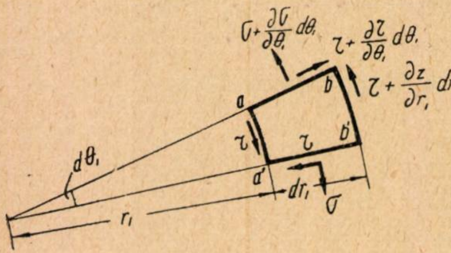

$\sigma + \frac{\partial\sigma}{\partial\theta_1} d\theta_1$
$\tau + \frac{\partial\tau}{\partial\theta_1} d\theta_1$
$\tau + \frac{\partial\tau}{\partial r_1} dr_1$
a
b
b'
a'
τ
τ
$d\theta_1$
dr_1
σ
r_1

Fig. 2

de unde

$$\frac{\partial\tau}{\partial r_1} + \frac{2\tau}{r_1} + \frac{\partial\sigma}{r_1\,\partial\theta_1} = 0. \quad (11)$$

Integrînd această ecuație se obține

$$\tau = \frac{1}{r_1^2}\left[C(\theta) - \int_0^s r_1 \frac{\partial\sigma}{\partial\theta_1} dr_1\right], \quad (12)$$

unde expresia lui σ este dată mai sus (v. relația (10)). Funcția $C(\theta)$, care are rol de constantă de integrare, se determină din condiții la limită. Dacă nu există eforturi unitare tangențiale pe suprafața laterală de origină pentru s (fig. 1 *b*) se obține $C(\theta) = 0$.

Se obține astfel

$$\tau = -\frac{1}{(R+z)^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \int_0^s (R+z)\left(\frac{ds}{dz}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\frac{ds}{dz}\, ds, \quad (13)$$

$$\tau = \frac{E}{(R+z)^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \left[-\frac{\partial^2\xi}{\partial\theta^2}\int_0^s (R+z)\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 ds + \frac{\partial^3\eta}{\partial\theta^3}\int_0^s \mathcal{R}_y (R+z)\left(\frac{ds}{dz}\right)^3 ds +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3\zeta}{\partial\theta^3}\int_0^s \mathcal{R}_z (R+z)\left(\frac{ds}{dz}\right)^3 ds + \frac{\partial^3\varphi}{\partial\theta^3}\int_0^s \mathcal{R}_\omega (R+z)\left(\frac{ds}{dz}\right)^3 ds\right]. \quad (14)$$

Integralele din paranteza mare depind numai de forma secțiunii transversale și se notează, pentru simplificare,

$$\begin{aligned} \int_0^s (R+z)\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 ds &= \mathcal{S}_s, \\ \int_0^s \mathcal{R}_y (R+z)\left(\frac{ds}{dz}\right)^3 ds &= \mathcal{S}_y, \\ \int_0^s \mathcal{R}_z (R+z)\left(\frac{ds}{dz}\right)^3 ds &= \mathcal{S}_z, \\ \int_0^s \mathcal{R}_\omega (R+z)\left(\frac{ds}{dz}\right)^3 ds &= \mathcal{S}_\omega. \end{aligned} \quad (15)$$

Relația (14) se scrie astfel

$$\tau = \frac{E}{(R+z)^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\left[-\mathbb{S}_x\frac{\partial^2\xi}{\partial\theta^2}+\mathbb{S}_y\frac{\partial^3\eta}{\partial\theta^3}+\mathbb{S}_z\frac{\partial^3\zeta}{\partial\theta^3}+\mathbb{S}_\omega\frac{\partial^3\varphi}{\partial\theta^3}\right]. \tag{16}$$

CONDIŢII STATICE

Funcțiile necunoscute ξ, η, ζ și φ se obțin din condițiile statice de egalitate între solicitarea aplicată în secțiune și cea produsă de eforturi unitare. Se obține astfel

$$N_x = \int_A \sigma\, dA =$$

$$= E\xi'\int_A dA - E\eta''\int_A \mathfrak{R}_y\frac{ds}{dz}dA - E\zeta''\int_A \mathfrak{R}_z\frac{ds}{dz}dA - E\varphi''\int_A \mathfrak{R}_\omega\frac{ds}{dz}dA, \tag{17}$$

$$M_y = \int_A \sigma\, z dA =$$

$$= E\xi'\int_A zdA - E\eta''\int_A \mathfrak{R}_z\frac{ds}{dz}zdA - E\zeta''\int_A \mathfrak{R}_z\frac{ds}{dz}zdA - E\varphi''\int_A \mathfrak{R}_\omega\frac{ds}{dz}zdA, \tag{18}$$

$$M_z = -\int_A \sigma y\, dA = -E\xi'\int_A y\, dA +$$

$$+ E\eta''\int_A \mathfrak{R}_z\frac{ds}{dz}y\, dA + E\zeta''\int_A \mathfrak{R}_z\frac{ds}{dz}y\, dA + E\varphi''\int_A \mathfrak{R}_\omega\frac{ds}{dz}y\, dA, \tag{19}$$

$$T_y = \int_A \tau\, hdy = E\left[-\xi''\int_A \mathbb{S}_x\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\frac{dy}{ds}\frac{dA}{(R+z)^2} + \eta'''\int_A \mathbb{S}_y\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\frac{dy}{ds}\frac{dA}{(R+z)^2} +\right.$$

$$\left. + \zeta'''\int_A \mathbb{S}_z\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\frac{dy}{ds}\frac{dA}{(R+z)^2} + \varphi'''\int_A \mathbb{S}_\omega\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\frac{dy}{ds}\frac{dA}{(R+z)^2}\right], \tag{20}$$

$$T_z = \int_A \tau\, hdz = E\left[-\xi''\int_A \mathbb{S}_x\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\frac{dz}{ds}\frac{dA}{(R+z)^2} + \eta'''\int_A \mathbb{S}_y\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\frac{dz}{ds}\frac{dA}{(R+z)^2} +\right.$$

$$\left. + \zeta'''\int_A \mathbb{S}_z\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\frac{dz}{ds}\frac{dA}{(R+z)^2} + \varphi'''\int_A \mathbb{S}_\omega\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\frac{dz}{ds}\frac{dA}{(R+z)^2}\right], \tag{21}$$

$$M_x = \int_A \tau\, hd\omega + M_t = E\left[-\xi''\int_A \mathbb{S}_x\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\frac{d\omega}{ds}\frac{dA}{(R+z)^2} +\right.$$

$$+ \eta'''\int_A \mathbb{S}_y\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\frac{d\omega}{ds}\frac{dA}{(R+z)^2} + \zeta'''\int_A \mathbb{S}_z\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\frac{d\omega}{ds}\frac{dA}{(R+z)^2} +$$

$$\left. + \varphi'''\int_A \mathbb{S}_\omega\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\frac{d\omega}{ds}\frac{dA}{(R+z)^2}\right] + G\, I_d\varphi'. \tag{22}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Aici GI_d reprezintă rigiditatea la răsucire a barei.

Deoarece rotirile η'' și ζ'' depind evident de deplasările η și ζ, nu toate aceste șase relații sînt distincte.

Se pot considera astfel, fie relație a doua și a treia, fie a patra și a cincea din sistemul de mai sus.

Se formează astfel un sistem de patru ecuații cu patru funcții necunoscute ξ, η, ζ și φ.

Pentru a se putea soluționa problema, se alege polul față de care se măsoară rotația astfel încît

$$\begin{gathered} \int \mathfrak{S}_y\, h \frac{1}{(R+z)^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 d\omega = 0, \\ \int \mathfrak{S}_z\, h \frac{1}{(R+z)^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 d\omega = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Raza vectoare de origină pentru măsurarea suprafeței sector se alege astfel încît

$$\int \mathfrak{S}_x\, h \frac{1}{(R+z)^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 d\omega = 0. \tag{24}$$

În aceste condiții ultima ecuație devine

$$M_x = \varphi''' E \int \mathfrak{S}_\omega \frac{h}{(R+z)^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 d\omega + \varphi' G I_d . \tag{25}$$

Cunoscînd momentul de răsucire M_x față de punctul din secțiunea transversală, determinat de condițiile (23), ecuația se poate integra obținîndu-se astfel funcția φ și derivatele ei.

Dacă se notează

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & -\int_A \mathfrak{R}_y \frac{ds}{dz}\, dA & -\int_A \mathfrak{R}_z \frac{ds}{dz}\, dA \\ \int_A z dA & -\int_A \mathfrak{R}_y z \frac{ds}{dz}\, dA & -\int_A \mathfrak{R}_z z \frac{ds}{dz}\, dA \\ \int_A y dA & -\int_A \mathfrak{R}_y y \frac{ds}{dz}\, dA & -\int_A \mathfrak{R}_z y \frac{ds}{dz}\, dA \end{vmatrix}, \tag{26}$$

se obține succesiv

$$\xi' = \frac{\begin{vmatrix} -\varphi''\int_A \mathfrak{R}_\omega \frac{ds}{dz}\, dA - \frac{N_x}{E} & -\int_A \mathfrak{R}_y \frac{ds}{dz}\, dA & -\int_A \mathfrak{R}_z \frac{ds}{dz}\, dA \\ -\varphi''\int_A \mathfrak{R}_\omega \frac{ds}{dz}\, z dA - \frac{M_y}{E} & -\int_A \mathfrak{R}_y z \frac{ds}{dz}\, dA & -\int_A \mathfrak{R}_z z \frac{ds}{dz}\, dA \\ \varphi''\int_A \mathfrak{R}_\omega \frac{ds}{dz}\, y dA - \frac{M_z}{E} & +\int_A \mathfrak{R}_y y \frac{ds}{dz}\, dA & \int_A \mathfrak{R}_z y \frac{ds}{dz}\, dA \end{vmatrix}}{\Delta}, \tag{27}$$

$$\eta'' = \frac{\begin{vmatrix} A & -\varphi''\int_A \mathfrak{R}_\omega \frac{ds}{dz}\, dA - \frac{N_x}{E} & -\int_A \mathfrak{R}_z \frac{ds}{dz}\, dA \\ \int_A z dA & -\varphi''\int_A \mathfrak{R}_\omega \frac{ds}{dz}\, z dA - \frac{M_y}{E} & -\int_A \mathfrak{R}_z z \frac{ds}{dz}\, dA \\ \int_A y dA & \varphi''\int_A \mathfrak{R}_\omega \frac{ds}{dz}\, y dA - \frac{M_z}{E} & \int_A \mathfrak{R}_z y \frac{ds}{dz}\, dA \end{vmatrix}}{\Delta}, \tag{28}$$

$$\zeta'' = \frac{\begin{vmatrix} A & -\int_A \mathfrak{R}_y \frac{ds}{dz}\, dA & -\varphi''\int_A \mathfrak{R}_\omega \frac{ds}{dz}\, dA - \frac{N_x}{E} \\ \int_A z dA & -\int_A \mathfrak{R}_y z \frac{ds}{dz}\, dA & -\varphi''\int_A \mathfrak{R}_\omega \frac{ds}{dz}\, z dA - \frac{M_y}{E} \\ \int_A y dA & \int_A \mathfrak{R}_y y \frac{ds}{dz}\, dA & \varphi''\int_A \mathfrak{R}_\omega \frac{ds}{dz}\, y dA - \frac{M_z}{E} \end{vmatrix}}{\Delta}. \tag{29}$$

Dacă se cunosc solicitările într-o secțiune dată, valorile solicitării într-o secțiune oarecare, se obțin integrînd sistemul

$$\begin{aligned}
&\frac{dN_x}{R_1\, d\theta} + qT_z - rT_y + f_x = 0, \\
&\frac{dT_y}{R_1\, d\theta} + rN_x - pT_z + f_y = 0, \\
&\frac{dT_z}{R_1\, d\theta} + pT_y - qN_x + f_z = 0, \\
&\frac{dM_y}{R_1\, d\theta} + rM_x + pM_z - T_z + m_y = 0, \\
&\frac{dM_z}{R_1\, d\theta} + pM_y - qM_x + T_y + m_z = 0, \\
&\frac{dM_x}{R_1\, d\theta} + qM_z - rM_y + m_x = 0,
\end{aligned} \tag{30}$$

unde R_1 este raza de curbură a locului geometric al punctelor definite de relaţiile (23), p, q, r sînt cosinuşii directori ai acestei curbe în secţiunea considerată, faţă de secţiunea de origină, iar f_x, f_y, f_z, m_x, m_y, m_z componentele forţelor şi momentelor repartizate în lungul barei.

O dată cunoscute cantităţile ξ', η'', ζ'', φ', φ'' şi evident ξ'', η''', ζ''' şi φ''' cu ajutorul relaţiilor (17)—(22) se obţine expresia eforturilor unitare normale şi tangenţiale în orice punct al secţiunii transversale.

Deformaţiile se obţin de asemenea prin integrarea ecuaţiilor (25)—(29) introducînd aici valorile sarcinilor exterioare date.

Problema barelor curbe cu pereţi subţiri, poate fi deci complet rezolvată.

Primită la redacţie la 17 februarie 1958.

ИЗОГНУТЫЕ ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе дается решение задачи изогнутых тонкостенных стержней с поперечным сечением любого вида при любых условиях нагрузки и укрепления с учетом как предотвращения перекосов поперечного сечения, так и кручения, вызываемого поперечными силами.

Устанавливаются и интегрируются аналитические соотношения, существующие между перемещениями, в результате гипотез, остающихся действительными в случае тонкостенных стержней.

Затем устанавливается выражение перекоса поперечного сечения через деформацию в зависимости от общих деформаций стержня.

Учитываются физические соотношения и даются выражения напряжений в зависимости от общих деформаций стержня. При помощи статических условий устанавливаются соотношения между усилиями и напряжениями.

Центр приведения есть точка, играющая роль центра изгиба. Дается общий метод расчета для выражения напряжений в зависимости от внешних нагрузок и для деформации стержня под теми же нагрузками.

BARRES COURBES À PAROIS MINCES

RÉSUMÉ

L'auteur donne, dans ce travail, la solution du problème des barres courbes aux parois minces, pour toute forme de la section transversale, pour toutes conditions de charges et de fixation, compte tenu de l'empêchement du déplanement des sections transversales ainsi que de la torsion produite par les forces transversales.

Il établit et intègre les relations analytiques qui existent entre les déplacements, comme suite aux hypothèses qui restent applicables, dans le cas des barres à parois minces.

Il établit ensuite l'expression du déplanement de la section transversale, par déformation, en fonction des déformations générales de la barre.

Tenant compte des relations physiques, l'auteur donne les expressions des tensions, en fonction des déformations générales de la barre. En vertu des conditions statiques, il établit des relations entre les efforts et les tensions.

Précisant, comme centre de réduction, un point qui joue le rôle de centre de flexion, il présente la méthode générale de calcul tant pour l'expression des tensions, en fonction des efforts extérieurs, que pour les déformations de la barre soumise aux mêmes efforts.

STAREA ELASTO-PLASTICĂ ÎN TUBURI FRETATE

DE

LADISLAU NEMETI

1. PRECIZAREA PROBLEMEI

Îmbinările prin ajustaj cu strîngere, sau așa-numitele îmbinări fretate, sînt frecvent utilizate în construcția de mașini, ele prezentînd o serie de avantaje față de celelalte metode de îmbinare.

Răspîndirii lor mai rapide le stă însă în cale calculul lor destul de greoi [1], [2]. La această circumstanță se mai adaugă și următorul fapt : tendința generală în tehnică de a folosi materialele utilizate și mai intens, în speță de a intra în domeniul deformărilor plastice, se manifestă și la îmbinările fretate. Nu cunoaștem însă o metodeă de calcul, practic folosibilă și bazată pe teoriile moderne de plasticitate [3], [4], pentru acest fel de îmbinări.

În lucrarea prezentă ne-am propus să deducem formule de calcul pentru îmbinările fretate în domeniul elasto-plastic, pe baza teoriei lui Iliușin și de a dezvolta o metodă de calcul rapidă și practic aplicabilă.

Să căutăm deci relația între presiunea la suprafața de contact între cele două țevi și între strîngerea (diferența negativă) corespunzătoare, diametrelor lor la suprafața de contact.

Vom dezvolta întîi formulele privind un singur tub, supus presiunii externe și interne (punctele 2, 3 și 4 ale lucrării,) aceste rezultate le vom aplica separat piesei interioare (punctul 5), piesei exterioare (punctul 6) și, în sfîrșit, prin sinteză, pieselor asamblate (punctul 7). De asemenea, prezentăm și o nomogramă, prin care calculul îmbinării devine foarte rapid, atît în cazul elastic cît și în cel elasto-plastic.

2. STAREA ELASTICĂ A TUBULUI

Acest caz este bine cunoscut și se găsește în fiecare tratat de teoria elasticității.

Notînd cu

r_a — raza exterioară a tubului,

r_i — raza interioară a tubului,

p_a — presiunea externă,
p_i — presiunea internă,
σ_r — tensiunea radială,
σ_φ — tensiunea tangențială,
u — deplasarea radială,
μ — coeficientul lui Poisson,
G — modulul de lunecare,
$\xi = \left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2$,

avem

$$u = \frac{1}{2G}\frac{1}{\xi - 1}\left[(1 - 2\mu)(p_i - p_a\xi)\,r + (p_i - p_a)\frac{r_a^2}{r}\right], \tag{2.1}$$

$$\sigma_r = \frac{1}{\xi - 1}\left[p_i - p_a\xi - (p_i - p_a)\left(\frac{r_a}{r}\right)^2\right],$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{\xi - 1}\left[p_i - p_a\xi + (p_i - p_a)\left(\frac{r_a}{r}\right)^2\right]. \tag{2.2}$$

Aici este presupusă o stare de deformație plană fără alungire axială ($\varepsilon_z = 0$); această condiție o vom păstra în întreaga lucrare.

3. STAREA PLASTICĂ A CILINDRULUI

Aici vom considera un corp ideal-plastic, avînd o zonă de curgere bine marcată și mare, cu limita de curgere σ_0. Vom folosi condiția de plasticitate a lui de Saint-Venant, admisibilă în cazul nostru [5],

$$|\sigma_\varphi - \sigma_r| = \sigma_0. \tag{3.1}$$

Vom nota

semn $(p_i - p_a) = k = \pm 1$,

E — modulul de elasticitate,
G' — modulul de lunecare echivalent,
$\psi = \frac{G}{G'}$ — indicele pentru mărirea deformației totale raportată la deformația elastică.

Prin (3.1), tensiunile σ_φ și σ_r devin static determinate. Avem

$$\begin{aligned}\sigma_r &= k\sigma_0 \ln\frac{r}{r_i} - p_i,\\ \sigma_\varphi &= k\sigma_0\left(\ln\frac{r}{r_i} + 1\right) - p_i.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Pentru deformații avem

$$\begin{aligned} &\varepsilon_r - \varepsilon_m = \frac{\psi}{2G}(\sigma_r - \sigma_m), \\ &\varepsilon_\varphi - \varepsilon_m = \frac{\psi}{2G}(\sigma_\varphi - \sigma_m) \qquad (\psi \geqslant 1), \\ &\varepsilon_m = \frac{1-2\mu}{E}\sigma_m \end{aligned} \tag{3.3}$$

unde

$$\begin{aligned} &\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = 0, \\ &3\varepsilon_m = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z, \\ &3\sigma_m = \sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Din (3.2), (3.3), și (3.4) deducem

$$\begin{aligned} &2u' - \frac{u}{r} = \frac{\psi}{2G}\left[K\sigma_0\left(\ln\frac{r}{r_i} - 1\right) - p_i - \sigma_z\right], \\ &-u' + 2\,\frac{u}{r} = \frac{\psi}{2G}\left[K\sigma_0\left(\ln\frac{r}{r_i} + 2\right) - p_i - \sigma_z\right], \\ &u' + \frac{u}{r} = \frac{1-2\mu}{E}\left[2K\sigma_0\left(\ln\frac{r}{r_i} + \frac{1}{2}\right) - 2p_i + \sigma_z\right]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Eliminînd σ_z, vom avea

$$\begin{aligned} &\psi = \frac{2G}{K\sigma_0}\left(\frac{u}{r} - u\right), \\ &u'^2 - 2Kz(r)\,u' - \left(\frac{u}{r}\right)^2 + K\left[2z(r) - 1\right]\frac{u}{r} = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Aici am notat

$$\begin{aligned} &K = \frac{1-2\mu}{E}k\sigma_0, \\ &z(r) = \frac{3}{2}\left(\ln\frac{r}{r_i} - \frac{p_i}{k\sigma_0}\right) + 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Punînd

$$x = \frac{u}{Kr}, \tag{3.8}$$

derivînd după $\frac{dz}{dx}$ și substituind

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{3}{4}(t^4 - 1), \tag{3.9}$$

avem

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} + \frac{4}{t(t^4-1)^2} = 0, \tag{3.10}$$

$$\psi = 2\,\frac{1-2\mu}{1+\mu}\,\frac{1}{t^4-1}. \tag{3.11}$$

Soluția ecuației diferențiale (3.10) este

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{t}\left(C + \frac{t}{t^4-1} - \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} t - \frac{3}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}\right), \\ z &= \frac{t^4+3}{4}\,x - \frac{1}{t^4-1} = \frac{t^4+3}{4t}\left(C - \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} t - \frac{3}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}\right) + \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

4. STAREA ELASTICO-PLASTICĂ A CILINDRULUI

În această stare țeava are un domeniu interior, plastic, și unul exterior, elastic. Racordarea lor la raza r_0 se face pe baza următoarelor criterii:

a) la limita domeniului elastic, este satisfăcută condiția de plasticitate

$$\sigma_\varphi^E - \sigma_r^E = k\sigma_0; \tag{4.1}$$

b) din motive de echilibru, avem

$$\sigma_r^E = \sigma_r^P; \tag{4.2}$$

c) deplasarea radială este tot continuă

$$u^E = u^P, \tag{4.3}$$

sau, ceea ce exprimă același fapt,

$$\psi = 1. \tag{4.4}$$

Folosind notațiile

$$\begin{gathered} p_0 = -\sigma_r \text{ pentru } r = r_0, \\ \frac{2p_0}{k\sigma_0} = \pi_0,\ \frac{2p_i}{k\sigma_0} = \pi_i,\ \frac{2p_a}{k\sigma_0} = \pi_a, \\ \pi_i - \pi_a = \pi,\ \left(\frac{r_0}{r_a}\right)^2 = \eta, \\ x_0 = x \text{ pentru } r = r_0, \\ t_0 = t \text{ pentru } r = r_0, \end{gathered}$$

criteriile de mai sus se transcriu

$$\pi_0 - \pi_a = 1 - \eta, \tag{4.5}$$

$$\pi_i - \pi_0 = \ln \xi\eta, \tag{4.6}$$

$$x_0 = \frac{1+\mu}{2}\left(\frac{1}{1-2\mu} + \eta - \pi_a\right), \tag{4.7}$$

$$t_0^4 = 3\,\frac{1-\mu}{1+\mu}. \tag{4.8}$$

Din (4.5) şi (4.6) obţinem

$$1 - \eta + \ln \xi\eta = \pi, \tag{4.9}$$

relaţie ce determină pe η, respectiv pe r_0.

Cu ajutorul relaţiei (4.7), eliminăm pe C din (3.12) şi putem scrie soluţia ecuaţiei (3.10), care împreună cu (4.8) şi (4.9) satisfac şi condiţiile de început (de racordare):

$$\begin{aligned} 4z = 1 + \frac{t^4+3}{t}\Bigg[\frac{1+\mu}{2}\,t_0(\eta - \pi_a) &+ \frac{3}{2}(\text{arc tg}\, t_0 - \text{arc tg}\, t) + \\ &+ \frac{3}{4}\left(\ln\frac{t_0+1}{t_0-1} - \ln\frac{t+1}{t-1}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$x = \frac{4}{t^4+3}\left(z + \frac{1}{t^4-1}\right). \tag{4.11}$$

Din discuţia relaţiei (4.7) reiese că,

pentru $0 < \pi \leqslant 1 - \frac{1}{\xi}$ avem cazul elastic,

pentru $\frac{1}{1-\frac{1}{\xi}} < \pi < \ln\xi$ avem cazul elasto-plastic,

pentru $\pi = \ln\xi$ avem cazul pur plastic (în echilibru instabil),

pentru $\pi > \ln\xi$ avem cazul pur plastic în dezechilibru.

5. CILINDRUL INTERIOR

Ne interesează u pentru $r = r_a$. În locul lui u, respectiv x, vom folosi mărimile

$$\delta_{\text{int}} = (1 - 2\mu)\,x_a = -\frac{E}{\sigma_0}\,\frac{u_a}{r_a}. \tag{5.1}$$

Cazul elastic. Din (2.1) avem, dacă punem

$$\begin{gathered} p_i \rightarrow 0\,, \quad p_a \rightarrow p_c \quad \text{(presiunea de contact)} \\ r_a \rightarrow r_c\,, \quad \frac{2p_c}{\sigma_0} \rightarrow \pi\,, \\ \delta_{\text{int}} = \frac{1+\mu}{2}\,\frac{(1-2\mu)\xi+1}{\xi-1}\,\pi. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Cazul elasto-plastic. Partea exterioară a tubului aflîndu-se în stare elastică, ne folosim tot de (2.1). Substituim aici

$$p_i \rightarrow p_0, \quad p_a \rightarrow p_c, \quad r_i \rightarrow r_0, \quad r = r_a \rightarrow r_c, \quad \xi = \frac{1}{\eta}\cdot$$

În partea plastică avem

$$k = -1, \quad p_i \rightarrow 0, \quad \pi = -\pi_a = -\pi_c.$$

Folosind și relația (4.1) găsim

$$\delta_{\text{int}} = (1-\mu^2)\,\eta + \frac{(1-2\mu)\,(1+\mu)}{2}\,\pi, \tag{5.3}$$

unde bineînțeles η este dat de

$$1 - \eta + \ln \eta\xi = \pi\,; \tag{4.5}$$

(5.2) și (5.3) sînt relațiile căutate între δ și π.

Afară de relația $F_1(\delta, \pi, \xi) = 0$, dată prin (5.2), respectiv (5.3), și (4.5), ne mai interesează — din motivele expuse la punctul 7 — și o relație $F_2\,(\delta, \pi, \psi_i) = 0$, unde $\psi_i = \psi_{r=r_i}$, sau, dat fiind legătura între ψ_i și t_i prin (3.12), relația $F_3\,(\delta, \pi, t_i) = 0$.

Din (3.7) avem, cu $p_i \rightarrow 0$ și $r \rightarrow r_i$, $z_i = 1$ și atunci din (4.6) deducem

$$\begin{aligned} 1 = \frac{t_i^4+3}{t_i}\Bigg[\, t_0\,\frac{1+\mu}{6}\,(\eta+\pi) + \frac{1}{2}\,(\operatorname{arc\,tg} t_0 - \operatorname{arc\,tg} t_i) \,+ \\ + \frac{1}{4}\left(\ln\frac{t_0+1}{t_0-1} - \ln\frac{t_i+1}{t_i-1}\right)\Bigg]\cdot \end{aligned} \tag{5.4}$$

Această relație, împreună cu (5.3) ne dă relația $F_3(\delta, \pi, t_i) = 0$ căutată, care va fi

$$\begin{aligned} \delta &= A - \frac{1+\mu}{2}\,\pi\,, \\ A &= \frac{6\,(1-\mu)}{t_0}\Bigg[\frac{t_i}{t_i^4+3} - \frac{1}{2}\,(\operatorname{arc\,tg} t_0 - \operatorname{arc\,tg} t_i) \,- \\ &\qquad - \frac{1}{4}\left(\ln\frac{t_0+1}{t_0-1} - \ln\frac{t_i+1}{t_i-1}\right)\Bigg]\cdot \end{aligned} \tag{5.5}$$

6. CILINDRUL EXTERIOR

Ne interesează u pentru $r = r_i$. În locul lui u respectiv x, vom folosi mărimea

$$\delta_{\text{ext}} = (1 - 2\mu)\, x_i = \frac{E}{\delta} \frac{u_i}{r_i}\,. \tag{6.1}$$

Cazul elastic. Din (2.1) avem, dacă punem

$$\begin{gathered} p_i \to p_c\,,\ p_0 \to 0,\ r_i \to r_c\,,\ \frac{2p_c}{\sigma_0} \to \pi\,, \\ \delta_{\text{ext}} = \frac{1+\mu}{2} \frac{\xi + 1 - 2\mu}{\xi - 1}\, \pi\,. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Cazul elasto-plastic. Din (3.7) avem, cu $p_i \to p_c$ şi $r \to r_i$

$$z_i = 1 - \frac{3}{4}\pi\,.$$

Cu aceasta şi cu $t \to t_i$, găsim din (4.7)

$$\delta_{\text{ext}} = \frac{1-2\mu}{t_i^4 + 3}\left(\frac{4t_i^4}{t_i^4 - 1} - 3\pi\right). \tag{6.3}$$

Relaţia (4.6), cu $\pi_a \to 0$ va deveni

$$\begin{aligned} 1 - \pi = \frac{t_i^4 + 3}{t_i}\Bigg[&\frac{1+\mu}{6} t_0 \eta + \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} t_0 - \operatorname{arc\,tg} t_i) + \\ &+ \frac{1}{4}\left(\ln\frac{t_0+1}{t_0-1} - \ln\frac{t_i+1}{t_i-1}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Relaţia (6.3), cu (6.4) şi (6.5) dă $F_1(\delta, \pi, \xi) = 0$, iar relaţia (6.3) singură dă relaţia $F_3(\delta, \pi, t_i) = 0$.

7. TUBURI FRETATE

În cazul celor două piese fretate vom folosi următoarele notaţii :

r_a — raza exterioară a tubului exterior,
r_c — raza interioară a tubului exterior = raza exterioară a tubului interior = raza suprafeţei de contact,
r_i — raza interioară a tubului interior.

Indicele *ext* se referă la tubul exterior, indicele *int* la tubul interior, iar mărimile u şi δ fără indice se referă la ansamblul pieselor îmbinate.

Înaintea asamblării tubul exterior are raza interioară $r_c - u_{\text{ext}}$ iar tubul interior are raza exterioară $r_c + u_{\text{int}}$.

După asamblare acestea devin egale cu r_c.
Prin urmare strîngerea este $u = u_{\text{ext}} + u_{\text{int}}$ şi

$$\delta = \frac{E}{\sigma_0}\frac{u}{r_c} = \delta_{\text{ext}} + \delta_{\text{int}}. \tag{7.1}$$

Această formulă scrisă cu ajutorul formulelor de la punctele precedente, reprezintă relaţia între strîngere şi presiune pe suprafaţa de contact, fie că este prescrisă presiunea necesară pe suprafaţa de contact şi se caută strîngerea care asigură această presiune, fie că avem o construcţie dată, adică cunoaştem strîngerea, şi atunci trebuie să verificăm dacă presiunea de contact ce reiese din construcţie are sau nu mărimea necesară pentru asigurarea rezistenţei îmbinării.

Folosirea relaţiei (7.1) pentru aceste calcule este însă greoaie. La acest calcul trebuie aplicate formulele (5.2) sau (5.3) cu (4.5) şi (6.2) sau (6.3) şi (6.4), după caz, adică după cum tubul exterior, respectiv interior, se află în stare elastică, elasto-plastică sau chiar plastică.

Aceste formule ne dau, după un calcul destul de anevoios, valoarea lui δ în funcţie de π. Rezolvarea problemei inverse — ceea ce este întotdeauna necesar pentru verificarea construcţiei alese—ne duce la foarte mari dificultăţi de calcul din cauza volumului lor excesiv de mare. Toate aceste greutăţi se elimină prin folosirea nomogramei propuse. Cunoscînd r_a, r_c, r_i adică ξ_{ext} şi ξ_{int}, la o presiune p_c (adică π) dată, se stabilesc imediat punctele P_{ext} şi P_{int}. Distanţa lor (măsurată pe ordonata δ) indică δ (adică u) necesar pentru asigurarea presiunii de contact prescrise, iar poziţia lor starea (elastică, elasto-plastică, plastică) celor două piese. Şi rezolvarea problemei inverse este simplă, luînd în compas distanţa δ şi căutînd poziţia verticalei care asigură că punctele finale P_{ext} şi P_{int} ale acestei distanţe să fie pe curbele ξ_{ext} respectiv ξ_{int}.

În sfîrşit, cîteva consideraţii despre sarcinile admisibile ale acestor îmbinări. Trecîndu-se în domeniul plastic, noţiunea de efort unitar admisibil, cu care inginerii sînt atît de familiarizaţi, îşi pierde sensul. Nu se poate spune că în locul acestei noţiuni s-ar fi pus o alta, unică, care ar putea să aibă acelaşi rol de criteriu univoc, ca vechea noţiune de tensiune admisibilă.

Noţiunea de capacitate portantă înseamnă în cazul nostru stadiul în care una din piese atinge domeniul pur plastic. Aceasta înseamnă că nici unul din punctele P_{ext} şi P_{int} din nomogramă nu trebuie să intre în domeniul plastic. Acest procedeu livrează deci o limită admisibilă a încărcării îmbinării. Bineînţeles, pentru acest lucru mărimea π, calculată din momentul de torsiune ce urmează să fie transmis de către îmbinare, trebuie întîi multiplicată cu un factor de siguranţă.

Noi mai propunem însă încă o limită de admisibilitate pentru încărcarea îmbinării. Şi anume aceasta ar fi mărimea deformaţiei plastice în pereţii tubului. Adică noi solicităm ca deformaţia plastică, sau, ceea ce este în fond acelaşi lucru, raportul între deformaţia totală şi deformaţia elastică, să nu întreacă o anumită mărime. Acest deziderat este motivat prin limitele bazelor teoriei noastre, care presupune un corp ideal plastic, ori cît de mare ar fi mărimea deformației plastice. Or, în realitate, tensiunea de scurgere nu rămîne constantă dacă deformația a întrecut o anumită limită, nici deformația nu poate să crească peste alungirea de rupere. De aceea, este logic să interzicem creșterea deformației peste o anumită limită. Pentru caracterizarea acestei limite alegem mărimea ψ folosită de Sokolowski $\left(\text{legată de mărimea } \omega, \text{ folosită de Iliușin prin } 1 - \omega = \frac{1}{\psi}\right)$.

În esență ψ înseamnă raportul $\frac{\text{deformație totală}}{\text{deformație elastică}}$, iar ω înseamnă raportul $\frac{\text{deformație plastică}}{\text{deformație totală}}$.

Ce mărime ψ, respectiv ω, trebuie să considerăm ca limită admisibilă, acest lucru se va definitiva prin verificarea îmbinărilor executate în folosirea lor practică. Pentru început noi propunem un factor $\psi = 2$ $(\omega = 0{,}5)$.

Cu aceste limite admisibile ale eforturilor, calculul de verificare al unei îmbinări fretate — și totodată folosirea nomogramei — s-ar executa în felul următor :

Se stabilește, pe baza regimului de funcționare al îmbinării și luîndu-se în considerare și un factor de siguranță cuvenit, p_c necesar, se calculează π corespunzător (punctul Q în nomogramă). Cu $\xi_{\rm ext}$ și $\xi_{\rm int}$ dați se stabilesc punctele $P_{\rm ext}$ și $P_{\rm int}$, care la rîndul lor definesc pe δ. Acesta stabilește strîngerea minimă necesară. Se stabilesc toleranțele de execuție și din ele decurge strîngerea efectivă între două limite adică găsim pe $\delta_{\rm min}$ și $\delta_{\rm max}$. Aceștia, bineînțeles, trebuie să verifice relația

$$\delta \leqslant \delta_{\rm min} < \delta_{\rm max}\,.$$

Mărimii $\delta_{\rm min}$ îi vor corespunde în diagramă punctele $P'_{\rm ext}$ și $P'_{\rm int}$ (adică distanța dintre ele va fi egală cu $\delta_{\rm min}$ și ele se vor situa pe curbele $\xi_{\rm ext}$, respectiv $\xi_{\rm int}$), iar mărimii $\delta_{\rm max}$ punctele $P''_{\rm ext}$ și $P''_{\rm int}$.

Construcția îmbinării se acceptă dacă punctele P' și P'' se găsesc toate în domeniul admisibil, adică dacă ele sînt situate în domeniul elastic sau elasto-plastic și dacă în acest ultim caz, le corespunde un $\psi \leqslant 2$.

Avantajul acestei metode, față de cele folosite pînă acum (de exemplu [1]) sînt evidente, mai ales că pentru domeniul elasto-plastic nici nu au fost elaborate metode de calcul complete cum există pentru domeniul elastic.

Primită la redacție la 19 mai 1958

EXPLICAŢII LA NOMOGRAMA PENTRU CALCULAREA ÎMBINĂRILOR FRETATE

I. NOTAŢII

r_i — raza interioară a piesei interioare,

r_c — raza exterioară a piesei interioare = raza interioară a piesei exterioare = raza de contact,

r_a — raza exterioară a piesei exterioare,

$\xi_{ext} = \left(\frac{r_a}{r_c}\right)^2 > 1 \quad \xi_{int} = \left(\frac{r_c}{r_i}\right)^2 > 1$,

E — modulul de elasticitate,

σ_0 — limita de curgere,

p_c — presiunea la suprafaţa de contact,

u_{int} — deplasarea la suprafaţa de contact (piesa interioară) (valoare absolută),

u_{ext} — deplasarea la suprafaţa de contact (piesa exterioară),

$u = u_{int} + u_{ext}$ — strîngerea celor două piese,

$\pi = 2\frac{p_c}{\sigma_0}$, $\delta = \frac{E}{\sigma_0}\frac{u}{r_c}$ — mărimi adimensionale caracterizînd mărimea presiunii de contact şi aceea a strîngerii,

$\psi = \frac{\text{deformaţie totală}}{\text{deformaţie elastică}}$.

II. EXEMPLE

1. $r_i = 50$ mm, $r_c = 85$ mm, $r_a = 170$ mm, $E = 2.10^6$ kg/cm^2, $\sigma_0 = 2.10^3$ kg/cm^2, $p_c = 300$ kg/cm^2, $\xi_{ext} = 2,0$, $\xi_{int} = 1,7$, $\pi = 0,3 \rightarrow \rightarrow \delta = 0,98$, $u = 83\mu$.

Ambele piese se află în starea elastică.

2. $r_i = 0$, $r_c = 50$ mm, $r_a = 150$ mm, $E = 2.10^6$ kg/cm^2, $\sigma_0 = 2.10^3$ kg/cm^2, $u_{max} = 87\mu$, $u_{min} = 33\mu$ (corespunzînd unui ajustaj JE2/sc2);

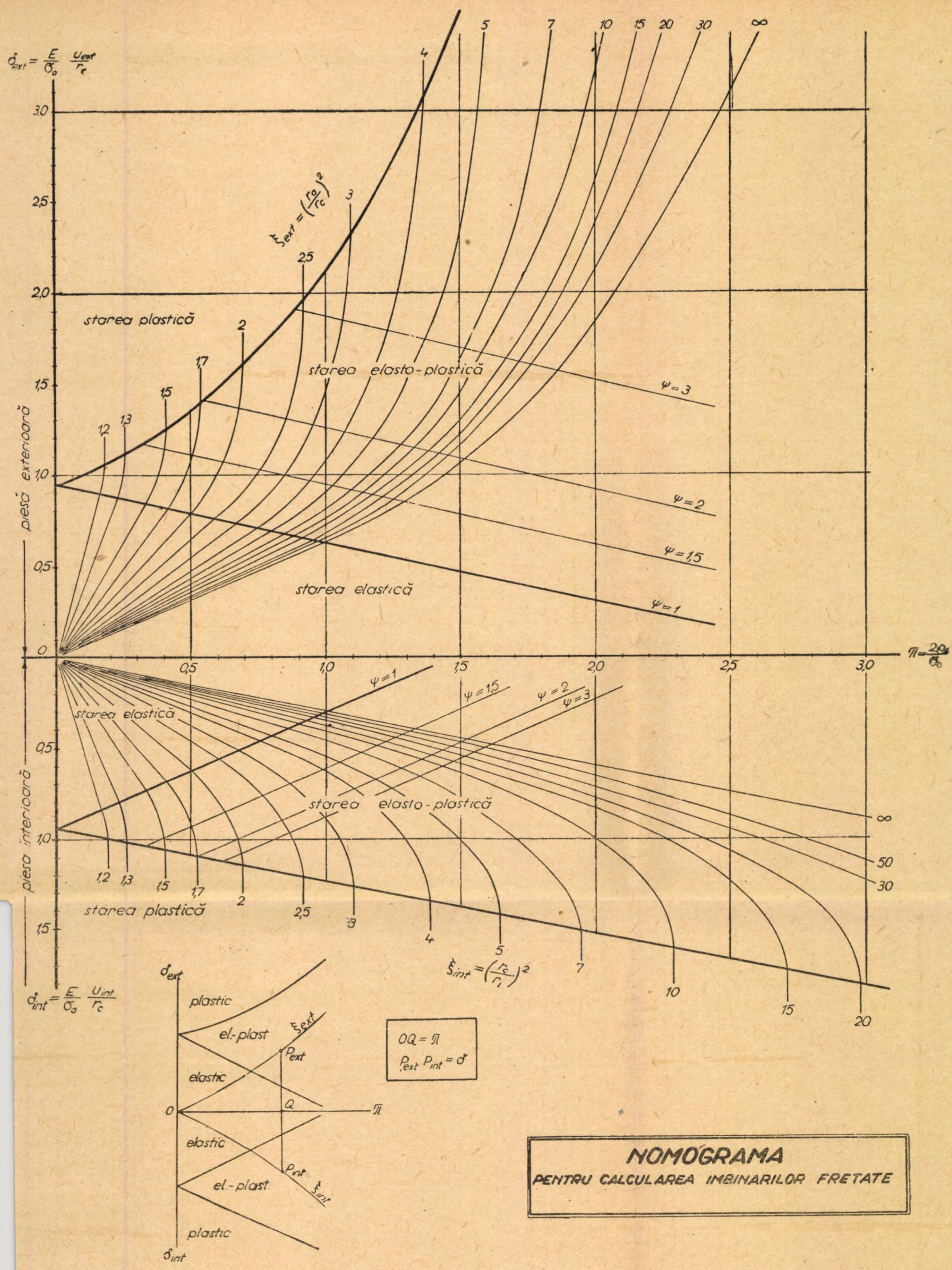
$\xi_{int} = \infty$, $\xi_{ext} = 3$, $\delta_{max} = 1,74$, $\delta_{min} = 0,66 \rightarrow \pi_{max} = 0,99$, $\pi_{min} = 0,47$, $p_{c\,max} = 990$ kg/cm^2, $p_{c\,min} = 470$ kg/cm^2.

Piesa interioară se află în starea elastică, iar piesa exterioară în starea elasto-plastică. Deoarece $\psi = 2,4$, construcţia este la limita admisibilităţii.

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТРУБ С ХОМУТИКОВЫМ СОЕДИНЕНИЕМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе применяется теория пластичности по А. А. Ильюшину к хомутиковым соединениям. Дается соотношение между зажимом (отрицательный зазор) обеих деталей и давлением на поверх-



NOMOGRAMA

PENTRU CALCULAREA IMBINARILOR FRETATE

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM • KÖZPONTI 1848

ность соприкосновения. Приводится номограмма для быстрого расчета соединения, включающая упругое, упруго-пластическое и пластическое состояния.

ÉTAT ÉLASTO-PLASTIQUE DANS LES TUYAUX FRETTÉS

RÉSUMÉ

L'auteur applique, dans le présent travail, la théorie de la plasticité, selon A. A. Iliouchine, pour les joints frettés. Il donne la relation entre le serrement (jeu négatif) des deux pièces et entre la pression sur la surface de contact. Il communique un nomogramme pour le calcul rapide du joint, qui comporte les états élastiques, élasto-plastiques et plastiques.

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Manualul inginerului mecanic.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1952, vol. III.
2. P. LEINWEBER, *Passung und Gesteltung.* J. Springer, Berlin, 1942.
3. A. A. ILIUŞIN, *Plasticinosti.* Gostehizdat, Moscova, 1948.
4. V. V. SOKOLOWSKI, *Teoria plasticităţii.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.
5. N. I. BEZUHOV, *Teoria elasticităţii şi plasticităţii.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.

TORSIUNEA ARBORELUI GOL CU CANELURI RADIALE EXTERIOARE SAU INTERIOARE

DE

V. MANEA

Într-o lucrare anterioară [1] am studiat problema torsiunii unui arbore cu secțiune plină, avînd caneluri radiale exterioare, cu ajutorul seriilor și prin împărțirea domeniului reprezentat de secțiunea transversală în subdomenii pentru care soluția problemei Dirichlet, cu aceeași condiție la limită, este cunoscută.

În același mod ne propunem, în lucrarea de față, să rezolvăm problema torsiunii unui arbore avînd secțiunea transversală ca în figurile 1 sau 2, ce reprezintă un domeniu cu conexiune dublă.

Prima figură corespunde arborelui cu o canelură radială exterioară, iar cea de-a doua, arborelui cu canelură radială interioară. În cele ce urmează vom rezolva în paralel problema torsiunii pentru acești arbori.

Rezolvarea acestei probleme, după cum se știe, revine la a determina o funcție $\psi(r, \theta)$, armonică în domeniul reprezentat de secțiunea transversală și satisfăcînd condiției la limită

$$\psi_C = \frac{r^2}{2} + C_j. \tag{1}$$

Constanta C_j are o valoare diferită pe fiecare din contururile ce mărginesc domeniul reprezentat de secțiunea transversală, una din ele putînd fi aleasă arbitrar.

Vom încerca o soluționare aproximativă cu ajutorul seriilor.

Se poate arăta că putem alege funcția de tensiune la torsiune astfel încît

$$\psi(r, \theta) = \psi_1 (r, \theta) \tag{2}$$

în interiorul dreptunghiului curbiliniu (m, n, p, q), pe care îl vom numi pe scurt domeniul D_1 și

$$\psi(r, \theta) = \psi_0(r, \theta) \tag{3}$$

în interiorul coroanei circulare de raze r_e și r_i, domeniu notat cu D_0. Funcțiile $\psi_1(r, \theta)$ și $\psi_0(r,\theta)$ trebuie să fie armonice.

În plus, funcția $\psi_1(r, \theta)$ satisface condiției (1) pe porțiunile libere ale conturului domeniului D_1, iar $\psi_0(r, \theta)$ satisface aceleiași condiții pe porțiunile libere ale domeniului D_0 (coroanei circulare).

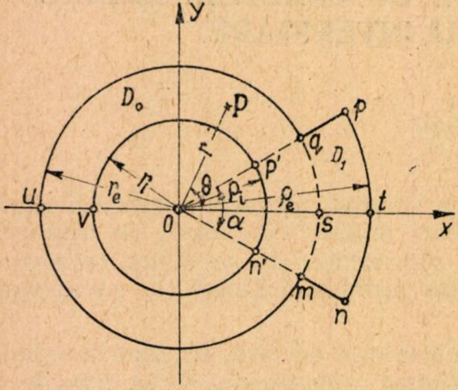


Fig. 1

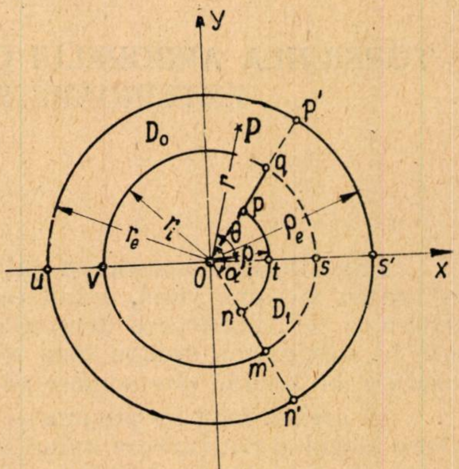


Fig. 2

Mai este necesar ca pe arcul comun (m, s, q) să avem satisfăcute condițiile

$$\psi_1(r_e, \theta) = \psi_0(r_e,\theta), \tag{4a}$$

$$\frac{\partial \psi_1(r_e, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial \psi_0(r_e, \theta)}{\partial r}, \tag{4b}$$

pentru arborele cu canelură exterioară, respectiv

$$\psi_1(r_i, \theta) = \psi_0(r_i, \theta), \tag{4'a}$$

$$\frac{\partial\psi_1(r_i, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial\psi_0(r_i, \theta)}{\partial r}, \tag{4'b}$$

pentru arborele cu canelură interioară.

Considerăm mai întîi o funcție armonică $\psi_{11}(r,\theta)$ care satisface condiției (1) pe porțiunile libere ale domeniului D_1 și este mărginită și continuă pe arcul comun (m, s, q).

Vom lua chiar funcția de tensiune la torsiune a dreptunghiului curbiliniu avînd raza exterioară ρ_e, raza interioară ρ_i și unghiul la centru α,

$$\psi_{11}(r,\ \theta) = \frac{\rho_e^2}{2} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left\{ B_n \left(\frac{r}{\rho_i} \right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}} + C_n \left(\frac{r}{\rho_e} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \right\} \cos \frac{n\pi}{\alpha}\, \theta + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\cos 2\,\theta}{\cos \alpha}, \tag{5}$$

care satisface condiției la limită $\psi_{11c} = \frac{r^2}{2}$. Sîntem conduși la determinarea coeficienților B_n și C_n sub forma

$$B_n = A_n \frac{k^2 - k^{\frac{n\pi}{\alpha}}}{1 - k^{2\frac{n\pi}{\alpha}}}, \tag{6}$$

$$C_n = A_n \frac{1 - k^{\frac{n\pi}{\alpha}+2}}{1 - k^{2\frac{n\pi}{\alpha}}}, \tag{7}$$

unde

$$k = \frac{\rho_i}{\rho_e}$$

iar

$$A_n = \frac{16\,\alpha^2}{\pi} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n\,[(n\pi)^2 - (2\alpha)^2]}.$$

În cazul din figura 1 $\rho_i = r_i$, iar în cel din figura 2 $\rho_e = r_e$.

Construim o funcție armonică $\psi_{01}(r, \theta)$ pentru domeniul D_0, rezolvînd o problemă Dirichlet pentru coroana circulară de rază exterioară r_e și rază interioară r_i cu condițiile la limită

$$\begin{aligned} &\psi_{01}(r_e,\ \theta) = \psi_{11}(r_e,\ \theta) && \text{pentru } -\alpha/_2 \leqslant \theta \leqslant \alpha/_2, \\ &\psi_{01}(r_e,\ \theta) = \frac{r_e^2}{2} && \text{pentru } \alpha/_2 \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \alpha/_2, \\ &\psi_{01}(r_i,\ \theta) = \frac{r_i^2}{2} + C_i && \text{pentru } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \end{aligned} \tag{8}$$

în cazul arborelui cu canelură exterioară, sau

$$\begin{aligned} &\psi_{01}(r_e,\ \theta) = \frac{r_e^2}{2} + C_e && \text{pentru } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ &\psi_{01}(r_i,\ \theta) = \psi_{11}(r_i,\ \theta) && \text{pentru } -\alpha/_2 \leqslant \theta \leqslant \alpha/_2, \\ &\psi_{01}(r_i,\ \theta) = \frac{r_i^2}{2} && \text{pentru } \alpha/_2 \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \alpha/_2, \end{aligned} \tag{9}$$

în cazul arborelui cu canelură interioară.

Constanta C_i sau C_e se determină din condiția ca conjugata armonică a funcției $\psi_{01}(r, \theta)$ să fie uniformă [2], condiție echivalentă cu

$$\int_0^{2\pi} \psi_{01}(r_e, \theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \psi_{01}(r_i, \theta)\, d\theta, \tag{10}$$

de unde, ținînd seama de (8),

$$C_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \psi_{11}(r_e, \theta)\, d\theta + \frac{r_e^2}{4\pi}(2\pi - \alpha) - \frac{r_i^2}{2}, \tag{11}$$

respectiv de (9)

$$C_e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \psi_{11}(r_i, \theta)\, d\theta + \frac{r_i^2}{4\pi}(2\pi - \alpha) - \frac{r_e^2}{2}. \tag{12}$$

Punînd

$$\psi_{01}(r, \theta) = \frac{r_e^2}{2} \left\{ \frac{D_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[D_m \left(\frac{r}{r_i}\right)^{-m} + E_m \left(\frac{r}{r_e}\right)^{m} \right] \cos m\theta \right\}, \tag{13}$$

sîntem conduși, în cazul canelurii exterioare, la determinarea coeficienților D_m și E_m sub forma

$$D_m \left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m + E_m = \frac{2}{\pi r_e^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \psi_{11}(r_e, \theta) \cos m\theta\, d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha/2}^{2\pi - \alpha/2} \cos m\theta\, d\theta, \tag{14a}$$

$$D_m + E_m \left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m = 0. \tag{14b}$$

Pentru $m = 0$ avem

$$D_0 = \frac{2}{\pi r_e^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \psi_{11}(r_e, \theta)\, d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha/2}^{2\pi - \alpha/2} d\theta.$$

În cazul canelurii interioare se obține, în mod similar,

$$D_m \left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m + E_m = 0, \tag{15a}$$

$$D_m + E_m \left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m = \frac{2}{\pi r_e^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \psi_{11}(r_i, \theta) \cos m\theta\, d\theta + \frac{r_i^2}{\pi r_e^2} \int_{\alpha/2}^{2\pi - \alpha/2} \cos m\theta\, d\theta, \tag{15b}$$

ar pentru $m = 0$,

$$D_0 = \frac{2}{\pi r_e^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \psi_{11}(r_i\ \theta)\, d\theta + \frac{r_i^2}{\pi r_e^2} \int_{\alpha/2}^{2\pi - \alpha/2} d\theta.$$

Introducînd în (14a) şi în (15b) expresia funcţiei $\psi_{11}(r_e, \theta)$, respectiv $\psi_{11}(r_i, \theta)$, conform cu (5), şi efectuînd integralele se obţine

$$D_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m + E_m = \frac{\rho_e^2}{r_e^2}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\left\{B_n\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} + C_n\left(\frac{r_e}{\rho_e}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\right\}K_{nm} + L_m, \tag{16}$$

respectiv

$$D_m + E_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\left\{B_n\left(\frac{\rho_i}{r_i}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} + C_n\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\right\}K_{nm} + \left(\frac{r_i}{r_e}\right)^2 L_m, \tag{17}$$

unde

$$K_{nm} = \frac{2\,n\alpha(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{m\alpha}{2}}{(n\pi)^2 - (m\alpha)^2}, \tag{18}$$

$$L_m = \frac{8}{\pi}\,\frac{\sin\frac{m\alpha}{2}}{(m^2-4)\,m} - \frac{4}{\pi}\,\frac{\operatorname{tg}\alpha\cos\frac{m\alpha}{2}}{m^2-4}, \tag{19}$$

$$L_0 = \frac{1}{\pi}(\operatorname{tg}\alpha + 2\,\pi - \alpha)\,;\; L_2 = \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\cos\alpha} - \sin\,\alpha\right).$$

Convergenţa seriei (5) şi a seriei (13) este asigurată întrucît avem aceeaşi situaţie ca în cazul arborelui canelat cu secţiune plină, tratat în [1].

Ţinînd seama de (6) şi (7), se poate arăta că în cazurile limită $\rho_e = r_e$, respectiv $\rho_i = r_i$ adică secţiunea transversală a arborelui se reduce la o coroană circulară. Se obţine pentru $m \neq 0$

$$D_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m + E_m = 0, \tag{16'}$$

respectiv

$$D_m + E_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m = 0, \tag{17'}$$

iar pentru $m = 0$

$$D_0 = 2,$$

respectiv

$$D_0 = 2\,\frac{r_i^2}{r_e^2}\,.$$

Funcţia $\psi_{01}(r, \theta)$, definită de (13), se reduce la o constantă, egală cu $\frac{r_e^2}{2}$ în primul caz şi cu $\frac{r_i^2}{2}$ în cel de-al doilea.

Aceasta depinde evident de modul cum s-au ales constantele C' în condiția la limită (1), sau, mai precis, în condițiile la limită (8), respectiv (9).

Cu ajutorul acestor funcții auxiliare vom construi funcțiile armonice $\psi_1(r, \theta)$ și $\psi_0(r, \theta)$, care intervin în (2) și (3).

Vom pune

$$\psi_1(r,\theta)=\psi_{11}(r,\theta)+\frac{r_e^2}{2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} F_n\left[\left(\frac{r}{r_e}\right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}}-\left(\frac{r}{\rho_e}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(\frac{r_e}{\rho_e}\right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right]\cos\frac{n\pi}{\alpha}\theta, \quad (20)$$

în cazul canelurii exterioare, respectiv

$$\psi_1(r,\theta)=\psi_{11}(r,\theta)+\frac{r_e^2}{2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} F_n\left[\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}-\left(\frac{r}{\rho_i}\right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\left(\frac{r_i}{\rho_i}\right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right]\cos\frac{n\pi}{\alpha}\theta, \quad (21)$$

în cazul canelurii interioare.

Termenul aditiv, atît din (20) cît și din (21), se anulează pe porțiunile libere ale domeniului D_1, astfel că și funcția $\psi_1(r,\theta)$ satisface condiției la limită (1).

Vom lua pentru funcția $\psi_0(r,\theta)$ o dezvoltare analoagă cu (13), adică

$$\psi_0(r,\theta)=\frac{r_e^2}{2}\left\{\frac{D_0'}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[D_m'\left(\frac{r}{r_i}\right)^{-m}+E_m\left(\frac{r}{r_e}\right)^{m}\right]\cos m\theta,\right. \quad (22)$$

ai cărei coeficienți vor diferi cu puțin de D_m și E_m, datorită procedeului urmat în rezolvarea problemei.

Condițiile la limită (8), respectiv (9), care au fost necesare pentru determinarea funcției $\psi_{01}(r,\theta)$, se completează cu condiția (4b), respectiv (4'b). Se cere, de asemenea, ca funcția $\psi_0(r, \theta)$ să satisfacă condiției (10).

Se poate arăta că seria (20), respectiv (21), cît și (22) sînt convergente.

În conformitate cu cele de pînă acum putem scrie relațiile

$$\psi_1(r_e,\theta)-\psi_{11}(r_e,\theta)=\frac{r_e^2}{2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}F_n q_n\cos\frac{n\pi}{\alpha}\theta, \quad (23a)$$

$$\psi_0(r_e,\theta)-\psi_{01}(r_e,\theta)=\frac{r_e^2}{2}\left\{\frac{d_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[d_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m+e_m\right]\cos m\theta\right\}, \quad (23b)$$

$$\frac{\partial\psi_1(r_e,\theta)}{\partial r}-\frac{\partial\psi_{11}(r_e,\theta)}{\partial r}=-\frac{r_e}{2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}nF_n\cdot r_n\cos\frac{n\pi}{\alpha}\theta, \quad (24a)$$

$$\frac{\partial\psi_0(r_e,\theta)}{\partial r}-\frac{\partial\psi_{01}(r_e,\theta)}{\partial r}=\frac{r_e}{2}\sum_{m=1}^{\infty}m\left[-d_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m+e_m\right]\cos m\theta \quad (24b)$$

valabile pentru $r = r_e$ și $-\alpha/2 < \theta < \alpha/2$.

Am notat mai sus

$$d_m = D'_m - D_m, \quad q_n = 1 - \left(\frac{r_e}{\rho_e}\right)^{2\frac{n\pi}{\alpha}}$$

$$e_m = E'_m - E_m, \quad r_n = \left[1 + \left(\frac{r_e}{\rho_e}\right)^{2\frac{n\pi}{\alpha}}\right]\frac{\pi}{\alpha}.$$

Scăzînd între ele primele relații (23) și la fel ultimele (24) și ținînd seama de condițiile de conjugare (4), se obține

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} F_n q_n \cos \frac{n\pi}{\alpha}\theta = \frac{d_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[d_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m + e_m\right]\cos m\theta, \tag{23'}$$

$$\frac{\partial\psi_{11}}{\partial r} - \frac{\partial\psi_{01}}{\partial r} = \frac{r_e}{2}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n F_n r_n \cos\frac{n\pi}{\alpha}\theta +$$

$$+ \frac{r_e}{2}\sum m\left[-d_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m + e_m\right]\cos m\,\theta. \tag{24'}$$

În general diferența

$$\frac{\partial\psi_{11}}{\partial r} - \frac{\partial\psi_{01}}{\partial r} = f(\theta)$$

este o funcție, care satisface condițiile lui Dirichlet și deci poate fi dezvoltată în serie Fourier convergentă, în intervalul $(-\alpha/_2, \alpha/_2)$, cu excepția capetelor intervalului în care poate deveni divergentă. Aceasta permite să afirmăm că seriile din (20) și (22) sînt absolut și uniform convergente în același interval. La fel se poate arăta și pentru seria din (21).

Reținînd numai primii k termeni din (20) sau (21), în baza condiției de conjugare, se obține

$$D'_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m + E'_m - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{2k-1} F_n\left[1 - \left(\frac{r_e}{\rho_e}\right)^{2\frac{n\pi}{\alpha}}\right]K_{nm} = D_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m + E_m, \tag{25a}$$

$$D'_m + E'_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m = 0, \tag{25b}$$

$$2\sum_{m=1}^{\infty}\left[-D'_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m + E'_m\right]\frac{m}{n}K_{nm} + F_n\left[1 + \left(\frac{r_e}{\rho_e}\right)^{2\frac{n\pi}{\alpha}}\right] =$$

$$= \frac{\rho_e^2}{r_e^2}\left[-B_n\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} + C_n\left(\frac{r_e}{\rho_e}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\right] + \frac{4\,K_{n2}}{n\cos\alpha}, \tag{25c}$$

în primul caz, respectiv

$$D'_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m + E'_m = 0, \tag{26a}$$

$$D'_m + E'_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{2k-1} F_n\left[1-\left(\frac{\rho_i}{r_i}\right)^{2\frac{n\pi}{\alpha}}\right] K_{nm} = D_m + E_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m, \tag{26b}$$

$$2\sum_{m=1}^{\infty}\left[-D'_m + E'_m\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^m\right]\frac{m}{n} K_{nm} + F_n\left[1+\left(\frac{\rho_i}{r_i}\right)^{2\frac{n\pi}{\alpha}}\right] =$$

$$=\left(\frac{\rho_e}{r_e}\right)^2\left[-B_n\left(\frac{\rho_i}{r_i}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} + C_n\left(\frac{r_i}{r_e}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\right] + \left(\frac{r_i}{r_c}\right)^2\frac{4\,K_{n2}}{n\cos\alpha} \tag{26c}$$

în cel de-al doilea caz.

Avem de rezolvat simultan trei sisteme infinite.

Substituind D'_m și E'_m din (a) și (b) în (c), atît în (25) cît și în (26) se obține un sistem de k ecuații cu k necunoscute F_n. După ce se determină valorile coeficienților F_n, se calculează coeficienții D'_m și E'_m, numărul lor depinzînd de gradul de aproximare dorit.

Din condiția (10) rezultă

$$C'_i = C_i + \frac{r_e^2}{2\pi}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{2k-1} F_n\left[1-\left(\frac{r_e}{\rho_e}\right)^{2\frac{n\pi}{\alpha}}\right]\frac{\alpha(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi}, \tag{27}$$

respectiv

$$C'_e = C_e + \frac{r_i^2}{2\pi}\sum_{n=1,3,5\dots}^{2k-1} F_n\left[1-\left(\frac{\rho_i}{r_i}\right)^{2\frac{n\pi}{\alpha}}\right]\frac{\alpha(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi}. \tag{28}$$

Funcțiile $\psi_1(r,\theta)$ și $\psi_0(r,\theta)$ sînt astfel complet determinate.

Eforturile de torsiune sînt date de formulele [3]

$$\tau_r = G\,\Theta\frac{\partial\psi}{r\,\partial\theta}, \qquad \tau_\theta = -G\,\Theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} - r\right), \tag{29}$$

unde funcția $\psi(r,\theta)$ se înlocuiește conform cu (2) sau (3), după cum punctul în care se calculează efortul se află în domeniul D_1 sau D_0.

În ceea ce privește rigiditatea la torsiune, trebuie să ținem seama că secțiunea transversală a arborelui este un domeniu cu conexiune dublă. Formula de calcul a acesteia este

$$K = 2\iint_{D_0+D_1}\left(\psi(r,\theta) - \frac{r^2}{2}\right) r\,dr\,d\theta + 2\,(C'_i S_i - C'_e S_e), \tag{30}$$

unde S_e și S_i reprezintă aria domeniului mărginit de conturul exterior, respectiv conturul interior al secțiunii transversale, iar C'_e și C'_i constante care au intervenit în condițiile la limită pentru funcția $\psi_0(r, \theta)$, ale căror valori sînt date de (27), respectiv (28). În cazul canelurii exterioare am ales $C'_e = 0$, iar în cazul canelurii interioare $C'_i = 0$.

Înlocuind în (30) funcția $\psi(r, \theta)$ conform cu (2) și (3) și efectuînd integralele, se obține pentru rigiditatea arborelui cu canelură exterioară

$$\begin{aligned} K = {} & \frac{\pi}{2} D'_0 \, r_e^2 \, (r_e^2 - r_i^2) - \frac{\pi}{2} (r_e^4 - r_i^4) + \\ & + \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2\rho_e^2 \alpha}{n\pi} \left\{ B_n \frac{\alpha r_i^2}{2\alpha - n\pi} \left[\left(\frac{\rho_e}{r_i} \right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}+2} - \left(\frac{r_e}{r_i} \right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}+2} \right] + \right. \\ & \left. + C_n \frac{\alpha \rho_e^2}{2\alpha + n\pi} \left[1 - \left(\frac{r_e}{\rho_e} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}+2} \right] \right\} + \\ & + \frac{\rho_e^4 - r_e^4}{4} (\mathrm{tg}\,\alpha - \alpha) + \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{2k-1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2 r_e^4 \alpha}{n\pi} F_n \left[\frac{\alpha}{2\alpha + n\pi} \left(\frac{r_e}{\rho_e} \right)^{\frac{2n\pi}{\alpha}} + \right. \\ & \left. + \frac{2n\pi}{(2\alpha)^2 - (n\pi)^2} \left(\frac{r_e}{\rho_e} \right)^{2\frac{n\pi}{\alpha}} - \frac{\alpha}{2\alpha - n\pi} \right] + 2\pi r_i^2 \, C'_i . \end{aligned} \tag{31}$$

În mod analog se obține în cazul canelurii interioare

$$\begin{aligned} K = {} & \frac{\pi}{2} D'_0 \, r_e^2 \, (r_e^2 - r_i^2) - \frac{\pi}{2} (r_e^4 - r_i^4) + \\ & + \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2 r_e^2 \alpha}{n\pi} \left\{ B_n \frac{\alpha \rho_i^2}{2\alpha - n\pi} \left[\left(\frac{r_i}{\rho_i} \right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}+2} - 1 \right] + \right. \\ & \left. + C_n \frac{\alpha r_e^2}{2\alpha + n\pi} \left[\left(\frac{r_i}{r_e} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}+2} - \left(\frac{\rho_i}{r_e} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}+2} \right] \right\} + \\ & + \frac{r_e^4 - \rho_i^4}{4} (\mathrm{tg}\,\alpha - \alpha) + r_e^2 \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{2k-1} \frac{2 r_i^2 \alpha}{n\pi} \left[\frac{\alpha}{n\pi - 2\alpha} \left(\frac{\rho_i}{r_i} \right)^{2\frac{n\pi}{\alpha}} + \right. \\ & \left. + \frac{2n\pi}{(2\alpha)^2 - (n\pi)^2} \left(\frac{\rho_i}{r_i} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}+2} + \frac{\alpha}{2\alpha + n\pi} \right] - 2\pi r_e^2 \, C'_e . \end{aligned} \tag{32}$$

Se observă că pentru calculul rigidității este necesar numai coeficientul D'_0 al dezvoltării (22); de asemenea, ne putem limita la primii coeficienți B_n, C_n și F_n, deoarece avem o convergență suficient de rapidă.

ARBORE CU MAI MULTE CANELURI

Ca și în [1] putem trata cazul cînd canelurile sînt dispuse neregulat și de mărimi neegale, atît exterioare cît și interioare.

Vom indica în cele ce urmează modul de rezolvare în cazul arborelui cu caneluri exterioare, de aceeași mărime, dispuse regulat (fig. 3). Cazul canelurilor interioare se rezolvă similar.

Dacă l este numărul canelurilor, α unghiul la centru corespunzător dreptunghiului curbiliniu dintre două caneluri exterioare consecutive, iar θ_i are semnificația din figura 3, avem

$$\psi_i(r, \theta) = \frac{\rho_e^2}{2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[B_n \left(\frac{r}{\rho_i}\right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}} + C_n \left(\frac{r}{\rho_e}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \right] \cos \frac{n\pi}{\alpha} \left(\theta - \theta_i - \frac{\alpha}{2}\right) +$$

$$+ \frac{r^2}{2} \cos 2 \left(\theta - \theta_i - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{r_e^2}{2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} F_n \left[\left(\frac{r}{r_e}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{r}{\rho_e}\right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \left(\frac{r_e}{\rho_e}\right)^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \right] \cos \frac{n\pi}{\alpha} \left(\theta - \theta_i - \frac{\alpha}{2}\right), \tag{33}$$

relație valabilă în domenil D_i $(i = 1, 2, \dots, l)$, respectiv

$$\psi_0(r, \theta) = \frac{r_e^2}{2} \left\{ \frac{D'_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[D'_{lm} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{-lm} + E_{lm} \left(\frac{r}{r_e}\right)^{lm} \right] \cos lm\, \theta \right. \tag{34}$$

pentru domeniul D_0.

Coeficienții din dezvoltările (33) și (34) se determină într-un mod analog ca în cazul unei singure caneluri, ținînd seama că perioada funcției $\psi_0(r, \theta)$ din (34) este egală cu $\frac{2\pi}{l}$.

Rigiditatea se obține efectuînd integrala din (30) extinsă la întreg domeniul reprezentat de secțiunea transversală (fig. 3). Datorită egalității și simetriei canelurilor, la rezultatul obținut prin integrarea pe domeniul D_0 se adaugă rezultatul integrării pe domeniul D_1 multiplicat cu l.

Ca o aplicație vom rezolva problema torsiunii unui arbore cu trei caneluri dispuse regulat și de aceeași mărime, a cărui secțiune transversală este reprezentată în figura 4, pentru care avem

$$\frac{r_i}{\rho_e} = \frac{1}{4}, \quad \frac{r_i}{r_e} = \frac{1}{3}, \quad \frac{r_e}{\rho_e} = \frac{3}{4}, \quad l = 3.$$

Am ales unghiul $\alpha = \frac{\pi}{3}$; unghiul la centru corespunzător unei caneluri l-am luat egal cu $\frac{\pi}{3}$. Rezultă că perioada funcției $\psi_0(r, \theta)$ este $T = \frac{2\pi}{3}$.

Se obține

$$\psi_{11}(r, \theta) = \frac{\rho_e^2}{2}\left[-0{,}0485\left(\frac{r}{r_i}\right)^{-3} - 1{,}015\left(\frac{r}{r_e}\right)^{3}\right]\cos 3\theta + r^2 \cos 2\theta,$$

ceilalți termeni fiind neglijabili.

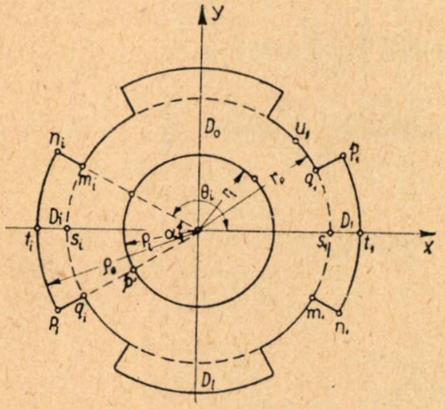


Fig. 3

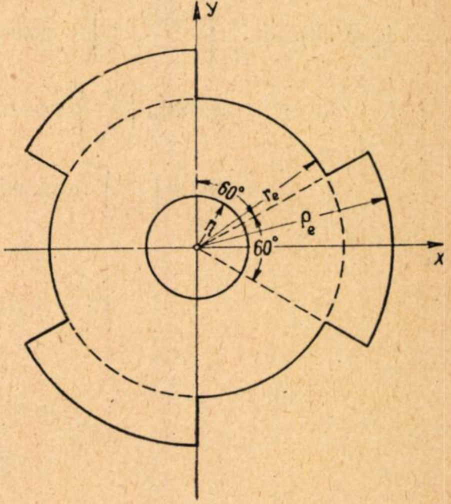


Fig. 4

Pentru determinarea coeficienților D_{lm} și E_{lm} se folosește formula (16), în care membrul doi se înmulțește cu numărul canelurilor $l = 3$ și m se înlocuiește cu lm. Se obține astfel

$$\psi_{01}(r, \theta) = \frac{r_e^2}{2}\left\{\frac{2{,}125}{2} + \left[-0{,}00415\left(\frac{r}{r_i}\right)^{-3} + 0{,}112\left(\frac{r}{r_e}\right)^{3}\right]\cos 3\theta + \right.$$

$$+ 0{,}039\left(\frac{r}{r_e}\right)^{6}\cos 6\theta - 0{,}011\left(\frac{r}{r_e}\right)^{9}\cos 9\theta - 0{,}0131\left(\frac{r}{r_e}\right)^{12}\cos 12\theta +$$

$$+ 0{,}0023\left(\frac{r}{r_e}\right)^{15}\cos 15\,\theta.$$

Din condiția de uniformitate (10), în care intervalul de integrare este $\frac{2\pi}{3}$, se obține

$$C_i = 0{,}541\, r_e^2 - 0{,}5\, r_i^2.$$

Pentru construirea funcțiilor $\psi_1(r, \theta)$ și $\psi_0(r, \theta)$ se folosesc sistemele de ecuații (25), în care m se înlocuiește cu $lm = 3m$, iar în (25a) suma se înmulțește cu $l = 3$.

Se obține în cele din urmă

$$\psi_1(r, \theta) = \psi_{11}(r, \theta) + \frac{r_e^2}{2}\left\{0{,}364\left[\left(\frac{r}{r_e}\right)^{-3} - \left(\frac{r}{\rho_e}\right)^3\left(\frac{r_e}{\rho_e}\right)^3\right]\cos 3\theta - 0{,}0415\left[\left(\frac{r}{r_e}\right)^{-9} - \left(\frac{r}{\rho_e}\right)^9\left(\frac{r_e}{\rho_e}\right)^9\right]\cos 9\theta\right\},$$

$$\psi_0(r, \theta) = \frac{r_e^2}{2}\left\{\frac{2{,}337}{2} + \left[-0{,}00967\left(\frac{r}{r_i}\right)^{-3} + 0{,}261\left(\frac{r}{r_e}\right)^3\right]\cos 3\theta + 0{,}0865\left(\frac{r}{r_e}\right)^6\cos 6\theta - 0{,}031\left(\frac{r}{r_e}\right)^9\cos 9\theta - 0{,}0379\left(\frac{r}{r_e}\right)^{12}\cos 12\theta + 0{,}0023\left(\frac{r}{r_e}\right)^{15}\cos 15\theta\right\}$$

și

$$C_i' = 0{,}581\, r_e^2 - 0{,}5\, r_i^2 .$$

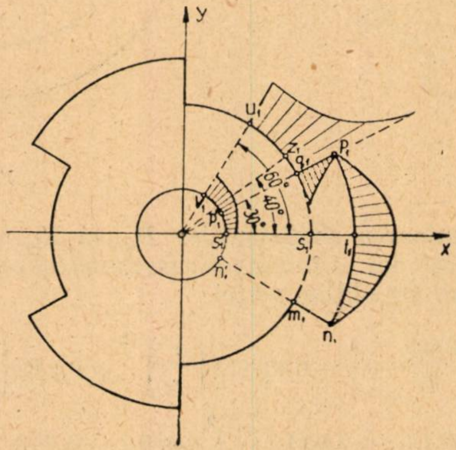


Fig. 5

Cu ajutorul acestor funcții se pot calcula eforturile în orice punct al secțiunii transversale a arborelui, precum și rigiditatea acestuia. În figura 5 se dă distribuția tensiunilor pe conturul interior și exterior. Se observă concentrarea efortului $\tau_{\theta 0}$, ce are loc în punctele (m_1) și (q_1). După cum am arătat în [1], aceste puncte sînt puncte de divergență ale seriei care definește efortul $\tau_{\theta 0}$.

Pentru rigiditatea acestui arbore se obţine

$$K = 2{,}235\ r_e^4.$$

De asemenea, au fost calculate valorile tensiunilor în cîteva puncte pe contur, indicate în figura 5 :

$$\tau_{\theta 1} = 0{,}456\,\frac{M_t}{r_e^3} \quad \text{în punctul} \quad t_1\,(\rho_e,\ 0),$$

$$\tau_{r1} = 0{,}35\,\frac{M_t}{r_e^3} \quad ,, \quad ,, \quad q_1\left(r_e, \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\tau_{\theta 0} = \infty \quad ,, \quad ,, \quad q_1\left(r_e, \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\tau_{\theta 0} = 0{,}695\,\frac{M_t}{r_e^3} \quad ,, \quad ,, \quad z_1\left(r_e, \frac{2}{9}\pi\right),$$

$$\tau_{\theta 0} = 0{,}521\,\frac{M_t}{r_e^3} \quad ,, \quad ,, \quad u_1, \left(r_e, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\tau_{\theta 0} = 0{,}11\,\frac{M_t}{r_e^3} \quad ,, \quad ,, \quad s'\,(r_i,\ 0),$$

$$\tau_{\theta 0} = 0{,}15\,\frac{M_t}{r_e^3} \quad ,, \quad ,, \quad p_1'\left(r_i, \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\tau_{\theta 0} = 0{,}187\,\frac{M_t}{r_e^3} \quad ,, \quad ,, \quad v_1\left(r_i, \frac{\pi}{6}\right).$$

M_t este momentul de torsiune aplicat la capătul arborelui.

În acest mod se poate rezolva suficient de satisfăcător problema torsiunii arborilor canelaţi, exterior sau interior, sau a diferitelor cuplaje etc., a căror întrebuinţare largă în tehnică justifică încercările de rezolvare a acestei probleme.

Primită la redacţie la 27 martie 1958.

КРУЧЕНИЕ ПУСТОТЕЛОГО ВАЛА С ВНУТРЕННИМИ ИЛИ НАРУЖНЫМИ РАДИАЛЬНЫМИ ШЛИЦАМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Объектом настоящей работы является решение задачи кручения пустотелого вала с внутренними или наружными радиальными шлицами при помощи бесконечных рядов и систем.

Результаты, определяющие жесткость на кручение и распределение напряжений, могут быть полезными при расчете валов и соединений этого типа.

TORSION DE L'ARBRE CREUX À CANNELURES RADIALES EXTÉRIEURES OU INTÉRIEURES

RÉSUMÉ

L'auteur se propose, dans ce travail, de résoudre à l'aide des séries et des systèmes infinis, le problème de la torsion d'un arbore creux, ayant des cannelures extérieures ou intérieures.

Les résultats sont utiles au calcul des arbres ou accouplements semblables, qu'on rencontre couramment en pratique ; on détermine ainsi la rigidité à la torsion ainsi que la distribution des tensions.

BIBLIOGRAFIE

1. V. MANEA, *Torsiunea arborelui cu caneluri radiale exterioare.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**/*2*, 423 (1958).
2. C. IACOB, *Introducere matematică în mecanica fluidelor*, Ed. Acad. R. P. R., București, 1954.
3. А. Н. ДИННИК, Продольный изгиб-кручение. Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1955.

CALCULUL BARAJELOR ARCUITE PRIN METODA REȚELELOR *)

DE

RADU PRIȘCU și MIHAI CONSTANTINESCU

1. INTRODUCERE

Cele trei grupe în care se pot împărți metodele de calcul ale barajelor arcuite, funcție de modul în care au evoluat și de bazele lor teoretice, sînt cunoscute din literatură [1]. Trecînd peste metodele din prima grupă, care consideră barajul constituit dintr-o serie de arce orizontale suprapuse care pot acționa independent, și peste cele din a doua grupă, în care schema statică a barajului constă dintr-o rețea de arce orizontale și de console verticale, metodele din a treia grupă consideră barajul ca o structură sveltă, continuă, tridimensională. Apropiindu-se în cea mai mare măsură de modul în care acționează din punct de vedere static un baraj arcuit, metodele din a treia grupă au în același timp un caracter mai riguros, ele bazîndu-se pe teoria plăcilor curbe. La integrarea ecuațiilor diferențiale ale acestor structuri se întîmpină însă dificultăți mari de ordin matematic, legate de forma văii barate și a suprafeței mediane a barajelor, de variația grosimilor și a razelor de curbură — greu de exprimat pe cale analitică — și, în sfîrșit, de condițiile de rezemare, atît de complicate. Deși pînă în prezent nu s-au rezolvat decît unele cazuri particulare (H. M. Westergaard, F. Tölke, J. Lombardi), este posibil ca aceste metode să se dezvolte mult în viitor.

★

În lucrarea de față se expune o metodă de calcul care pornește de la teoria plăcilor curbe, transformînd ecuațiile diferențiale în ecuații cu diferențe finite. Prin aplicarea acestor ecuații în nodurile unei rețele alese

---

*) Sub o formă mai restrînsă, această lucrare face obiectul unei comunicări (nr. 12) la Congresul al VI-lea al Marilor Baraje — New York, 1958.

corespunzător, se obţine un sistem final de n ecuaţii liniare cu n necunoscute. Aceste necunoscute, care nu reprezintă decît deplasările radiale şi tangenţiale ale suprafeţei mediane a barajului în nodurile reţelei, se determină pe cale directă, prin rezolvarea sistemului de ecuaţii. La rîndul lor, solicitările şi eforturile care acţionează în corpul barajului se pot calcula funcţie de aceste deplasări, prin intermediul unor relaţii scrise tot prin diferenţe finite. Procedînd în acest mod, dificultăţile de integrare amintite mai sus dispar, iar exactitatea rezultatelor depinde în mare măsură de desimea reţelei alese.

Consideraţiile care urmează s-au făcut plecînd de la ecuaţiile diferenţiale ale plăcilor curbe, elaborate de A. E. H. Love [2] şi W. Flügge [3], prezentate şi apoi simplificate în diverse etape în interesanta lucrare a lui J. Lombardi [4]. Aceste ecuaţii, care exprimă comportarea simultană a unui baraj ca membrană (prin transmiterea solicitărilor axiale) şi ca placă (prin transmiterea solicitărilor de încovoiere şi torsiune), se referă la baraje svelte, cu raportul între raza de curbură şi grosimea medie mai mare ca 5. Această delimitare nu este însă rigidă şi, în consecinţă, ecuaţiile în cauză pot fi aplicate, cu oarecare aproximaţie, şi pentru calculul unor baraje mai groase. Se poate afirma că, faţă de dimensiunile barajelor arcuite moderne, domeniul de aplicare al acestei teorii este destul de larg.

Mai este de remarcat faptul că, deşi ecuaţiile de bază ce se vor dezvolta prin diferenţe finite se referă la structuri cilindrice, cu curbura constantă, ele se pot aplica cu suficientă exactitate şi la structuri cu curbura uşor variabilă [4], [5]. Aplicarea este posibilă întrucît ecuaţiile cu diferenţe finite se scriu succesiv în diferitele noduri ale reţelei, ţinînd seama de caracteristicile geometrice locale, iar integrarea se face pe cale numerică şi nu analitică. În acest caz, aproximaţia metodei este cu atît mai redusă cu cît variaţia curburii este mai lentă şi pasul reţelei mai mic. Dacă, în numeroase cazuri practice, prima condiţie se îndeplineşte de la sine prin modul în care se trasează un baraj arcuit, cea de-a doua nu depinde decît de calculator.

2. IPOTEZE ŞI ECUAŢII DE BAZĂ

Ipotezele care stau la baza ecuaţiilor generale ale plăcilor curbe de grosime medie, deduse de Love şi Flügge, sînt cunoscute. Ele presupun printre altele că comportarea plăcilor curbe este elastică, că deformaţiile sînt mici în raport cu grosimile şi cu razele de curbură şi că forţele tăietoare provoacă deformaţii neglijabile.

Referindu-se la plăcile cilindrice, Lombardi simplifică ecuaţiile citate, într-o a treia fază, admiţînd că :

— efectul contracţiei laterale se poate neglija (pentru beton coeficientul lui Poisson fiind mai mic decît 1/6),

— deplasările verticale sînt reduse în cazul unui baraj arcuit şi se pot neglija,

— grosimea barajului nu variază în sens orizontal.

În aceste condiții, expresiile solicitărilor specifice axiale, de alunecare și ale momentelor încovoietoare și de torsiune, devin

$$n_x = -\frac{K}{r} w'', \quad (1a) \qquad m_x = K w'', \quad (1e)$$

$$n_y = D\left(v^{\cdot} + \frac{w}{r}\right) + \frac{K}{r} w^{\cdot\cdot}, \quad (1b) \qquad m_y = K w^{\cdot\cdot} + \frac{K}{r^2} w, \quad (1f)$$

$$n_{xy} = \frac{D}{2} v' - \frac{K}{2r} w'^{\cdot}, \quad (1c) \qquad m_{xy} = K w'^{\cdot}, \quad (1g)$$

$$n_{yx} = \frac{D}{2} v' + \frac{K}{2r} w'^{\cdot}, \quad (1d) \qquad m_{yx} = K w'^{\cdot}. \quad (1h)$$

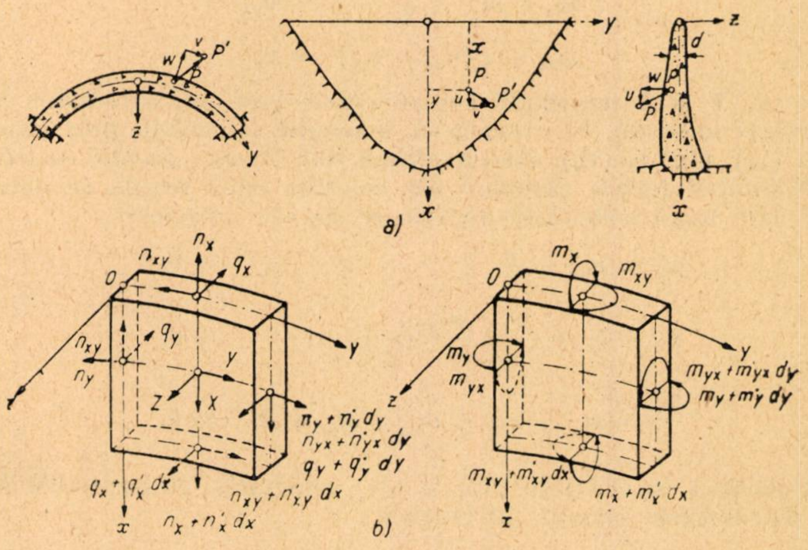

w
v
P'
P
z
y
x
P
y
u
P'
v
a)
x
z
d
w
u
P
P'
x
n_x
n_{xy}
q_x
0
q_y
n_{xy}
n_y
y
Z
X
y
$n_y + n_y^{\cdot} dy$
$n_{yx} + n_{yx}^{\cdot} dy$
$q_y + q_y^{\cdot} dy$
$q_x + q_x' dx$
$n_{xy} + n_{xy}' dx$
x
$n_x + n_x' dx$
b)
m_x
m_{xy}
0
m_y
m_{yx}
z
y
$m_{yx} + m_{yx}^{\cdot} dy$
$m_y + m_y^{\cdot} dy$
$m_{xy} + m_{xy}' dx$
$m_x + m_x' dx$
x

Fig. 1. — *a*) sistemul de axe admis, *b*) solicitările care acționează asupra unui element desprins din corpul barajului.

În aceste relații s-a notat (fig. 1*a*) :

w = deplasarea radială, pozitivă cînd se produce spre amonte,

v = deplasarea tangențială,

r = raza de curbură,

d = grosimea barajului la o cotă oarecare x,

D = Ed, rigiditatea axială,

K = $\frac{1}{12} Ed^3$, rigiditatea la încovoiere,

$\frac{\partial(\,)}{\partial x}$ = $(\,)'$ derivată după Ox,

$\frac{\partial(\,)}{\partial y}$ = $(\,)^{\cdot}$ derivată după Oy.

Scriind echilibrul forțelor și momentelor care acționează asupra unui element desprins din corpul barajului (fig. 1*b*) se obțin relațiile

$$
\begin{aligned}
&n'_x + n^{\cdot}_{yx} + X &&= 0,\\
&n'_{xy} + n^{\cdot}_y - \frac{q_y}{r} + Y &&= 0,\\
&q'_x + q^{\cdot}_y + \frac{n_y}{r} + Z &&= 0,\\
&m'_{xy} + m^{\cdot}_y - q_y &&= 0,\\
&m'_x + m^{\cdot}_{yx} - q_x &&= 0,\\
&m_{yx} + r\,(n_{xy} - n_{yx}) &&= 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

în care X, Y și Z reprezintă componentele presiunii exterioare, reduse la suprafața mediană. Se observă că, înlocuind solicitările prin expresiile lor din (1c), (1d) și (1h), relația ultimă din (2) este identic satisfăcută.

Eliminînd forțele tăietoare din celelalte cinci relații, se obțin trei ecuații care leagă solicitările exterioare de cele interioare,

$$n'_x + n^{\cdot}_{yx} + X = 0, \tag{3a}$$

$$n^{\cdot}_y + n'_{xy} - \frac{m^{\cdot}_y + m'_{xy}}{r} + Y = 0, \tag{3b}$$

$$\frac{n_y}{r} + m^{\cdot\cdot}_y + m''_x + m'^{\cdot}_{xy} + m'^{\cdot}_{yx} + Z = 0. \tag{3c}$$

Înlocuind în ecuațiile (3b) și (3c) solicitările cu expresiile lor, se obțin următoarele ecuații diferențiale :

$$Dv^{\cdot\cdot} + \frac{D}{r}w^{\cdot} + \frac{(Dv')'}{2} - \frac{3\,(Kw'^{\cdot})'}{2\,r} + Y = 0, \tag{4a}$$

$$\frac{D}{r}v^{\cdot} + \frac{D}{r^2}w + \frac{2K}{r^2}w^{\cdot\cdot} + Kw^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + 2\,(Kw'^{\cdot})'^{\cdot} + (Kw'')'' + Z = 0. \tag{4b}$$

Analizînd ecuația (4b) se observă că presiunea exterioară Z este echilibrată de grupul de termeni

$$\frac{D}{r}v^{\cdot} + \frac{D}{r^2}w + \frac{2K}{r^2}w^{\cdot\cdot},$$

care reprezintă acțiunea de membrană, precum și de grupul

$$Kw^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + 2\,(Kw'^{\cdot})'^{\cdot} + (Kw'')'',$$

care reprezintă respectiv încovoierea în sens orizontal, torsiunea și încovoierea în sens vertical, deci în ansamblu acțiunea de placă.

3. ECUAŢII CU DIFERENŢE FINITE PENTRU BARAJE CU CURBURA CONSTANTĂ SAU LENT VARIABILĂ

Pentru transformarea ecuaţiilor diferenţiale în ecuaţii cu diferenţe finite , se împarte suprafaţa mediană a barajului arcuit, presupusă cilindrică, într-o reţea ortogonală. Pasul reţelei se admite constant după verticală şi egal cu o cotă parte din înălţimea maximă de calcul $h = H/n$. Pentru a corespunde celor mai variate situaţii practice, pasul după orizontală se consideră variabil, conform schemei din figura 2. Deplasarea radială din nodul N, spre exemplu, se va nota cu w_i^c, indicele inferior referindu-se la poziţia după verticală, iar cel superior la poziţia după orizontală.

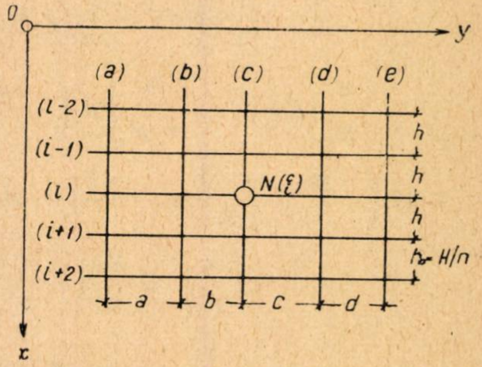


Fig. 2 — Schema reţelei de calcul, cu pasul constant după verticală şi variabil după orizontală.

Înlocuind derivatele din relaţiile (1) prin expresiile corespunzătoare cu diferenţe finite, solicitările specifice din nodul N se pot scrie sub forma

$$n_x = -\frac{E\,I_i}{r_i\,h^2}\,(w_{i-1}^c - 2w_i^c + w_{i+1}^c),$$

$$n_y = Ed_i\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{v_i^b}{b} + \frac{c-b}{bc}\,v_i^c + \frac{v_i^d}{c}\right) + \frac{w_i^c}{r_i}\right] + \frac{2\,EI_i}{r_i\,(b+c)}\left(\frac{w_i^b}{b} - \frac{b+c}{b\,c}w_i^c + \frac{w_i^d}{c}\right),$$

$$n_{xy} = \frac{Ed_i}{4h}\,(-v_{i-1}^c + v_{i+1}^c) - \frac{m_{xy}}{2r_i},$$

$$n_{yx} = \frac{Ed_i}{4h}\,(-v_{i-1}^c + v_{i+1}^c) + \frac{m_{xy}}{2r_i}, \tag{5}$$

$$m_x = \frac{EI_i}{h^2}\,(w_{i-1}^c - 2w_i^c + w_{i+1}^c),$$

$$m_y = \frac{2\,EI_i}{b+c}\left(\frac{w_i^b}{b} - \frac{b+c}{bc}w_i^c + \frac{w_i^d}{c} + \frac{b+c}{2\,r_i^2}\,w_i^c\right),$$

$$m_{xy} = \frac{EI_i}{4h}\left[\frac{w_{i-1}^b - w_{i+1}^b}{b} + \frac{c-b}{bc}\,(w_{i-1}^c - w_{i+1}^c) - \frac{w_{i-1}^d - w_{i+1}^d}{c}\right],$$

$$m_{yx} = m_{xy}.$$

Pentru determinarea deplasărilor radiale şi tangenţiale, se vor aplica în nodurile reţelei ecuaţiile (4a) şi (4b). În vederea transformării lor, se dezvoltă termenii componenţi prin diferenţe finite, după cum urmează :

$$Dv^{\cdot\cdot} = \frac{2\,Ed_i}{b+c}\left(\frac{v_i^b}{b} - \frac{b+c}{bc}\,v_i^c + \frac{v_i^d}{c}\right),$$

$$\frac{1}{r}\,Dw^{\cdot} = \frac{Ed_i}{2r_i}\left(-\frac{w_i^b}{b} + \frac{c-b}{bc}\,w_i^c + \frac{w_i^d}{c}\right),$$

$$\frac{1}{2}\,(Dv')' = \frac{E}{2h^2}\,(\alpha_i\,v_{i-1}^c - 2\,d_i v_i^c + \beta_i\,v_{i+1}^c),$$

$$\frac{3}{2r}\,(Kw'^{\cdot})' = \frac{3E}{4r_i\,h^2}\left[A_i\left(-\frac{w_{i-1}^b}{b} + \frac{c-b}{bc}\,w_{i-1}^c + \frac{w_{i-1}^d}{c}\right) -\right.$$

$$\left. -2I_i\left(-\frac{w_i^b}{b} + \frac{c-b}{bc}\,w_i^c + \frac{w_i^d}{c}\right) + B_i\left(-\frac{w_{i+1}^b}{b} + \frac{c-b}{bc}\,w_{i+1}^c + \frac{w_{i+1}^d}{c}\right)\right],$$

$$\frac{D}{r}\,v^{\cdot} = \frac{Ed_i}{2r_i}\left(-\frac{v_i^b}{b} + \frac{c-b}{bc}\,v_i^c + \frac{v_i^d}{c}\right),$$

$$\frac{D}{r^2}\,w = \frac{Ed_i}{r_i^2}\,w_i^c,$$

$$\frac{2K}{r^2}\,w^{\cdot\cdot} = \frac{4\,EI_i}{r_i^2\,(b+c)}\left(\frac{w_i^b}{b} - \frac{b+c}{bc}\,w_i^c + \frac{w_i^d}{c}\right),$$

$$Kw^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{4\,EI_i}{b+c}\left[\frac{1}{ab\,(a+b)}\,w_i^a - \frac{a+c}{a\,b^2c}\,w_i^b +\right.$$

$$\left. + \frac{b^2(a+b) + (a+b)(b+c)(c+d) + c^2(c+d)}{b^2\,c^2\,(a+b)\,(c+d)}\,w_i^c - \frac{b+d}{b\,c^2\,d}\,w_i^d + \frac{1}{c\,d\,(c+d)}\,w_i^e\right],$$

$$2\,(Kw'^{\cdot})'^{\cdot} = \frac{4\,E}{h^2\,(b+c)}\left[A_i\left(\frac{w_{i-1}^b}{b} - \frac{b+c}{bc}\,w_{i-1}^c + \frac{w_{i-1}^d}{c}\right) -\right.$$

$$\left. -2I_i\left(\frac{w_i^b}{b} - \frac{b+c}{bc}\,w_i^c + \frac{w_i^d}{c}\right) + B_i\left(\frac{w_{i+1}^b}{b} - \frac{b+c}{bc}\,w_{i+1}^c + \frac{w_{i+1}^d}{c}\right)\right],$$

$$(Kw'')'' = \frac{E}{h^4}\,[I_{i-1}\,w_{i-2}^c - 2\,(I_{i-1} + I_i)\,w_{i-1}^c + (I_{i-1} + 4\,I_i +$$

$$+ I_{i+1})\,w_i^c - 2\,(I_i + I_{i+1})\,w_{i+1}^c + I_{i+1}\,w_{i+2}^c],$$

în care s-a notat

$$4\alpha_i = d_{i-1} + 4d_i - d_{i+1}, \qquad 4\,A_i = I_{i-1} + 4\,I_i - I_{i+1},$$

$$4\beta_i = -d_{i-1} + 4d_i + d_{i+1}, \qquad 4\,B_i = -\,I_{i-1} + 4\,I_i + I_{i+1}.$$

Ținînd seama că componentele forței exterioare sînt $Y = 0$ și $Z = p$, ecuațiile (4) iau forma finală

$$\begin{aligned}
&\frac{4\,h^2 d_i r_i}{b(b+c)}\,v_i^b + \alpha_i r_i v_{i-1} - 2\left(1 + \frac{2\,h^2}{bc}\right) d_i r_i v_i^c + \beta_i r_i' v_{i+1}^c + \frac{4\,h^2 d_i r_i}{c\,(b+c)}\,v_i^d - \\
&\quad - \frac{3\,(c-b)\,A_i}{2\,bc}\,w_{i-1}^c + \frac{(c-b)\,C_i}{bc}\,w_i^c - \frac{3(c-b)B_i}{2\,bc}\,w_{i+1}^c + \\
&\quad + \frac{3A_i}{2b}\,w_{i-1}^b - \frac{C_i}{b}\,w_i^b + \frac{3B_i}{2b}\,w_{i+1}^b - \frac{3A_i}{2c}\,w_{i-1}^d + \frac{C_i}{c}\,w_i^d - \frac{3B_i}{2c}\,w_{i+1}^d = 0,
\end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{h^2 d_i}{2\,br_i}\,v_i^b + \frac{(c-b)\,h^2 d_i}{2b\,cr_i}\,v^c + \frac{h^2 d_i}{2\,cr_i}\,v_i^d + \\
&+ \frac{I_{i-1}}{h^2}\,w_{i-2}^c - 4\left(\frac{A_i}{bc} + \frac{M_i}{h^2}\right) w_{i-1}^c - 4\left(\frac{B_i}{bc} + \frac{N_i}{h^2}\right) w_{i+1}^c + \frac{I_{i+1}}{h^2}\,w_{i+2}^c + \\
&+ \left[\frac{h^2 d_i}{r_i^2} + \frac{4\rho_i I_i}{bc} + \frac{4h^2 I_i}{b^2\,c^2} \cdot \frac{b^2\,(a+b) + (a+b)\,(b+c)\,(c+d) + c^2\,(c+d)}{(a+b)\,(b+c)\,(c+d)} + \frac{S_i}{h^2}\right] w_i^c + \\
&\quad + \frac{4\,A_i}{b\,(b+c)}\,w_{i-1}^b - \frac{4\,I_i}{b\,(b+c)}\left(\rho_i + \frac{a+c}{a\,b\,c}\,h^2\right) w_i^b + \frac{4\,B_i}{b\,(b+c)}\,w_{i+1}^b + \\
&\quad + \frac{4\,A_i}{c\,(b+c)}\,w_{i-1}^d - \frac{4\,I_i}{c\,(b+c)}\left(\rho_i + \frac{b+d}{b\,c\,d}\,h^2\right) w_i^d + \frac{4\,B_i}{c\,(b+c)}\,w_{i+1}^d + \\
&\qquad + \frac{4h^2\,I_i}{ab\,(a+b)\,(b+c)}\,w_i^a + \frac{4h^2\,I_i}{cd(c+d)\,(b+c)}\,w_i^e = -\frac{p_i\,h^2}{E},
\end{aligned} \tag{6b}$$

în care s-a notat

$$C_i = 3I_i + h^2\,d_i, \quad S_i = I_{i-1} + 4I_i + I_{i+1},$$

$$2\,M_i = I_{i-1} + I_i, \qquad \rho_i = 2 - \frac{h^2}{r_i^2}.$$

$$2N_i = I_i + I_{i+1},$$

Modul în care intervin deplasările din jurul nodului $N\,\binom{c}{i}$ în ecuațiile (6) este indicat în figurile 3*a* și 3*b*, cu cercuri pentru deplasările radiale și cu puncte pline pentru cele tangențiale.

În cazul în care pasul orizontal este constant și egal cu $l(a = b = c = d = \ldots = l)$, ecuațiile (6) se simplifică, ajungînd la forma

$$\frac{2h^2}{l} d_i r_i v_i^b + \alpha_i r_i l v_{i-1}^c - 2\left(l + \frac{2h^2}{l}\right) d_i r_i v_i^c + \beta_i r_i l v_{i+1}^c + \frac{2h^2}{l} d_i r_i v_i^d +$$

$$+ \frac{3}{2} A_i w_{i-1}^b - C_i w_i^b + \frac{3}{2} B_i w_{i+1}^b -$$

$$- \frac{3}{2} A_i w_{i-1}^d + C_i w_i^d - \frac{3}{2} B_i w_{i+1}^d = 0, \qquad (7a)$$

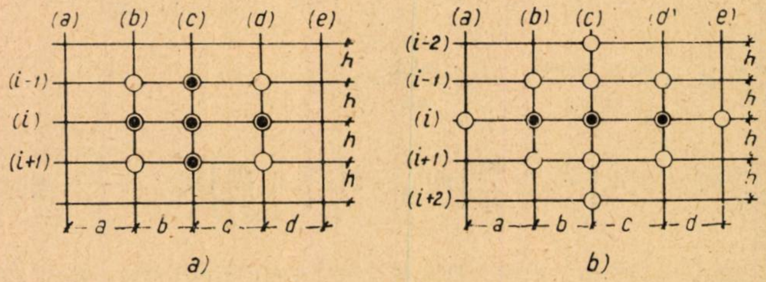


Fig. 3. — Deplasările radiale w (cercuri) și tangențiale v (puncte pline) care intervin în jurul nodului $\left(\begin{smallmatrix} c \\ i \end{smallmatrix}\right)$: a) din ecuația (6a), 9 deplasări radiale și 5 tangențiale; b) din ecuația (6b), 13 deplasări radiale și 3 tangențiale.

$$- \frac{h^2 d_i}{2l r_i} v_i^b + \frac{h^2 d_i}{2l r_i} v_i^d + \frac{I_{i-1}}{h^2} w_{i-2}^c - 4\left(\frac{A_i}{l^2} + \frac{M_i}{h^2}\right) w_{i-1}^c +$$

$$+ \left(\frac{h^2 d_i}{r_i^2} + \frac{4\rho_i I_i}{l^2} + \frac{6h^2 I_i}{l^4} + \frac{S_i}{h^2}\right) w_i^c - 4\left(\frac{B_i}{l^2} + \frac{N_i}{h^2}\right) w_{i+1}^c + \frac{I_{i+1}}{h^2} w_{i+2}^c +$$

$$+ \frac{2A_i}{l^2} w_{i-1}^b - \frac{2I_i}{l^2}\left(\rho_i + \frac{2h^2}{l^2}\right) w_i^b + \frac{2B_i}{l^2} w_{i+1}^b +$$

$$+ \frac{2A_i}{l^2} w_{i-1}^d - \frac{2I_i}{l^2}\left(\rho_i + \frac{2h^2}{l^2}\right) w_i^d + \frac{2B_i}{l^2} w_{i+1}^d +$$

$$+ \frac{h^2 I_i}{l^4} w_i^a + \frac{h^2 I_i}{l^4} w_i^e = - \frac{p_i h^2}{E}. \qquad (7b)$$

Ecuații de tipul (6) și (7) s-au dedus și pentru cazul în care grosimea arcelor este variabilă după orizontală. Fără ca numărul necunoscutelor care figurează în aceste ecuații să crească, expresiile coeficienților sînt însă mai complicate. Dacă se consideră oportună o simplificare a operațiilor, se pot introduce în calcul arce echivalente, avînd spre exemplu aceeași suprafață și aceeași axă medie, însă grosimea constantă. Aproximația este acceptabilă deoarece, în general, grosimea la nașteri a arcelor îngroșate nu diferă cu un procent mai mare de 20% față de cea de la cheie.

★

Condițiile de margine pentru coronament, valabile pentru situația în care axul acestuia este o linie de curbură principală și sarcinile exterioare (pentru $x = 0$) sînt nule, sînt indicate de Love [2]:

$$m_x = Kw'' = 0, \tag{8a}$$

$$n_{xy} - \frac{m_{xy}}{r} = \frac{Dv'}{2} - \frac{3Kw'^{\cdot}}{2r} = 0 \text{ (după Basset)}, \tag{8b}$$

$$q_x + m^{\cdot}_{xy} = (Kw'')' + 2\,(Kw'^{\cdot})^{\cdot} = 0 \text{ (după Kirchhoff)}. \tag{8c}$$

Aceste condiții sînt echivalente cu

$$w'' = 0, \tag{9a}$$

$$v' - \frac{3K}{Dr}\,w'^{\cdot} = 0, \tag{9b}$$

$$w''' = 0 \text{ și } w'^{\cdot\cdot} = 0, \tag{9c}$$

relații care, dezvoltate prin diferențe finite, conduc respectiv la ($i = 0$, fig. 2)

$$w^c_{-1} = 2w^c_0 - w^c_1, \tag{10a}$$

$$v^c_{-1} = v^c_1 + \frac{3\,I_0}{d_0 r_0}\left[\frac{w^b_i - w^b_0}{b} - \frac{c-b}{bc}\left(w^c_1 - w^c_0\right) - \frac{w^d_1 - w^d_0}{c}\right], \tag{10b}$$

$$w^c_{-2} = 4w^c_0 - 4w^c_1 + w^c_2. \tag{10c}$$

Condițiile de margine de-a lungul conturului de fundație se pot scrie, după F. Vogt [6], în două moduri:

— fie exprimînd deplasările și rotațiile unei secțiuni funcție de solicitările locale,

— fie admițînd un artificiu prin care, pentru a ține seama de deformabilitatea terenului de fundație, se introduce în calcul un baraj fictiv, încastrat în teren la o anumită adîncime față de fundația reală; în mod curent, această adîncime variază între 40 și 50% din grosimea secțiunii considerate.

Metoda de calcul prin diferențe finite se pretează la aplicarea oricăruia din procedeele de mai sus. Dacă se utilizează așa numitul „artificiu”, atunci condițiile de margine de-a lungul fundației fictive sînt

$$w = 0, \text{ (11a)}$$

$$w^{\cdot} = 0, \text{ (11b)}$$

$$v = 0. \text{ (11c)}$$

Asupra problemei condițiilor de margine pentru baraje găsim un interesant comentariu în lucrarea citată a lui Lombardi.

4. CAZURI PARTICULARE

Ecuaţia (7b) se poate particulariza pentru calculul unui baraj arcuit într-o primă fază, în care repartiţia presiunii hidrostatice se determină numai în secţiunea maestră. În acest scop se menţine numai bara verticală centrală a reţelei şi se înlătură celelalte bare, făcînd pasul orizontal l să tindă spre o valoare foarte mare. În acest caz, ecuaţia (7b) ia forma (indicele c dispare)

$$I_{i-1} w_{i-2} - 2 (I_{i-1} + I_i) w_{i-1} + \left(\frac{h^4 d_i}{r_i^2} + I_{i-1} + 4 I_i + I_{i+1} \right) w_i -$$

$$- 2 (I_i + I_{i+1}) w_{i+1} + I_{i+1} w_{i+2} = - \frac{p_i h^4}{E}. \qquad (12)$$

La aceeaşi ecuaţie s-ar fi ajuns dezvoltînd prin diferenţe finite relaţia (provenită din (3c))

$$\frac{n_y}{r} + m_x'' + p = 0$$

şi neglijînd termenii derivaţi după orizontală (Oy). Remarcăm deci că în ecuaţia (12) nu apare decît efectul momentului încovoietor după verticală şi efectul forţei axiale după orizontală.

Autorii acestei lucrări au dedus, cu altă ocazie [7] şi folosind alte baze, o ecuaţie de structură similară cu (12), în care se ţine seama în mod suplimentar de efectul momentului încovoietor orizontal şi de o variaţie liniară a presiunii ce revine consolei, pe un interval h. Această ecuaţie este de forma

$$I_{i-1} w_{i-2} - 2 \left(I_{i-1} + I_i - \frac{k_{i-1}}{2} \right) w_{i-1} + (I_{i-1} + 4 I_i + I_{i+1} + 4 k_i) w_i -$$

$$- 2 \left(I_i + I_{i+1} - \frac{k_{i+1}}{2} \right) w_{i+1} + I_{i+1} w_{i+2} = \frac{h^4}{6 E} (p_{i-1} + 4 p_i + p_{i+1}), \qquad (13)$$

în care $k_i = h^4 / 6 a_i$ şi a_i rezultă din formula $w_i = a_i \frac{p_{a.i}}{E}$ a deplasării radiale la cheia unui arc încărcat cu o sarcină uniformă $p_{a,i}$.

★

Dacă în ecuaţia (7b) se face pasul vertical h să tindă spre o valoare foarte mare, se obţine ecuaţia cu diferenţe finite a arcului independent (indicele i dispare),

$$\frac{ld}{r} (v^c - v^b) + \frac{2I}{r^2} \left(\frac{dl^2}{2I} + \frac{3 r^2}{l^2} - 2 \right) w^c + 2I \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{l^2} \right) (w^b + w^d) +$$

$$+ \frac{I}{l^2} (w^a + w^e) = - \frac{p l^2}{E}. \qquad (14)$$

La aceeași ecuație s-ar fi ajuns dezvoltînd prin diferențe finite relația (provenită din (3c))

$$\frac{n_y}{r} + \ddot{m}_y + p = 0,$$

în care apare efectul forței axiale și al momentului încovoietor după orizontală (Oy).

5. APLICAȚIE PRACTICĂ

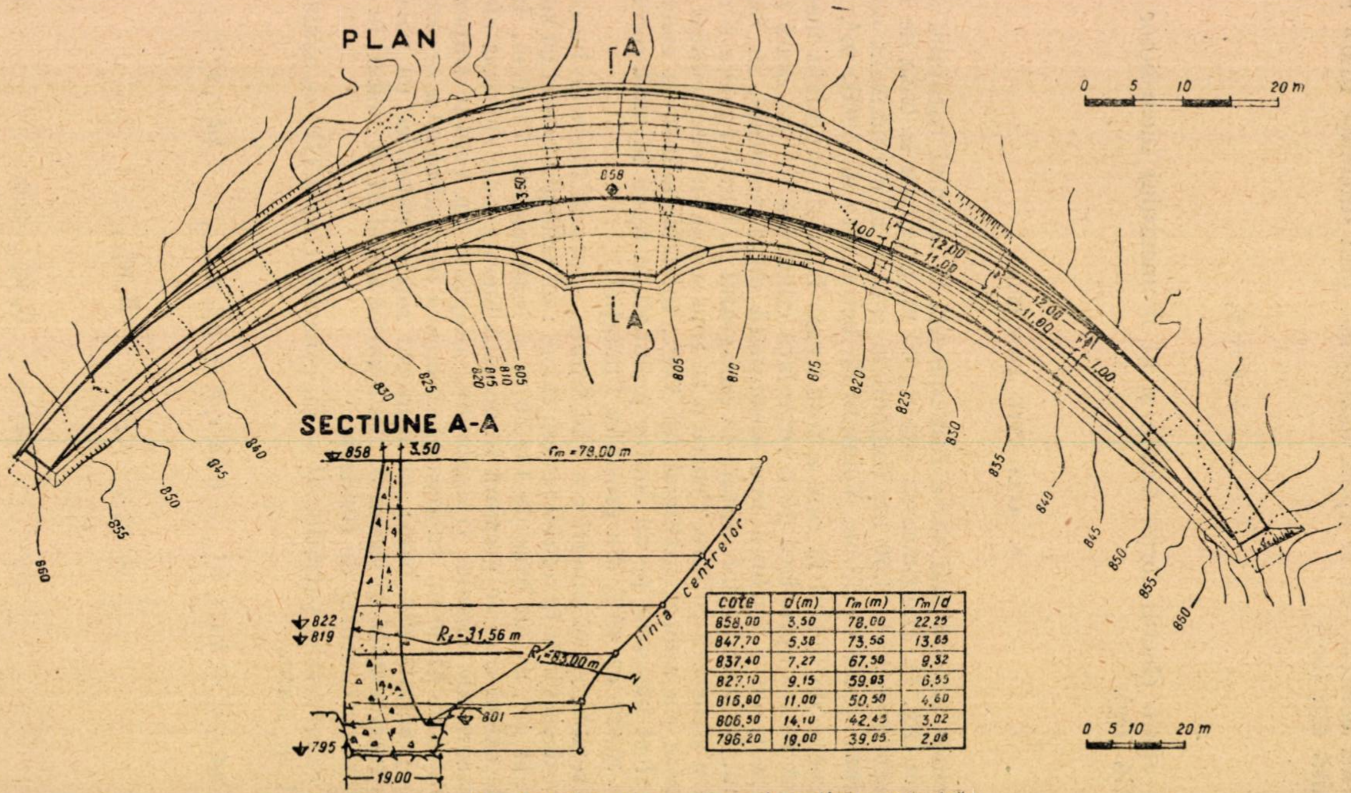
Metoda expusă mai sus a fost aplicată la calculul barajului arcuit Negovanu (fig. 4). Înălțimea sa este de 60 m, grosimea la bază de 19 m, iar la coronament de 3,50 m. Unghiul la centru la coronament este de 110° și raza medie de 78 m. Volumul de beton este de 49000 m³.

Funcție de modul în care a fost trasat barajul, suprafața mediană a rezultat foarte apropiată de o suprafață cilindrică în cele două treimi superioare și cu o curbură mai accentuată după verticală, în treimea inferioară. În sensul celor arătate în paragraful 1, barajul poate fi considerat ca o structură subțire. Pentru a se ține seama de elasticitatea rocei de fundație s-a aplicat artificiul lui Vogt, introducîndu-se în calcul un baraj perfect încastrat pe un contur prelungit în teren în mod corespunzător (în medie cu 45% din grosimea fundației).

Datorită formei simetrice a văii barate, conturul fictiv de încastrare a rezultat deosebit de favorabil pentru calcul : un triunghi isoscel cu laturile înclinate la 45°, avînd baza de 144,20 m și înălțimea de 72,10 m. În varianta de calcul care se prezintă în această lucrare s-au eliminat efectele perturbatoare ale vîrfului triunghiului, adoptînd un contur trapezoidal cu înălțimea de 61,80 m. În această situație a fost suficient a se examina numai o jumătate din baraj, cu ajutorul rețelei patratice cu pasul de 10,30 m, reprezentată în figura 5. Au rezultat astfel 27 de noduri în cîmp și 8 noduri pe conturul de fundație.

În cazul rețelei patratice $(l = h)$, ecuațiile (7a) și (7b) se simplifică, ajungînd la forma

$$\begin{gathered} 2\, hd_i r_i v_i^b + h\alpha_i r_i v_{i-1}^c - 6\, hd_i r_i v_i^c + h\beta_i r_i v_{i+1}^c + 2\, hd_i r_i v_i^d + \\ + \frac{3}{2} A_i w_{i-1}^b - C_i w_i^b + \frac{3}{2} B_i w_{i+1}^b - \\ - \frac{3}{2} A_i w_{i-1}^d + C_i w_i^d - \frac{3}{2} B_i w_{i+1}^d = 0, \end{gathered} \tag{15a}$$


PLAN
A
A
858
3,50
1,00
12,00
11,00
805
810
815
820
825
830
840
845
850
855
860
0 5 10 20 m
SECTIUNE A-A
858
3,50
rm = 78,00 m
linia centrelor
R₁ = 31,56 m
R₁ = 83,00 m
801
822
819
795
19.00

cote	d(m)	rm(m)	rm/d
858,00	3,50	78,00	22,25
847,70	5,38	73,56	13,65
837,40	7,27	67,58	9,32
827,10	9,15	59,93	6,55
816,80	11,00	50,50	4,60
806,50	14,10	42,45	3,02
796,20	19,00	39,05	2,08

Fig. 4. – Barajul Negovanu : plan și secțiune maestră.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{h^3 d_i}{2 r_i} v_i^b + \frac{h^3 d_i}{2 r_i} v_i^d + \\
&+ I_{i-1} w_{i-2}^c - 4 (A_i + M_i) w_{i-1}^c + T_i w_i^c - 4 (B_i + N_i) w_{i+1}^c + I_{i+1} w_{i+2}^c + \\
&\quad + 2 A_i w_{i-1}^b - 2 I_i (\rho_i + 2) w_i^b + 2 B_i w_{i+1}^b + \\
&\quad + 2 A_i w_{i-1}^d - 2 I_i (\rho_i + 2) w_i^d + 2 B_i w_{i+1}^d + \\
&\qquad + I_i w_i^a + I_i w_i^e = - \frac{p_i h^4}{E},
\end{aligned}
\tag{15b}
$$

în care $T_i = \frac{h^4 d_i}{r_i^2} + 4 \rho_i I_i + 6 I_i + S_i$.

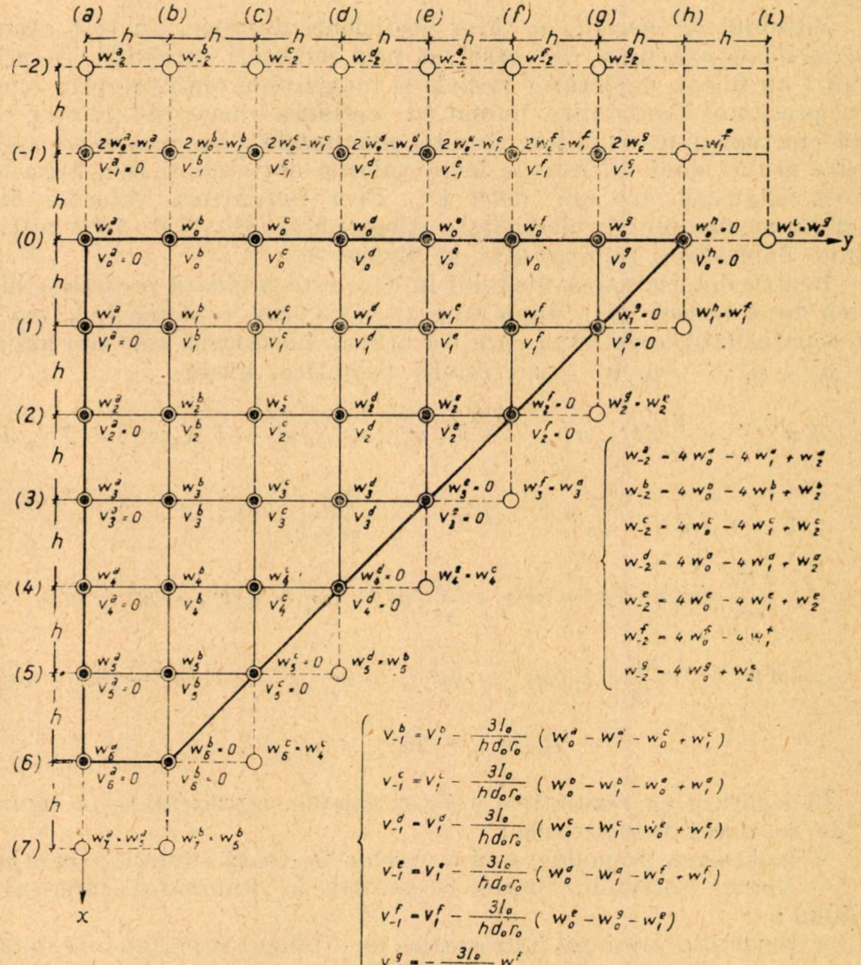

(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i)
h
(-2) (-1) (0) (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)
x
y
w_{-2}^a = 4w_0^a − 4w_1^a + w_2^a
w_{-2}^b = 4w_0^b − 4w_1^b + w_2^b
w_{-2}^c = 4w_0^c − 4w_1^c + w_2^c
w_{-2}^d = 4w_0^d − 4w_1^d + w_2^d
w_{-2}^e = 4w_0^e − 4w_1^e + w_2^e
w_{-2}^f = 4w_0^f − 4w_1^f
w_{-2}^g = 4w_0^g + w_2^e
v_{-1}^b = v_1^b − 3I_0/(h d_0 r_0) (w_0^a − w_1^a − w_0^c + w_1^c)
v_{-1}^c = v_1^c − 3I_0/(h d_0 r_0) (w_0^b − w_1^b − w_0^d + w_1^d)
v_{-1}^d = v_1^d − 3I_0/(h d_0 r_0) (w_0^c − w_1^c − w_0^e + w_1^e)
v_{-1}^e = v_1^e − 3I_0/(h d_0 r_0) (w_0^d − w_1^d − w_0^f + w_1^f)
v_{-1}^f = v_1^f − 3I_0/(h d_0 r_0) (w_0^e − w_0^g − w_1^e)
v_{-1}^g = − 3I_0/(h d_0 r_0) w_0^f

Fig. 5. — Rețeaua de calcul pătratică (h = 10,30 m) pentru o jumătate din baraj și condițiile de margine.

Aplicînd aceste ecuații în cele 27 de noduri din cîmp se obține un sistem de 54 ecuații cu 101 necunoscute. Prin intermediul condițiilor de margine (9) și (11), indicate în figura 5, numărul necunoscutelor se reduce la 54. Deoarece forma barajului este simetrică și deplasările tangențiale din cele șase noduri de cîmp din secțiunea maestră sînt nule, sistemul final se reduce la un număr de 48 ecuații cu 48 necunoscute (27 necunoscute w și 21 necunoscute v). Numărul maxim de necunoscute care figurează într-o ecuație este de 15. Este de remarcat faptul că coeficienții necunoscutelor sînt funcție numai de elementele geometrice ale barajului, astfel încît atunci cînd se studiază efectul presiunii apei cu nivelul situat la diferite cote, se modifică numai termenii liberi care depind de această presiune.

Sistemul de ecuații, ai căror coeficienți numerici au fost calculați cu 6 zecimale exacte, a fost rezolvat prin încercări succesive. În primul circuit s-au folosit deplasările radiale și tangențiale obținute prin repartizarea presiunii hidrostatice numai în secțiunea maestră (relația (13)). După efectuarea mai multor circuite, rezultatele s-au considerat satisfăcătoare atunci cînd diferențele între valorile obținute și cele precedente au fost sistematic mai mici decît 1%. Prin împărțirea valorilor finale Ew și Ev cu modulul de elasticitate al betonului ($E = 1{,}6 \cdot 10^6$ t/m²) s-au obținut deplasările reprezentate în figura 6.

Pentru determinarea modului în care este preluată presiunea hidrostatică după console (p_c), după arce (p_a) și prin torsiune (p_t), s-a utilizat ecuația (4b), care după cum s-a arătat, însumează cele trei acțiuni : $p_c + p_a + p_t = -p$. În cazul rețelei patratice, avem

$$p_c = (Kw'')'' = \frac{E}{h^4}\left(I_{i-1}\, w^c_{i-2} - 4\, M_i\, w^c_{i-1} + S_i\, w^c_i - 4\, N_i\, w^c_{i+1} + I_{i+1}\, w^c_{i+2}\right),$$

$$p_a = \frac{D}{r} v^{\cdot} + \frac{D}{r^2} w + \frac{2K}{r^2} w^{\cdot\cdot} + K w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{Ed_i}{2h\, r_i}\left(- v^b_i + v^d_i + \frac{2h}{r_i} w^c_i\right) +$$

$$+ \frac{2\, EI_i}{h^2 r^2_i}\left(w^b_i - 2w^c_i + w^d_i\right) + \frac{EI_i}{h^4}\left(w^a_i - 4w^b_i + 6\, w^c_i - 4w^d_i + w^e_i\right), \qquad (16)$$

$$p_t = 2\,(Kw^{\prime\cdot})^{\prime\cdot} = \frac{2E}{h^4}\left[A_i\left(w^b_{i-1} - 2w_{i-1} + w^d_{i-1}\right) - 2\, I_i\left(w^b_i - 2w^c_i + w^d_i\right) +\right.$$

$$\left. + B_i\left(w^b_{i+1} - 2w^c_{i+1} + w^d_{i+1}\right)\right].$$

În legătură cu rezultatele acestor calcule, reprezentate în figura 7, sînt de remarcat următoarele :

— încărcarea preponderentă a arcelor pe toată suprafața barajului ;

— efectul torsiunii, foarte accentuat în jumătatea inferioară a barajului ;

— repartiția presiunii hidrostatice de-a lungul suprafeței de fundație între arce, console și torsiune, mult diferită de cea care se obține, în mod obișnuit, prin metoda „arce-console”, unde toată presiunea se atribuie consolelor.

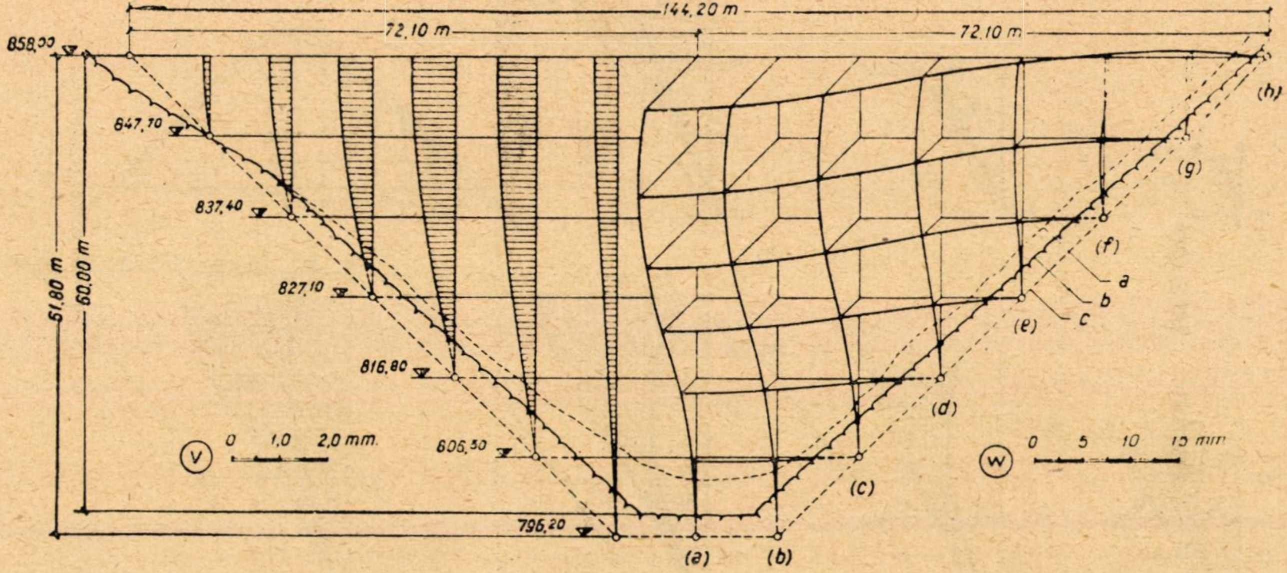

144,20 m
72,10 m
72,10 m
858,00
847,70
837,40
827,10
816,80
606,50
796,20
51,80 m
60,00 m
V
0 1,0 2,0 mm.
W
0 5 10 15 mm
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
a
b
c

Fig. 6. — Deplasări radiale (*w*) şi tangenţiale (*v*) provocate de presiunea apei cu nivelul la cota coronamentului; *a* — linia terenului actual, *b* — linia fundaţiei probabile, *c* — linia fundaţiei fictive.

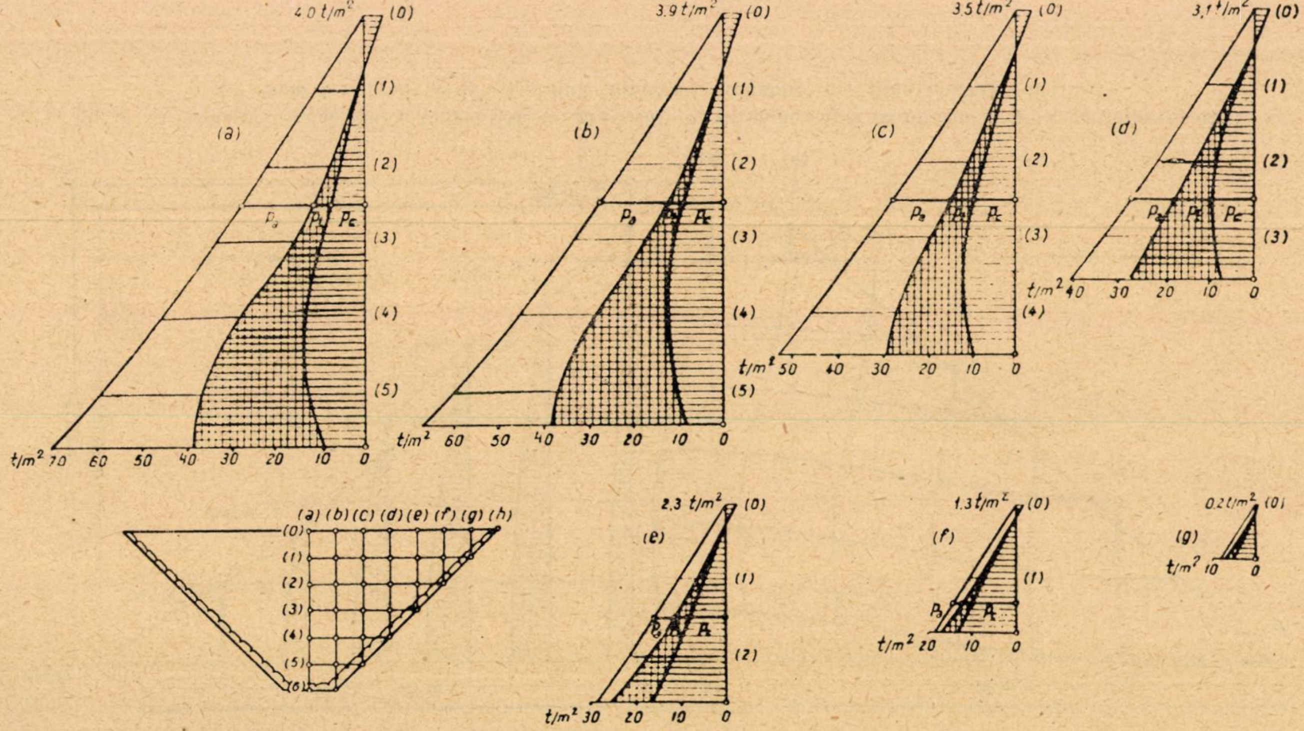


Fig. 7. — Repartiția presiunii hidrostatice după barele verticale ale rețelei : p_c = presiunea preluată de console, p_t = presiunea preluată prin torsiune, p_a = presiunea preluată de arce.

Deplasările fiind cunoscute, s-au calculat apoi solicitările prin intermediul relațiilor (5), simplificate pentru cazul rețelei patratice. Rezultatele obținute indică valori și variații de-a lungul arcelor sau consolelor, similare cu cele obținute la calculul altor baraje de aceleași proporții. Se remarcă puternica acțiune de membrană (solicitări n_y — fig. 8) pe toată suprafața barajului, precum și acțiunea de placă, cu momente de încovoiere (m_x, m_y — fig. 9), solicitări tangențiale (n_{xy}, n_{yx} — fig. 10) și momente de torsiune (m_{xy}, m_{yx} — fig. 11) crescătoare spre conturul de fundație.

Pentru calculul eforturilor care acționează în corpul barajului s-au folosit formulele de mai jos [4], scrise pentru cazul rețelei patratice :

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= zEw'' = \frac{zE}{h^2}\left(w^c_{i-1} - 2w^c_i + w^c_{i+1}\right),\\
\sigma_y &= E\left(v^{\cdot} + \frac{r\,z\,w^{\cdot\cdot}}{r-z} + \frac{w}{r-z}\right) = \frac{E}{2h}\left(-v^b_i + v^d_i\right) +\\
&\quad + \frac{E\,r_i\,z}{(r_i - z)\,h^2}\left(w^b_i - 2w^c_i + w^d_i\right) + \frac{E\,w^c_i}{r_i - z},\\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2}\left[v' + \left(\frac{z}{r} + \frac{z}{r-z}\right) rw'^{\cdot}\right] = \frac{E}{4h}\left(v^c_{i+1} - v^c_{i-1}\right) +\\
&\quad + \frac{Er_i}{8h^2}\left(\frac{z}{r_i} + \frac{z}{r_i - z}\right)\left(w^b_{i-1} - w^b_{i+1} - w^d_{i-1} + w^d_{i+1}\right),
\end{aligned} \tag{17}$$

în care $z = d/2$ pentru paramentul aval și $z = -d/2$ pentru paramentul amonte. Rezultatele referitoare la aceste eforturi ca și la eforturile principale sînt indicate în figurile 12, 13, 14 și 15.

Se constată că:

— eforturile verticale σ_x au valori maxime în secțiunea maestră; tensiunile care apar pe conturul de încastrare, în amonte, și în regiunea treimei superioare a barajului, în aval, sînt echilibrate de efectul greutății proprii;

— eforturile orizontale σ_y au valori maxime de compresiune în secțiunea maestră, în amonte, și pe conturul de încastrare, în aval; pe același contur apar tensiuni reduse în amonte;

— eforturile teoretice de alunecare τ_{xy} au în general valori mici, atingînd totuși în unele puncte, situate pe conturul de încastrare, cifre destul de ridicate;

— eforturile principale, normale sau de alunecare, sînt mai mari decît cele precedente cu un procent care nu depășește cifra de 20%.

Ca și în cazul solicitărilor, valoarea eforturilor și variația lor pe paramentele barajului sînt foarte asemănătoare cu rezultatele obținute prin încercările pe modele statice ale unor baraje similare. În acest sens, este de remarcat concordanța perfectă a rezultatelor cu cele obținute pe modelul barajului Salza din Austria de către E. Tschech și F. Jaburek [8].

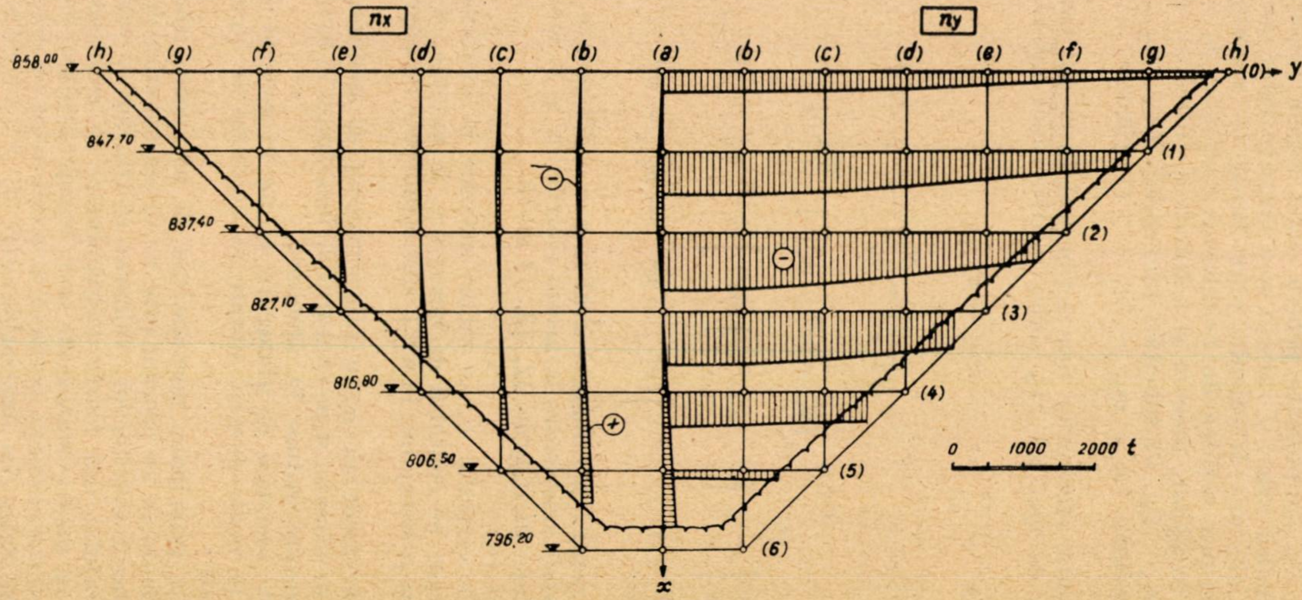

nx
ny
858.00
847.70
837.40
827.10
816.80
806.50
796.20
(h)
(g)
(f)
(e)
(d)
(c)
(b)
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
(0)
y
x
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
−
−
+
0
1000
2000 t

Fig. 8. — Forțe normale n_x și n_y.

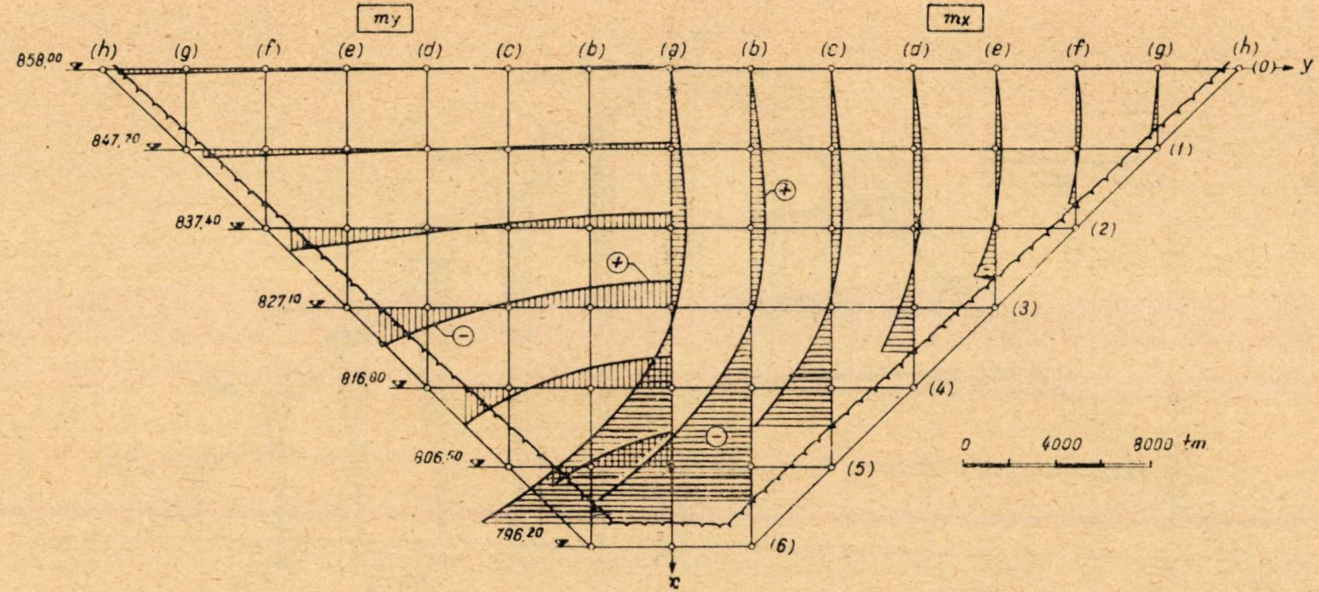

my
mx
858,00
847,70
837,40
827,10
816,80
806,50
796,20
(h)
(g)
(f)
(e)
(d)
(c)
(b)
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
(0)
y
x
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
+
+
−
−
0
4000
8000 tm

Fig. 9. — Momente încovoietoare m_x și m_y.

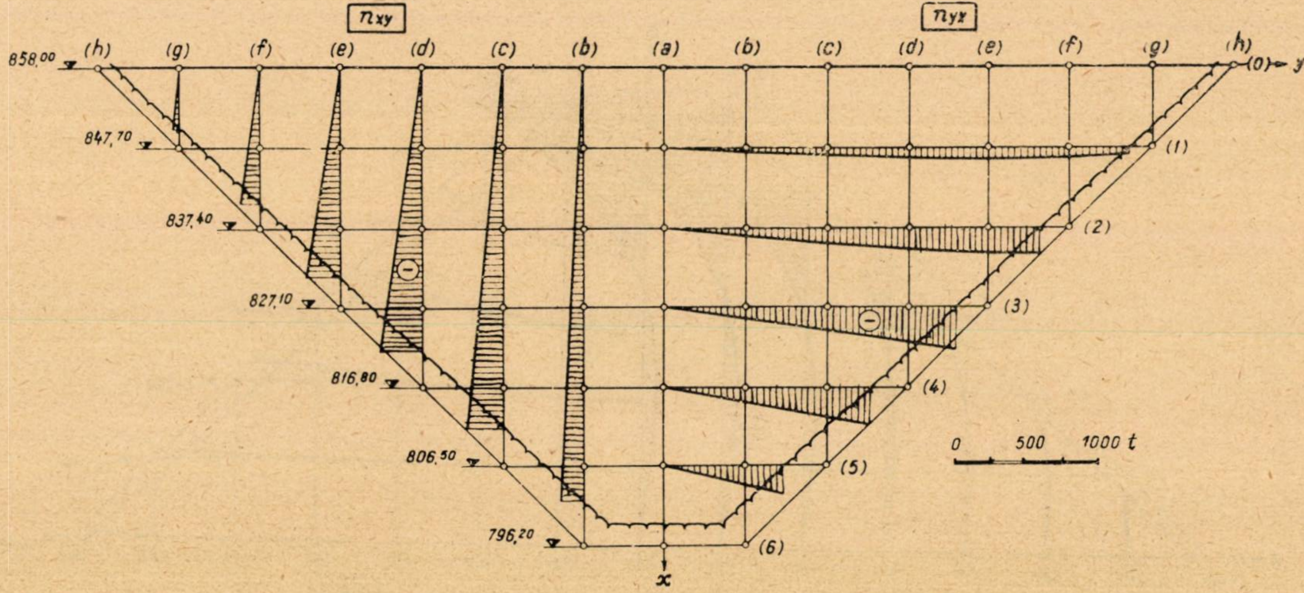

n_{xy}
n_{yx}
858,00
847,70
837,40
827,10
816,80
806,50
796,20
(h)
(g)
(f)
(e)
(d)
(c)
(b)
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
(0)
y
x
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
−
−
0
500
1000 t

Fig. 10. — Forțe tangențiale n_{xy} și n_{yx}.

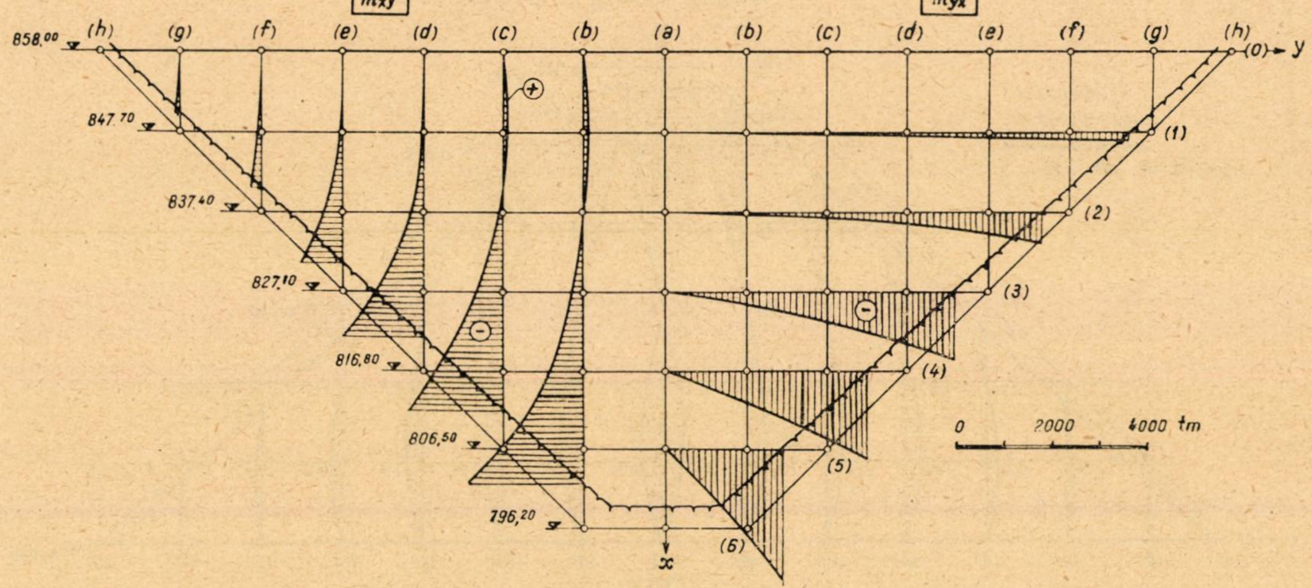

mxy
myx
858,00
847.70
837.40
827.10
816,80
806,50
796,20
(h)
(g)
(f)
(e)
(d)
(c)
(b)
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
(0)
y
x
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
+
−
−
0
2000
4000 tm

Fig. 11. — Momente de torsiune m_{xy} şi m_{yx}.

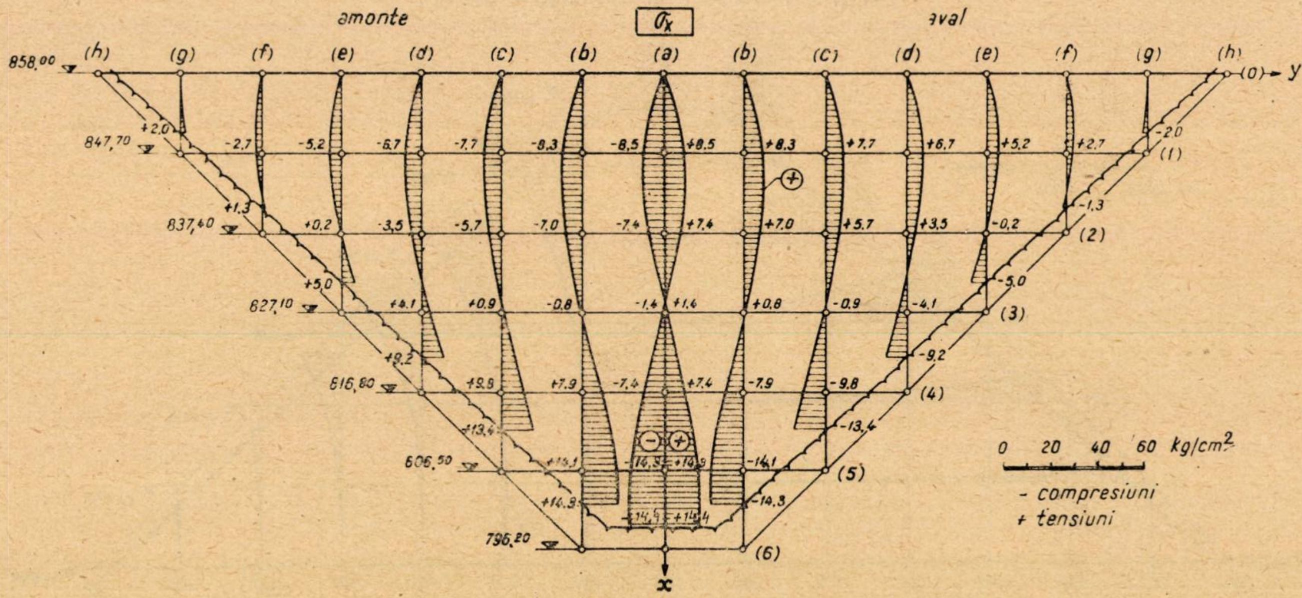

amonte
σ_x
aval
(h) (g) (f) (e) (d) (c) (b) (a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h)
(0) y
x
(1) (2) (3) (4) (5) (6)
858,00
847,70
837,40
627,10
816,80
606,50
796,20
+2,0 -2,7 -5,2 -6,7 -7,7 -8,3 -8,5 +8,5 +8,3 +7,7 +6,7 +5,2 +2,7 -2,0
+1,3 +0,2 -3,5 -5,7 -7,0 -7,4 +7,4 +7,0 +5,7 +3,5 -0,2 -1,3
+5,0 +4,1 +0,9 -0,8 -1,4 +1,4 +0,8 -0,9 -4,1 -5,0
+9,2 +9,8 +7,9 -7,4 +7,4 -7,9 -9,8 -9,2
+13,4 +14,1 -14,9 +14,9 -14,1 -13,4
+14,3 -14,9 +14,4 -14,3
+
−
0 20 40 60 kg/cm²
- compresiuni
+ tensiuni

Fig. 12. — Eforturi verticale σ_x.

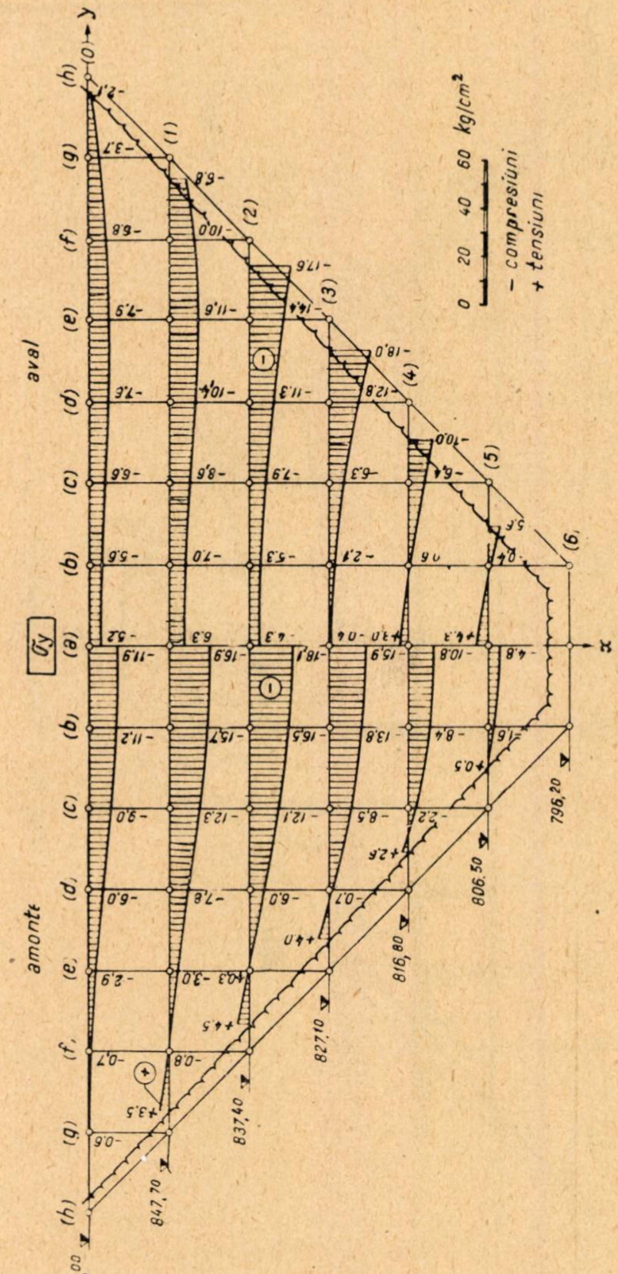

σy
amonte
aval
(h)
(g)
(f)
(e)
(d)
(c)
(b)
(a)
(0)
y
x
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
0 20 40 60 kg/cm²
− compresiuni
+ tensiuni
858,00
847,70
837,40
827,10
816,80
806,50
796,20
-2.1
-3.7
-6.8
-5.2
-11.9
-11.2
-9.0
-6.0
-2.9
-0.7
-0.6
+3.5
-8.9
-10.0
-17.6
-14.4
-18.0
-12.8
-10.0
-6.4
-5.6
-0.4
-7.9
-7.6
-6.6
-5.6
-11.6
-10.4
-8.6
-7.0
-6.3
-16.9
-15.7
-12.3
-7.8
-3.0
-0.8
+0.3
+4.5
-11.3
-7.9
-5.3
-4.3
-18.1
-16.5
-12.1
-6.0
+4.0
-6.3
-2.1
+3.0
-0.4
-15.9
-13.8
-8.5
-0.7
+2.5
-10.8
-8.4
-2.2
+0.5
-4.8
-1.6
+4.3

Fig. 13. — Eforturi orizontale σy.

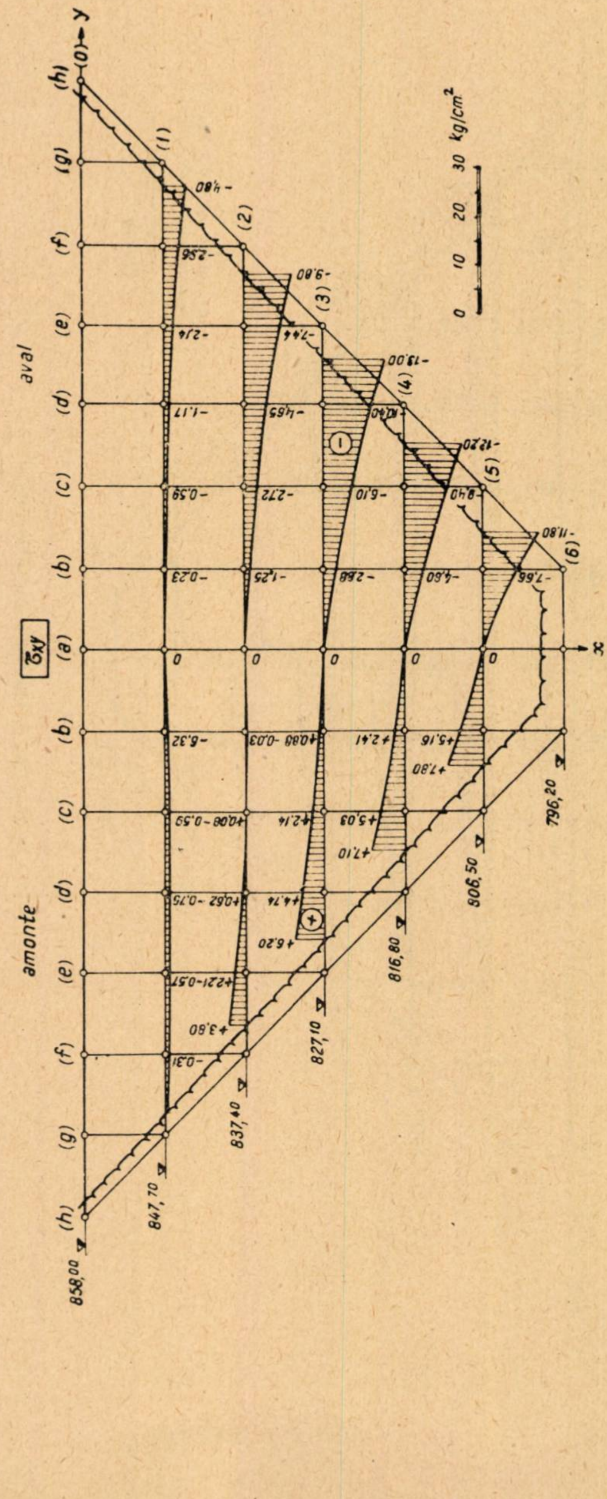

τxy
aval
amonte
(h) (g) (f) (e) (d) (c) (b) (a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h)
(0) y
x
(1) (2) (3) (4) (5) (6)
0 10 20 30 kg/cm²
858,00
847,70
837,40
827,10
816,80
806,50
796,20
-4,80
-2,56
-9,80
-2,14
-7,44
-13,00
-1,17
-4,65
-10,40
-12,20
-0,59
-2,72
-6,10
-8,40
-11,80
-0,23
-1,25
-2,68
-4,60
-7,66
0
-6,32
+0,86 -0,03
+2,41
+5,16
+7,80
+0,08 -0,59
+2,14
+5,03
+7,10
+0,62 -0,75
+4,74
+6,20
+2,21 -0,57
+3,80
-0,31
−
+

Fig. 14. — Eforturi tangențiale τ_{xy}.

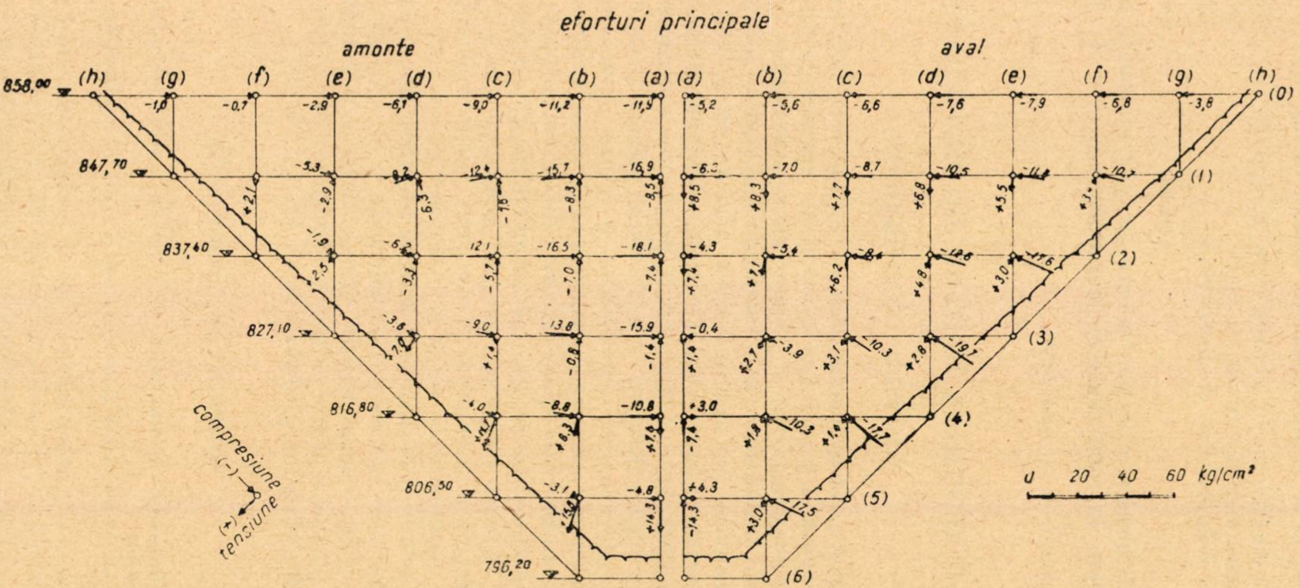

eforturi principale
amonte
aval
(h)
(g)
(f)
(e)
(d)
(c)
(b)
(a)
(0)
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
858,00
847,70
837,40
827,10
816,80
806,50
796,20
compresiune (−)
tensiune (+)
0 20 40 60 kg/cm²

Fig. 15. — Efoturi normale principale.

În ceea ce priveşte timpul care a fost necesar pentru calculul cifrelor indicate mai sus, el se repartizează în modul următor :

— calculul coeficienţilor pentru cele 48 ecuaţii. . .	100 ore
— rezolvarea sistemului de ecuaţii	580 ore
— calculul solicitărilor şi eforturilor	120 ore
total	800 ore

Pentru interesul şi atenţia cu care au fost efectuate aceste calcule, autorii mulţumesc în mod deosebit colaboratoarei lor N. Bogescu.

Primită la redacţie la 21 mai 1958

РАСЧЕТ АРОЧНЫХ ПЛОТИН ПО МЕТОДУ СЕТОК

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе излагается метод расчета, исходящий из теории кривых пластинок с простой кривизной, причем дифференциальные уравнения (4) превращаются в уравнения с конечными разностями (6) и (7). Указанные уравнения, выражающие поведение плотины одновременно как оболочки (восприниманием осевых сил), так и пластинки (восприниманием изгибающих и крутящих моментов), относятся к тонким плотинам, имеющим отношение между радиусом кривизны и толщиной более 5 (по некоторым авторам это значение может доходить до 3).

При применении уравнения в узлах ортогональной сетки получается конечная система с n-линейными уравнениями и „n" неизвестными. Эти неизвестные представляют собой не что иное как радиальные (w) и тангенциальные (v) перемещения средней поверхности плотины в узлах сетки. В свою очередь, усилия, действующие в теле плотины, могут вычисляться в зависимости от этих перемещений посредством выражений (5), написанных тоже в конечных разностях.

В конце работы указывается, каким образом предложенный метод применялся к расчету плотины Неговану ($H = 60$ м). Решением системы 48 уравнений с 48 неизвестными определились перемещения в узлах сетки (рис. 6), распределение гидростатического давления (рис. 7), усилия (рис. 8, 9, 10, 11) и напряжения (рис. 12, 13, 14, 15).

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — a — Выбранная система осей; b — усилия, действующие на элементарный отрезок плотины.

Рис. 2. — Схема расчетной сетки с постоянным шагом по вертикали и переменным по горизонтали.

Рис. 3. — Перемещения радиальные w (круги) и тангенциальные v (заполненные точки) вокруг узла $\binom{c}{i}$: a — из уравнения (6a) 9 перемещений радиальных и 5 тангенциальных; b — из уравнения (6b) 13 перемещений радиальных и 3 тангенциальных.

Рис. 4. — Плотина Неговану, план и центральное сечение.

Рис. 5. — Квадратичная расчетная сетка (h = 10,30 м) для половины плотины и граничные условия.

Рис. 6. — Перемещения радиальные (w) и тангенциальные (v), обусловленные давлением воды с горизонтом на отметке гребня плотины; a — линия настоящего положения поверхности грунта; b — линия предполагаемого основания; c — линия фиктивного основания.

Рис. 7. — Распределение гидростатического давления по вертикальным элементам сетки: p_c — давление, воспринимаемое консолями, p_t — давление, воспринимаемое кручением, p_a — давление, воспринимаемое арками.

Рис. 8. — Нормальные силы n_x и n_y.
Рис. 9. — Изгибающие моменты m_x и m_y.
Рис. 10. — Тангенциальные силы n_{xy} и n_{yx}.
Рис. 11. — Крутящие моменты m_{xy} и m_{yx},
Рис. 12. — Вертикальные напряжения σ_x.
Рис. 13. — Горизонтальные напряжения σ_y.
Рис. 14. — Тангенциальные напряжения τ_{xy}.
Рис. 15. — Главные нормальные напряжения.

LE CALCUL DES BARRAGES VOÛTES PAR LA MÉTHODE DES RÉSEAUX

RÉSUMÉ

Dans cette étude, les auteurs exposent une méthode de calcul qui part de la théorie des coques à courbure simple, en transformant les équations différentielles (4) en équations à différences finies (6) et (7). Ces équations, qui expriment le comportement simultané d'un barrage en tant que membrane (par la transmission des sollicitations axiales) et en tant que dalle (par la transmission des sollicitations de flexion et de torsion) se réfèrent aux barrages sveltes, dont le rapport entre le rayon de courbure et l'épaisseur est supérieur à 5 (selon certains auteurs ce chiffre peut descendre jusqu'à 3).

Par l'application des équations dans les noeuds d'un réseau orthogonal, on obtient un système final de (n) équations linéaires avec (n) inconnues. Ces inconnues ne sont que les déplacements radiaux (w) et tangentiels (v) de la surface médiane du barrage dans les noeuds du réseau. A leur tour, les sollicitations qui agissent dans le corps du barrage peuvent être calculées en fonction de ces déplacements, à l'aide de certaines relations, écrites également par différences finies (5).

A la fin de l'étude, on montre comment la méthode proposée a été appliquée au calcul du barrage Negovanu (H = 60 m). En résolvant un système de 48 équations à 48 inconnues, il a été possible de déterminer les déplacements des noeuds du réseau (fig. 6), la répartition de la pression hydrostatique (fig. 7), les sollicitations (fig. 8, 9, 10, 11) et les contraintes respectives (fig. 12, 13, 14, 15).

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. *a*) Le système d'axes admis ; *b*) les sollicitations qui agissent sur un élément détaché du corps du barrage.

Fig. 2. — Schéma du réseau de calcul à pas constant selon la verticale et variable selon l'horizontale.

Fig. 3. — Les déplacements radiaux w (cercles) et tangentiels v (points pleins) qui interviennent autour du noeud $\binom{c}{i}$: *a*) de l'équation (6*a*), 9 déplacements radiaux et 5 tangentiels ; *b*) de l'équation (6*b*), 13 déplacements radiaux et 3 tangentiels.

Fig. 4. — Barrage Negovanu : plan et section centrale.

Fig. 5. — Le réseau de calcul quadratique ($h = 10{,}30$ m) pour une moitié du barrage et les conditions aux limites.

Fig. 6. — Déplacements radiaux (w) et tangentiels (v) causés par la pression de l'eau avec le niveau à la cote du couronnement. *a*) ligne du terrain actuel ; *b*) ligne de la fondation probable ; *c*) ligne de la fondation fictive.

Fig. 7. — Répartition de la pression hydrostatique selon les barres verticales du réseau. p_c = pression supportée par les consoles ; p_t = pression supportée par torsion ; p_a = pression supportée par les arcs.

Fig. 8. — Sollicitations normales n_x et n_y.

Fig. 9. — Moments de flexion m_x et m_y.

Fig. 10. — Sollicitations tangentielles n_{xy} et n_{yx}.

Fig. 11. — Moments de torsion m_{xy} et m_{yx}.

Fig. 12. — Contraintes verticales σ_x.

Fig. 13. — Contraintes horizontales σ_y.

Fig. 14. — Contraintes tangentielles τ_{xy}.

Fig. 15. — Contraintes normales principales.

BIBLIOGRAFIE

1. E. BOSSHARD, *Beiträge zur Theorie und Berechnung der Bogenstaumauern*. Zürich, 1949.
2. A. E. H. LOVE, *Elasticity*. New York, 1944.
3. W. FLÜGGE, *Statik und Dynamik der Schalen*. Berlin, 1934.
4. J. LOMBARDI, *Les barrages en voûte mince*. Lausanne, 1955.
5. F. TÖLKE, *Talsperren*. Berlin, 1938.
6. F. VOGT, *Über die Berechnung von Fundamentdeformationen*. Oslo, 1925.
7. R. PRIŞCU, M. CONSTANTINESCU, *O metodă de determinare a repartiţiei presiunii hidrostatice în secţiunea maestră a barajelor arcuite*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3* (1957).
8. E. TSCHECH, F. JABUREK, *Statische Modellversuche zu Gewölbestaumauern*. Schweizerische Bauzeitung *16*, *17* (1951).

STUDIU COMPARATIV AL PARAMETRILOR GEOMETRICI AI CUŢITELOR DE STRUNG ARMATE CU PLĂCUŢE MINERALO-CERAMICE ŞI DIN CARBURI METALICE

DE

M. POPOV, I. MITRICĂ şi E. DECIU

În construcţia sculelor aşchietoare, tendinţa modernă este de a se construi scule din materiale noi, care să îmbine cît mai multe calităţi impuse de o prelucrare la viteze mari şi cu o precizie ridicată şi care totodată să aibă un preţ scăzut. În ultimii ani atenţia generală a fost reţinută de sculele armate cu plăcuţe mineralo-ceramice. Aceste plăcuţe au început să fie fabricate şi încercate de către diverşi cercetători, fără a se putea ajunge pînă în prezent la o soluţie care să permită generalizarea în industrie.

La noi în ţară un colectiv de cercetători din cadrul Institutului de cercetări ştiinţifice pentru construcţii, materiale de construcţii şi industrializarea lemnului, au elaborat un tip de plăcuţă mineralo-ceramică, denumită ENC_1, cu care s-au făcut experienţele ce sînt cuprinse în lucrarea de faţă *).

Dintre proprietăţile specifice ale plăcuţelor mineralo-ceramice, indicate pentru prelucrarea prin aşchiere a materialelor metalice şi nemetalice, amintim : rezistenţă ridicată la oxidare, atît la temperaturi obişnuite, cît şi la temperaturi ridicate ; inerţie chimică foarte mare, ceea ce conduce la imposibilitatea sudării particulelor metalice de muchia tăietoare a sculei ; rezistenţa la compresiune ridicată ; duritate mare. Dintre proprietăţile mecanice care limitează domeniul de aplicabilitate al plăcuţelor mineralo-ceramice citām : rezistenţa la încovoiere scăzută şi o foarte mică valoare a rezilienţii.

---

*) La lucrările experimentale a luat parte şi M. Calciu.

Lucrarea de faţă are drept scop studierea unor aspecte ale comportării plăcuţelor mineralo-ceramice în procesul aşchierii pe strung a diferitelor oţeluri. În acest sens, s-au executat experienţe cu plăcuţe tip ENC_1 (duritate 65—74 H_{RC} pe oţelurile romîneşti OL 70 şi OL 60 *). Pentru ca rezultatele ce sînt prezentate să fie cît mai concludente, s-a făcut o comparaţie cu rezultatele obţinute în cazul strungirii aceloraşi oţeluri cu cuţite armate cu plăcuţe din carburi metalice, pe care le-am considerat ca materiale consacrate în aşchierea metalelor. S-au utilizat plăcuţe S_1 de fabricaţie Harith (duritate 70—78 H_{RC}).

Metodica experimentării a fost aceeaşi în cazul utilizării ambelor genuri de plăcuţe şi similară celei utilizată de noi şi în alte lucrări [1]. Astfel, parametrii aşchierii au fost împărţiţi în următoarele grupe, între care există o slabă interdependenţă, care practic poate fi neglijată :

1. parametrii geometrici ai cuţitului de strung,
2. parametrii regimului de aşchiere,
3. materialele din care sînt confecţionate plăcuţele.

Fiecare grupă de parametri a fost studiată în funcţie de modul cum evoluează uzura cuţitului. Pentru aceasta s-au ţinut sub observaţie continuă cele trei feţe ale cuţitului ce vin în contact cu aşchia sau cu epruveta ce se prelucrează, anume faţa de degajare şi feţele de aşchiere principală şi secundară.

Urmărirea evoluţiei uzurii pe aceste feţe a dus la ridicarea curbelor de uzură funcţie de timp. Studierea acestor curbe a dat posibilitatea să se constate că uzura de pe faţa de aşezare secundară prezintă cea mai mare importanţă prin faptul că, o dată cu creşterea ei, se micşorează precizia de execuţie şi în acelaşi timp scade şi calitatea suprafeţei prelucrate. Limita superioară a uzurii pe faţa de aşezare secundară, am admis-o $\delta_{\alpha_1} = 1$ mm. Experimental s-a constatat că depăşirea acestei limite angajează uzura catastrofală a cuţitului, care este o sursă de vibraţii, făcînd imposibilă prelucrarea în condiţii normale. Mărirea limitei de uzură atrage după sine şi un consum neeconomic de scule.

Măsurarea uzurii s-a făcut pe cale optică, cu o precizie de 10 μ.

S-au utilizat cuţite de strung cu prindere mecanică pentru plăcuţele mineralo-ceramice şi cuţite cu plăcuţele din carburi metalice lipite pe suport. Pentru a asigura o funcţionare mai bună, plăcuţelor mineraloceramice li s-a rotunjit vîrful cu raza de 0,5 mm.

Studiul parametrilor geometrici s-a făcut pentru a se urmări influenţa acestora asupra evoluţiei uzurii şi a se determina valorile optime ale unghiurilor părţii active ale cuţitului de strung γ, α, α_1, $\varkappa$, $\varkappa_1$ şi λ, valori care conduc la o evoluţie mai lentă a uzurii, deci la o durabilitate relativă maximă a cuţitului de strung.

Pentru a face posibilă comparaţia între rezultatele obţinute, ele sînt prezentate în diagrame şi tabele pentru fiecare unghi în parte, în funcţie de un coeficient adimensional. Acest coeficient, notat τ, reprezintă raportul între durabiltatea cuţitului de strung ascuţit la o anumită valoare

---

*) OL 70 — STAS 500-49, probele experimentale avînd $\sigma_r = 79—87$ kgf/mm^2.
OL 60—STAS 500-49, probele experimentale avînd $\sigma_r = 63—68,5$ kgf/mm^2.

a unghiului studiat şi durabilitatea maximă obţinută în cazul variaţiei acelui unghi. Astfel, de exemplu, pentru cazul unghiului de degajare, se defineşte

$$\tau_\gamma = \frac{T_\gamma}{T_{\gamma\,\text{opt}}},$$

unde s-a notat

T_γ — durabilitatea sculei pentru diferite valori ale unghiului de degajare, min;

$T_{\gamma\,\text{opt}}$ — durabilitatea sculei pentru valoarea optimă a unghiului de degajare, min.

În acest fel, coeficientul adimensional τ este de fapt coeficientul de corecţie al durabilităţii cuţitului de strung, în raport cu valoarea optimă a unghiului studiat.

Prezentarea sub această formă a rezultatelor pentru toate unghiurile părţii active ale cuţitului de strung, are avantajul că valorile coeficientului τ nu sînt funcţie de viteză şi nici de ceilalţi parametri ai regimului de aşchiere. Toţi aceşti parametri influenţează asupra durabilităţii, dar ei nu se pot reflecta asupra valorii coeficientului τ, deoarece durabilităţile din cazul valorilor oarecare şi a valorii optime a unghiului studiat sînt determinate pentru aceiaşi parametri ai regimului de aşchiere. Cu alte cuvinte, coeficientul de corecţie adimensional al durabilităţii este independent faţă de condiţiile iniţiale alese pentru regimul de aşchiere, dacă se menţine observaţia sus-amintită. Această ipoteză a fost verificată experimental şi dă posibilitatea de a extinde valabilitatea lui τ pe toată zona studiată.

O dată coeficientul de corecţie al durabilităţii stabilit, se pot determina şi valorile coeficientului de corecţie al vitezei funcţie de parametrii geometrici. Aceşti coeficienţi K_γ, K_α, K_{α_1}, $K_\varkappa$, $K_{\varkappa_1}$, şi K se determină cu ajutorul coeficienţilor τ_γ, τ_α, τ_{α_1}, $\tau_\varkappa$, $\tau_{\varkappa_1}$ şi τ_λ, utilizînd relaţia de legătură între durabilitate şi viteză,

$$v\,T^n = C_1,$$

unde s-a notat

v — viteza de aşchiere, m/min;

T — durabilitatea sculei, min;

n — exponent funcţie de materialul prelucrat;

C_1 — constantă funcţie de materialul de prelucrat, de plăcuţă, avans şi adîncimea de tăiere [2].

a. INFLUENŢA UNGHIULUI γ ASUPRA UZURII

Desprinderea aşchiei din piesă de către cuţit se face cel mai uşor pentru o anumită valoare a unghiului de degajare, care corespunde evoluţiei celei mai lente a uzurii pe cele trei feţe active ale cuţitului de strung [1]. Aceasta este valoarea optimă a unghiului de degajare. În lucrarea de faţă, din motivele arătate mai înainte, ea a fost determinată urmărindu-se evoluția uzurii doar pe fața de așezare secundară. Valorii optime a unghiului de degajare îi corespunde un echilibru de deformări elastice și plastice ale elementelor ce vin în contact în regiunea desprinderii așchiei.

Orice abatere de la valoarea optimă atrage după sine o creștere a gradului de deformare, care are ca efect creșterea suprafeței de contact dintre suprafața așchiată a piesei și fața de așezare secundară a cuțitului. În cazul de față, cînd drept criteriu s-a admis uzura de pe fața de așezare secundară, se studiază influența pe care o are variația unghiului de degajare asupra suprafeței de contact dintre fața de așezare secundară a cuțitului și suprafața piesei. Creșterea gradului de deformare și a suprafeței de contact sînt urmarea creșterii forțelor de așchiere. Toate acestea creează condițiile care conduc la o evoluție mai rapidă a uzurii, deci la o durabilitate mai scăzută a sculei, deși regimul de așchiere s-a păstrat constant.

Pe lîngă deformațiile care au loc în zona desprinderii așchiei, o importanță deosebită în evoluția uzurii joacă și forțele de frecare, respectiv coeficientul dinamic al frecării. Acest coeficient are valori diferite pentru diverse perechi plăcută-material de prelucrat.

Rezultatele experimentale sînt concentrate în figurile 1 și 2 și în tabela 1, ele confirmînd considerațiile expuse mai înainte.

Tabela 1

γ°	OL 60				OL 70			
	τ_γ		K_γ		τ_γ		K_γ	
	ENC_1	S_1	ENC_1	S_1	ENC_1	S_1	ENC_1	S_1
−10	0,343	0,74	0,70	0,94	—	—	—	—
− 5	—	0,87	—	0,97	0,29	0,92	0,78	0,98
0	0,72	0,94	0,90	0,99	1	1	1	1
5	1	1	1	1	0,53	0,87	0,88	0,97
10	0,78	0,78	0,92	0,95	—	—	—	—

Se constată că valoarea optimă a unghiului de degajare este diferită pentru cele două oțeluri studiate, reieșind astfel influența proprietăților mecanice ale materialului de așchiat. De asemenea, se mai observă că valoarea optimă a unghiului γ se păstrează pentru același oțel și în cazul prelucrării cu plăcuțe din carburi metalice și în cazul prelucrării cu plăcuțe mineralo-ceramice.

Cînd se lucrează cu alte valori ale unghiului de degajare durabilitatea scade, valorile coeficientului τ_γ fiind diferite de la caz la caz. Aceasta se datorește evoluției diferite a suprafeței de contact. În cazul plăcuțelor mineralo-ceramice, uzura evoluează mai rapid, respectiv durabilitatea scade mai repede decît în cazul plăcuțelor din carburi metalice. Structura mai fragilă a plăcuțelor mineralo-ceramice le face mai sensibile la variațiile eforturilor de așchiere, la care fenomenul frecării dinamice joacă un rol important.

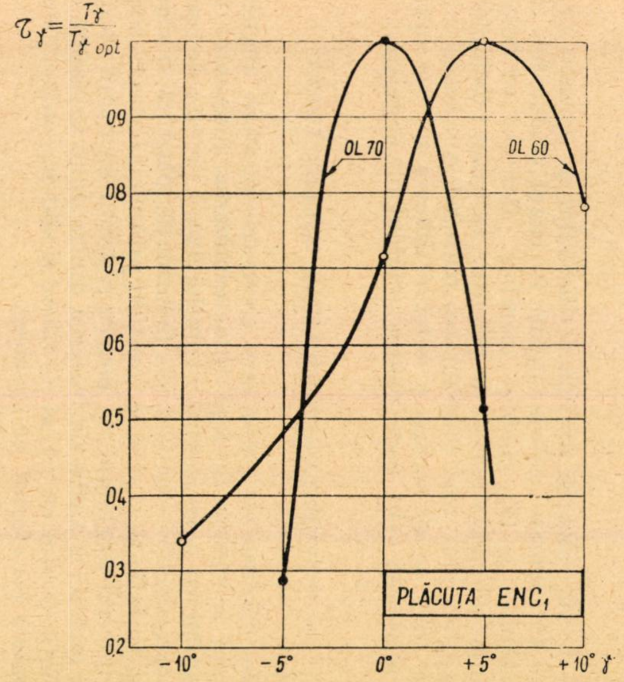


Fig. 1. — Variația coeficientului adimensional τ_γ, funcție de unghiul γ pentru OL 60 și OL 70, în cazul așchierii cu plăcuțe ENC$_1$, la viteza medie de respectiv 190 m/min și 116 m/min.

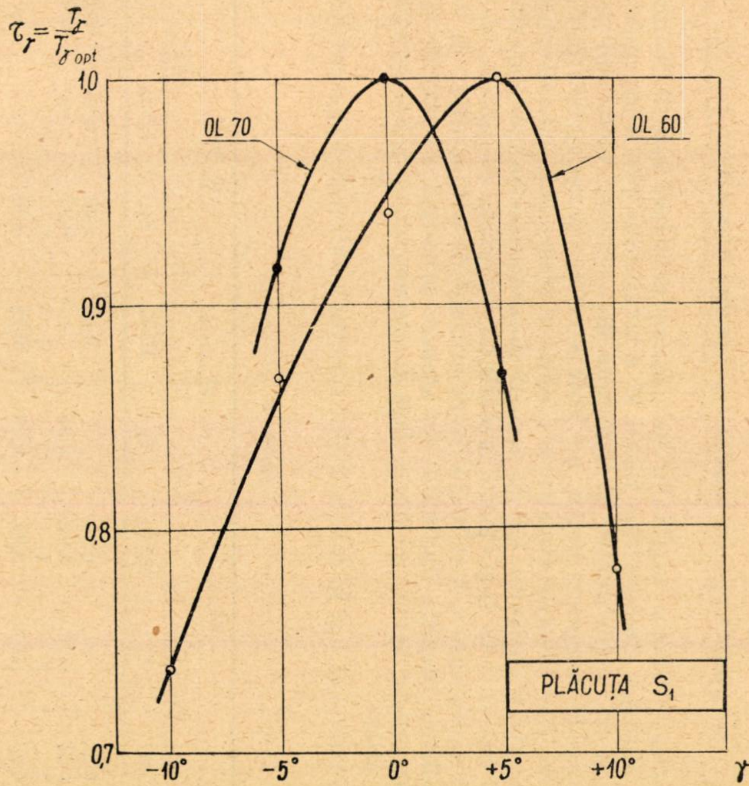


Fig. 2. — Variația coeficientului adimensional τ_γ, funcție de unghiul γ pentru OL 60 și OL 70, în cazul așchierii cu plăcuțe S$_1$, la viteza medie de respectiv 196 m/min și 156 m/min.

b. INFLUENŢA UNGHIULUI α ASUPRA UZURII

Valoarea optimă a unghiului de aşezare principal este influenţată direct de mărimea diametrului piesei şi a avansului privit ca mărime geometrică şi nu ca parametru al regimului de aşchiere. Aceşti doi parametri, avansul şi diametrul piesei, au însă o influenţă neglijabilă faţă de cea a deformaţiilor plastice din stratul aşchiat al piesei, care vine în contact cu partea activă a cuţitului. Cu cît această deformaţie este mai puternică, cu atît mai puternic va fi şi efectul frecării de suprafaţa de aşezare secundară, adică uzura care a fost luată drept criteriu de comparaţie. Ca şi în cazul precedent, variaţia unghiului de aşezare principal dă naştere unei variaţii a suprafeţei de contact dintre faţa de aşezare secundară şi suprafaţa aşchiată a piesei.

În figurile 3 şi 4 şi în tabela 2 sînt reunite rezultatele experimentale.

Tabela 2

$\alpha°$	OL 60				OL 70			
	τ_α		K_α		τ_α		K_α	
	ENC_1	S_1	ENC_1	S_1	ENC_1	S_1	ENC_1	S_1
3°30′	0,53	—	0,81	—	0,56	0,62	0,89	0,92
7	0,77	0,78	0,92	0,95	—	0,98	—	0,99
11	1	1	1	1	1	1	1	1
14°30′	0,84	0,94	0,94	0,98	0,78	0,96	0,95	0,99

Se vede că valoarea optimă a unghiului de aşezare principal este aceeaşi $\alpha = 11°$ pentru ambele oţeluri în cazul prelucrării cu plăcuţele mineralo-ceramice şi din carburi metalice. Pantele curbelor sînt însă diferite pentru cele două genuri de plăcuţe. În cazul plăcuţelor mineralo-ceramice pantele sînt mai pronunţate, marcînd o scădere mai rapidă a durabilităţii cînd se utilizează o valoare diferită de cea optimă. Explicaţia este analoagă celei date pentru unghiul de degajare.

c. INFLUENŢA UNGHIULUI α_1 ASUPRA UZURII

Analiza oricărui alt parametru geometric în afara unghiului de aşezare secundar se reduce de fapt la determinarea influenţei pe care respectivul parametru o are asupra evoluţiei uzurii pe faţa de aşezare secundară prin intermediul efectelor de deformaţie plastică şi elastică, ce le creează prin variaţia sa şi care se transmit prin metal asupra zonei de uzură studiată. În cazul unghiului α_1, pentru criteriul de uzură ales, fenomenul apare ca şi cum ar fi vorba de frecarea dintre două suprafeţe ce se deplasează una faţă de alta cu viteza de tăiere şi sînt în contact pe o suprafaţă reală, variabilă cu efortul de aşchiere.

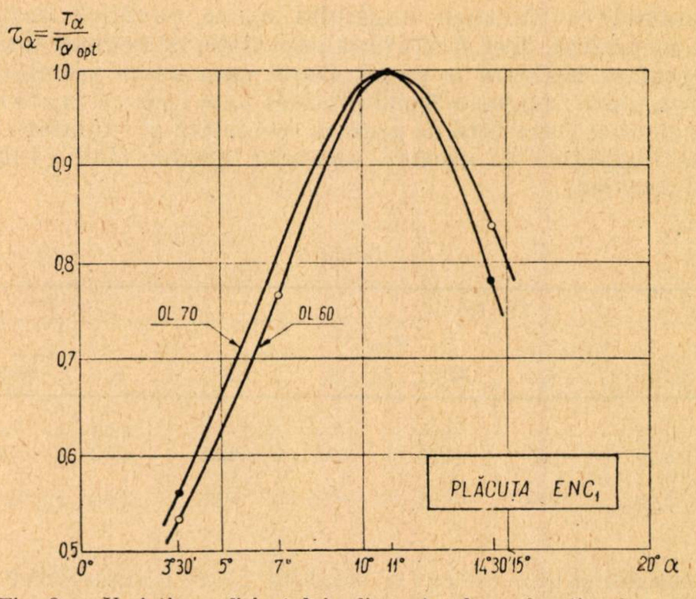


Fig. 3. — Variația coeficientului adimensional τ_α, funcție de unghiul α pentru OL 60 și OL 70, în cazul așchierii cu plăcuțe ENC$_1$, la viteza medie de respectiv 145 m/min și 78 m/min.

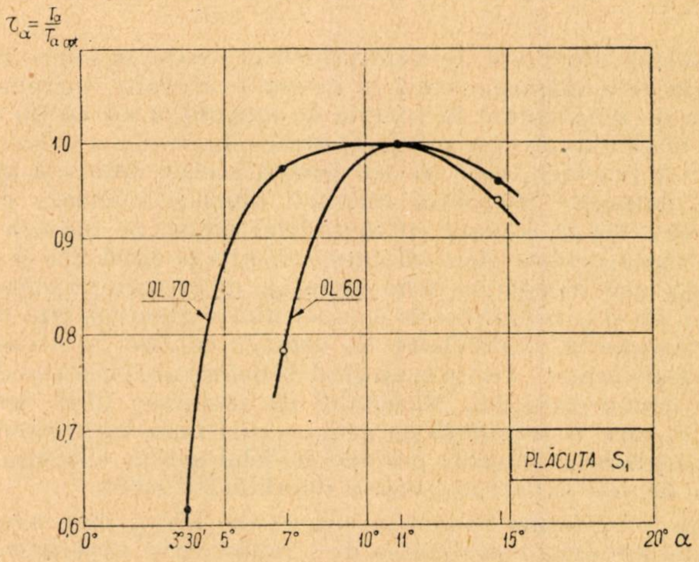


Fig. 4. — Variația coeficientului adimensional τ_α, funcție de unghiul α pentru OL 60 și OL 70, în cazul așchierii cu plăcuțe S$_1$ la viteza medie de respectiv 186 m/min și 116 m/min.

Schimbîndu-se valoarea unghiului α_1, se modifică înclinația feței de așezare secundară, deci și mărimea suprafeței de contact dintre această față și suprafața așchiată a piesei. După cum arată rezultatele experimentale prezentate în figurile 5 și 6 și tabela 3, se vede că există o suprafață optimă de contact între fața de așezare secundară și suprafața piesei, care corespunde unghiului de așezare secundar optim, cînd evoluția uzurii are loc cel mai lent.

Tabela 3

α°_1	OL 60				OL 70			
	τ_{α_1}		K_{α_1}		τ_{α_1}		K_{α_1}	
	ENC_1	S_1	ENC_1	S_1	ENC_1	S_1	ENC_1	S_1
5	0,72	—	0,90	—	—	0,59	—	0,91
10	0,79	0,65	0,93	0,91	0,52	0,82	0,86	0,96
15	1	1	1	1	1	1	1	1
20	0,92	0,79	0,98	0,95	0,72	0,96	0,94	0,99

Remarcăm și în acest caz că unghiul α_1 are o aceeași valoare optimă în toate alternativele studiate.

d. INFLUENȚA UNGHIULUI $\varkappa$ ASUPRA UZURII

Studierea unghiului de atac principal scoate în evidență că nu se poate vorbi de o valoare optimă ca în cazul celorlalte unghiuri, în sensul că curbele de durabilitate în funcție de unghiul $\varkappa$ nu au un maxim [1]. Creșterea unghiului de atac principal atrage după sine o scădere a durabilității. Acest fenomen, care are loc pentru același avans și adîncime de tăiere, se datorește micșorării lungimii muchiei tăietoare principale a cuțitului ce vine în contact cu materialul piesei, pe măsură ce unghiul de atac principal crește. Această micșorare atrage după sine și o micșorare a suprafeței reale de contact între suprafața de așezare principală și suprafața piesei, cît și a suprafeței de contact dintre așchie și fața de degajare. Aceste micșorări a suprafețelor de contact conduc la o concentrare a efortului de deformare, deci și la un grad de deformare plastic mai concentrat în zona vîrfului cuțitului. Materialul de prelucrat fiind deformat mai puternic va crea o suprafață de contact mai mare între suprafața piesei și cea de așezare secundară, grăbind în felul acesta distrugerea muchiei secundare de atac și deci micșorarea durabilității sculei.

Dată fiind forma inițială a plăcuțelor ENC_1, care aveau unghiul $\varkappa = 45°$, nu am avut posibilitatea de a ridica curbe experimentale pentru diferite valori ale unghiului de atac principal. Ca atare, studiul comparativ între plăcuțele mineralo-ceramice și cele din carburi metalice nu l-am putut face deocamdată neavînd datele necesare la îndemînă.

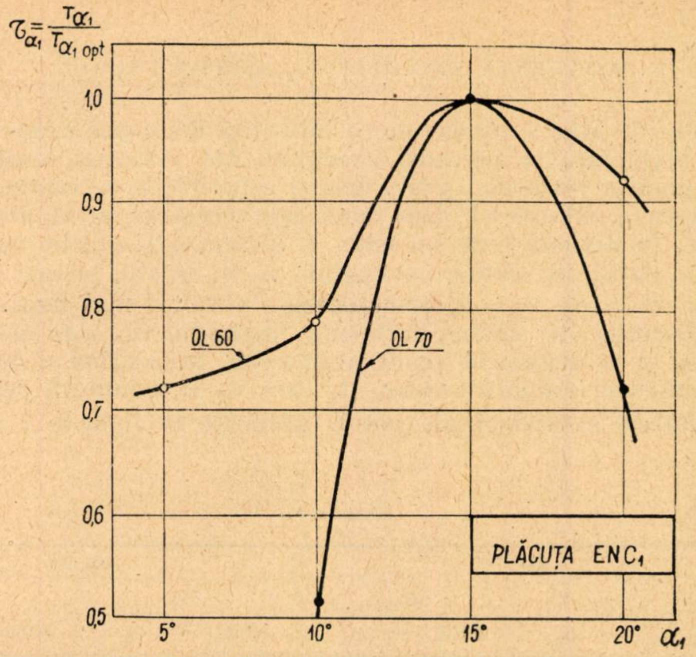


Fig. 5. — Variația coeficientului adimensional τ_{α_1}, funcție de unghiul α_1 pentru OL 60 și OL 70, în cazul așchierii cu plăcuțe ENC_1, la viteza medie de respectiv 160 m/min și 82 m/min.

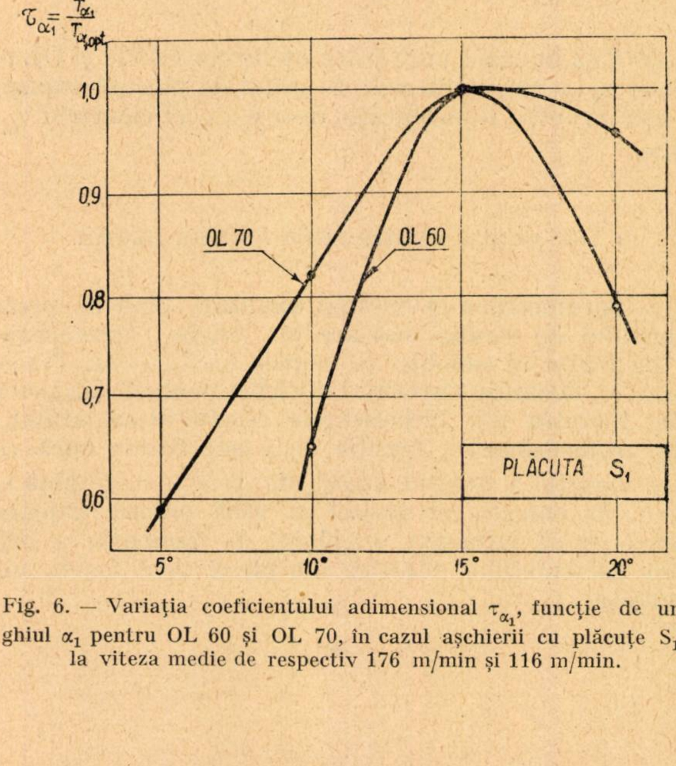


Fig. 6. — Variația coeficientului adimensional τ_{α_1}, funcție de unghiul α_1 pentru OL 60 și OL 70, în cazul așchierii cu plăcuțe S_1, la viteza medie de respectiv 176 m/min și 116 m/min.

e. INFLUENŢA UNGHIULUI $\varkappa_1$ ASUPRA UZURII

Unghiul de atac secundar are o influenţă deosebită asupra calităţii suprafeţei prelucrate şi preciziei execuţiei. De valoarea acestui unghi depinde suprafaţa reală de aşchie, deci şi asperităţile ce rămîn pe piesă. Pentru a avea o calitate cît mai bună este necesar ca acest unghi să fie cît mai mic. Pe această linie s-a mers în construcţia sculelor atunci cînd s-au realizat cuţite de strung cu unghiul $\varkappa_1$ în trepte, primul dintre ele avînd chiar valoarea $\varkappa_1 = 0$, următoarele cu valori mai mari. În cazul cuţitelor obişnuite de strung, influenţa unghiului de atac secundar se manifestă ca şi la unghiurile studiate anterior, prezentînd o durabilitate maximă pentru o anumită valoare $\varkappa_1$ care va fi denumită optimă.

Rezultatele experimentale pot fi urmărite în figurile 7 şi 8 şi în tabela 4.

Tabela 4

$\varkappa_1^\circ$	OL 60				OL 70			
	$\tau_{\varkappa_1}$		$K_{\varkappa_1}$		$\tau_{\varkappa_1}$		$K_{\varkappa_1}$	
	ENC$_1$	S$_1$	ENC$_1$	S$_1$	ENC$_1$	S$_1$	ENC$_1$	S$_1$
5	0,81	0,18	0,94	0,69	0,96	0,79	0,99	0,96
10	1	1	1	1	1	1	1	1
15	0,62	0,69	0,85	0,92	0,70	0,92	0,93	0,99

Se observă că în cazul prelucrării oţelurilor OL 70 şi OL 60, valoarea optimă este de $\varkappa_1 = 10°$, indiferent de genul de plăcuţă utilizată. Ceea ce diferă însă, este evoluţia durabilităţii, deci şi a coeficientului $\tau_{\varkappa_1}$, în funcţie de unghiul $\varkappa_1$.

f. INFLUENŢA UNGHIULUI λ ASUPRA UZURII

În afara parametrilor geometrici analizaţi pînă în prezent, partea activă a cuţitului de strung mai are un unghi caracteristic şi anume unghiul de înclinaţie al muchiei principale aşchietoare. Practic el are o importanţă mare, deoarece datorită lui aşchia poate fi dirijată fie în urma cuţitului, fie înaintea lui. Experienţele efectuate au arătat că variaţia coeficientului adimensional τ_λ funcţie de λ este foarte mică, ceea ce face ca, pentru o variaţie a acestui unghi de la $\lambda = -5°$ pînă la $\lambda = +5°$, coeficientul K_λ de corecţie al vitezei să aibă practic valoarea $K_\lambda = 1$. Aceasta dovedeşte că influenţa unghiului de înclinaţie a muchiei principale asupra deformaţiilor plastice ale piesei este foarte mică şi deci poate fi neglijată.

★

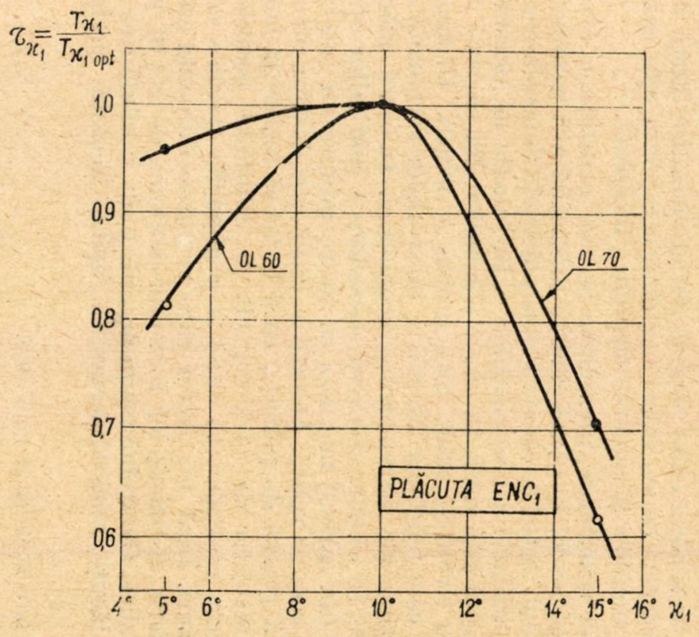


Fig. 7. — Variaţia coeficientului adimensional $\tau_{\varkappa_1}$, funcţie de unghiul $\varkappa_1$ pentru OL 60 şi OL 70, în cazul aşchierii cu plăcuţe ENC$_1$, la viteza medie de respectiv 160 m/min și 82 m/min.

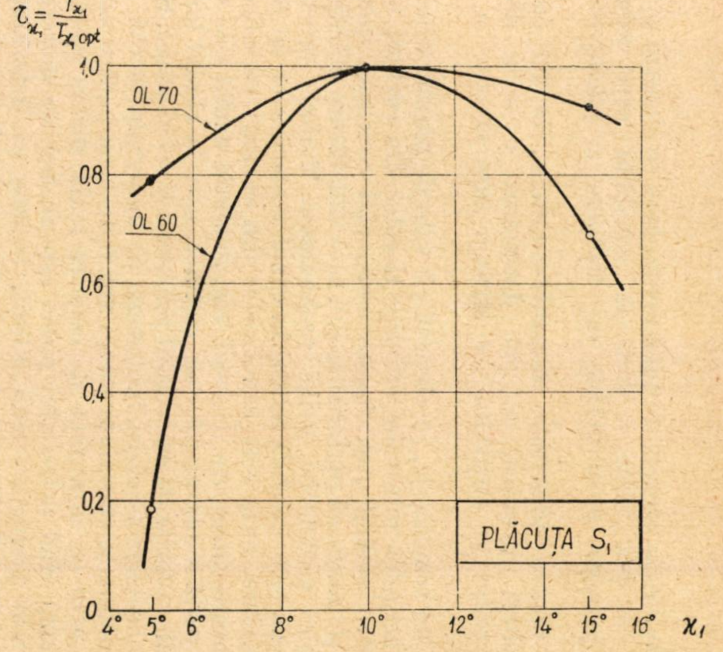


Fig. 8. — Variaţia coeficientului adimensional $\tau_{\varkappa_1}$, funcţie de unghiul $\varkappa_1$ pentru OL 60 şi OL 70, în cazul aşchierii cu plăcuţe S$_1$, la viteza medie de respectiv 176 m/min şi 117 m/min.

Din rezultatele prezentate pînă acum, care se bazează pe circa 3 500 determinări, se pot trage o serie de concluzii care aduc precizări în ceea ce priveşte posibilităţile de utilizare a plăcuţelor mineralo-ceramice.

Astfel pentru plăcuţele mineralo-ceramice, la fel ca şi pentru cele din carburi metalice, se pot determina o serie de parametri geometrici optimi ai cuţitului de strung, care conduc la o durabilitate maximă.

Urmărind rezultatele, se observă că valorile parametrilor geometrici optimi ai plăcuţelor mineralo-ceramice şi celor din carburi metalice sînt identice pentru acelaşi oţel. Aceste constatări confirmă ipoteza admisă în metodică şi anume că materialele din care sînt făcute plăcuţele nu influenţează asupra geometriei sculei aşchietoare. Trebuie precizat însă că această ipoteză este valabilă numai în cazul materialelor de scule care au durităţi apropiate, cum este cazul celor din carburi metalice şi a celor mineralo-ceramice încercate. Într-adevăr, evoluţia uzurii este strîns legată de mărimea reală a suprafeţelor de contact, care la rîndul lor sînt legate de deformaţiile suferite de materialul prelucrat şi cel al sculei. Sub acţiunea unor forţe de aşchiere similare, indiferent de materialul sculei, deformaţiile ce vor lua naştere la suprafaţa piesei vor fi aceleaşi pentru unul şi acelaşi material. Pentru ca suprafaţa de contact reală dintre piesă şi sculă să crească, în cazul cînd materialul piesei este acelaşi iar materialul sculelor utilizate pentru prelucrare este diferit, trebuie ca deformaţiile la care este supusă scula să fie diferite. Acest lucru se poate întîmpla numai pentru un material de scule a căror caracteristici mecanice diferă mult şi în nici un caz pentru cele ce au valori asemănătoare, cum este cazul plăcuţelor din carburi metalice şi mineralo-ceramice încercate.

Tot din rezultatele prezentate se mai constată o evoluţie diferită a durabilităţii sculei în cazul cînd se utilizează alţi parametri geometrici decît cei optimi. Astfel se observă că la plăcuţele mineralo-ceramice pantele curbelor de variaţie a coeficienţilor τ, în funcţie de parametrul studiat, sînt mai pronunţate decît în cazul plăcuţelor din carburi metalice, ceea ce denotă o evoluţie mult mai rapidă a uzurii. Urmarea firească a acestui fapt este mărimea diferită a intervalelor recomandabile, în jurul valorilor optime ale parametrilor geometrici. În cazul plăcuţelor mineralo-ceramice, se impune o severă respectare a mărimilor optime, pe cînd la plăcuţele din carburi metalice se poate admite un interval ceva mai larg în jurul acestor valori. Aceasta se datoreşte desigur structurii diferite a celor două genuri de plăcuţe, care le fac să reziste în mod deosebit la variaţiile eforturilor de aşchiere, cît şi celorlalte proprietăţi ale lor, datorită cărora reacţionează altfel la regimurile termice ce se dezvoltă în acele cazuri. Încă un factor care ar putea influenţa este şi modul de prindere diferit al plăcuţelor mineralo-ceramice de cel al plăcuţelor din carburi metalice. Cum pînă acum nu am avut posibilitatea de a încerca cuţite cu plăcuţe mineralo-ceramice lipite, această problemă rămîne deschisă.

Primită la redacţie la 21 iunie 1958.

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТОКАРНЫХ РЕЗЦОВ, ОСНАЩЕННЫХ МИНЕРАЛЬНО-КЕРАМИЧЕСКИМИ ПЛАСТИНКАМИ И ПЛАСТИНКАМИ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КАРБИДОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе представлены сравнительные результаты, полученные при обработке румынских сталей при помощи минерально-керамических пластинок ENC_1 (румынского производства) и пластинок из металлических карбидов S_1 (немецкого производства).

В качестве критерия был принят износ вспомогательной кромки резца, вследствие того что она непосредственно влияет на качество резания и точность обработки и, таким образом, на экономичность процесса обработки.

Учитывая величину действительных поверхностей соприкосновения между обрабатываемой деталью, резцом и стружкой, можно было установить, что величины оптимальных углов являются одинаковыми в случае обработки одинаковой стали инструментом из абсолютно различных материалов при условии относительно одинаковой их твердости. Для различных материалов пластинок эволюция износа отличается при несоблюдении оптимальных геометрических параметров. Это является следствием структуры и свойств пластинок, различно воспринимающих вариации усилий резания и теплового режима.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Изменение безразмерного коэффициента τ_γ в зависимости от угла γ при обработке сталей OL 60 и OL 70 пластинками ENC_1 на средней скорости 190 м/мин, соответственно 156 м/мин.

Рис. 2. — Изменение безразмерного коэффициента τ_γ в зависимости от угла γ при обработке сталей OL 60 и OL 70 пластинками S_1 на средней скорости 196 м/мин, соответственно 160 м/мин.

Рис. 3. — Изменение безразмерного коэффициента τ_α в зависимости от угла α при обработке сталей OL 60 и OL 70 пластинками ENC_1 на средней скорости 145 м/мин, соответственно 78 м/мин.

Рис. 4. — Изменение безразмерного коэффициента τ_α в зависимости от угла α при обработке сталей OL 60 и OL 70 пластинками S_1 на средней скорости 186 м/мин, соответственно 116 м/мин.

Рис. 5. — Изменние безразмерного коэффициента τ_{α_1} в зависимости от угла α_1 при обработке сталей OL 60 и OL 70 пластинками ENC_1 на средней скорости 160 м/мин, соответственно 82 м/мин.

Рис. 6. — Изменение безразмерного коэффициента τ_{α_1} в зависимости от угла α_1 при обработке сталей OL 60 и OL 70 пластинками S_1 на средней скорости 178 м/мин, соответственно 116 м/мин.

Рис. 7. — Изменение безразмерного коэффициента $\tau_{\varkappa_1}$ в зависимости от угла $\varkappa_1$ при обработке сталей OL 60 и OL 70 пластинками ENC_1 на средней скорости 160 м/мин, соответственно 82 м/мин.

Рис. 8. — Изменение безразмерного коэффициента $\tau_{\varkappa_1}$ в зависимости от угла $\varkappa_1$ при обработке сталей OL 60 и OL 70 пластинками S_1 на средней скорости 176 м/мин, соответственно 117 м/мин.

ÉTUDE COMPARÉE DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES DES OUTILS DE COUPE EN CÉRAMIQUE ET À BASE DE CARBURES MÉTALLIQUES

RÉSUMÉ

Les auteurs présentent les résultats d'une étude comparée des plaquettes minéralo-céramiques ENC_1 (de provenance roumaine) et des plaquettes de carbures métalliques S_1 (de provenance allemande) lors de l'usinage des aciers roumains.

On a choisi comme critérium l'usure de la surface en dépouille frontale étant donné l'influence que celle-ci a sur la qualité des surfaces usinées, sur la précision de l'exécution et, par conséquent, sur le rendement, au point de vue économique, du processus d'usinage.

En tenant compte de la grandeur des surfaces réelles de contact entre la pièce, l'outil et le copeau, on constate que les valeurs des angles les plus favorables sont les mêmes lorsqu'il s'agit de la coupe du même acier, avec des outils confectionnées de matériaux totalement différents, à condition que ceux-ci possèdent la dureté appropriée. Ce qui diffère d'un matériel de plaquette à un autre, c'est l'évolution de l'usure, lorsqu'on ne respecte pas les paramètres géométriques optimums. Ce fait est dû à la structure et aux propriétés des plaquettes, qui supportent de façon différente les variations des efforts de détachement en copeaux et du régime thermique.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Variation du coefficient adimensionnel τ_γ, en fonction de l'angle γ, pour les aciers OL 60 et OL 70, lors de la coupe avec des plaquettes ENC_1, à la vitesse moyenne de 190 m/min, respectivement, 116 m/min.

Fig. 2. — Variation du coefficient adimensionnel τ_γ, en fonction de l'angle γ, pour les aciers OL 60 et OL 70, lors de la coupe avec des plaquettes S_1, à la vitesse moyenne de 196 m/min, respectivement, 156 m/min.

Fig. 3. — Variation du coefficient adimensionnel τ_α, en fonction de l'angle α, pour les aciers OL 60 et OL 70, lors de la coupe avec des plaquettes ENC_1, à la vitesse moyenne de 145 m/min respectivement, 78 m/min.

Fig. 4. — Variation du coefficient adimensionnel τ_α, en fonction de l'angle α, pour les aciers OL 60 et OL 70, lors de la coupe avec des plaquettes S_1, à la vitesse moyenne de 186 m/min, respectivement, 116 m/min.

Fig. 5. — Variation du coefficient adimensionnel τ_{α_1} en fonction de l'angle α_1, pour les aciers OL 60 et OL 70, lors de la coupe avec des plaquettes ENC_1, à la vitesse moyenne de 160 m/min, respectivement, 82 m/min.

Fig. 6. — Variation du coefficient adimensionnel τ_{α_1}, en fonction de l'angle α_1, pour les aciers OL 60 et OL 70, lors de la coupe avec des plaquettes S_1, à la vitesse moyenne de 176 m/min, respectivement, 196 m/min.

Fig. 7. — Variation du coefficient adimensionnel $\tau_{\varkappa_1}$, en fonction de l'angle $\varkappa_1$, pour les aciers OL 60 et OL 70, lors de la coupe avec des plaquettes ENC_1, à la vitesse moyenne de 160 m/min, respectivement, 82 m/min.

Fig. 8. — Variation du coefficient adimensionnel $\tau_{\varkappa_1}$, en fonction de l'angle $\varkappa_1$, pour les aciers OL 60 et OL 70, lors de la coupe avec des plaquettes S_1, à la vitesse moyenne de 176 m/min, respectivement, 117 m/min.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Popov, D. Pavelescu, I. Mitrică, E. Deciu, M. Calciu, N. Pascu, *Cu privire la parametrii geometrici ai cuțitului armat cu plăcuțe de carburi metalice.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *2*, 423 (1957).
2. — *Despre regimul optim de așchiere cu cuțite de strung armate cu plăcuțe din carburi metalice.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3*, 915 (1957).
3. A. I. Isaev, N. N. Zorev, L. K. Kucima, *Aşchierea metalelor cu scule armate cu plăcuțe mineralo-ceramice.* Ed. tehnică, București, 1954.
4. М. Н. Ларин, Оптимальные геометрические параметры режущей части инструментов. Оборонгиз, Москва, 1953.
5. А. М. Розенберг, А. Н. Еренин, Элементы теории процесса резания металлов. Машгиз, Москва-Свердловск, 1956.
6. М. И. Клушин, Резание металлов, Машгиз, Москва, 1953.
7. E. Blanpain, *Théorie et pratique des outils de coupe.* Ed. Eyrolles, Paris, 1955.
8. В. С. Раковский, Ф. Ф. Смирнов, Л. А. Рождественский, И. И. Крюков, Твердые сплавы в машиностроении, Машгиз, Москва, 1955.
9. L. J. St. Clair, *Étude et emploi de l'outil de coupe.* Ed. Dunod, Paris, 1956.

În această rubrică se publică lucrările de nivel ştiinţific superior, în care se expun:

— stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se totodată aspectul nou;

— generalizări asupra dezvoltărilor matematice în probleme de cercetări de mecanică aplicată;

— descrieri de aparate pentru cercetări ştiinţifice realizate în Institutul de mecanică aplicată.

STUDII, CERCETĂRI ŞI PERSPECTIVE ÎN DOMENIUL TEORIEI MAŞINILOR ŞI MECANISMELOR ÎN REPUBLICA POPULARĂ ROMÎNĂ *)

DE

D. MANGERON şi R. BOGDAN

Preocupările în domeniul ştiinţelor tehnice în ţara noastră sînt relativ recente. Sporadice înainte de primul război mondial, ele au cunoscut o oarecare dezvoltare apoi, căpătînd însă un aspect organizat şi sistematic, în special în ultimii ani, cînd încep lucrări cu caracter de continuitate. Au existat, însă, oameni de ştiinţă şi tehnicieni romîni, care au adus contribuţii deosebite în diferite domenii.

După instaurarea regimului democrat-popular, o dată cu înfiinţarea Academiei Republicii Populare Romîne, s-au creat o serie de institute de cercetări care au cuprins şi domeniul ştiinţelor tehnice. Concomitent cu crearea bazelor necesare pentru dezvoltarea cercetării ştiinţifice, reorganizarea învăţămîntului superior a dat posibilitatea formării în condiţii optime a unor noi generaţii, necesare în procesul complex al dezvoltării ţării noastre pe calea socialismului.

---

*) Extras din raportul prezentat la a II-a Consfătuire Unională în domeniul problemelor de bază ale teoriei maşinilor şi mecanismelor, Moscova 24—28 martie 1958.

Desigur, activitatea de cercetare în aceste institute a trebuit să facă faţă la diverse greutăţi, inerente oricărei activităţi de început.

Printre institutele create în această perioadă în cadrul Academiei R.P.R., este şi Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia", care a reuşit să-şi axeze activitatea pe linia cercetărilor fundamentale, menţinînd în acelaşi timp o strînsă legătură cu sectoarele industriale, prin cercetări şi studii menite să ducă la soluţionarea diferitelor probleme puse de industrie.

Dezvoltarea industrială a impus o intensificare a construcţiei de maşini pentru diversele sectoare ale producţiei din ţara noastră, ceea ce a creat un stimulent în dezvoltarea studiilor şi cercetărilor în domeniul mecanicii.

Activitatea în domeniul construcţiei de maşini şi a teoriei mecanismelor şi maşinilor, baza teoretică a acestui vast şi fundamental domeniu, a început în primul rînd sub aspectul didactic, prin organizarea cursurilor de specialitate.

Cercetarea ştiinţifică în domeniul teoriei maşinilor şi mecanismelor, care a urmat în mod firesc după perioada de organizare şi documentare în învăţămîntul superior, a început în ultimii patru ani, atît în cadrul institutelor de învăţămînt superior, cît şi în cadrul Institutului de mecanică aplicată al Academiei R.P.R.

Lucrările celor două mari şcoli rusă-sovietică şi germană au constituit documentaţia de bază în organizarea şi orientarea cercetării ştiinţifice, iar lucrările întemeietorilor teoriei mecanismelor, Cebîşev şi Burmester, precum şi a elevilor şi urmaşilor acestora, reprezintă instrumente permanente de documentare şi surse deosebit de utile de inspiraţii pentru cercetătorii noştri.

La sfîrşitul anului 1955 ia fiinţă un sector de teoria maşinilor şi mecanismelor în cadrul Institutului de mecanică aplicată. Activitatea acestui sector începe prin elaborarea unor metode de clasificare a mecanismelor şi a unei metode mecano-electronice de cercetare a mecanismelor. Totodată, se rezolvă şi unele probleme puse de producţie.

Studiile elaborate au făcut obiectul diferitelor comunicări în cadrul sesiunilor ştiinţifice ale Academiei R.P.R. şi au fost publicate în periodicele în limba romînă şi în limbi străine ale Institutului de mecanică aplicată, iar unele sînt în curs de publicare în reviste de specialitate de peste hotare.

Dintre centrele de învăţămînt superior s-a remarcat prin desfăşurarea unei activităţi de cercetare cu caracter original şi de continuitate Institutul politehnic din Iaşi. În Buletinul Institutului politehnic Iaşi, s-au publicat articole în domeniul teoriei mecanismelor, atît de autori romîni cît şi străini. De altfel, unele din lucrările elaborate în cadrul acestui institut au fost publicate în revista în limbi străine a Institutului de mecanică aplicată, punîndu-se astfel bazele unei colaborări publicistice între cele două institute.

Colaborarea se adînceşte însă şi pe linia cercetării ştiinţifice.

În ultimul timp, Institutul de mecanică aplicată a realizat o colaborare similară şi cu Institutul politehnic din Bucureşti.

Astfel, Institutul de mecanică aplicată începe să devină un punct de polarizare a activității de cercetare științifică din țară și în domeniul teoriei mecanismelor.

Publicațiile periodice ale Institutului de mecanică aplicată, și anume Studii și cercetări de mecanică aplicată şi Revue de mécanique appliquée (în limbile franceză, rusă, engleză, germană), ca și cele ale institutelor de învățămînt superior, au început să constituie instrumente de difuzare prețioase ale rezultatelor studiilor și cercetărilor noastre și de promovare a lucrărilor valoroase.

În ultimul timp, aceste periodice au început a fi larg difuzate (printr-o acțiune de schimb de publicații) la numeroase instituții de peste hotare, care se ocupă de anumite domenii de mecanică aplicată.

Liniile de dezvoltare ale cercetărilor în domeniul teoriei mașinilor și mecanismelor, în țara noastră, pot fi grupate astfel :

I. Metode generale de studiu al mecanismelor (plane și spațiale).

II. Utilizarea unor metode generale de studiu al mecanismelor plane sau spațiale.

III. Studii teoretico-experimentale izvorîte din probleme legate direct de practică.

I. În cadrul metodelor generale de studiu al mecanismelor plane și spațiale s-au elaborat pînă acum o metodă tensorială, metoda accelerațiilor reduse, o metodă de clasificare a mecanismelor și metode mecano-electronice.

— Metoda tensorială de studiu a mecanismelor și lanțurilor cinematice (D. Mangeron și C. Drăgan) constă în introducerea unui tensor ortogonal afin de ordinul doi dintr-un spațiu cu patru dimensiuni, ce definește poziția unui organ din lanț față de organul precedent, numit tensor de poziție, a unui tensor caracteristic lanțului considerat și dintr-un vector viteză. Metoda permite să caracterizeze cu ajutorul elementelor matematice univoc determinate poziția unui element cinematic dintr-un lanț, în mișcarea sa relativă față de elementul precedent, sau configurația unui circuit arbitrar extras dintr-un lanț cinematic compus. Metoda conduce totodată la caracterizarea completă a mișcării elementelor și la expresia energiei cinetice funcție de coordonatele lagrangeene, baza folosirii sistematice a mecanicii analitice clasice sau generalizate în teoria mașinilor și mecanismelor și în problema fundamentală a tehnicii actuale — automatizarea. Metoda elaborată se situează pe linia cercetărilor recente ale lui I. F. Moroșkin și S. G. Kislițîn, domeniu în care lucrează și alți oameni de știință.

— Metoda accelerațiilor reduse (D. Mangeron și C. Drăgan) rezolvă într-o formă generală problema studiului cinematic al mecanismelor ; ea se bazează pe generalizarea formulelor lui Somov, pe noțiunea de accelerație redusă de orice ordin și pe un număr de teoreme relative la acestea. Metoda conduce la rezolvarea problemei de distribuție a accelerațiilor de orice ordin, apărînd deosebit de fructuoasă în cazul studiului tuturor grupelor lui Assur, aparținînd mecanismelor plane și extinzîndu-se la mecanisme cuprinzînd cuple cinematice superioare. Lucrările în acest domeniu au condus la o rodnică colaborare cu unii cercetători din U.R.S.S.

— Pentru a veni în ajutorul diferitelor operații care se întîlnesc în problemele de analiza și sinteza structurală a mecanismelor, s-a elaborat un studiu asupra clasificării mecanismelor spațiale, bazat pe complexitatea lanțurilor cinematice (E. Bugaievski, R. Bogdan, C. Pelecudi). În acest scop au fost determinate o serie de relații structurale, care permit compararea lanțurilor funcție de numărul elementelor și contururilor închise.

Clasificarea este prezentată în final sub forma unui tabel împărțit în zone, care corespund mecanismelor plane și spațiale, cu proprietăți comune ; rezultatele obținute sînt în concordanță cu lucrările efectuate pînă acum în această direcție .

— Metoda mecano-electronică de cercetare experimentală a mecanismelor (R. Bogdan, C. Pelecudi, L. Calmaciuc) dă posibilitatea obținerii rapide a vizualizării variației parametrilor cinematici, chiar în timpul funcționării. În acest scop s-a imaginat și studiat teoretico-experimental două sisteme mecano-electronice, în primul rînd pentru studiul deplasărilor în mecanisme. Un prim sistem explorează traiectoriile în coordonate carteziene, iar al doilea în coordonate polare. Astfel, mărimile mecanice sînt transformate în mărimi electrice, apoi amplificate și redate pe ecranul unui osciloscop. Erorile de trasare a traiectoriilor sînt minime, ceea ce scoate în evidență suficienta precizie de lucru a sistemelor preconizate. În prezent, se studiază extinderea metodei în spațiu și posibilitatea cercetării pe această cale a vitezelor relative în mecanisme.

II. În acest domeniu s-au făcut sistematizări și s-au adus contribuții la metoda utilizării variabilei complexe, privind accelerațiile reduse sau ordinare de orice ordin, centrele accelerațiilor și cercurilor corespunzătoare, care constituie extensiuni ale cercurilor inflexiunilor și întoarcerilor (D. Mangeron, A. Braier, V. Manafu).

Menționăm o metodă de determinare a accelerațiilor prin proiecții, care poate fi utilizată cu succes atît în analiza cît și în sinteza mecanismelor (R. Woinaroski, D. Romalo). Plecînd de la proprietatea distribuției vitezelor solidului rigid în mișcare, și anume că proiecțiile vitezelor a două puncte oarecare pe direcția determinată de cele două puncte sînt egale, se stabilește prin calcule riguroase o proprietate asemănătoare și pentru accelerații. Se găsește astfel o nouă metodă pentru calculul accelerației unui punct dintr-un mecanism.

Menționăm, de asemenea, și o nouă metodă grafică bazată pe introducerea coordonatelor cilindrice vectoriale de determinare a parametrilor cinetici ai mecanismelor spațiale (N. Irimiciuc).

Relativ la trasarea profilului camelor sinusoidale s-a studiat o metodă ce face apel la mișcarea plan-paralelă, cu ajutorul unei curbe generator-cicloidale (D. Tutunaru, Tr. Demian).

La metoda asemănării s-au extins cunoscutele teoreme ale lui Kotelnikov (D. Mangeron), rezultate care au fost folosite la studiul diferitelor mecanisme (V. Manafu, N. Manolescu, A. Ripianu).

S-a făcut unele studii interesînd camele cu tachet cu talpă plană sau cruci malteze (O. Munteanu), precum şi studii relative la realizarea unei articulaţii universale simple omocinetice (N. Irimiciuc).

III. În scopul sprijinirii industriei bunurilor de consum s-au cercetat în domeniul textil mărirea vitezei de lucru la maşinile circulare de tricotat (E. Bugaievski, R. Bogdan, C. Pelecudi) şi unele mecanisme din industria pielăriei (C. Drăgan); de asemenea, s-a cercetat teoretic cinematica sapelor cu role conice, pentru forajul sondelor de ţiţei (V. Florian). În domeniul maşinilor unelte, pentru a se stabili un criteriu de alegere a ghidajelor, s-a studiat forma geometrică optimă a acestora (Al. Seleşteanu, R. Bogdan, V. Marcu) etc.

În activitatea didactică, considerăm de asemenea util să arătăm că reforma învăţămîntului a pus şi problema redactării cursurilor necesare pregătirii studenţilor. În acest sens, s-a desfăşurat în cadrul colectivelor de catedră o activitate susţinută, fiecare institut dispunînd de cursuri litografiate, redactate de profesorii respectivi.

În prezent se află în curs de publicare, la Editura tehnică, manualul *Teoria mecanismelor şi maşinilor* de D. Tutunaru, V. Manafu, N. Manolescu şi D. Maroş, pentru uzul institutelor tehnice de învăţămînt superior.

Din această trecere în revistă a principalelor lucrări realizate la noi în domeniul teoriei maşinilor şi mecanismelor, se desprinde că, deşi preocupările în această direcţie sînt recente, cercetările în domeniul teoriei maşinilor şi mecanismelor au dus la unele rezultate, care scot în evidenţă că activitatea de cercetare ştiinţifică a crescut în ultimii ani în mod deosebit. Dezvoltarea continuă a construcţiei de maşini în ţara noastră şi a proceselor de automatizare a producţiei cer asigurarea unui ritm ascendent şi continuu de dezvoltare a acestor cercetări.

În acest sens considerăm că studiile şi cercetările de viitor, în domeniul teoriei maşinilor şi mecanismelor, în ţara noastră, ar putea fi axate pe următoarele domenii :

Într-o primă etapă :

— Studii asupra problemei sintezei cinematice şi dinamice a mecanismelor. Metode mecano-electronice.

Într-o a doua etapă :

— Studiul dinamic al mecanismelor şi în special stabilitatea sistemelor dinamice. Precizia mecanismelor.

Existenţa unui număr de specialişti, legăturile de schimb de publicaţii şi informare ştiinţifică cu şcolile sovietică şi germană constituie premise sigure ce ne îndreptăţesc să considerăm că dezvoltarea în viitor a cercetărilor în acest domeniu se va desfăşura pe un drum ascendent şi util.

ИССЛЕДОВАНИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ В ОБЛАСТИ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ В РНР

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

После краткого введения в связи с организацией исследовательской и учебной деятельности в области теории машин и механизмов, авторы излагают общие пути развития исследований в этом направлении в Румынской Народной Республике.

I. Общие методы исследования механизмов (плоских и пространственных).

II. Применение общих методов исследования плоских и пространственных механизмов.

III. Теоретические и экспериментальные исследования, обусловленные задачами, непосредственно связанными с практикой.

Затем в сжатой форме рассматриваются работы, осуществленные в рамках этих групп румынскими исследователями.

В заключение намечаются области, в которых следует проводить дальнейшие исследования.

На первом этапе:

— Исследования по вопросу кинематического и динамического синтеза механизмов. Механо-электронные методы.

На втором этапе:

— Динамическое исследование механизмов. Устойчивость динамических систем. Точность механизмов.

RESEARCH IN THE FIELD OF MACHINES AND MECHANISMS CARRIED OUT IN THE RUMANIAN PEOPLE'S REPUBLIC. FUTURE OUTCOME

ABSTRACT

After briefly reviewing the organization of research work and teaching in the field of machines and mechanisms, the authors present the lines along which the investigations were carried out in this country :

I. General methods for studying plane and spatial mechanisms.

II. Utilization of some general methods for studying plane or spatial mechanisms.

III. Theoretical and experimental studies brought forth by problems directly related to industry.

The investigations carried out within these groups by Rumanian research workers are then described.

Finally it is shown that future research work will include :

— kinematic and dynamic synthesis of mechanisms;

— mechanic-electronical methods;

— dynamics of mechanisms and especially the stability of dynamic systems

— mechanism accuracy.

RECENZII

FRANCIS D. MURNAGHAN, *Calculo avançado (Matematici superioare)* şi *Ecuações diferenciais (Ecuaţii diferenţiale).* Centro técnico de aeronáutica, São José dos Campos- S. P., Brasil, 1954, 476 pag. ; 1955, 401 pag.

Ambele volume cuprind materia predată de autor la cursul de matematici al Institutului tehnologic de aeronautică din São José dos Campos.

Primul volum cuprinde un capitol asupra funcţiilor de mai multe variabile şi funcţiilor de punct ; un al doilea capitol tratează despre integralele multiple cu limite arbitrare, şi integralele infinite, sau improprii, multiple. Mai departe, sînt atacate problemele de maxime şi minime ale funcţiilor de punct, apoi funcţiile inverse şi implicite, transformările ortogonale şi transformarea lui Laplace. În capitolul 5 se examinează transformările integralelor multiple, teorema lui Stokes şi generalizarea acestei teoreme, apoi, în capitolul 6, funcţiile de variabilă complexă, integrarea şi diferenţierea seriilor de puteri ale variabilei complexe, reziduuri şi prelungirea analitică a funcţiilor. Primul volum se încheie cu un capitol asupra seriilor Fourier.

Al doilea volum, *Ecuaţii diferenţiale*, cuprinde un capitol asupra teoremelor de existenţă şi de unicitate a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale ordinare de primul ordin, apoi se tratează ecuaţiile diferenţiale cu derivate totale de ordinul întîi, învelitori, iar în capitolul 3, ecuaţiile diferenţiale matriciale. Utilizînd teoria matricilor se studiază, în continuare, ecuaţiile liniare cu coeficienţi constanţi, sistemele de ecuaţii diferenţiale (diagonale, triunghiulare şi generale) sistemele de ordinul întîi normale şi anormale şi obţinerea soluţiei particulare a unui sistem normal cu ajutorul variaţiei constantelor. Se expune apoi teoria ecuaţiilor parţiale de ordinul întîi cu două sau n variabile independente, ecuaţiile de primul ordin cu derivate parţiale de un tip general, ecuaţia propagării undelor, înfăşurători ; se dau mai departe o serie de aplicaţii în mecanică. Ultimele două capitole se ocupă de ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul doi şi de ecuaţiile diferenţiale ordinare în domeniul complex. Astfel, se analizează caracteristicile şi bicaracteristicile ecuaţiilor de al doilea ordin, fronturile de undă şi soluţia fundamentală a ecuaţiei lui Laplace, iar în ultimul capitol polinoamele lui Legendre şi ecuaţia lui Bessel în variabila complexă.

Ambele volume se remarcă prin prelucrarea materialului pe baze moderne, cu o utilizare largă a matricilor, metodă care simplifică expunerea şi o face să cîştige în claritate şi generalitate. De asemenea, o atenţie deosebită este dată teoremelor de existenţă şi de unicitate, care ridică deseori dificultăţi în practică.

Se remarcă abundenţa exemplificărilor pentru fiecare capitol şi, de asemenea, a exerciţiilor propuse pentru rezolvare ; prin acestea valoarea didactică a ambelor volume este sensibil sporită. Credem totuși că deși cele două lucrări se adresează în deosebi studenților, ele au un real interes și pentru cercetători, dat fiind nivelul ridicat de prezentare, generalitatea și eleganța cu care este prelucrat conținutul diferitelor capitole.

N. Tipei

С. В. СЕРЕНСЕН, М. Е. ГАРФ, Л. А. КОЗЛОВ, *Машины для испытаний на усталость (Mașini pentru încercări la oboseală).* Машгиз, Москва, 1957, 404 pag.

Lucrarea întocmită de academicianul S. V. Serensen și colaboratorii săi, aduce o contribuție substanțială în tehnica proiectării și construcției mașinilor de încercat la oboseală, prin aceea că fixează etapele pe care trebuie să le parcurgă proiectantul unor astfel de mașini. Prin cartea publicată, proiectarea mașinilor de încercat la oboseală iese din domeniul restrîns al preocupărilor unor fabrici specializate, iese din sfera „secretului de fabricație" și este pusă la îndemîna oricărui inginer.

Așa cum rezultă din bibliografia cărții, autorii s-au bazat pe o lungă experiență, dezvoltată în institutele de proiectare sovietice și comunicată prin numeroasele lor publicații în revistele de specialitate.

În lucrare, autorii au aplicat legile teoriei vibrațiilor, ale teoriei mecanismelor și mașinilor, precum și numeroasele rezultate ale studiului rezistenței la oboseală, spre a da formă unei discipline noi, aceea a calculului și construcției mașinilor de încercat la oboseală.

În domeniul încercărilor la oboseală s-au construit, în toată lumea, numeroase mașini, de tipuri foarte variate. Desigur, autorii nu au putut cuprinde, în spațiul volumului, totalitatea mașinilor executate, nici totalitatea problemelor tehnice pe care le-au ridicat acele construcții.

Urmărind tabla de materii putem face cîteva observații.

În partea I se face o prezentare a noțiunilor fundamentale referitoare la încercările la oboseală și mașinile pentru încercări la oboseală. Primul capitol se ocupă de definirea rezistenței la oboseală și a metodicei pentru determinarea acestei mărimi. În capitolul II se definesc parametrii de bază ai mașinilor de încercat la oboseală iar în capitolul III se face o interesantă clasificare a mașinilor după modul de producere a solicitării variabile, dîndu-se schemele cinematice aferente.

Partea II este o aplicație a teoriei vibrațiilor mecanice la mașinile de încercat la oboseală, studiind diversele aspecte ale problemei, ca : amplitudini, forțe perturbatoare, zone de rezonanță, stabilitate etc.

În partea III se tratează calculele de rezistență, calculele electromagneților, studiul turațiilor critice, proiectarea fundațiilor și se dau schițele diverselor mecanisme specifice acestor mașini : mecanisme de încărcare, de măsurare a forțelor, de stabilizare, de prindere a epruvetelor etc.

Partea IV este consacrată, în mare măsură, unei descrieri detaliate a principalelor mașini de încercat, realizate în toate țările ; descrierea urmează clasificarea făcută în partea I. Lucrarea se încheie printr-un capitol referitor la tararea mașinilor de încercat la oboseală.

Considerăm că această publicație este extrem de utilă celor care se ocupă cu proiectarea, ca și celor care folosesc și trebuie să întrețină astfel de mașini.

Gh. Buzdugan

HAROLD A. ROTHBART; *Cams, Design, Dynamics and Accuracy (Came, proiectare, dinamică şi precizie)*, John Wiley & Sons, New York, 1956, 350 pag.

Numărul cărţilor asupra mecanismelor cu came este relativ redus, deşi aceste mecanisme reprezintă subansamble esenţiale în majoritatea construcţiilor de maşini. În acest sens, cartea profesorului H. A. Rothbart constituie o contribuţie preţioasă, umplînd un gol în literatura de specialitate.

Autorul prezintă stadiul actual în domeniul proiectării mecanismelor cu came, punînd accentul pe funcţionarea acestora la viteze mari, studiind şi aspectul dinamic al camelor.

În primele cinci capitole tratează noţiunile de bază cunoscute. În următoarele şase capitole autorul tratează o serie de probleme mai actuale, ca de exemplu: curbe de avans, came polidine, dinamica sistemelor de came cu viteze mari, analiza forţelor care acţionează asupra sistemului, materiale, analiza suprafeţelor de contact, precizie, came speciale etc.

Tratarea matematică rămîne la un nivel uşor accesibil proiectantului. Exemplele numerice incluse în text sînt foarte utile, atît studentului cît şi proiectantului.

Expunerea este clară, concisă şi însoţită de numeroase referinţe.

Meritul deosebit al cărţii constă tocmai în abordarea unor studii legate de aspectul modern al maşinilor: viteze mari, vibraţii, dinamica sistemului de ansamblu. Desigur că problemele puse sînt încă la începutul lor, dar constituie un îndreptar şi o introducere spre noi cercetări în acest domeniu.

R. Bogdan şi *C. Pelecudi*

DUDLEY D. FULLER, *A Survey of Journal Bearing Literature (O privire de ansamblu asupra lagărelor de alunecare)*. The American Society of Lubrication Engineers, New York, 1958, 260 pag.

Volumul cuprinde o serie de 563 fişe bibliografice conţinînd cîte un scurt rezumat al lucrărilor citate. Scopul urmărit a fost de a se analiza în ce măsură au fost cercetate variabilele care influenţează lubrificaţia lagărelor, de a se detecta existenţa discrepanţelor mai importante şi încă nerezolvate din literatura corespunzătoare şi de a se stabili tehnica şi aparatajul experimental utilizat, cu o analiză critică a acestui utilaj.

După cum se arată în prefaţa lucrării, din circa 2500 de referinţe au fost alese cele mai importante dintre acelea privind munca de pionierat în domeniul lubrificaţiei lagărelor, la lucrările de interes istoric, la cercetările de bază în acest domeniu, la exemplele de aplicare şi proiectare, la ideile noi şi rodnice privind ungerea şi la recomandările constructive sau de întreţinere.

Volumul cuprinde două părţi. În prima se prezintă, pentru fiecare categorie de lucrări, contribuţia adusă de diferiţi autori, cu indicaţii asupra importanţei şi modului de utilizare a rezultatelor. Astfel această parte corespunde următoarei clasificări:

1. — Istoric.
2. — Teoria clasică şi ipotezele sale. Temperatură. Presiune. Compresibilitate. Scurgere laminară. Scurgere laterală. Tensiunea de forfecare.
3. — Lagăre cu joc. Naşterea presiunilor. Capacitate portantă. Lagăre cu cuzinet parţial. Efectul neregularităţilor suprafeţelor.
4. — Efectul poziţiei sursei de alimentare.
5. — Efectul scăpărilor laterale. Debitul de ulei necesar.

6. — Grosimea filmului lubrifiant. Jocuri. Presiunea de proiectare. Excentricitatea relativă și poziția relativă arbore-cuzinet.
7. — Frecarea și pierderile în lagăre.
8. — Exemple caracteristice de utilizare a teoriei hidrodinamice în proiectarea lagărelor.
9. — Lubrifianții. Viscozitatea și efectul temperaturii, presiunii și forfecării. Densitatea și căldura specifică.
10. — Proiectarea lagărelor speciale. Pivoți, lagăre cu plăcuțe, lagăre flexibile, lagăre hidrostatice.
11. — Teoria lagărelor cu joc, ținînd seama de variația temperaturii.
12. — Teoria hidrodinamică a lagărelor cu joc, ținînd seama de efectul presiunii asupra viscozității.
13. — Teoria hidrodinamică a lagărelor fără joc.
14. — Alimentarea cu ulei sub presiune. Nuturi. Acțiunea de pompare a lagărelor cilindrice.
15. — Debitul de ulei la ungerea prin inel mobil sau fixat de arbore.
16. — Debitul de ulei la ungerea prin fitil, pernă sau prin picurare.
17. — Hidrodinamica lubrificației cu unsori. Metode de alimentare și încercări experimentale.
18. — Condițiile la limită ale lubrificației. Uzura. Frecarea mixtă.
19. — Ungerea hidrostatică. Lagăre în trepte. Pelicule obținute prin presarea suprafețelor. Lagăre cu suprafețe paralele.
20. — Echilibrul termic. Determinarea condițiilor de lucru în lagăre izolate termic Criterii de proiectare.
21. — Echilibru termic. Lagăre cu răcire exterioară. Criterii de proiectare.
22. — Lagăre cu încărcare dinamică. Teoria hidrodinamică pentru capacitatea de încărcare și grosimea filmului. Diagrame de încărcare.
23. — Instabilitatea peliculei de ulei. Determinarea analitică a condițiilor de apariție a instabilității. Controlul instabilității.
24. — Dispariția scurgerii laminare în lagăre de mare viteză. Turbulența.
25. — Materiale metalice pentru lagăre. Oboseala. Coroziunea. Eroziunea. Duritatea fusului. Finisarea suprafețelor. Cavitația.
26. — Materiale nemetalice pentru lagăre.
27. — Filtrarea și sisteme de circulație a lubrifiantului.
28. — Proiectarea practică a lagărelor. Suportul cuzinetului și rigiditatea fusului.
29. — Alinierea. Asamblajul. Întreținerea.
30. — Etanșări. Labirinte.
31. — Mașini de încercat. Metode de încercare. Măsurarea grosimii filmului.
32. — Lagăre lubrificate cu gaze.
33. — Concluzii și sugestii pentru cercetări viitoare.

A doua parte a lucrării cuprinde rezumatele lucrărilor ce au fost reținute ca fiind importante.

Din cele precedente, se poate vedea că volumul este rezultatul unei activități laborioase de informare și selecționare a lucrărilor apărute încă de la începuturile cercetărilor științifice în domeniul lubrificației. Trierea fișelor a fost efectuată cu competență astfel încît cartea prof. Fuller constituie un ghid prețios pentru acei care se interesează de multiplele aspecte ale ungerii în scopul aplicațiilor practice sau al cercetărilor. De un deosebit interes din acest punct de vedere sînt concluziile care se trag la sfîrșitul primei părți privind stadiul actual al problemelor și orientarea viitoare a activității de cercetare. Sugestiile care se fac cu acest prilej sînt foarte utile și vor contribui desigur la clarificarea multor aspecte ale lubrificației, care pînă în prezent sînt prea puțin cunoscute.

N. Tipei

G. NIEMANN, *Maschinenelemente (Organe de mașini)*, ediția a 3-a revăzută, J. Springer-Verlag, Berlin, 1958, vol. I, 305 pag., 795 fig.

În prefață se arată că lucrarea este destinată constructorului de mașini în scopul de a-l învăța regulile și metodele proiectării și de a-l ajuta să cîștige cît mai mult timp pentru sarcina sa specifică : a concepe (a forma), a aprecia și alege critic și a calcula.

Autorul mai arată că în elaborarea lucrării s-a ghidat după experiența sa îndelungată de constructor și profesor în învățămîntul tehnic superior. Primul volum cuprinde patru părți principale : noțiuni de bază ; organe de mașini pentru asamblare ; lagăre ; arbori și accesorii.

Pentru partea întîi, *Noțiuni de bază*, care se extinde pe aproape jumătate din volumul lucrării, este caracteristic motto-ul sub care este scrisă :

„Omul care dorește să construiască ... privește mai întîi și gîndește”.

În această parte se arată, foarte instructiv, procesul și metoda de gîndire și lucru în proiectare, terminînd cu precizarea experimentală a construcției nou proiectată. Se insistă asupra necesității de a se aprecia critic soluția adoptată, pe baza unei analize cantitative a indicilor tehnico-economici. În indicațiile privind concepția formării se arată considerațiile și influențele de care trebuie să se țină seama pentru ca piesa proiectată să-și îndeplinească optim funcția, cu minimum de cheltuieli.

Se prezintă apoi foarte succint relațiile de bază în calculul curent de rezistență, interpretate instructiv pentru o justă aplicare în proiectare. Aici ar fi fost util să se dea indicații mai complete asupra calculului la solicitări compuse, în raport cu ipotezele de rupere, și mai ales pentru determinarea și verificarea coeficientului de siguranță, în special la solicitări variabile. Autorul acordă, pe bună dreptate, o deosebită atenție tendinței și necesității de a se construi ușor. Se arată căile principale pentru atingerea acestui scop important. Este foarte interesantă metoda care se indică pentru alegerea comparativă a materialului, pe bază de criterii de similitudine, cu ajutorul cifrelor caracteristice ale profilului și al coeficienților specifici. Pe această cale se poate determina judicios influența materialului asupra secțiunii volumului, greutății și costului piesei, în raport cu solicitările la care este supusă. Această primă parte se termină cu o prezentare foarte utilă a materialelor metalice și nemetalice, folosite în construcția de mașini și cu unele indicații, foarte succinte, asupra numerelor normalizate, a toleranțelor și ajustajelor.

În partea a doua, privind organele de asamblare, sînt tratate îmbinările prin sudură, nituire, asamblările prin șuruburi, bolțuri și știfturi și cele elastice (arcuri).

Asamblările cu pană transversală nu sînt tratate, iar cele cu pană longitudinală și prin strîngere sînt tratate ca accesorii de montaj la arbori. De remarcat că la sfîrșitul acestei părți este introdus un capitol privind cuplele de rostogolire (corpuri de rulare, reazeme curbe, camă cu rolă, angrenaje cu dinți etc.), pentru care se dau generic indicații asupra încărcării și solicitării lor și pentru dimensionare, pe baza teoriei elasticității materialelor.

În partea a treia se tratează lagărele de rostogolire și cele de alunecare. Dimensionarea și verificarea lagărelor de alunecare este prezentată pe baza teoriei hidrodinamice a lubrificației. Se dau apoi indicații asupra materialelor de antifricțiune și a lubrifianților.

În ultima parte se tratează osiile, arborii și accesoriile de asamblare, în care sînt cuprinse : penele longitudinale, montajele prin strîngere, axe și butuci canelați și în profil K și apoi cuplajele și ambreiajele. Indicațiile privind mai ales dimensionarea și verificarea arborilor și a cuplajelor și ambreiajelor, ar fi fost util să fie mai extinse.

În tratarea organelor de mașini sînt indicate succint, tendințele noi în construcție și fabricație, metodele moderne de calcul sub o formă operativă adeseori pe bază de grafice și tabele, fără desfășurarea analitică a bazei teoretice a calculelor de proiectare.

Lucrarea are un conținut foarte bogat și deosebit de valoros, totul concis și foarte bine sistematizat. La fiecare capitol se indică o vastă bibliografie, pe probleme, ceea ce este de asemenea foarte util pentru îndrumarea constructorului.

Toate acestea arată că autorul a sintetizat esențialul după o experiență îndelungată de constructor și profesor.

Lucrarea constituie o bază temeinică pentru orientarea rapidă a constructorului, fiind în același timp deosebit de utilă și valoroasă și pentru învățămîntul tehnic superior.

I. Minoiu

50 Iahre Grenzschichtforschung (50 de ani de cercetări asupra stratului limită), Friedr. Vieweg et Sohn. Braunschweig, 1955, 500 pag., 236 fig. (sub redacția prof. Dr. Görtler, Freiburg i. Br., și prof. Dr. W. Tollmien, Göttingen).

Acest volum omagial oferă o imagine grăitoare a locului preponderent cîștigat de conceptul stratului limită, datorit lui Prandtl, în dezvoltarea mecanicii fluidelor reale. Sînt impresionante atît eforturile de a explica numeroase fenomene de scurgere prin formarea stratului limită, cît și amploarea crescîndă a cercetărilor cărora le-a dat naștere.

Trăsătura dominantă a cuprinsului celor 44 articole originale, scrise de 56 cercetători, în majoritate nume consacrate în acest domeniu, este caracterul dinamic al rezultatelor înfățișate, în sensul că aproape fiecare articol constituie punctul de plecare a noi investigații, care lărgesc sau aprofundează aria de influență a stratului limită. Istoria de 50 de ani a acestui concept prezintă astfel o surprinzătoare analogie cu dezvoltarea fizică a stratului limită pe o aripă (de pildă) : la început, caracterul scurgerii e laminar (primele decenii de articole cu caracter matematic — dominate de soluția lui Blasius) — apoi urmează tranziția, cu probleme încă nedeslegate, și în sfîrșit scurgerea turbulentă, în care amploarea domeniului ocupat cît și dificultatea problemelor fundamentale e ilustrată de volumul și calitatea preocupărilor actuale. Vom încerca să grupăm articolele cuprinse în acest volum pe liniile de dezvoltare a acestor preocupări.

Articolul inițial al lui W. Tollmien caută să dea o privire de sinteză asupra problematicii teoriei stratului limită.

Inexistența unor soluții generale, bine determinate, ale ecuațiilor *stratului limită laminar bidimensional*, continuă să atragă atenția celor care propun noi metode de integrare (G. F. Carrier, I. Flügge-Lotz), noi cazuri integrabile în scurgere permanentă (I. Tani, B. Thwaites) sau nepermanentă (H. Schuh); un studiu detaliat (R. Iglisch) se ocupă de influența succiunii. În două articole sînt tratate probleme speciale privind comportarea soluțiilor ecuațiilor lui Prandtl în vecinătatea scurgerii exterioare (A. Betz) sau impunîndu-se noi condiții la limită (W. Rheinboldt). Influența compresibilității la numere Mach obișnuite, prin parametrii interiori (numărul Prandtl) și exteriori (viteza curentului exterior, temperatura la perete) variabili, este arătată în cele două articole ale lui L. Crocco, respectiv I. Tinkler, cu o foarte detailată tratare matematică. Păstrînd ecuațiile stratului limită aminar compresibil, S. I. Pai și S. F. Shen studiază regimul hypersonic cu transfer de căldură, în timp ce un alt articol se ocupă de interacțiunea stratului limită cu unde de șoc în regim supersonic.

Stratului limită laminar tridimensional îi sînt consacrate şase articole. A. Mager analizează influenţa perturbaţiilor laterale mari asupra stratului limită principal, iar A. Oudart notează unele observaţii despre stratul limită pe o aripă în derivă. În alte două articole sînt integrate ecuaţiile stratului limită de pe corpurile în rotaţie, iar K. Garbsch studiază stratul limită din interiorul unei pîlnii cu vîrtej central şi scurgere radială. Reţine de asemeni atenţia importantul articol al lui R. Timman şi J. Zaat despre o metodă de calcul a stratului limită tridimensional cu aplicaţii la scurgerea în jurul unui elipsoid.

Studiul teoretic *al instabilităţii* ecuaţiilor lui Prandtl sub influenţa unor perturbaţii mici formează obiectul a două articole, datorite lui M. Lessen şi J. Fox, respectiv H. Witting. De asemenea, H. Görtler şi G. Hämmerlin îşi concentrează eforturile asupra analizei instabilităţii scurgerii în jurul unui punct de impact. În privinţa parametrilor de similitudine care guvernează tranziţia, aceştia sînt deduşi de W. Albring printr-o potrivită transformare a ecuaţiilor de mişcare.

Structura *turbulenţei* este analizată într-un amplu articol de Th. Theodorsen, care îi stabileşte cauza în scurgerea cu frecare, elementul structural esenţial fiind un vîrtej în formă de potcoavă. Tot aspecte fizico-matematice noi cuprinde şi articolul lui D. Coles despre legea la perete a scurgerii turbulente cu frecare. Bazîndu-se pe ecuaţiile mediate ale lui Reynolds, extinse cazului compresibil, şi utilizînd unele legi semiempirice, Van Driest şi Carlo Ferrari studiază influenţa numărului Prandtl variabil, respectiv determinarea transferului de căldură pentru stratul limită turbulent. Aplicaţii practice se găsesc şi în articolul lui A. D. Young, privitoare la rezistenţa la înaintare a profilelor de aripă biconvexe în regim supersonic.

În alte şapte articole sînt tratate *probleme speciale* ca: jet radial (H. B. Squire), strat limită în scurgerea lichidelor şi a electronilor (M. Krzywoblocki), efectul de frecare al scurgerii laminare compresibile la intrarea într-un tub, scurgerea fluidelor încălzite de jos în canale verticale (S. Ostrach), lubrificaţia lagărelor de alunecare la turaţii mari şi transmisia căldurii într-o placă încălzită aerodinamic (H. W. Emmons). Metodele de soluţionare a acestor probleme noi recurg la aproximaţiile fizice ale stratului limită sau la soluţiile specifice ecuaţiilor lui Prandtl.

În sfîrşit, o ilustrare a eforturilor consacrate cercetărilor stratului limită o constituie cele opt articole de *metode şi rezultate experimentale*. O reuşită îmbinare de fineţe şi precizie arată cele două metode optice de măsurare a caracteristicilor scurgerii turbulente, realizate cu ajutorul unui microscop special (A. Fage), respectiv prin vizualizarea dîrelor de telur într-un canal hidrodinamic (F. Wortmann). Interesante sînt şi argumentele asupra avantajelor utilizării planoarelor faţă de suflerii pentru cercetarea stratului limită, precum şi datele cu privire la calibrarea tubului Stanton pentru măsurarea frecării. Rezultate experimentale preţioase, obţinute prin măsurători interferometrice, cuprind articole despre jetul bidimensional, despre dezvoltarea stratului limită din tubul de şoc şi despre scurgerea cu convecţie liberă pe o placă verticală. Tehnica firului cald e folosită pentru măsurarea pulsaţiilor turbulente într-un canal uşor evazat.

Din această succintă prezentare a bogatului conţinut al volumului, se observă că accentul cercetărilor viitoare cade pe studierea stratului limită tridimensional şi pe aprofundarea problemelor tranziţiei şi ale turbulenţei. În acest mod, cercetătorul de specialitate găseşte în cuprinsul articolelor atît date specifice preocupărilor sale, cît şi o preţioasă orientare în munca sa de perspectivă.

St. N. Săvulescu

Нефтяное Машиностроение (*Construcţia de maşini petrolifere*), vol. 3, 222 pag., Гостоптехиздат, Москва, 1958.

Volumul cuprinde rapoartele şi referatele prezentate la consfătuirea ştiinţifică, ţinută în iunie 1956, sub auspiciile Institutului politehnic din Moscova, privind problemele aplicării tehnicii moderne în industria petroliferă.

Aceasta demonstrează preocupările ştiinţifice sub multiple aspecte şi de înalt nivel ale institutelor de cercetare unionale şi reprezintă sinteza unor studii teoretice şi experimentale fundamentale. Caracterul de adînc interes se manifestă şi prin participarea uzinelor şi a altor unităţi productive de resort la reuşita acestor lucrări.

Studiile pe care se axează conţinutul cărţii se referă la aplicarea izotopilor radioactivi în construcţia de maşini, studiul complex al funcţionării sapelor cu role, în vederea măririi randamentului de funcţionare şi al productivităţii şi metodele de elaborare a unei noi tehnologii sau adaptare a celei existente în acest sens, aspecte teoretice şi practice ale tehnologiei forajului, precum şi probleme privind exploatarea, transportul şi depozitarea ţiţeiului.

În forma în care au fost enunţate problemele de bază, fiecăreia îi sînt afectate unul sau mai mule referate.

În primul referat sînt concretizate studiile Institutului de petrol din Moscova asupra îmbinării prin sudură la aparatura din rafinării cu ajutorul izotopilor radioactivi.

Ca o necesitate dictată de acţiunea corosivă a ţiţeiurilor, în special a celor sulfuroase, se impune realizarea unei aparaturi cu două învelişuri, cel exterior din oţel carbon, iar cel interior din oţeluri Cr-Ni austenitice sau numai cu crom, îmbinarea făcîndu-se prin sudură, reprezentînd deci un exemplu clasic de sudare a unor oţeluri heterogene.

Luînd drept criteriu de apreciere al îmbinării sudate rezistenţa la coroziune şi folosind diagrama Strauss-Maurer, Sefler ajunge la precizări asupa compoziţiei electrodului folosit întocmind în acest sens o diagramă. Prin folosirea electrodului cu adaos de S^{35} la sudură, din interpretarea fotografiilor obţinute, s-a ajuns la concluzii referitoare la calitatea cusăturii ca compoziţie, structură, omogeneitate, stabilindu-se că singurul parametru îl constituie compoziţia chimică a materialului de bază şi a electrodului.

Interesul aplicativ constă în posibilitatea determinării grafice a fracţiunilor din materialul de bază şi electrod în cusătura ce se prezintă ca un aliaj omogen, precum şi în indicarea electrodului pentru diferite oţeluri aliate folosite ca înveliş anticorosiv.

În al doilea referat, A. E. Semonianţ se ocupă de caracteristicile funcţionale ale turbinelor de foraj, înţelegînd prin acestea dependenţa cuplului, puterii şi pierderilor hidraulice de numărul de rotaţii al axului turbinei.

Referatul expune o metodă originală şi elegantă de determinare teoretică a raportului dintre valoarea apăsării pe sapă şi numărul de rotaţii al turbinei. Pornind de la ideea egalităţii dintre momentul total al turboburului şi suma momentelor de la sapă şi lagărul „pieptene", colectivul care a lucrat sub conducerea referentului a obţinut curba teoretică a dependenţei celor doi parametri (P, n). Determinarea momentului din lagăr s-a făcut luînd ca forţă activă rezultanta forţelor de presiune hidraulică şi a apăsării pe sapă, iar determinarea momentului necesar sapei s-a făcut prin considerarea unei liniarităţi între acesta şi apăsarea pe sapă, ceilalţi parametri (construcţia sapei, caracteristicile mecanice ale rocei) fiind constanţi. Prin compararea curbelor teoretice cu cele experimentale, obţinute în şantier sau la standul de probă, acestea se suprapun cu un grad de dispersie al valorilor foarte mic. Relaţiile obţinute permit stabilirea dependenţei dintre N, M şi n şi determinarea randamentului turbinei la un regim oarecare de funcţionare, în raport cu regimul optim.

Justeţea metodei reiese din concordanţa deplină cu experienţa, iar oportunitatea din utilizarea directă în stabilirea regimului de foraj.

Referatul al treilea, susţinut de E. Tarasievici, cuprinde principiile de proiectare a instalaţiilor moderne de foraj marin. Ultima soluţie tehnică constructivă prevede realizarea pe un ponton a turlei pliante, a instalaţiilor de forţă şi circulaţie, precum şi a unui ponton auxiliar, ce serveşte ca fundaţie a construcţiei şi a cărei distanţă faţă de pontonul principal poate fi reglată cu ajutorul distanţierelor telescopice. În condiţii de funcţionare, printr-o translaţie, turla se fixează pe fundul mării printr-o infrastructură proprie. Pontonul auxiliar se poate scufunda fixîndu-se pe fundul mării şi serveşte astfel ca fundaţie întregei instalaţii.

Metoda asigură dispunerea instalaţiei într-un spaţiu mai restrîns, iar separarea turlei atenuează vibraţiile. Referatul prezintă interes general, iar pentru ţările unde se efectuează foraje marine, interes pratic imediat.

Referatul lui R. V. Baliţki rezumă studiile privind stabilitatea statică a garniturii de foraj, vibraţiile elastice ale acesteia şi acţiunea asupra cinematicii sapelor, pe modele experimentale. Realizarea instalaţiei experimentale pe baza similitudinii mecanice şi posibilităţile de studiu ce le oferă sînt de mare interes. Rezultatele arată că cercetarea este într-o fază de început prin forma simplă de abordare a problemei.

O serie de referate se ocupă de problema sapelor cu role sub multiple aspecte, ca studiul cinematic, determinarea cauzelor uzurii, îmbunătăţirea tehnologiei de fabricare, asupra tratamentelor termice ale suprafeţei exterioare ale rolelor şi a căilor de rulare etc.

Remarcabile sînt studiile lui A. M. Eigeles asupra influenţei diferiţilor parametri de ordin geometric asupra randamentului sapelor din punct de vedere al vitezei mecanice de forare şi asupra durabilităţii acestora.

Privind parametrii geometrici ai alveolelor formate de dinţii rolelor în rocă, ca funcţii de unul singur (adîncimea), şi pe baza unor considerente energetice, se determină dependenţa dintre volumul rocei dislocuite şi adîncimea alveolei şi timpul optim de contact dintre dinţii rolei şi rocă, astfel ca dezagregarea acesteia să fie maximă. Pentru folosirea maximă a avantajului numărului mare de turaţii ce-l oferă turboburul, se fac recomandări pentru utilizarea rolelor cu pasul mare.

În scopul unei dislocări maxime şi unei uzuri minime a căilor de rulare, Institutul de petrol din Moscova a proiectat un nou tip de sape prevăzute cu resort lamelar exterior, care oferă avantajul unei transmiteri progresive a sarcinii pe sapă şi o repartiţie uniformă a eforturilor de-a lungul generatoarelor rolelor. Tot în referatele Institutului de petrol din Moscova se dau rezultatele privind studiile macro- şi micrografice asupra uzurii şi fisurării dinţilor rolei şi în legătură cu aceasta încercările asupra găsirii oţelurilor cele mai bune, indicarea tratamentelor termice adecvate, precum şi eficacitatea diferitelor procedee de armare cu material dur.

M. A. Aliev a prezentat în referatul său rezultatele cercetărilor de la Institutul industrial din Azerbaidjan privind protecţia anticorosivă a aparaturii din oţel carbon frecvent utilizată în industria petroliferă, în scopul evitării deteriorării premature. Rezultate bune s-au obţinut prin folosirea emailului din silicaţi pentru oţeluri cu 0,1 — 0,12% C în condiţii de funcţionare pînă la 350—400°C.

Tot la Institutul industrial din Azerbaidjan, în urma unor cercetări minuţioase privind cămăşile pompelor de adîncime, s-a eliberat o nouă tehnologie a fabricării acestora din fontă forjabilă, ceea ce duce la înlăturarea rebuturilor din cauza turnării şi a tratamentelor termice, simplifică procesul tehnologic de fabricaţie precedent, ca rezultat al excluderii repetatelor căliri după prelucrarea mecanică, şi măreşte exactitatea pieselor, mărind în acelaşi timp durata lor de funcţionare.

Prin cuprinsul său, atît în ceea ce priveşte varietatea problemelor abordate şi modul în care ele au fost rezolvate cît şi a conţinutului de idei noi, cartea foloseşte deopotrivă institutelor de cercetare, cît şi unităţilor productive, astfel încît traducerea ei este de dorit.

I. Dincă

G. PRIKEL, *Tiefbohrgeräte (Utilaje de foraj).* J. Springer-Verlag, Wien, 1957, 503 pag.

În această carte, autorul prezintă utilajele de : foraj manual, foraj cu sondeze, foraj prin percuţie uscat şi hidraulic, şi forajul rotativ.

Partea importantă a lucrării o constituie capitolul de foraj rotativ, care ocupă 2/3 din volumul lucrării.

Bazat pe o experienţă vastă şi o bogată bibliografie, autorul descrie utilajele principale care s-au folosit şi care se folosesc actualmente în industria de petrol, în forajele de apă de diametru mare, în cercetările seismice, în lucrările de prospectare şi explorare geologică.

Accentul este pus pe utilajele moderne care sînt descrise în marea lor majoritate. Sînt descrise turlele de tip A şi rabatabile, troliile de mare putere, cu utilajele componente, precum şi instalaţiile de forţă.

Se descriu cuplajele şi convertizoarele hidraulice şi se dau diagramele de funcţionare. În continuare se arată tipurile de prăjini de foraj după A.P.I., sapele cu role de diferite tipuri, în special sapele cu inserţie de material dur.

În ultima parte a acestui capitol, autorul arată criteriile practice şi teoretice care trebuie luate în considerare la alegerea utilajului de foraj.

Lucrarea conţine o serie de tabele şi diagrame care sînt de un real folos.

În concluzie, cartea merită să fie consultată de specialiştii din industria de petrol.

O. Lecca

Труды казанского авиационного института (Lucrările Institutului de aviaţie din Kazan), nr. XXXVI, 1957, 66 pag.

Revista publică lucrării de aerodinamică, motoare de avion, elasticitate, precum şi din domeniile anexe ale aviaţiei :

G. V. EROSIN, *Unele probleme din teoria motoarelor de curent continuu pentru mecanismele de avion.* În două comunicări se studiază influenţa lăţimii periilor de colector asupra curenţilor de comutare şi caracteristicile motoarelor de mică putere cu excitaţie în paralel, ţinînd seama de neliniaritatea reacţiei rotorului.

A. A. BULAVKIN, *În legătură cu reducerea parametrilor turboreactoarelor la condiţii atmosferice standard.* În acest articol se arată că formulele de reducere bazate pe similitudine sînt satisfăcătoare în ceea ce priveşte presiunea, însă nu dau rezultate bune pentru temperatură. Se propun alte formule care ţin seama de cauzele care provoacă aceste abateri.

A. F. AHMEROV, *Contribuţii la teoria îndoirii pieselor la rece.* Autorul rezolvă problema încovoierii elasto-plastice a profilelor cu o axă de simetrie. Se determină momentul încovoietor şi proporţia deformaţiei elastice.

A. F. AHMEROV, *Cercetarea proceselor de încovoiere cu întindere ale pieselor cu curbură simplă.* În această lucrare se propun formule de calcul simple pentru determinarea parametrilor de bază în cazul încovoierii cu întindere.

E. Larisch

I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity (Teoria matematică a elasticităţii)*. Ediţia a II-a, Mc. Graw-Hill Book Co. Inc., New York, Toronto, London, 1956, XII + 476 pag.

Cartea lui I. S. Sokolnikoff reprezintă o a doua ediţie, revăzută şi mult adăogită, a unei lucrări apărută cu zece ani în urmă şi foarte bine primită de publicul cititor din întreaga lume. În această lucrare autorul prezintă, într-o formă completată, lecţiile pe care le-a ţinut la Brown University. Se expun unele aspecte ale teoriei elasticităţii, dintr-un punct unic de vedere, şi se pune accentul pe diferite metode moderne de rezolvare a problemelor, în special a celor plane.

Este interesant de remarcat că I. S. Sokolnikoff foloseşte pe larg metoda funcţiilor de variabilă complexă pentru problema plană şi că vrea să facă cunoscute unui cerc cît mai larg de cititori lucrările cercetătorilor sovietici, în special pe cele ale lui N. I. Musheli şvili.

După o scurtă introducere cu caracter istoric, autorul trece la analizarea stării de deformaţie şi a stării de tensiune a unui corp elastic.

În capitolul 1, intitulat *Analiza deformaţiilor*, se precizează semnificaţia fizică a noţiunii de deformaţie şi modul de variaţie al ei ; se atacă şi problema deformaţiilor finite.

În capitolul 2, *Analiza tensiunilor* se prezintă noţiunile de forţă masică şi superficială tensiunile care iau naştere şi studiul variaţiei lor.

Capitolul 3, denumit *Ecuaţiile elasticităţii*, cuprinde problemele legate de legea lui Hooke, pentru corpuri izotrope şi anizotrope, precum şi stările de tensiune şi de deformaţie simple. De asemenea, se trec în revistă rezolvările în tensiuni şi în deplasări ale problemelor elasticităţii (caz static şi dinamic) şi se fac unele consideraţii legate de energia de deformaţie.

Capitolul 4, intitulat *Întinderea, torsiunea şi încovoierea barelor*, este deosebit de dezvoltat. După ce trece în revistă stadiul actual al problemei, autorul se ocupă de întinderea barei sub acţiunea unor forţe longitudinale sau sub greutatea proprie. Răsucirea barelor este tratată pe larg, începînd de la soluţiile exacte care se pot da pentru secţiunea circulară, eliptică sau triunghiulară pînă la cazul general. Se expun diferite metode aproximative de rezolvare şi în special metoda utilizării transformărilor conforme. Un studiu analog este făcut pentru încovoierea barelor, făcînd să reiasă în evidenţă asemănarea dintre cele două probleme, din punct de vedere matematic.

În capitolul 5, *Probleme bidimensionale ale elastostaticii*, găsim aplicată metoda de calcul indicată de G. V. Kolosov şi reluată de N. I. Musheli şvili, cunoscută sub numele de *metoda funcţiilor de variabilă complexă*. După expunerea rezultatelor generale privind starea de deformaţie plană şi starea de tensiune plană, precum şi modul de rezolvare a problemei cu ajutorul funcţiilor biarmonice de tip Airy, autorul se preocupă de soluţionarea concretă a diferite probleme ; se utilizează transformarea conformă pe un cerc, pentru care soluţia problemei este cunoscută. Se găseşte astfel starea de tensiune corespunzătoare unor sarcini concentrate etc. De asemenea, se arată cum se poate rezolva problema folosind ecuaţiile integrale şi integro-diferenţiale. Se fac dezvoltări şi în legătură cu soluţionarea problemei pentru domenii multiplu conexe.

Capitolul 6, denumit *Probleme tri-dimensionale*, cuprinde diferite probleme ale corpurilor elastice, neatacate anterior. După ce arată cum se poate rezolva o problemă de elasticitate, în gaz general (soluţiile de tip Galerkin, Papkovici etc.), autorul aplică rezultatele obţinute la cîteva cazuri mai interesante : problema semispaţiului elastic (Bussinesq), echilibrul elastic al sferei şi învelitorilor sferice etc. Se mai atacă unele probleme termo-elastice, plane şi spaţiale, precum şi probleme legate de propagarea undelor.

În Capitolul 7, *Metode variaționale*, I. S. Sokolnikoff face una dintre cele mai interesante prezentări comparative cunoscută în literatura de specialitate. Sînt trecute în revistă rezultate importante legate de lucrul mecanic de deformație, teoremele de minimum etc. ; apoi se face o expunere critică, însoțită de exemple de calcul, a celor mai importante metode variaționale cunoscute : Ritz, Galerkin, Kantorovici, Trefftz, Rafalson etc. ; sînt cuprinse, de asemenea, metoda celor mai mici patrate și metoda diferențelor finite.

Volumul lui I. S. Sokolnikoff este scris într-o formă ușor accesibilă și, în același timp, deosebit de riguroasă din punct de vedere matematic. Se folosesc atît notații tensoriale, cît și notații obișnuite.

Într-un număr destul de redus de pagini, autorul izbutește să treacă în revistă cele mai importante rezultate cunoscute, bazat fiind pe o bibliografie foarte bogată și recentă. Observăm că literatura sovietică modernă este deosebit de mult utilizată.

Problemele de plăci sînt tratate foarte puțin ; de altfel autorul menționează că ele nu pot fi cuprinse în cadrul unei cărți obișnuite de teoria elasticității.

Tratatul lui I. S. Sokolnikoff trebuie să constituie una din lucrările de bază pentru toți cei care se inițiază sau se specializează în domeniul teoriei elasticității.

P. P. Teodorescu

CĂRȚI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

К. Е. ЦИОЛКОВСКИЙ, *Собрание сочинений.*
Издат. Академии Наук СССР, Москва, 1954, 453 pag.

В. П. ВЕТЧИНКИН, *Избранные труды.*
Издат. Академии Наук СССР, Москва, 1956, 422 pag.

И. В. КРАГЕЛЬСКИЙ, В. С. ЩЕДРОВ, *Развитие науки о трении.*
Издат. Академии Наук СССР, Москва, 1956, 234 pag.

J. WEBER, G. G. BREBNER, *Low-speed Tests on 45 deg Swept-back Wings* (Part I and II)
Ministry of Supply, Aeronautical Research Council, London, 1958, 89 pag.

— *Downwash Tables for the Calculation of Aerodynamic Forces on Oscillating Wings.*
Ministry of Supply, Aeronautical Research Council, London, 1958, 174 pag.

M. DAMASIEWICZ, *Mechanika Teoretyczna dla praktykow.*
Panstwowe wydawnictwa Techniczne, Warszawa, 1956, 377 pag.

— *Transactions of the Fourth Conference on Mechanisms, Oct. 14 and 15, 1957.*
Purdue University, West Lafayette, Ind. U.S.A., 104 pag.

— *Technische Universität Berlin-Charlottenburg, Monographs Collection of Universities.* Published by the Service des Pays S. A. Länderdienst-Verlag, Basel, 1954, 124 + LXII pag.

— *Report of the National Physical Laboratory 1957.* Department of Scientific and Industrial Research, Her Majesty's Stationery Office, London, 1958, 122 pag.

H. FRANZ, *Ueber die Aushärtung von Aluminium- Kupfer-Legierungen.*
Aluminium-Verlag, Düsseldorf, 1957, 156 pag.

G. GARCIA, *Analisis Algebraico.*
Sanmarti & Comp., Lima, Peru, 1955, 252 pag.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul IX 1958

INDEX ALFABETIC

STUDII ȘI CERCETĂRI

MECANICA ANALITICĂ	Nr.	Pag.
VÂLCOVICI VICTOR, Asupra legăturilor olonome și neolonome	4	811

MECANICA SOLIDULUI	Nr.	Pag.
ONICESCU O., Mecanica solidului rigid	3	519

CINEMATICA ȘI DINAMICA SOLIDELOR	Nr.	Pag.
NIȚĂ M. M., Studiu asupra mișcării sateliților artificiali în mediul rezistent	2	337

AEROMECANICA	Nr.	Pag.
CARAFOLI ELIE și IONESCU M., Teoria generală a aripii triunghiulare cu distribuție de presiuni dată (problema indirectă)	2	267
CARAFOLI ELIE și HOROVITZ BEATRICE, Probleme mixte ale aripilor triunghiulare prevăzute cu placă normală, în curent supersonic. (Aripi cruciforme)	4	819
CARAFOLI ELIE și NĂSTASE ADRIANA, Studiul aripilor triunghiulare subțiri cu simetrie forțată în curent supersonic	4	833
DUMITRESCU LUCIAN, Profile aerodinamice cu jet în prezența solului	1	43
DUMITRESCU LUCIAN, Asupra regimului optim de funcționare a rachetelor	2	285
DUMITRESCU LUCIAN și COMĂNESCU TRAIAN, Influența regimului de tracțiune asupra performanțelor unei rachete lansate tangențial de pe un satelit artificial	3	537
MARINESCU AL., Stabilitatea dinamică în zbor orizontal, a elicopterelor, avînd rotoare cu pale prinse elastic de butuc	1	63
MARINESCU AL., Vibrațiile forțate ale rotoarelor de elicopter cu pale Cantilever	2	297
PALOȘ M. M., Calculul analitic al unei clase de efuzoare supersonice plane, cu panta mică în vecinătatea colului sonic	3	545

	Nr.	Pag.
PATRAULEA N. N., DUMITRESCU L. și CĂPRIȚĂ D., Caracteristicile aerodinamice ale profilelor cu volet fluid	1	13
PATRAULEA N. N., Asupra deflectării unei vîne libere de curent	1	51
PATRAULEA N. N., Asupra rezolvării problemei lui Prandtl generalizată. Nota I	3	525
SĂVULESCU ȘT. N., Considerații asupra unor soluții din cazul stratului limită compresibil nepermanent	4	867
TIPEI N. și GUȚĂ C., Asupra mișcării avionului pe o traiectorie dată	4	855

HIDRODINAMICA

	Nr.	Pag.
ARHANGHELSKI V. A., Filtrarea și scurgerea prin conducte a fluidelor în mai multe faze	2	319
KAHAN M. și HÎNCU S., Dinamica mișcării aluviunilor în scurgerile sub presiune	1	89
OROVEANU T., Soluții particulare ale ecuației scurgerii prin medii poroase neomogene	1	83
SMIRNOV L. P. și PAVLIHINA M. A., Urma turbionară în cazul scurgerii în jurul cilindrilor în vibrație	2	307

HIDROMECANICA

	Nr.	Pag.
DUMITRESCU D., IONESCU V. și IANCU C., Contribuții teoretice și experimentale la studiul mișcării peste deversoare	3	595
DUMITRESCU D., OLĂNESCU G., IAMANDI C. și STREJA M., Un nou tip de cisto-sfincterometru	3	631
DUMITRESCU D. și IONESCU DAN GH., Metode numerice pentru studiul mișcărilor axial-simetrice ale fluidelor perfecte	4	919
ESCANDE L., Transformarea condițiilor de funcționare a marilor lucrări hidrotehnice prin aspirarea stratului limită	3	559
ESCANDE L., Cercetări asupra evacuatorilor de ape mari	4	881
HÎNCU S., Determinarea lungimii de stabilizare a mișcării turbulente a fluidelor în canale largi și conducte circulare sub presiune	4	973
OROVEANU T. și PASCAL H., Asupra propagării undelor de presiune într-un lichid care curge printr-un mediu poros	3	625
OROVEANU T., Asupra unei clase de scurgeri prin medii poroase neomogene	4	937
PASCAL H., O metodă aproximativă pentru studiul dislocuirii țițeiului de către apă în regim nestaționar	4	945
VLADIMIRESCU ION, Calculul debitelor de viitură a bazinelor mici prin hidrograful indicial în a doua aproximație	4	957

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

	Nr.	Pag.
CONSTANTINESCU V. N., Influența turbulenței asupra mișcării în stratul de lubrifiant	1	103
CONSTANTINESCU V. N., Studiul lubrificației bidimensionale în regim turbulent	1	139
CONSTANTINESCU V. N., Considerații asupra lubrificației cu gaze în regim turbulent	2	369
CONSTANTINESCU V. N., Lubrificația lagărelor în regim turbulent supuse la forțe și viteze variabile	3	657
CONSTANTINESCU V. N., Stabilitatea mișcării lagărelor circulare lubrificate în regim turbulent	4	997
ISĂCESCU D., VASILCA GH., CALCAN V. și NICA AL., Unele proprietăți funcționale ale unui material plastic pe bază de furfurol-fenol, ca material pentru lagăre	4	983
PAVELESCU D. și ILIUC I., Studiul prin metode radioactive a influenței viscozității asupra grosimii filmului de lubrifiant	3	641
ROZEANU L. și PREOȚESCU O., Cîteva aspecte fundamentale ale proceselor de uzură	1	169

	Nr.	Pag.
TIPEI N. și NICA AL., Presiunile și caracteristicile globale în lubrificația suprafețelor cilindrice cu mișcare de rostogolire și de alunecare	2	359
VASILCA GH. și NICA AL., Asupra regimului termic optim de funcționare al unui material antifricțiune la lagărele circulare cu alunecare	1	163
VASILCA GH. și NICA AL., Cercetări asupra caracteristicilor de funcționare a lagărelor construite din materiale diferite.	2	377
REZISTENȚA MATERIALELOR — ELASTICITATE		
DINCĂ FL. și BOICU N., Asupra torsiunii unor bare cilindrice cu secțiune dublu conexă	3	733
ISĂCESCU D. și CALCAN V., Studiul contracției unor materiale plastice pe bază de rășină furfurol-fenolică	3	679
MANEA V., Torsiunea arborelui cu caneluri radiale exterioare	2	423
MANEA V., Torsiunea arborelui gol cu caneluri radiale exterioare sau interioare	4	1035
NEMETI LADISLAU, Starea elasto-plastică în tuburi fretate	4	1023
PETRE A. și LIBRESCU L., O teorie a structurilor subțiri ortotrope nesimetrice față de suprafața mediană	1	201
PETRE A., Calculul de rezistență a palelor de elicopter de secțiune constantă sub o sarcină dată	3	711
PETRE A., Bare curbe cu pereți subțiri	4	1013
PÎRVULESCU N. S., Rezistența îmbinării filetate cu conicitate pronunțată a țevilor solicitate la tracțiune	3	695
STĂNESCU CRISTIAN, O problemă de tip mixt din încovoierea plăcilor elastice	2	411
TEODORESCU PETRE P., Asupra problemei plane a elasticității în coordonate oblice	2	391
TEODORESCU PETRE P., Asupra calculului de rezistență al plăcilor plane groase	3	721
TEHNICA MASURĂTORILOR		
PAVELESCU D. și PANTELIMON TH., Canal „fix” pentru înregistrare-redare pe suport magnetic a fenomenelor cu variații lente. . . .	1	187
VIBRAȚII		
IFRIM MIHAIL, Delimitarea intervalului de existență a frecvențelor fundamentale de oscilație la clădirile înalte supuse acțiunii seismice .	3	741
SCHÄFFER H. S., Un procedeu nou în determinarea frecvențelor proprii ale cadrelor multiple cu noduri fixe	2	435
MECANICA CONSTRUCȚIILOR		
PRIȘCU RADU și CONSTANTINESCU MIHAI, Calculul barajelor arcuite prin metoda rețelelor	4	1049
TRATAMENTE MECANICE ȘI PRELUCRAREA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE		
MARCU V., ZELINGHER N. și FREUND P., Protecția contra coroziunii prin straturi de metal pulverizat.	2	457
MITRICĂ I., Asupra unui criteriu pentru determinarea zonei de presiune specifică maximă la laminarea metalelor	1	215
POPOV M., MITRICĂ I. și DECIU E., Studiu comparativ al parametrilor geometrici ai cuțitelor de strung armate cu plăcuțe mineralo-ceramice și din carburi metalice	4	1077

MECANICA PAMÎNTURILOR	Nr.	Pag
BALLY R. J. şi ANTONESCU I., Aspecte caracteristice ale dezvoltării procesului de electro-osmoză în pămînturile compresibile	3	759
REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE		
BALLY R. J., Deformaţiile pămînturilor argiloase (introducere în problemă)	1	239
BUZDUGAN GH., Grinzi pe reazeme elastice de lungime dată	2	471
HACKER T. şi PALOŞ M., Unele probleme asupra zborului în spirale la planoare	2	481
MANGERON D. şi BOGDAN R., Studii, cercetări şi perspective în domeniul teoriei maşinilor şi mecanismelor în Republica Populară Romînă	4	1093
VASILCA GH. şi NICA AL., Asupra preciziei de măsurare a momentului de frecare la lagărele circulare, cu ajutorul sistemelor mecanice tip paralelogram	1	229
NOTE		
LIBRESCU LIVIU, Asupra analogiei sarcinilor termice în problema termoelastică a învelitorilor subţiri	3	777
RECENZII		
BAINER ROY, KEPNER R. A. a. BARCER E. L., *Principles of Farm Machinery* (Principiile de construcţie ale maşinilor agricole). Ferguson Foundation, Agricultural Engineering Series, John Wiley & Sons, Inc., NewYork; Chapman & Hall, Ltd., London, 1955, 571 pag,, de *Cr. Pelecudi, C. Florescu* şi *N. Zelingher*	3	786
BLANPAIN EDOUARD, *Théorie et pratique des outils de coupe* (Teoria şi practica sculelor de aşchiere), Ed. Eyrolles, Paris, 1955, 642 pag., de *V. Marcu*	2	501
BLASCHKE W. u. MÜLLER H. R., *Ebene Kinematik* (Cinematica plană). Oldenburg Verlag, München, 1956, 271 pag., de *R. Bogdan* şi *C. Pelecudi*	2	492
BISPLINGHOFF RAYMOND, ASHLEY HOLT a. HALFMAN ROBERT, *Aeroelasticity* (Aeroelasticitatea). Addison-Wesley Publishing Company Inc., Cambridge Mass., 1955, 860 pag., de *Augustin Petre* . .	2	489
BISHOP A. W. a. HENKEL D. J., *The measurement of soil properties in the triaxial test* (Măsurarea proprietăţilor pămîntului prin încercarea triaxială). Ed. Arnold, Londra, 1957, 190 pag., 129 fig. de *I. Antonescu*	3	794
BÖHM F. u. LABUTIN N., *Schalung und Rüstung — Moderne Schaltechnik* (Cintre şi cofraje). Verlag Wilhelm Ernst & Sohn; Berlin, 1957, 211 pag., de *Yvonne Mihailescu*	2	504
DOETSCH GUSTAV, *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation* (Îndrumări pentru folosirea în practică a transformării lui Laplace). R. Oldenburg, München, 1956, 198 pag., de *Beatrice Horovitz*	2	498
DUBAS PIERRE, *Calcul numérique des plaques et des parois minces* (Calculul numeric al plăcilor şi grinzilor pereţi), Ed. Leeman, Zürich, 1955, 176 pag., de *M. Soare*	3	789
ЕВДОКИМОВ П. Д., *Прочности оснований и устойчивость гидротехнических сооружений на мягких грунтах* (Rezistenţa pămînturilor de fundaţie şi stabilitatea construcţiilor hidrotehnice pe pămînturi moi) Госэнергоиздат, Москва-Ленинград, 1956, 268 pag., 174 fig. şi НИЧИПОРОВИЧ А. А. и ХРУСТАТЕВ Н. И., *Устойчивость бетонных водонапорных сооружений на нескальных грунтах* (Stabilitatea construcţiilor de beton de retenţie a apei pe pămînturile nestîncoase) Госиздат лит. по строительству и архитектуре, Москва, 1957, 188 pag., 103 fig. de *R. J. Bally*	3	791

	Nr.	Pag.
FULLER DUDLEY D., *A Survey of Journal Bearing Literature* (O privire de ansamblu asupra lagărelor de alunecare). The American Society of Lubrication Engineers, New York, 1958, 260 pag., de *N. Tipei*	4	1101
GIQUEAUX M., *Mécanique des fluides théorique* (Mecanica fluidelor teoretică), Librairie Polytechnique, Ch. Béranger, Paris et Liège, 1957, 413 pag., 134 fig., de *V. N. Constantinescu*	1	252
GIQUEAUX M. et OUDART A., *Aide-mémoire des fonctions analytiques* (Îndrumător pentru funcţii analitice). Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liège, 1958, 35 pag., de *B. Horovitz*	3	795
GREEN A. E. a. ZERNA W., *Theoretical Elasticity* (Elasticitatea teoretică), Clarendon Press, Oxford, 1954, 442 pag., de *P. P. Teodorescu*	3	787
GRODZINSKI PAUL, *A Practical Theory of Mechanisms* (O teorie practică a mecanismelor), Emmot & Co. Ltd., Manchester, 1947, 166 pag., 211 fig., de *C. Petrescu*	3	784
JAHR WILLY u. KNECHTEL PAUL, *Grundzüge der Getrieblehre* (Bazele teoriei mecanismelor). Fachbuchverlag, Leipzig, 1955, vol. I, 333 pag.; 1956, vol. II, 230 pag., de *E. Bugaievski*	2	493
KÖRTING JOHANNES, *Bau und Betrieb Brennstoffbeheizter Industrieöfen* (Construcţia şi exploatarea cuptoarelor industriale încălzite cu combustibil). Verlag und Druck G. Braun, Karlsruhe, 1949, 144 pag., de *V. Marcu*	2	499
KRAEMER OTTO, *Getrieblehre* (Teoria mecanismelor). Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1950, 239 pag., de *E. Bugaievski*	3	785
LEONHARDT FRITZ, *Spannbeton für die Praxis* (Betonul precomprimat şi folosirea lui în practică). Ed. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1955, 478 pag., de *M. Mihailescu*	2	503
MEISTER F. J., *Akustische Messtechnik der Gehörprüfung* (Tehnica măsurătorii acustice a controlului auzului). Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1954, 191 pag., de *L. Hamburger*	3	783
MURNAGHAN FRANCIS D., *Calculo avançado* şi *Ecuações diferenciais* (Matematici superioare şi Ecuaţii diferenţiale). Centro técnico de aeronáutica, Sao José dos Campos-S. P., Brasil, 1954, 476 pag.; 1955, 401 pag., de *N. Tipei*	4	1099
NIEMANN G., *Maschinenelemente* (Organe de maşini). Ediţia a 3-a revăzută, J. Springer-Verlag, Berlin, 1958, vol. I, 305 pag., 795 fig., de *I. Minoiu*	4	1103
ÖDMAN SVEN T. A., *Studies of boundary value problems* (Studii asupra problemelor la limită). Svenska Forskningsinstitutet för Cement och Betong vid Kungl, Tekniska Högskolan i Stockholm, Stockholm, 1955, 376 pag., de *P. P. Teodorescu*	1	251
PFLÜGER ALF., *Elementare Schalenstatik* (Statica elementară a plăcilor curbe subţiri). Ediţia a II-a, Springer-Verlag, Berlin, 1957, 112 pag., de *M. Soare*	3	790
PRIKEL G., *Tiefbohrgeräte* (Utilaje de foraj). J. Springer-Verlag, Wien, 1957, 503 pag., de *O. Lecca*	4	1108
ROTHBART HAROLD A., *Cams, Design, Dynamics and Accuracy* (Came, proiectare, dinamică şi precizie). John Willey & Sons, New York, 1956, 350 pag., de *R. Bogdan* şi *C. Pelecudi*	4	1101
SATTELBERG KURT, *Anzeigende Frequenzmesser* (Frecvenţmetre cu citire directă). Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1956, 168 pag. de *E. Procopovici*	2	500
SCHÄFER A., *Hydraulik und Wasserbau auf neuen Grundlagen* (Hidraulica şi construcţii hidrotehnice pe baze noi). Verlag Frank, Stuttgart, 1950, 187 pag., de *Cr. Mateescu*	2	502
SCHLICHTING H., *Grenzschicht-Theorie* (Teoria stratului. limită). Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1951, 483 pag., de *T. Oroveanu*	2	490
СЕРЕНСЕН С. В. и др. *Машины для испытаний на усталость* (Maşini pentru încercări la oboseală). Машгиз, Москва, 1957, 404 pag., de *Gh. Buzdugan*	4	1100

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM * KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

	Nr.	Pag.
SOKOLNIKOFF I. S., *Mathematical Theory of Elasticity* (Teoria matematică a elasticității). Ediția a II-a, Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New York, Toronto, London, 1956, XII + 476 pag., de *P. P. Teodorescu*	4	1109
TIPEI N., *Hidro-aerodinamica lubrificației*. Ed. Acad. R. P. R., București, 1957, 695 pag., de *V. N. Constantinescu*	2	495
* * * *50 Jahre Grenzschichtforschung* (50 de ani de cercetări asupra stratului limită). Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1955, 500 pag., 236 fig.; sub redacția prof. dr. H. GÖRTLER (Freiburg i. Br.) și prof. dr. W. TOLLMIEN (Göttingen) de *St. N. Săvulescu*	4	1104
* * * *Grundbau-Taschenbuch* (Îndreptar tehnic pentru fundații), întocmit de către un colectiv de autori sub redacția lui H. SCHRÖDER. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1955, vol. I, 847 pag. și vol. II, 264 pag., de *R. J. Bally*	2	504
* * * *Нефтяное Машиностроение* (Construcția de mașini petrolifere). Гостоптехиздат, Москва, 1958, vol. III, 222 pag., de *I. Dincă*	4	1106
* * * *Труды казанского авиационного института* (Lucrările Institutului de aviație din Kazan), nr. XXXVI, 1957, 66 pag., de *E. Larisch*	4	1108

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ"

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том IX 1958

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

№ Стр.

СТАТЬИ И ИССЛЕДОВАНИЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ВЫЛКОВИЧ ВИКТОР, О голономных и неголономных связях . 4 811

МЕХАНИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

ОНИЧЕСКУ О., Механика жесткого твердого тела 3 519

ДИНАМИКА И КИНЕМАТИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

НИЦЭ М. М., Изучение движения искусственных спутников в сопротивляющейся среде 2 337

АЭРОМЕХАНИКА

ДУМИТРЕСКУ ЛУЧИАН, Аэродинамические профили с струей при наличии земной поверхности 1 43
ДУМИТРЕСКУ ЛУЧИАН, Об оптимальном режиме ракет. . . . 2 285
ДУМИТРЕСКУ ЛУЧИАН и КОМЭНЕСКУ ТРАЯН, Влияние тягового режима на качества полета ракеты, запущенной по касательной с искусственного спутника 3 537
КАРАФОЛИ Е. и ИОНЕСКУ М., Общая теория треугольного крыла с заданным распределением давления (косвенная задача) 2 267
КАРАФОЛИ Е. и ХОРОВИЦ БЕАТРИЧЕ, Смешанные задачи треугольных крыльев, оснащенных перпендикулярной пластиной, в сверхзвуковом потоке. Крестовидные крылья. . . . 4 819
КАРАФОЛИ Е. и НЭСТАСЕ АДРИАНА, Исследование тонких треугольных крыльев с принудительной симметрией в сверхзвуковом потоке 4 833
МАРИНЕСКУ А., Динамическая устойчивость при горизонтальном полете вертолетов с несущими винтами типа „Кантилевер" 1 63
МАРИНЕСКУ А., Вынужденные колебания несущих винтов вертолета с лопастями типа „Кантилевер" 2 297
ПАЛОШ М. М., Аналитический расчет одного класса плоских сверхзвуковых сопел с небольшим уклоном вблизи их звуковой сужающейся части 3 545

	№	Стр.
ПАТРАУЛЯ Н. Н., ДУМИТРЕСКУ Л. и КЭПРИЦЭ Д., Аэродинамические характеристики профилей с жидким закрылком	1	13
ПАТРАУЛЯ Н. Н., К вопросу о скосе свободной струи жидкости	1	51
ПАТРАУЛЯ Н. Н., О решении обобщенной задачи Прандля. Сообщение I.	3	525
СЭВУЛЕСКУ Ш. Н., К вопросу некоторых решений в случае сжимаемого нестационарного пограничного слоя	4	867
ТИПЕЙ Н. и ГУЦЭ К., О движении самолета по заданной траектории	4	855

ГИДРОДИНАМИКА

	№	Стр.
АРХАНГЕЛЬСКИЙ В. А., Фильтрация и течение в трубах неоднофазных жидкостей	2	319
КАХАН М. и ХЫНКУ С., Динамика движения наносов в напорных течениях	1	89
ОРОВЯНУ Т., Частные решения уравнения течения через неоднородную пористую среду	1	83
СМИРНОВ Л. П. и ПАВЛИХИНА М. А. Вихревой след при обтекании колеблющихся цилиндров	2	307

ГИДРОМЕХАНИКА

	№	Стр.
ВЛАДИМИРЕСКУ ИОН, Показательный гидрограф во 2-м приближении. Формулы и кривые для расчета гидрографов (дебитов) паводковых вод.	4	957
ДУМИТРЕСКУ Д., ИОНЕСКУ В. и ЯНКУ К., Теоретические и экспериментальные исследования движения через водосливы	3	595
ДУМИТРЕСКУ Д., ОЛЭНЕСКУ Г., ЯМАНДИ К. и СТРЕЖА М., Новый тип цистосфинктерометра	3	631
ДУМИТРЕСКУ Д. и ИОНЕСКУ ДАН Г., Численные методы исследования осесимметричных движений идеальных жидкостей	4	919
ОРОВЯНУ Т. и ПАСКАЛ Х., О распространении волн давления в протекающей через пористую среду жидкости	3	625
ОРОВЯНУ Т., Об одном классе фильтрации в неоднородной пористой среде	4	937
ПАСКАЛ Г., Приближеный метод изучения вытеснения нефти водой в нестационарном режиме	4	945
ХЫНКУ С., Определение длины стабилизации турбулентного движения жидкостей в широких каналах и круглых напорных трубопроводах	4	973
ЭСКАНД Л., Улучшение условий работы крупных гидротехнических установок путем всасывания пограничного слоя	3	559
ЭСКАНД Л., Исследование паводковых водосбросов	4	881

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

	№	Стр.
ВАСИЛКА Г. и НИКА А., К вопросу об оптимальном тепловом режиме работы антифрикционного материала у круглых подшипников скольжения	1	163
ВАСИЛКА Г. и НИКА А. Исследование рабочих характеристик подшипников из различных материалов	2	377
ИСЭЧЕСКУ Д., ВАСИЛКА Г., КАЛКАН В. и НИКА А., Некоторые функциональные свойства одного пластического материала на основе фурфурол-феноловой смолы в качестве материала для подшипников	4	983
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Влияние турбулентности на движение в слое смазки	1	103

	№	Стр.
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Исследование двухмерной смазки при турбулентном режиме	1	139
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., О газовой смазке при турбулентном режиме	2	369
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Смазка подшипников в турбулентном режиме при переменных нагрузках и скоростях	3	657
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Устойчивость движения круговых подшипников, смазываемых в турбулентном режиме	4	997
ПАВЕЛЕСКУ Д. и ИЛЮК И., Исследование влияния вязкости на толщину пленки смазочного вещества радиоактивными методами	3	641
РОЗЯНУ Л. и ПРЕОТЕСКУ О., Некоторые основные стороны вопроса процессов износа	1	169
ТИПЕЙ Н. и НИКА А., Давления и общие характеристики смазки цилиндрических поверхностей при качении и скольжении	2	359

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — УПРУГОСТЬ

ДИНКА Ф. и БОЙКУ Н., О кручении цилиндрического бруса двусвязного сечения	3	733
ИСЭЧЕСКУ Д. и КАЛКАН В., Исследование усадки некоторых пластмасс из фурфурол-феноловой смолы	3	679
МАНЯ В., Кручение вала с наружными радиальными канавками	2	423
МАНЯ В., Кручение пустого вала с внутренними или наружными радиальными шлицами	4	1035
НЕМЕТИ ЛАДИСЛАВ, Упруго-пластическое состояние труб с хомутиковым соединением	4	1023
ПЕТРЕ А. и ЛИБРЕСКУ Л., Теория тонких ортотропных несимметричных относительно срединной поверхности конструкции	1	201
ПЕТРЕ А., Расчет прочности лопастей вертолетных несущих винтов постоянного сечения под заданной нагрузки	3	711
ПЕТРЕ А., Изогнутые тонкостенные стержни	4	1013
ПЫРВУЛЕСКУ Н. С., Прочность резьбового соединения с повышенной конусностью работающих на растяжение труб	3	695
СТЭНЕСКУ КРИСТИЯН, Задача смешанного типа по изгибанию упругих пластинок	2	411
ТЕОДОРЕСКУ ПЕТРЕ П., О плоской задаче упругости в косоугольных координатах	2	391
ТЕОДОРЕСКУ ПЕТРЕ П., О расчете прочности толстых плоских пластин	3	721

ТЕХНИКА ИЗМЕРЕНИЙ

ПАВЕЛЕСКУ ДАН и ПАНТЕЛИМОН Т., Электронный канал для записи и воспроизведения на магнитном носителе явлений с медленными изменениями	1	187

ВИБРАЦИИ

ИФРИМ МИХАИЛ, Определение диапазона существования основных частот колебания в подвергающихся сейсмическим влияниям высотных зданиях	3	741
ШЕФФЕР Х. С., Новый способ определения собственных частот многобалочных рам с неподвижными узлами	2	435

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

ПРИШКУ РАДУ и КОНСТАНТИНЕСКУ МИХАЙ, Расчет арочных плотин по методу сеток	4	1049

МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА И РАЗРАБОТКА СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

	№	Стр.
МАРКУ В., ЗЕЛИНГЕР Н. и ФРЕЙНД П., Противокоррозионная защита распыленного металла	2	457
МИТРИКЭ И., К вопросу о критерии для определения зоны максимального удельного давления при прокатке металлов . .	1	215
ПОПОВ М., МИТРИКЭ И. и ДЕЧУ Е., Сравнительное исследование геометрических параметров токарных резцов, оснащенных минерало-керамическими пластинками и пластинками из твердых сплавов	4	1077

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

	№	Стр.
БАЛЛИ Р. Ж. и АНТОНЕСКУ И., Характерные аспекты развития процесса электроосмоса в сжимаемых грунтах	3	759

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

	№	Стр.
БАЛЛИ Р. Ж., Деформации глинистых грунтов. Постановка вопроса	1	239
БУЗДУГАН Г., Балки, лежащие на упругих основаниях заданной длины	2	471
ВАСИЛКА Г. и НИКА А., К вопросу о точности измерения момента трения у круглых подшипников при помощи механических систем параллелограммного типа	1	229
МАНДЖЕРОН Д. и БОГДАН Р., Исследования и перспективы в области машин и механизмов в РНР	4	1993
ХАКЕР Т. и ПАЛОШ М. М. Некоторые вопросы полета у планеров	2	481

ЗАМЕТКИ

	№	Стр.
ЛИБРЕСКУ ЛИВИУ, Об аналогии тепловых нагрузок в термоэластичной задаче тонких оболочек	3	777

РЕЦЕНЗИИ

	№	Стр.
RAINER ROY, KEPNER R. A. R. a. BARGER E. L., *Principles of Farm Machinery*. Ferguson Foundation, Agricultural Engineering Series, John Wiley & Sons Inc., New York ; Chapman & Hall Ltd., London, 1955, 571 p. (*C. Pélecudi, C. Florescu, N. Zelingher*)	3	786
BLANPAIN EDOUARD, *Théorie et pratique des outils de coupe*. Ed. Eyrolles, Paris, 1955, 642 p. (*V. Marcu*)	2	501
BLASCHKE W. u. MÜLLER H. R., *Ebene Kinematik*. Oldenburg Verlag, München, 1956, 271 p. (*R. Bogdan Gr. Pelecudi*)	2	492
BISPLINGHOFF RAYMOND, ASHLEY HOLT a. HALFMAN ROBERT, *Aeroelasticity* Addison-Wesley Publishing Company Inc., Cambridge Mass., 1955, 860 p. (*Augustin Petre*)	2	489
BISHOP A. W. a. HENKEL D. J., *The measurement of soil properties in the triaxial test*. Ed. Arnold, London, 1957, 190 p., 129 fig. (*I. Antonescu*)	3	794
BÖHM F. u. LABUTIN N., *Schalung und Rüstung-Moderne Schaltechnik*. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1957, 211 p. (*Yvonne Mihăilescu*)	2	504
DOETSCH GUSTAV, *Anleitung zum Praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation*. R. Oldenburg, München, 1956, 198 p. (*Beatrice Horovitz*)	2	498

	Nr.	Стр.
DUBAS PIERRE, *Calcul numérique des plaques et des parois minces.* Ed. Leeman, Zürich, 1955, 176 p. (*M. Soare*)	3	789
ЕВДОКИМОВ П. Д., Прочность оснований и устойчивость гидротехнических сооружений на мягких грунтах. Госэнергоиздат, Москва-Ленинград, 1956, 268 стр., 174 фиг.	3	791
НИЧИПОРОВИЧ А.А. и ХРУСТЕВ Н. И., Устойчивость бетонных водонапорных сооружений на нескольких грунтах. Госиздат лит. по строительству и архитектуре, Москва, 1957, 188 стр., 103 фиг. (*R. J. Bally*)	3	791
FULLER DUDLEY D., *A Survey of Journal Bearing Literature.* The American Society of Lubrication Engineers, New York, 1958, 260 p. (*N. Tipei*)	4	1101
GIQUEAUX M., *Mécanique des fluides théorique.* Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liège, 1957, 413 p., 134 fig. (*V. N. Constantinescu*)	1	252
GIQUEAUX M. et CUDART A., *Aide-mémoire des fonctions analytiques.* Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liège, 1958, 35 p. (*B. Horovitz*)	3	795
GREEN A. E. a. ZERNA W., *Theoretical Elasticity.* Clarendon Press, Oxford, 1954, 442 p. (*P. P. Teodorescu*)	3	787
GRODZINSKY PAUL, A practical Theory of Mechanism. Emmot& Co. Ltd., Manchester, 1947, 166 p., 211 fig. (*C. Petrescu*)	3	784
JAHR WILLY ц. KNECHTEL PAUL, *Grundzüge der Getrieblehre.* Fachbuchverlag, Leipzig, 1955, vol. I, 333 p.; 1956, vol. II. 230 p.(*E. Bugaievski*)	2	493
KÖRTING JOHANNES, *Bau und Betrieb Brennstoffbeheitzer Industrieöfen.* Verlag und Druck G. Braun, Karlsruhe, 1949, 144 p. (V. *Marcu*)	2	499
KRAEMER OTTO, *Getrieblehre.* Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1950, 239 p. (*E. Bugaievski*)	3	785
LEONHARDT FRITZ, *Spannbeton für die Praxis.* Edit. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1955, 478 p. (*M. Mihăilescu*)	2	503
MEISTER F. J., *Akustische Messtechnik der Gehörprüfung.* Verlag G. Braun Karlsruhe, 1954, 191 p. (*L. Hamburger*)	3	783
MURNAGHAN FRANCIS F., *Calculo avancado* et *Equacoes diferenciais.* Centre técnice de aeronautica Sao José dos Campos, S. P. Brasil, 1954, 476 p.; 1955, 401 p. (*N. Tipei*)	4	1099
NIEMANN G., *Maschinenelemente.* IIIe éd. revue, J. Springer-Verlag, Berlin, 1958, vol. I, 305 p., 795 fig. (I. Minoiu)	4	1103
ODMAN SVEN T. A., *Studies of boundary value problems.* Svenska Forskningsinstitutet för Cement och Betong vid Kungl, Tekniska Hogskolan i Stockholm, Stockholm, 1955, 376 p. (*P. P. Teodorescu*)	1	251
PFLÜGER ALF., *Elementare Schalenstatik.* IIe éd., J. Springer-Verlag, Berlin, 1957, 112 p. (*M. Soare*)	3	790
PRIKEL G., *Tiefbohrgeräte.* J. Springer-Verlag, Wien, 1957, 503 p. (*O. Lecca*)	4	1108
ROTHBART HAROLD A., *Cams, Design, Dynamics and Accuracy.* John Willey & Sons, New York, 1956, 350 p. (*R. Bogdan, Cr. Pelecudi*)	4	1101
SATTELBERG KURT, *Anzeigende Frequenzmesser.* Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1956, 160 p. (*E. Procopovici*)	2	500
SCHAFER A., *Hydraulik und Wasserbau auf neuen Grundlagen.* Verlag Frank, Stuttgart, 1950, 187 p. (*C. Mateescu*)	2	502
SCHLICHTING H., Grenzschicht-Theorie Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1951, 483 p. (*T. Oroveanu*)	2	490
СЕРЕНСЕН С. В. и др. Машины для испытаний на усталость. Машгиз, Москва 1957, 404 стр. (*Gh. Buzdugan*)	4	1100
SOKOLNIKOFF I. S., *Mathematical Theory of Elasticity* IIe éd., Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New Yo Toronto, London, 1956, XII + 476 p. (*P. P. Teodorescu*)	4	1109

	Nr.	Стр·
TIPEI N., Hidro-aerodinamica lubrificaţiei Ed. Acad. R.P.R., Bucarest, 1957, 695 p. (*V. N Constantinescu*)	2	495
* * * *50 Jahre Grenzschichtforschung*. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1955, 500 p., 236 fig. ; sous la rédaction du prof. dr. *H. Gortler* et du prof. dr. *W. Tollmien* (Göttingen) (*Şt. N. Săvulescu*)	4	1104
* * * Grundbau Taschenbuch, rédigé par un groupe d'auteurs sous la rédaction de *H. Schröder*. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1955, vol. I, 847 p. et vol. II, 264 p. (*R. J. Bally*)	2	504
* * * Нефтяное Машиностроение. Гостоптехиздат, Москва, 1958, т. III, 222 стр. (*I. Dincă*)	4	1106
* * * Труды казанского авиационного института n° XXXVI, 1957, 66 p. (*E. Larisch*)	4	1108

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome IX 1958

INDEX ALPHABÉTIQUE

ÉTUDES ET RECHERCHES

MÉCANIQUE ANALYTIQUE

	N°	Page
VÂLCOVICI VICTOR, Sur les liaisons holonômes et non holonômes	4	811

MÉCANIQUE DES SOLIDES

ONICESCU O., La mécanique du solide rigide	3	519

CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DES SOLIDES

NIŢĂ M. M., Étude sur le mouvement des satellites artificiels dans un milieu résistant.	2	337

AÉROMÉCANIQUE

CARAFOLI ELIE et IONESCU M., Théorie générale de l'aile triangulaire à distribution de pression donnée (problème indirect)	2	267
CARAFOLI ELIE et HOROVITZ BEATRICE, Les problèmes mixtes des ailes triangulaires, pourvues d'une plaque normale, en courant supersonique. (Ailes cruciformes)	4	819
CARAFOLI ELIE et NĂSTASE ADRIANA, L'étude des ailes triangulaires minces, à symétrie forcée, en courant supersonique	4	833
DUMITRESCU LUCIAN, Profils aérodynamiques à jet en présence du sol	1	43
DUMITRESCU LUCIAN, Optimum Thrust Programming of a Space Rocket	2	285
DUMITRESCU LUCIAN et COMĂNESCU TRAIAN, Influence of the Thrust Regime on the Performance of a Space-ship taking off tangentially from an Artificial Satellite	3	537
MARINESCU AL., Stabilité dynamique, dans le vol horizontal, des hélicoptères ayant des rotors à pales cantilever	1	63
MARINESCU AL., Les vibrations forcées des rotors d'hélicoptères à pales cantilever	2	297
PALOŞ M. M., Calcul analytique d'une classe d'effuseurs supersoniques plans, à pente réduite à proximité du col sonique	3	545
PATRAULEA N. N., DUMITRESCU L. et CĂPRIŢĂ D., Les caractéristiques aérodynamiques des profils à volet fluide	1	13
PATRAULEA N. N., Sur la déflexion d'une veine libre fluide	1	51

	Nº	Page
PATRAULEA N. N., Sur la solution du problème de Prandtl généralisé. Note I	3	525
SĂVULESCU ŞT. N., Considérations sur certaines solutions pour le cas de la couche limite compressible non permanente	4	867
TIPEI N. et GUŢĂ C., Sur le mouvement de l'avion sur une trajectoire donnée	4	855

HYDRODYNAMIQUE

	Nº	Page
ARKHANGHELSKI V. A., Filtrage et écoulement des fluides à travers des conduites en plusieurs phases	2	319
KAHAN M. et HÎNCU S., Dynamique du mouvement des alluvions dans les écoulements sous pression	1	89
OROVEANU T., Solutions particulières de l'équation de l'écoulement à travers les milieux poreux non homogènes	1	83
SMIRNOV L. P. et PAVLIKHINA M. A., La trace tourbillonnaire, lors de l'écoulement autour des cylindres en état de vibration	2	307

HYDROMÉCANIQUE

	Nº	Page
DUMITRESCU D., IONESCU V. et IANCU C., Contribution théorique et expérimentale à l'étude du mouvement par-dessus les déversoirs	3	595
DUMITRESCU D., OLĂNESCU G., IAMANDI C. et STREJA M., Un nouveau type de cysto-sphinctéromètre	3	631
DUMITRESCU D. et IONESCU DAN GH., Méthodes numériques pour l'étude des mouvements à symétrie axiale des fluides parfaits	4	919
ESCANDE L., On some possibilities of changing the flow characteristics in hydrotechnic structures by boundary layer suction	3	559
ESCANDE L., Studies on hydraulic structures for the removal of floods	4	881
HÎNCU S., Détermination de la longueur de l'établissement du mouvement turbulent des fluides dans les canaux larges et dans les conduites circulaires sous pression	4	973
OROVEANU T. et PASCAL H., Sur la propagation des ondes de pression dans un liquide qui s'écoule à travers un milieu poreux	3	625
OROVEANU T., Sur une classe d'écoulements à travers les milieux poreux non homogènes	4	937
PASCAL H., Une méthode approximative pour l'étude du délogement du pétrole brut par l'eau en régime non stationnaire	4	945
VLADIMIRESCU ION, Calcul des débits de crue des petits bassins à l'aide de l'hydrographe indiciel, en seconde approximation	4	957

LUBRIFICATION—FROTTEMENT—USURE

	Nº	Page
CONSTANTINESCU V. N., L'influence de la turbulence sur le mouvement dans la couche de lubrifiant	1	103
CONSTANTINESCU V. N., Étude de la lubrification bidimensionnelle en régime turbulent	1	139
CONSTANTINESCU V. N., Considérations sur la lubrification aux gaz en régime turbulent	2	369
CONSTANTINESCU V. N., La lubrification turbulente des paliers soumis à des charges et vitesses variables	3	657
CONSTANTINESCU V. N., La stabilité du mouvement des paliers circulaires lubrifiés en régime turbulent	4	997
ISĂCESCU D., VASILCA GH., CALCAN V. et NICA AL., Quelques propriétés fonctionnelles d'un matériel plastique, fabriqué à partir d'une résine furfurol-phénolique, employé à la fabrication des coussinets	4	983
PAVELESCU D. et ILIUC I., Radioactive tracer for determining the influence of viscosity upon the oil-film thickness	3	641

	Nº	Page
ROZEANU L. et PREOŢESCU O., Some basic aspects of wear processes	1	169
TIPEI N. et NICA AL., Les pressions et les caractéristiques globales dans la lubrification des surfaces cylindriques à mouvement de roulement et de glissement	2	350
VASILCA GH. et NICA AL., Sur le meilleur régime thermique de fonctionnement d'un matériel antifriction, dans les paliers lisses circulaires	1	163
VASILCA GH. et NICA AL., Recherches sur les caractéristiques de fonctionnement des paliers confectionnés en matériaux divers	2	377

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX—ÉLASTICITÉ

DINCĂ FL. et BOICU N., Sur la torsion des barres cylindriques à section doublement connexe	3	733
ISĂCESCU D. et CALCAN V., Étude de la contraction de certains matériaux plastiques, à base de résine furfurol-phénolique	3	679
MANEA V., Torsion de l'arbre à cannelures radiales extérieures	2	423
MANEA V., Torsion de l'arbre creux à cannelures radiales extérieures ou intérieures	4	1035
NEMETI LADISLAU, État élasto-plastique dans les tuyaux frettés	4	1023
PETRE A. et LIBRESCU L., Une théorie des structures minces orthotropes, asymétriques par rapport à la surface médiane	1	201
PETRE A., Calcul de la résistance des pales d'hélicoptère, à section constante, sous une charge donnée	3	711
PETRE A., Barres courbes à parois minces	4	1013
PÎRVULESCU N. S., Résistance de l'assemblage fileté, à conicité marquée, des tiges sollicitées à la traction	3	695
STĂNESCU CRISTIAN, Un problème du type mixte sur la flexion des plaques élastiques	2	411
TEODORESCU PETRE P., Sur le problème plan de l'élasticité en coordonnées obliques	2	391
TEODORESCU PETRE P., Sur le calcul de la résistance des plaques planes épaisses	3	721

TECHNIQUE DES MESURES

PAVELESCU D. et PANTELIMON TH., Canal «fixe» pour enregistrement—reproduction, sur support magnétique, des phénomènes à variations lentes	1	187

VIBRATIONS

IFRIM MIHAIL, Délimitation de l'intervalle d'existence des fréquences fondamentales d'oscillation pour les bâtiments élevés, soumis à l'action des séismes	3	741
SCHÄFFER H. S., Un nouveau procédé pour la détermination des fréquences propres des cadres multiples à nœuds fixes	2	435

MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS

PRIŞCU RADU et CONSTANTINESCU MIHAI, Le calcul des barrages voûtés par la méthode des réseaux	4	1049

TRAITEMENTS MÉCANIQUES ET TRAVAIL DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

MARCU V., ZELINGHER N. et FREUND P., La protection contre la corrosion assurée par des couches de métal pulvérisé	2	457
MITRICĂ I., Un critère pour déterminer la zone de pression spécifique maximum au laminage des métaux	1	215

	N°	Page
POPOV M., MITRICĂ I. et DECIU E., Étude comparée des paramètres géométriques des outils de coupe en céramique et carbures métalliques	4	1077
MÉCANIQUE DES SOLS		
BALLY R. J. et ANTONESCU I., Aspects caractéristiques de la marche du phénomène d'électro-osmose dans les sols compressibles . . .	3	759
EXPOSÉS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES		
BALLY R. J., Les déformations des sols argileux	1	239
BUZDUGAN GH., Poutres sur appui élastique de longueur donnée . .	2	471
HACKER T. et PALOŞ M., Certains problèmes du vol en spirale des planeurs	2	481
MANGERON D. et BOGDAN R., Research in the field of machines and mechanisms carried out in the Rumanian People's Republic. Future outcome	4	1093
VASILCA GH. et NICA AL., Sur la précision de mesure du moment de frottement dans les paliers circulaires, à l'aide des systèmes mécaniques, type parallélogramme	1	229
NOTES		
LIBRESCU LIVIU, Sur l'analogie des charges thermiques dans le problème thermoélastique des voiles minces	3	777
COMPTES RENDUS		
RAINER ROY, KEPNER R.A.R. a. BARGER E. L., *Principles of Farm Machinery*. Ferguson Foundation, Agricultural Engineering Series, John Wiley & Sons Inc., New York; Chapman et Co. Hall Ltd., London, 1955, 571 p. (*Cr. Pelecudi, C. Florescu* et *N. Zelingher*)	3	786
BLANPAIN EDOUARD, *Théorie et pratique des outils de coupe* . . . Ed. Eyrolles, Paris, 1955, 642 p. (*V. Marcu*)	2	501
BLASCHKE W. u. MÜLLER H. R., *Ebene Kinematik*. Oldenburg Verlag, München, 1956, 271 p. (*R. Bogdan* et *Cr. Pelecudi*).	2	492
BISPLINGHOFF RAYMOND, ASHLEY HOLT a. HALFMAN ROBERT, *Aeroelasticity*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., Cambridge, Mass., 1955, 860 p. (*Augustin Petre*)	2	489
BISHOP A. W. a. HENKEL D. J., *The measurement of soil properties in the triaxial test*. Ed. Arnold, London, 1957, 190 p., 129 fig. (*I. Antonescu*)	3	794
BÖHM F. u. LABUTIN N., *Schalung und Rüstung-Moderne Schaltechnik*. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1957, 211 p. (*Yvonne Mihăilescu*)	2	504
DOETSCH GUSTAV, *Anleitung zum Praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation*. R. Oldenburg, München, 1956, 198 p. (*Beatrice Horovitz*)	2	498
DUBAS PIERRE, *Calcul numérique des plaques et des parois minces*. Ed. Leeman, Zürich, 1955, 176 p. (*M. Soare*).	3	789
ЕВДОКИМОВ П. Д., Прочность оснований и устойчивость гидротехнических сооружений на мягких грунтах. Госэнергоиздат, Москва-Ленинград, 1956, 268 стр., 174 fig. и НИЧИПОРОВИЧ А. А. и ХРУСТАТЕВ Н. И. Устойчивость бетонных водонапорных, сооружений на нескольких грунтах. Госиздат лит. по строительству и архитектуре Москва, 1957, 188 стрр., 103 фиг. (*R. J. Bally*)	3	791
FULLER DUDLEY D., *A Survey of Journal Bearing Literature*. The American Society of Lubrication Engineers, New York, 1958, 260 p. (*N. Tipei*)	4	1101
GIQUEAUX M., *Mécanique des fluides théorique*. Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liège, 1957, 413 p., 134 fig. (*V. N. Constantinescu*)	1	252

	N^{o}	Page
GIQUEAUX M. et OUDART A., *Aide-mémoire des fonctions analytiques*. Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liège, 1958, 35 p. (*B. Horovitz*)	3	795
GREEN A. E. a. ZERNA W., *Theoretical Elasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1954, 442 p. (*P. P. Teodorescu*)	3	787
GRODZINSKY PAUL, *A Pratical Theory of Mechanisms*. Emmot & Co. Ltd., Manchester, 1947, 166 p., 211 fig. (*C. Petrescu*)	3	784
JAHR WILLY u. KNECHTEL PAUL, *Grundzüge der Getrieblehre*. Fachbuchverlag, Leipzig, 1955, vol. I, 333 p. ; 1956, vol. II, 230 p. (*H. Bugaievski*)	2	493
KÖRTING JOHANNES, *Bau und Betrieb Brennstoffbeheitzer Industrieöfen*. Verlag und Druck G. Braun, Karlsruhe, 1949, 144 p. (*V. Marcu*)	2	499
KRAEMER OTTO, *Getrieblehre*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1950, 239 p. (*E. Bugaievski*)	3	785
LEONHARDT FRITZ, *Spannbeton für die Praxis*. Ed. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1955, 478 p. (*M. Mihăilescu*)	2	503
MEISTER F. J., *Akustische Messtechnik der Gehörprüfung*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1954, 191 p. (*L. Hamburger*)	3	783
MURNAGHAN FRANCIS D., *Calculo avançado* et *Ecuações diferenciais*. Centro técnico de aeronautica, Sao José dos Campos-S. P., Brasil, 1954, 476 p.; 1955, 401 p. (*N. Tipei*)	4	1099
NIEMANN G., *Maschinenelemente*. IIIe éd. revue, J. Springer-Verlag, Berlin, 1958, vol. I, 305 p., 795 fig. (*I. Minoiu*)	4	1103
ÖDMAN SVEN T. A., *Studies of boundary value problems*. Svenska Forskningsinstitutet for Cement och Betong vid Kungl, Tekniska Hogskolan i Stockholm, Stockholm, 1955, 376 p. (*P. P. Teodorescu*)	1	251
PFLÜGER ALF., *Elementare Schalenstatik*. IIe éd., J. Springer-Verlag, Berlin, 1957, 112 p. (*M. Soare*)	3	790
PRIKEL G., *Tiefbohrgeräte*. J. Springer-Verlag, Wien, 1957, 503 p. (*O. Lecca*)	4	1108
ROTHBART HAROLD A., *Cams. Design, Dynamics and Accuracy*. John Willey & Sons, New York, 1956, 350 p. (*R. Bogdan et C. Pelecudi*)	4	1101
SATTELBERG KURT, *Anzeigende Frequenzmesser*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1956, 168 p. (*E. Procopovici*)	2	500
SCHÄFER A., *Hydraulik und Wasserbau auf neuen Grundlagen*. Verlag Frank, Stuttgart, 1950, 187 p. (*C. Mateescu*)	2	502
SCHLICHTING H., *Grenzschicht-Theorie*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1951, 483 p. (*T. Oroveanu*)	2	490
СЕРЕНСЕН С. В. и др, Машины для испытаний на усталость, Машгиз, Москва, 1957, 404 p. (*Gh. Buzdugan*)	4	1100
SOKOLNIKOFF I. S., *Mathematical Theory of Elasticity*. IIe éd., Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New York, Toronto, London, 1956, XII + 476 p. (*P. P. Teodorescu*)	4	1109
TIPEI N., Hidro-aerodinamica lubrificației. Ed. Acad. R.P.R., Bucarest, 1957, 695 p. (*V. N. Constantinescu*)	2	495
* * * *50 Jahre Grenzschichtforschung*. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1955, 500 p., 236 fig. ; sous la rédaction du prof. dr. H. GÖRTLER et du prof. dr. W. TOLLMIEN (Göttingen) (*Şt. N. Săvulescu*)	4	1104
* * * *Grundbau Taschenbuch*, rédigé par un groupe d'auteurs sous la rédaction de H. SCHRÖDER. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1955 vol. I, 847 p. et vol. II, 264 p. (*R. J. Bally*)	2	504
* * * Нефтяное Машиностроениет Гостоптехиздат, Москва, 1958, Т. III, 222 стр. (*I. Dincă*)	4	1106
* * * Труды казанского авиационног. института. n° XXXVI, 1957, 66 p. (*E. Larisch*)	4	1108

ERATĂ

Pag.	rîndul sau formula	în loc de :	se va citi :
846	3	$\Lambda_4 = \frac{\omega_4\omega^{-\tau} \dots}{\dots},$	$\Lambda_4 = \frac{\omega_4\omega_{-2} - \dots}{\dots},$
862	(23)	$\dots[K + 2gb \dots$	$\dots[K + 2gp \dots$
883	7 de jos	oronofotografică	cronofotografică
904	4 de jos	alternante	alternate
939	6	$\frac{\partial\lambda}{\partial z} \dots$	$\frac{\partial\lambda}{\partial y} \dots$
939	17	$\varphi = \beta = 1$	$\alpha = \beta = 1$
940	6	funcției care	funcției φ care
940	5 de jos	λ_0	σ_0
1002	14	$\frac{\partial P_{2t}}{\partial \vartheta^*} = \dots$	$\frac{\partial P_{2t}}{\partial \dot{\vartheta}^*} = \dots$
1078	20	așchiere	așezare

C. 1984.